Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

Projeto de Controladores para Estabilização de um Sistema Carrinho-Pêndulo Invertido

Cassiano Junior Alves

Orientador: Prof. Victor Campos, Dr.

Belo Horizonte, Agosto de 2021

Monografia

Projeto de Controladores para Estabilização de um Sistema Carrinho-Pêndulo Invertido

Monografia submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado Didático do Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para aprovação na disciplina Projeto Final de Curso II.

Belo Horizonte, Agosto de 2021

Resumo

O presente trabalho apresenta um projeto de Levantamento e Estabilização de um sistema carrinho-pêndulo invertido.

Busca-se implementar uma lei de controle não-linear para a subida do pêndulo da condição de pêndulo simples para a condição de pêndulo invertido, através da injeção de energia no sistema. Quando o pêndulo está próximo da condição vertical para cima, controladores lineares devem estabilizar o pêndulo e o carrinho nas posições desejadas.

O modelo do sistema carrinho pêndulo utilizado desse projeto é baseado na planta existente no Laboratório de Controle de Processos Secos da Escola de Engenharia da UFMG. O modelo é construído em ambiente simulado e validado para a implementação das leis de controle.

O levantamento do pêndulo é realizado através de um controlador baseado em métodos de controle usando energia e deve respeitar os limites do trilho do carrinho. A estabilização final do sistema é realizada por controladores em cascata, baseado na representação linearizada do modelo em torno do ponto de equilíbrio desejado, ou por um controlador por realimentação de estados.

Finalmente, os resultados obtidos com os controladores projetados são analisados.

Agradecimentos

Essa monografia marca o fim de minha graduação em Engenharia de Controle e Automação pela UFMG. Ao longo desse anos, incontáveis desafios contribuíram para meu crescimento, seja pessoal, acadêmico ou porfissional. Felizmente, em todos os momentos pude contar com o apoio daqueles que hoje também se alegram com essa conquista.

Agradeço à minha mãe Izabel, meu pai Renato, e à minha avó Amélia, pela fé e fundamental amparo dedicados a mim.

Agradeço à minha tia Zezé e minha prima Patrícia, que me acolheram quando deixei minha cidade natal e me mudei para Belo Horizonte com o objetivo de percorrer o caminho acadêmico.

Agradeço aos professores, pelo conhecimento transmitido ao longo desse anos, em especial aos meus orientadores Leonardo Torres e Victor Campos, que dedicaram precioso tempo em meu auxílio.

Agradeço aos amigos que tive a honra de conhecer na universidade, com os quais pude compartilhar a experiência de crescer segundo os valores que essa jornada acadêmica nos revelou.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para minha formação, registro a minha mais profunda gratidão.

Sumário

Resumo i

Agradecimentos ii

Lista de Figuras v

Lista de Tabelas vii

1 Introdução 1
- 1.1 Motivação e Justificativa . . . 1
- 1.2 Objetivos do Projeto . . . 2
- 1.3 Estrutura da Monografia . . . 2

2 Descrição do Processo 3
- 2.1 Planta disponível no Laboratório de Controle de Processos . . . 3
  - 2.1.1 Sensores . . . 4
  - 2.1.2 Atuador . . . 5
  - 2.1.3 Unidade Eletrônica . . . 5
  - 2.1.4 Placa de Aquisição de Dados . . . 6
  - 2.1.5 Computador e Software . . . 6
- 2.2 Modelo Matemático Pela Física do Processo . . . 7
- 2.3 Resumo do Capítulo . . . 9

3 Metodologia 11
- 3.1 Revisão Bibliográfica . . . 11
  - 3.1.1 Debasish Chatterjee, Amit Patra, Harish K. Joglekar [5] . . . 12
  - 3.1.2 José Ángel Acosta, Romeo Ortega, Alessandro Astolfi and Arun D. Mahidrakar [1] . . . 13
  - 3.1.3 K. J. Astrom, J. Aracil, F. Gordillo [3] . . . 13
  - 3.1.4 Jun Zhao, Mark W. Spong [13] . . . 14
  - 3.1.5 Carlos Aguilar-Ibánez, Miguel S. Suarez-Castanon, Nareli Cruz-Cortés [2] . . . 14
- 3.2 Construção e validação do modelo em ambiente simulado . . . 15
- 3.3 Determinação das Leis de Controle a serem implementadas . . . 15
- 3.4 Implementação das Leis de Controle em ambiente simulado . . . 16
- 3.5 Análise dos Resultados . . . 17
- 3.6 Análise dos Resultados . . . 17

4 Resultados **19**
4.1 Implementação da Lei de Levantamento do pêndulo 19
4.1.1 Descrição da lei de Controle formulada em [5] 19
4.1.2 Resultados da Implementação da Lei de Controle 20
4.2 Representações do Modelo Linearizado 23
4.2.1 Linearização do Modelo 23
4.2.2 Representação em Espaço de Estados 23
4.2.3 Representação por Funções de Transferência 25
4.3 Projeto de Controladores para Modelo Linearizado 27
4.3.1 Estabilização do Sistema por Controle Cascata 27
4.3.2 Estabilização do Sistema por Controle em Espaço de Estados 32
4.4 Resumo do Capítulo 35

5 Conclusões **37**
5.1 Considerações Finais 37
5.2 Propostas de Continuidade 37

Referências Bibliográficas **39**

Lista de Figuras

2.1 Representação do sistema carrinho-pêndulo [7] 3
2.2 Representação do sistema de controle[7] 4
2.3 Funcionamento de um encoder óptico incremental[?] 4
2.4 Posição dos encoders na planta[7] 5
2.5 Modelo do Sistema 7

3.1 Representação de Controle em Cascata 16
3.2 Representação de Controle em Espaço de Estados 16

4.1 Resultados da lei de Controle de Subida 21
4.2 Sinal de entrada de controle 21
4.3 Energia do pêndulo conforme a Lei de Controle de Subida completa 21
4.4 Resultados para a Lei de Subida sem o termo de Energia 22
4.5 Sinal de Controle sem o termo de Energia 22
4.6 Energia do pêndulo com nova lei de subida 23
4.7 Lugar das Raízes de (4.22) 28
4.8 Lugar das Raízes da Malha do ângulo do pêndulo 29
4.9 Lugar das Raízes da Malha da Posição do carrinho 30
4.10 Resposta do sistema para o Controlador do ângulo do pêndulo 30
4.11 Entrade de controle para o Controlador do ângulo do pêndulo 31
4.12 Controle Cascata considerando Atrito de Coulomb 31
4.13 Entrada de Controle considerando Atrito de Coulomb 31
4.14 Controle Cascata desprezando Atrito de Coulomb 32
4.15 Entrada de Controle desprezando Atrito de Coulomb 32
4.16 Resposta do Sistema para Controle por Realimentação de Estados com Atrito de Coulomb 33
4.17 Entrada de Controle por Realimentação de Estados com Atrito de Coulomb 33
4.18 Erro em Regime Permanente do Sistema com Atrito de Coulomb 34
4.19 Controle por Realimentação de Estados desprezando Atrito de Coulomb . . 34
4.20 Entrada de Controle por Realimentação de Estados desprezando Atrito de Coulomb 35

Lista de Tabelas

2.1 Parâmetros da planta 8

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e Justificativa

Grande parte dos problemas práticos encontrados pelos engenheiros de controle são de natureza não linear. Nas últimas décadas, muitas ferramentas para lidar com esses problemas foram desenvolvidas, muitas delas permitindo tratá-los a partir de modelos linearizados. Ainda assim, o estudo de técnicas de controle não lineares tem despertado o interesse de muitos pesquisadores e engenheiros de controle. Slotine [10] discute alguns dos motivos para isso, que são apresentados a seguir.

As técnicas de controle lineares constituem uma variedade de poderosos métodos e um longo histórico de sucesso em aplicações na indústria. Em muitos casos, os processos podem ser representados a partir de uma aproximação linear capaz de descrever de forma satisfatória suas dinâmicas.

Porém, esses modelos lineares são válidos apenas para uma pequena variação em torno de um ponto de operação do qual foram obtidos. Quando se necessita de variações maiores, utilizar esses modelos pode ser inviável, uma vez que não são capazes de representar bem a dinâmica do processo para valores distantes do ponto de linearização, podendo causar, inclusive, a instabilidade da planta. Nesses casos, utilizar técnicas de controle não lineares é mais efetivo, pois permitem lidar com esses problemas a partir de uma representação mais realista do processo.

Além disso, nem sempre é possível representar bem a dinâmica de um processo através de um modelo linear. Muitas não linearidades de natureza descontínua e que aparecem frequentemente em engenharia de controle, tais como histerese, o atrito, tempo morto e a saturação, não permitem uma aproximação linear, fazendo-se necessário utilizar outras ferramentas para tratá-las.

Outro ponto fundamental no projeto de controladores, é que, usualmente, é necessário assumir que os parâmetros do modelo do sistema são bem conhecidos. Contudo, muitos problemas de controle envolvem incerteza nos parâmetros. Um controlador baseado em valores incorretos ou obsoletos pode apresentar um desempenho ruim, ou instabilizar a planta. Para evitar isso, não linearidades podem ser adicionadas intencionalmente ao controlador, permitindo que incertezas no modelo possam ser toleradas. Duas classes de controladores com esse propósito são os controladores robustos e os controladores adaptativos.

Por isso, a área de controle não linear mostra-se fundamental. Aprender técnicas de análise e controle não lineares podem aumentar significativamente a habilidade do engenheiro

de controle para lidar com problemas práticos de forma eficiente.

Nesse sentido, esse trabalho surge a partir dessa motivação em aprender como utilizar técnicas de controle não lineares em problemas práticos. Para isso, escolheu-se trabalhar com o sistema pêndulo invertido, por se tratar de uma planta bastante utilizada no ensino de controle. Devido à sua dinâmica não linear, o pêndulo invertido tornou-se referência para teste e validação de métodos de controle não lineares [3]. Também é um sistema muito utilizado para o estudo de técnicas de controle para sistemas subatuados, por possuir dois graus de liberdade e uma entrada de controle [5].

1.2 Objetivos do Projeto

Tendo em vista o exposto acima, este projeto tem por objetivos:

a. Obter um modelo matemático que represente bem a dinâmica da planta;

b. Construir e validar, em ambiente simulado, um modelo que represente a dinâmica da planta, com base no modelo matemático obtido;

c. Projetar e implementar em simulação duas estratégias de estabilização, utilizando métodos lineares, para a condição de equilíbrio (vertical para cima) do pêndulo;

d. Projetar e implementar em simulação uma estratégia de estabilização, utilizando métodos não-lineares, para levantamento do pêndulo até a condição de equilíbrio;

e. Analisar os resultados obtidos com as leis de controle implementadas.

1.3 Estrutura da Monografia

O trabalho está dividido em cinco capítulos. Este capítulo apresentou uma introdução ao projeto a ser descrito nesta monografia. O Capítulo 2 descreve a planta utilizada como referência para esse trabalho. O Capítulo 3 aborda a metodologia de desenvolvimento, seguida pelas estratégias utilizadas para projetar os controladores para estabilização do modelo. No Capítulo 4 tem-se os resultados obtidos com o projeto. Finamente, o Capítulo 5 possui a conclusão da monografia e algumas sugestões e dificuldades encontradas na realização do projeto.

Capítulo 2

Descrição do Processo

Este capítulo descreve a planta existente no Laboratório de Controle de Processos Secos da escola de Engenharia da UFMG, que é o modelo utilizado como referência para este Projeto Final de Curso.

2.1 Planta disponível no Laboratório de Controle de Processos

O sistema carrinho-pêndulo consiste em um pêndulo invertido mantido preso a um carrinho, de forma que o pêndulo possa se movimentar apenas no plano vertical, conforme mostrado em (2.1). O carrinho é movimentado por um motor de corrente contínua. Para o balanço e levantamento do pêndulo, o carrinho é movimentado para a frente e para trás no trilho de comprimento limitado. A posição de equilíbrio do pêndulo (vertical para cima) ocorre quando nenhuma força é aplicada ao carrinho. Um pequeno desvio dessa posição de equilíbrio resulta num movimento instável. A planta também possui dois encoders ópticos incrementais, duas chaves de fim de curso, uma placa de aquisição de dados, uma unidade eletrônica com módulos de potência e tratamento de sinais e um computador.

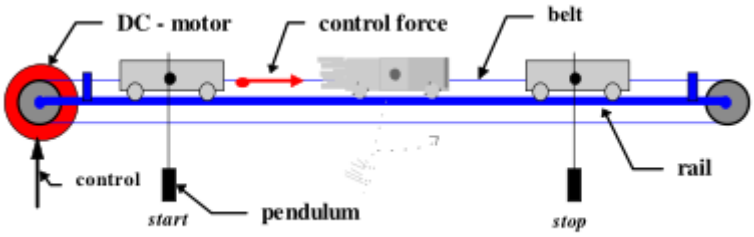

Figura 2.1: Representação do sistema carrinho-pêndulo *[7]*

O propósito do algoritmo de controle do pêndulo invertido é aplicar uma sequência de forças de magnitudes contrárias no carrinho, fazendo com que o pêndulo comece a balançar com um aumento da amplitude de seu deslocamento, sem que o carrinho ultrapasse os limites do trilho, até que a condição de equilíbrio desejada seja alcançada. A descrição do aparato experimental pode ser encontrada em [7]. Uma descrição mais objetiva pode ser encontrada em [8], e é apresentada nas subseções a seguir.

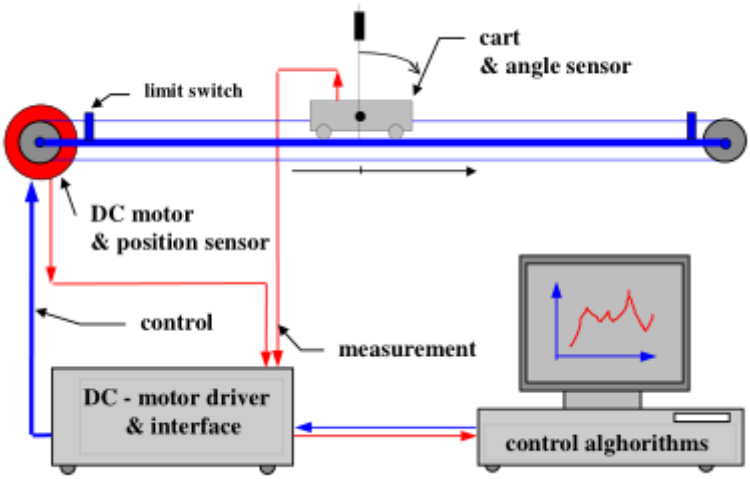

Figura 2.2: Representação do sistema de controle[7]

2.1.1 Sensores

Conforme [8], utilizam-se sensores do tipo encoder óptico incremental para a medição da posição do carrinho ao longo do trilho e a posição angular do pêndulo. Esses instrumentos consistem basicamente em emissores e receptores de luz que registram o movimento de um disco rotativo com fendas. As fendas possuem uma diferença de fase, de forma que a saída elétrica dos receptores (A e B) são ondas retangulares defasadas espacialmente. A direção do movimento pode ser determinada a partir dessa defasagem.

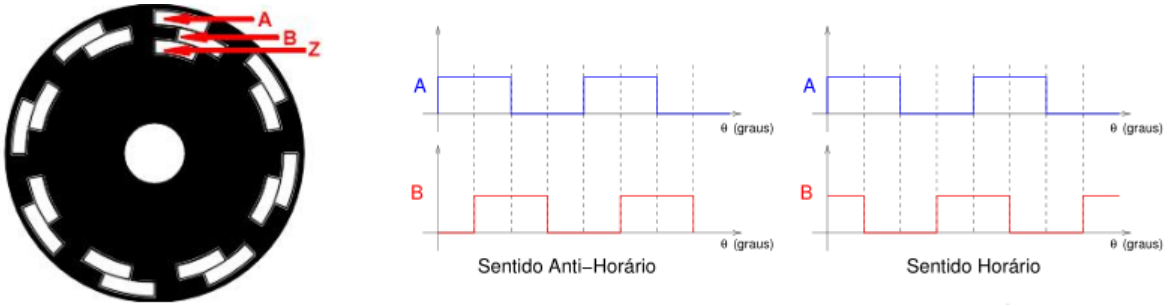

Figura 2.3: Funcionamento de um encoder óptico incremental[?]

Os encoders, de natures discreta, possuem resolução de aproximadamente 0.18º para o pêndulo e 0.08mm para o carrinho. Assim, variações abaixo desses valores não são medidas, conforme destacado por [8].

O sensor de posição do carrinho está instalado sobre o eixo do motor DC, que está conectado ao carrinho através de uma correia dentada. Já o sensor de medição da posição angular está instalado em seu eixo de rotação. Após cada experimento realizado é necessário levar o carrinho de volta à posição zero no trilho para que esta posição seja definida para novos experimentos. Os dados fornecidos pelos encoders são enviados à unidade eletrônica da planta, que faz a interface com a placa de aquisição de dados. Existem também, instalados no trilho, duas chaves de fim de curso, que cortam a alimentação do motor quando são acionadas.

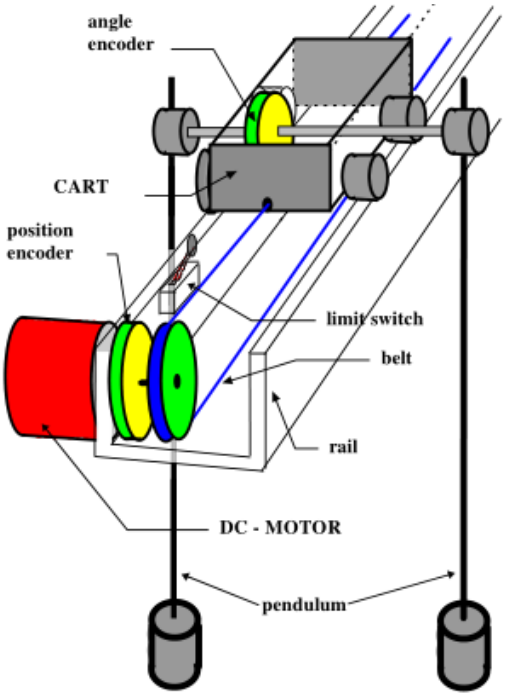

Figura 2.4: Posição dos encoders na planta[7]

Em muitas abordagens de controle do pêndulo, é necessário conhecer as velocidades retilínea e angular do carrinho e do pêndulo, respectivamente. Embora elas não sejam medidas, é possível estimá-las utilizando diversas estratégias, como a implementação de um observador de estados, ou diferença finita, dado a natureza discreta da operação do sistema.

2.1.2 Atuador

O atuador do sistema é um motor de corrente contínua a ímã permanente, com velocidade de 3000 rpm a vazio, com faixa de operação entre -24V e 24V [8]. O motor é considerado um atuador de força e tem sua dinâmica desprezada.

O motor está conectado ao carrinho por uma correia dentada pela qual lhe transmite movimento. A dinâmica da correia também é desprezada. A atuação é limitada pela ação das chaves de fim de curso, que cortam a alimentação do motor quando são acionadas, impedindo que o carrinho colida com as extremidades do trilho, danificando-se.

2.1.3 Unidade Eletrônica

A unidade eletrônica é responsável pelo tratamento dos sinais de medição (vindos dos encoders e transmitidos para a placa de aquisição de dados) e de atuação (vindos da placa de aquisição e enviados ao atuador). A unidade utiliza um sinal analógico de 0V a 5V, fornecido pela placa de aquisição, para fornecer corrente para atuação do motor. A unidade também controla a alimentação elétrica da planta, como botoeiras para ligar e desligar o sistema.

Como descrito por [8], sua sequência de comunicação é:

1. A placa de aquisição envia um sinal para iniciar/reiniciar uma comunicação.
2. A placa envia sinal para receber o byte mais significativo.

3. A unidade eletrônica envia o byte mais significativo de cada encoder.
4 .A placa envia sinal para receber o byte menos significativo.
5. A unidade eletrônica envia o byte menos significativo de cada encoder.
6. A placa envia sinal para liberar a comunicação com a unidade eletrônica.

2.1.4 Placa de Aquisição de Dados

Utiliza-se uma placa de aquisição de dados do modelo PCI 1711 Advantech, que possui 16 canais de entrada digitais divididos em 2 bytes para a leitura dos dados. Cada encoder da planta utiliza um byte. A placa conta com uma saída de 8 bits para o controle do recebimento de bits de baixa e alta ordem dos encoders, uma vez que o sinal recebido possui 12 bits.

A placa também possui uma saída analógica de 12 bits que é utilizada para sinal de controle. Quando a saída está em 0, o sinal de controle corresponde a torque máximo no sentido horário. Quando a saída está em 2048, o torque é nulo. Por fim, quando a saída é 4096, é aplicado um torque máximo no sentido anti-horário no motor. A saída tem faixa de operação entre 0V e 5V e capacidade de corrente de 3 mA.

2.1.5 Computador e Software

O computador possui o sistema operacional Windows XP, da Microsoft. Também está instalado o software Matlab 7.4.0, da MathWorks, que é utilizado para a criação da plataforma virtual da planta. os programas de simulação e operação foram desenvolvidos utilizando o Simulink 6.6.

Também é utilizado o MathWorks Real-Time Workshop, da MathWorks, que é um produto capaz de gerar e executar códigos C e C++ a partir de diagramas do Simulink, gráficos Stateflow e funções do Matlab. O código-fonte gerado pode ser utilizado em aplicações em tempo real e em tempo não real. O Real-Time Workshop também permite a comunicação com a placa de aquisição de dados, através do Real Time Windows Target.

O Real Time Windows Target, por meio do real time kernel, pode atuar diretamente na unidade de processamento do computador, atribuindo maior prioridade de execução ao programa em tempo real, permitindo que este seja executado sem nenhuma interferência durante a taxa de amostragem selecionada.

Algumas das vantagens da utilização do Real Time Workshop nesse sistema, segundo [8], são:

1. A possibilidade de se gerar código para a execução em tempo real, tanto para a plataforma Microsoft Windows quanto para Linux.

2. A transparência na geração do código para o programador do Simulink, que pode utilizar uma interface simples e de alto nível para executar código de baixo nível.

3. A facilidade no processamento posterior dos dados, que são obtidos diretamente no Matlab.

4. A existência de outros experimentos que utilizam a plataforma no laboratório, permitindo uma padronização.

5. A facilidade para atualização para versões mais recentes do Matlab e para novos equipamentos.

2.2 Modelo Matemático Pela Física do Processo

O modelo matemático do processo deve ser construído a partir das leis físicas que descrevem sua dinâmica.

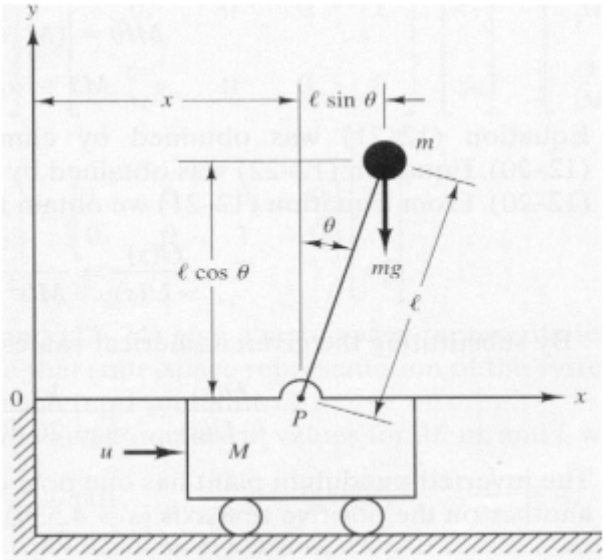

Figura 2.5: Modelo do Sistema

Seja x a posição do carrinho ao longo do trilho, θ a posição angular do pêndulo em relação à vertical para cima, ν a velocidade do carrinho e ω a velocidade angular do pêndulo. O carrinho possui massa m_c e o pêndulo, de massa m_p possui o centro de massa a uma distância l do eixo de rotação do sistema. A força de controle $F = K_{Fu}u$ à aplicada paralelamente ao carrinho, que possui uma força de atrito com o trilho denotada por F_c. O momento de inércia do sistema carrinho-pêndulo é representado por J, e V é a força de reação que atua verticalmente sobre o carrinho. O momento angular do pêndulo é dado por D_p.

Seja o vetor de estados do sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \nu \\ \omega \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

O movimento de translação do centro de massa do sistema é descrito pelas equações a seguir:

$$(m_c + m_p)\frac{d^2}{dt^2}[x_1 - l\sin(x_2)] = F - F_c \tag{2.2}$$

$$(m_c + m_p)\frac{d^2}{dt^2}[l\cos(x_2)] = V - (m_c + m_p)g \tag{2.3}$$

Já o movimento de rotação do pêndulo é dado por:

$$J\frac{d^2}{dt^2}(x_2) = (F - F_c)l\cos(x_2) + Vl\sin(x_2) - D_p \tag{2.4}$$

Seja f_p o coeficiente de atrito dinâmico do pêndulo. O momento angular do pêndulo é definido como:

$$D_p = f_p x_4 \tag{2.5}$$

A partir das equações anteriores, chegamos à representação em espaço de estados do modelo, conforme mostrado abaixo:

$$\dot{x}_1 = x_3 \tag{2.6}$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \tag{2.7}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{a[F - F_c - \mu x_4^2 \sin(x_2)] + l\cos(x_2)[\mu g \sin(x_2) - f_p x_4]}{J + \mu l \sin^2(x_2)} \tag{2.8}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{l\cos(x_2).(F - F_c - \mu.x_4^2 \sin(x_2)) + \mu g \sin(x_2) - f_p.x_4}{J + \mu l \sin^2(x_2)} \tag{2.9}$$

em que

$$a = l^2 + \frac{J}{m_c + m_p} \tag{2.10}$$

e

$$\mu = (m_c + m_p)l \tag{2.11}$$

.

Os parâmetros da planta fornecidos por [8] e são apresentados na tabela a seguir.

Parâmetro	Valor
Gravidade (g)	9.81 m/s^2
distância do pêndulo ao centro de massa (l)	0.446 m
Massa do carro (m_c)	2.85 Kg
Massa do pêndulo (m_p)	0.969 Kg
Momento de Inércia do Pêndulo (J)	0.0443 Kg.m^2
Coeficiente de atrito dinâmico do carro (β)	6.98 Ns/m
Coeficiente de atrito de Coulomb (f_c)	1.5
Coeficiente de atrito dinâmico do pêndulo (f_p)	0.0001 N.m.s/rad
Coeficiente de ganho do motor (K_{fu})	24

Tabela 2.1: Parâmetros da planta

A força de Atrito pode ser escrita na forma:

$$F_C(t) = f_c sgn(v(t)) + \beta v(t) \tag{2.12}$$

em que β é o coeficiente de atrito dinâmico e f_c é o coeficiente de Atrito de Coulomb. Também podemos definir:

$$sgn(v(t)) = \begin{cases} 1, \ se\ v(t) > 0 \\ 0, \ se\ v(t) = 0 \\ -1, \ se\ v(t) < 0 \end{cases}$$

2.3 Resumo do Capítulo

Esse capítulo descreveu a planta existente no laboratório de Controle de Processos Secos da Escola de Engenharia da UFMG que serve como referência para esse trabalho. Também foram apresentadas as equações que descrevem a dinâmica da planta e os parâmetros de seus componentes.

Capítulo 3

Metodologia

Esse capítulo descreve a revisão bibliográfica realizada para a elaboração desse Projeto Final de Curso, bem como as estratégias utilizadas.

3.1 Revisão Bibliográfica

Para conhecer detalhadamente os trabalhos que têm sido realizados envolvendo o pêndulo invertido, deve-se realizar uma revisão bibliográfica.

Isso é feito a partir do estudo de artigos publicados por pesquisadores de todas as partes do mundo, envolvendo diferentes métodos para lidar com o sistema. Para isso, são realizadas buscas por artigos no portal CAPES. Como o pêndulo é um problema tratado por diversos pesquisadores, deve-se selecionar alguns trabalhos que se julgue mais relevantes para o estudo.

Os trabalhos selecionados levam em conta o número de citações - artigos com maior número de citações são preferíveis - e a forma como os pesquisadores tratam o problema - deve-se buscar casos em que apenas a posição do carrinho e o ângulo do pêndulo são utilizados pelas leis de controle.

Os artigos selecionados devem ser estudados detalhadamente, para a compreensão das abordagens adotadas, suas limitações e suas vantagens.

Além dos artigos, também deverá ser estudado o manual da Feedback Instruments Ltd, empresa responsável pela fabricação do Sistema Digital do Pêndulo, modelo 33-005-1M5, que está disponível no Laboratório de Controle de Processo da Escola de Engenharia, utilizado para a realização desse trabalho. Esse manual contém uma descrição detalhada da planta, além de fornecer parâmetros do modelo e servir como um importante guia para a compreensão de seu funcionamento.

Outra referência importante utilizada para esse trabalho é a monografia "Atualização de uma Plataforma para Ensino de Controle: Aplicação ao Pêndulo Invertido"[8], feita pelo então aluno de graduação em Engenharia de Controle e Automação Vitor Gouvêa Santos, durante seu Projeto Final de Curso.

De acordo com [5], muitos métodos para o levantamento e estabilização do pêndulo invertido tem sido propostos na literatura nas últimas décadas. Alguns desses métodos necessitam apenas do conhecimento da posição do pêndulo para criar uma lei de controle, como é o caso de [1] e [2]. Outros, além da posição, necessitam também do conhecimento da velocidade [3]. Modelos Langragianos, funções Hamiltonianas e métodos de Lyapunov são

abordagens comuns para iniciar o projeto de controladores para o sistema carrinho-pêndulo. Outras abordagens baseadas em inteligência computacional, tais como redes neurais artificiais [6, 9], e controladores Fuzzy também têm sido utilizadas [4, 11, 12].

Os principais artigos utilizados nessa fase são descritos a seguir.

3.1.1 Debasish Chatterjee, Amit Patra, Harish K. Joglekar [5]

Swing-up and stabilization of a cart-pendulum system under restriced cart track length

Nesse artigo, os autores descrevem o levantamento e estabilização do pêndulo invertido utilizando métodos de controle de energia. O limite do tamanho do trilho e a restrição da amplitude da força aplicada são considerados.

Inicialmente, apresentam-se equações para a energia cinética total e para a energia potencial do sistema. A partir disso, utilizando o Lagrangiano, obtém-se uma representação em espaço de estados para o modelo, com base nos parâmetros de uma planta geral.

Então, define-se uma lei de controle para levar e manter o pêndulo na posição desejada. O princípio adotado consiste em injetar energia no sistema até que a energia total do pêndulo (cinética rotacional e potencial) atinja o nível desejado. Como a energia cinética translacional e a energia cinética rotacional do pêndulo são desacopladas, concentra-se na energia rotacional, que inicialmente deve aumentar. Uma lei incial é, então, formulada. Contudo, ela fornece energia constantemente para o pêndulo, sem levar em conta as restrições da planta. Para corrigir isso, é proposto a ideia de "poço potencial", que consiste em aplicar forças repulsivas ao carrinho quando esse se aproxima dos limites do trilho. Com isso, uma nova lei de controle é proposta, e fornece energia constantemente para o carrinho levando em conta sua posição e o comprimento do trilho.

Quando o pêndulo atinge a quantidade de energia desejada, o sistema entra em "modo de cruzeiro", que conserva o nível de energia, permitindo o pêndulo manter-se próximo à posição de equilíbrio desejada. Um controlador para manter a energia do sistema é proposto e considera a soma da energia cinética rotacional com a energia potencial do pêndulo, a energia potencial na posição vertical para cima, a posição e a velocidade do pêndulo.

Então , projeta-se um controlador LQR após a linearização das equações em espaço de estados em torno da condição de equilíbrio para estabilizar o pêndulo. Esse controlador só atua quando o pêndulo se encontra próximo à posição desejada. As leis de controle obtidas necessitam do conhecimento da posição e da velocidade do carrinho. Obtém-se no final um sistema de controle híbrido com três modos distintos de operação.

Os controladores obtidos são então testados em simulação e posteriormente implementados numa planta real, confirmando a eficácia dos métodos utilizados. Nos resultados apresentados, percebe-se que o pêndulo atinge a posição desejada após cerca de cinco segundos, tanto em simulação quanto em implementações reais. Observa-se também que o carrinho não chega a atingir os limites do trilho.

3.1.2 José Ángel Acosta, Romeo Ortega, Alessandro Astolfi and Arun D. Mahidrakar [1]

Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Mechanical Systems With Underactuation Degree One

Nesse artigo, emprega-se a técnica de IDA-PBC para o projeto de controladores de sistemas mecânicos subatuados.

A técnica de "Interconection and Damping Assignment Passivity-Based Control" (IDA-PBC) regula a posição de sistemas mecânicos subatuados com base em princípios de modelagem de energia e injeção de amortecimento, utilizando funções Hamiltonianas. Descreve-se como utilizar o método para regular a posição de sistemas mecânicos subatuados, utilizando a Matriz de Inércia do sistema e uma função de energia potencial que satisfaça um conjunto de equações diferenciais parciais. Em seguida, resolve-se as equações parciais para a energia cinética do sistema.

Em seguida, é proposto um controlador com realimentação da posição com um estimador de velocidade. Assim, a única variável que necessita ser medida é a posição.

O controlador obtido é aplicado a dois problemas: o pêndulo invertido e uma aeronave de pouso e decolagem verticais.

Para o caso envolvendo o pêndulo, são descritas suas equações dinâmicas. O sistema é reescrito aplicando uma linearização parcial de realimentação, onde e entrada de controle é incluída. O controlador é então construído e aplicado ao sistema. Os resultados obtidos são apresentados e verifica-se que o controlador proposto é capaz de estabilizar o pêndulo.

3.1.3 K. J. Astrom, J. Aracil, F. Gordillo [3]

A family of smooth controllers for swinging up a pendulum

Neste artigo é apresentada uma família de controladores para levantamento e estabilização do pêndulo baseadas na energia do sistema.

Partindo do modelo matemático que descreve a velocidade e a aceleração, busca-se obter uma equação que descreva a energia potencial do pêndulo, com base em funções Hamiltonianas. Após escolher uma função energia, determina-se uma lei de controle de realimentação inicial para um sistema sem amortecimento. Então, o problema do amortecimento do sistema é analisado e obtém-se uma nova lei de controle. Através da análise de estabilidade, determina-se os valores mínimos para os parâmetros da lei de controle.

Em seguida, discute-se o problema da saturação do sinal de controle, através de abordagens Hamiltonianas, o que traz novas modificações ao controlador. Os resultados para a simulação da lei de controle são apresentados. Observa-se que o pêndulo atinge a posição desejada após um período de oscilação.

O principal resultado desse trabalho é que qualquer solução que não comece em um conjunto Lebesgue igual a zero converge para a posição vertical para cima para um grande intervalo de parâmetros da lei de controle, tornando-a suave.

3.1.4 Jun Zhao, Mark W. Spong [13]

Hybrid control for global stabilization of the cart-pendulum system

Neste artigo, as equações que descrevem a dinâmica do pêndulo são inicialmente linearizadas. Destaca-se que a energia total depende da velocidade angular e da posição angular do pêndulo.

A metodologia adotada consiste em projetar um controlador local capaz de estabilizar o pêndulo na posição desejada, determinar um domínio local de atração para o sistema em malha fechada em que o controlador local possa ser aplicado e a construção de um controlador bang-bang capaz de levantar o pêndulo até a região de atração.

Como o sistema linearizado é controlável, qualquer controlador do tipo u=Ky, onde y é o vetor de estados do sistema, é capaz de controlar a planta.

Em seguida, é determinada a região de atração na qual esse controlador local é válido. Para isso, a equação em espaço de estados do sistema em malha fechada contendo o controlador é reescrita e utilizando uma equação de Lyapunov, obtém-se o domínio de atração para o controlador local, mostrando que qualquer ponto contido nesse domínio é controlável.

Em seguida, é descrito um algoritmo de controle para o levantamento do pêndulo. Ele consiste em obter as condições iniciais, escolher o valor de algumas constantes de tempo, calcular a energia inicial do sistema. Caso a energia esteja entre dois valores descritos, o controlador linear é ativado para a estabilização. Caso a energia inicial seja menor que um valor mínimo, aplica-se uma lei de controle que é calculada com base nas condições iniciais. Caso a energia seja maior que um valor máximo, uma outra lei de controle é aplicada com base nos valores iniciais dos estados. Esse algoritmo descreve a atuação de um controlador bang-bang.

Após a descrição do algoritmo, é mostrado que o controle híbrido proposto é capaz de estabilizar o sistema. Também é analisado a validade do controlador.

Em seguida, um algoritmo modificado é descrito, baseado em novas constantes que são escolhidas inicialmente. São apresentadas simulações utilizando o Matlab. Nota-se que o controlador é capaz de estabilizar o pêndulo, embora necessite de um grande deslocamento.

3.1.5 Carlos Aguilar-Ibánez, Miguel S. Suarez-Castanon, Nareli Cruz-Cortés [2]

Output feedback stabilization of the inverted pendulum system: a Lyapunov approach

Apresenta-se a dinâmica do pêndulo a partir de equações. O modelo é discutido juntamente com o objetivo de controle.

Antes de desenvolver uma estratégia de controle, é realizada uma mudança de coordenadas, obtendo um modelo não linear. Em seguida, formula-se uma função candidata de controle baseada em uma função de Lyapunov. O sistema em malha fechado é descrito e encontra-se uma função energia candidata.

Determina-se então um controlador baseado em um observador de estados, já que as velocidades do carrinho e do pêndulo não são medidas.

Segue-se, então, uma análise de estabilidade. Utilizando parâmetros de um modelo real, o controlador proposto é simulado e analisado. Os resultados apresentados mostram que o controlador é capaz de levar o pêndulo para a posição desejada.

3.2 Construção e validação do modelo em ambiente simulado

Com base no modelo matemático descrito na seção 2.2, deve-se construir, em ambiente simulado, uma representação da planta real. Para isso, será utilizado o ambiente Simulink, do Matlab. Esse modelo será, então, validado utilizando-se os parâmetros apresentados na tabela 2.1.

O modelo a ser construído deve conter uma entrada de controle (u) que representa a força aplicada ao carrinho, através da correia, para movimentá-lo no trilho; e quatro saídas, que representam os estados do sistema - posição do carrinho, posição angular do pêndulo, velocidade do carrinho e velocidade angular do pêndulo. Utilizando os quatro blocos de funções descritos na seção 2.2, os parâmetros da planta real e a entrada de controle, obtém-se as saídas desejadas do modelo, através das manipulações algébricas das equações da dinâmica do sistema descritas na seção 2.2.

Para a validação do modelo, são aplicadas entradas de controle para condições iniciais distintas, fazendo-se a análise das respostas obtidas.

3.3 Determinação das Leis de Controle a serem implementadas

A partir da revisão bibliográfica, deve-se escolher uma estratégia de controle não linear para ser implementada.

Para a subida do pêndulo, escolheu-se a Lei de Controle descrita em [5].

Para a estabilização do sistema quando este estiver próximo ao ponto de equilíbrio, deve-se implementar duas leis de controle a partir do modelo linearizado do sistema. Por se tratar de um sistema subatuado, os controladores serão construídos utilizando as seguintes estratégias:

1. **Controle em Cascata:** estratégia em que a saída do controlador principal é utilizada para manipular a referência do controlador secundário. Para implementar esse tipo de estratégia, é importante que a malha interna responda mais rápido à variações no distúrbio e na variável manipulada que a malha externa. Essa estratégia de controle pode ser empregada para mais de duas malhas em série. A figura abaixo ilustra a implementação dessa estratégia de controle.

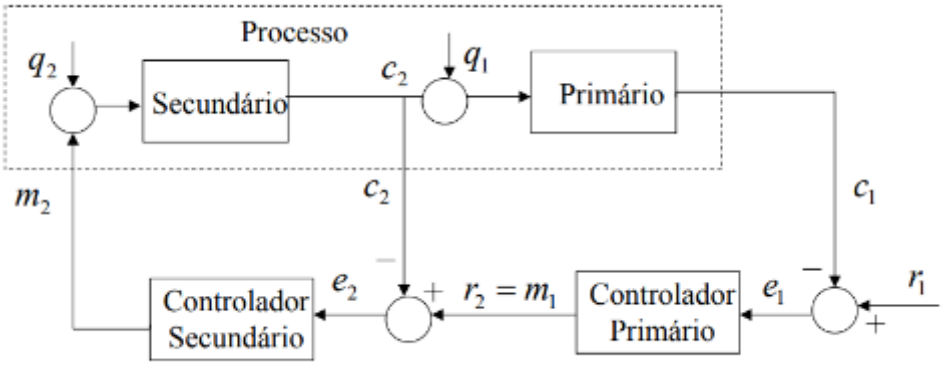

Figura 3.1: Representação de Controle em Cascata

2. **Controle por Realimentação de Estados:** estratégia de controle em que a entrada de controle é calculada em função dos estados do sistema multiplicados por uma matriz de ganhos contante K. Essa estratégia exige que todos os estados sejam mensuráveis ou possam ser estimados a partir de um observador de estados. Nessa abordagem é possível escolher os ganhos do controlador de forma a alocar os pólos da malha fechada em posições desejadas. A figura abaixo ilustra essa abordagem.

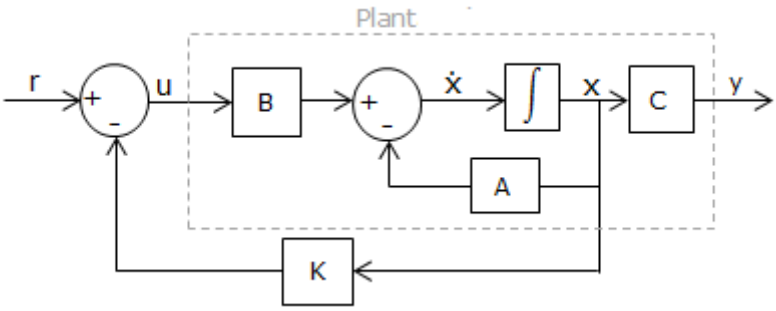

Figura 3.2: Representação de Controle em Espaço de Estados

3.4 Implementação das Leis de Controle em ambiente simulado

Com as Leis de Controle definidas, deve-se então implementá-las em ambiente simulado para controlar o pêndulo invertido. A implementação também é feita utilizando o Simulink.

Para cada Lei de Controle será implementado um subsistema próprio com suas entradas e saídas, a exemplo do pêndulo. Para a abordagem descrita em [5], o subsistema do controlador tem como entrada as posições e velocidades de ambos carrinho e pêndulo. A saída desse subsistema é a força a ser aplicada sobre o carrinho para o levantamento e estabilização do pêndulo na posição vertical para cima.

Para o Controle em Cascata, deve-se determinar, com base na dinâmica linearizada do modelo, qual variável (posição do carrinho ou ângulo do pêndulo) será controlada direta-

mente pela entrada do sistema (malha interna) e qual será controlada de forma indireta (malha externa).

Para o caso do Controle por Realimentação de Estados, considera-se que, embora as variáveis de velocidade do carrinho e velocidade angular do pêndulo não sejam medidas na planta física utilizada como base para este Projeto Final de Curso, elas são conhecidas em ambiente simulado, uma vez que toda a dinâmica do modelo é descrita no capítulo anterior.

3.5 Análise dos Resultados

Por fim, as leis implementadas devem ter seus desempenhos analisados de acordo com os resultados obtidos.

Para isso, cada lei de controle deve ser implementada e validada no ambiente simulado distintamente. Deve-se verificar se as respectivas leis foram capazes de atender os objetivos:

1. Levantar o pêndulo da condição de pêndulo simples para a condição de pêndulo invertido, próximo ao ponto de equilíbrio desejado, utilizando a lei de controle não-linear.

2. Estabilizar o pêndulo na posição de equilíbrio desejada utilizando as leis de controle lineares.

Deve-se, também, comparar o desempenho das leis de controle do modelo linearizado.

3.6 Análise dos Resultados

Esse capítulo descreveu a revisão bibliográfica realizada para o desenvolvimento desse Projeto Final de Curso. Também foram apresentadas as abordagens de controle Cascata e Espaço de Estados, que serão utilizadas para o projeto de controladores para estabilização do sistema.

Capítulo 4

Resultados

Esse capítulo descreve os controladores projetados para levantamento e estabilização do sistema carrinho-pêndulo invertido. Também são apresentados os resultados obtidos com a implementação das estratégias de controle.

4.1 Implementação da Lei de Levantamento do pêndulo

Essa seção descreve a Lei de Controle de Levantamento do pêndulo escolhida para implementação no modelo utilizado nesse Projeto Final de Curso e os resultados obtidos na implementação no modelo em ambiente simulado.

4.1.1 Descrição da lei de Controle formulada em [5]

O levantamento do pêndulo é realizado através da injeção de energia no sistema até que a soma das energias cinética rotacional e potencial do pêndulo atinja um nível desejado (a energia da condição de equilíbrio $\theta = 0°$).

Para isso, parte-se de uma estratégia de controle com o objetivo de aumentar a energia do sistema. Dessa forma, uma aceleração age sobre o carrinho conforme descrita a seguir:

$$\ddot{x} = k_{su}(E_{rp} - E_{up})sgn(\dot{\theta}\cos\theta) \tag{4.1}$$

onde E_{rp} é a soma das energias cinética rotacional e potencial do pêndulo, k_{su} é uma constante positiva para ajustar a amplitude da aceleração e E_{up} é a energia potencial do pêndulo na condição para cima ($\theta = 0°$).

Embora a lei proposta acima possa injetar energia continuamente no sistema, não existe uma restrição explícita imposta ao comprimento do trilho, o que dificulta sua utilização em sistemas cujo trilho é limitado. Além disso, a taxa de injeção de energia depende da diferença $E_{rp} - E_{up}$. À medida que essa diferença diminui, a taxa de injeção de energia também cai. Então, teoricamente, a energia desejada não seria alcançada em um tempo finito.

Por isso, essa lei é modificada para superar essas duas restrições. [5] propõe, então, o conceito de "Cart Potential Well", em que o carrinho sofre a atuação de forças repulsivas sempre que se aproxima dos limites do trilho. Isso é feito adicionando o seguinte termo à lei de controle:

$$u_{cart-well} = k_{cw} sgn(x) \log(1 - \frac{|x|}{L}) \tag{4.2}$$

onde k_{cw} é uma constante positiva que determina o módulo da aceleração imposta ao carrinho por esse termo descrito pela equação (4.2) e L é o comprimento do trilho em que o carrinho se desloca.

Com a remoção do termo $E_{rp} - E_{up}$ da equação (4.1) a taxa de injeção de energia é somente especificada por k_{su}. Assim, a nova lei de controle pode ser reescrita como:

$$u_{cart-well} = -k_{su} sgn(\dot{\theta} \cos\theta) + k_{cw} sgn(x) \log(1 - \frac{|x|}{L}) \tag{4.3}$$

onde $k_{su}, k_{cw} > 0$ são constantes escolhidas. Nota-se que o sinal de k_{su} torna-se negativo, uma vez que a energia da condição vertical para cima do pêndulo, E_{up}, era dominante em (4.1).

Deseja-se que quando o controle for chaveado para a estratégia de estabilização, a posição e a velocidade do carrinho estejam próximos de zero. Para a posição, isso pode ser alcançado através do ajuste de k_{cw}. De forma análoga à equação (4.2), isso é feito para a velocidade através do termo:

$$u_{velocity-well} = k_{vw} sgn(\dot{x}) \log(1 - \frac{|\dot{x}|}{\dot{x}_{max}}) \tag{4.4}$$

Também é formulado uma lei de controle para manter a energia do sistema quando $E_{rp} \approx E_{up}$:

$$u_{energy-maint} = k_{em}(\exp|E_{rp} - \eta E_{up}| - 1) sgn(E_{rp} - E_{up}) sgn(\dot{\theta} \cos\theta) \tag{4.5}$$

, com $\eta > 1$.

Finalmente, a estratégia de aceleração completa é obtida a partir da soma das equações (4.3), (4.4) e (4.5):

$$\ddot{x} = u_{cart-well} + u_{velocity-well} + u_{energy-maint} \tag{4.6}$$

4.1.2 Resultados da Implementação da Lei de Controle

A Lei de Controle descrita na seção anterior foi implementada no modelo construído em ambiente simulado.

A sintonia dos parâmetros $k_{su}, k_{cw}, k_{vw}, k_{em}, \eta$ foi realizada testando cada termo da equação (4.6) separadamente. Após isso, todos os termos foram somados para implementação da lei de controle completa. Para o último termo de (4.6), não foi possível encontrar k_{em}, η capazes de gerar um resultado satisfatório. Isso porque o termo exponencial gera um valor muito grande como saída, inibindo ação dos outros termos e, mesmo forçando o controlador a atuar sempre nos limites da saturação do modelo, o pêndulo varia muito pouco da condição inicial, conforme mostrado abaixo:

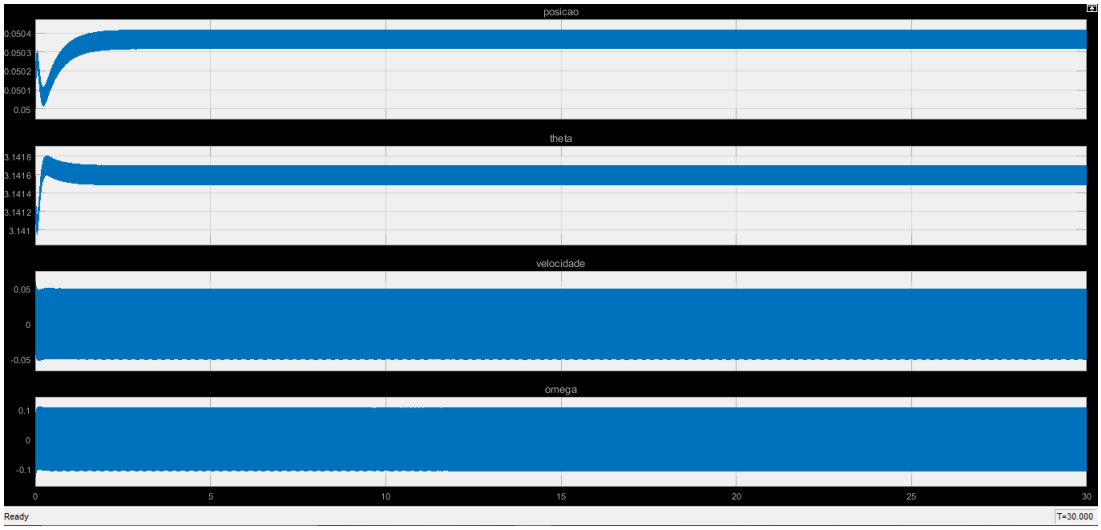

Figura 4.1: Resultados da lei de Controle de Subida

Podemos ver que na figura abaixo que a entrada de controle chaveia numa frequência muito elevada, sempre atingindo os limites de saturação, sem que haja tempo para o sistema responder à entrada. Assim, como a variação da entrada de controle é muito rápida, a direção do movimento do carrinho também varia muito rápido, fazendo o pêndulo oscilar muito pouco.

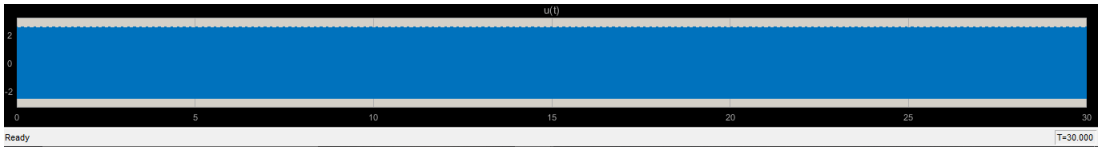

Figura 4.2: Sinal de entrada de controle

A figura abaixo mostra que a lei de controle não consegue injetar energia de forma satisfatória no sistema.

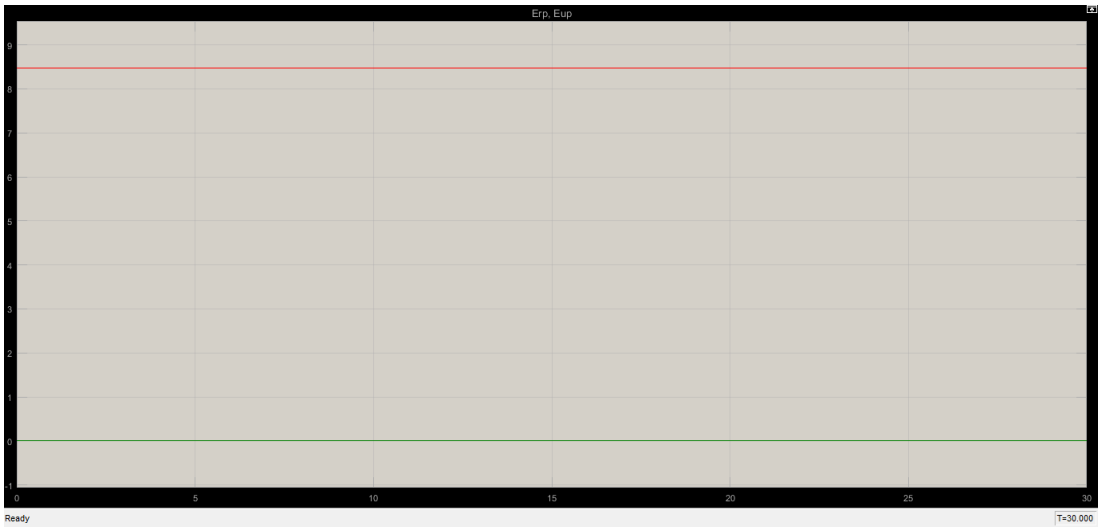

Figura 4.3: Energia do pêndulo conforme a Lei de Controle de Subida completa

Removendo, então, o termo responsável por manter a energia do sistema próxima à posição de equilíbrio desejada e escolhendo$k_{su} = 1.4$, $k_{cw} = 3.5$ e $k_{vw} = 0.8$ é possível obter uma lei de controle que atue dentro dos limites de saturação de entrada da planta(u(t)). O resultado é mostrado abaixo:

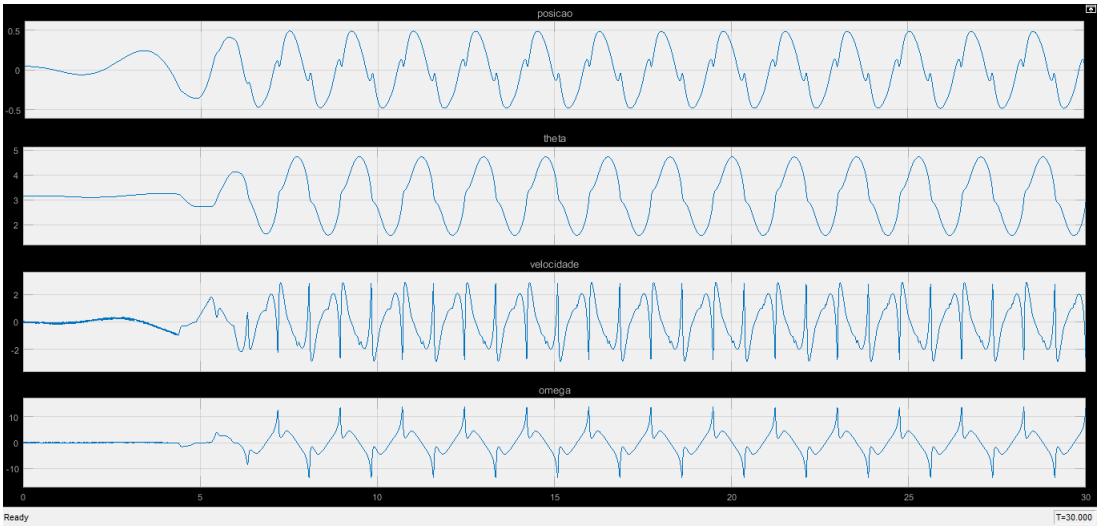

Figura 4.4: Resultados para a Lei de Subida sem o termo de Energia

É possível notar que a nova lei de controle é capaz de respeitar os limites do trilho do carrinho. Porém, não é capaz de levantar o pêndulo até a condição suficiente para chavear para a lei de estabilização. Quando o ângulo está próximo de 4.5 rad, o carrinho está próximo ao limite do trilho e é forçado a mover-se para o lado contrário, afetando a subida do pêndulo.

Contudo, é possível notar na figura abaixo que a entrada de controle u(t) mantém-se dentro dos limites de saturação e apresenta uma oscilação mais lenta ao longo do tempo.

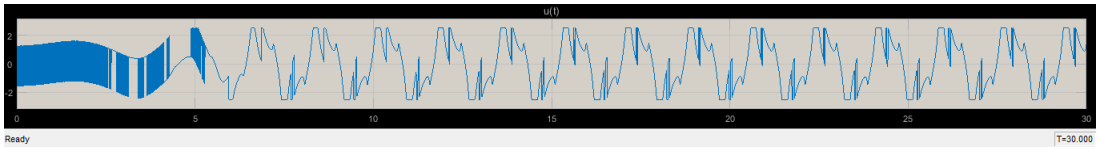

Figura 4.5: Sinal de Controle sem o termo de Energia

A figura a seguir mostra que o pêndulo não atinge a energia suficiente para a condição desejada. Em vermelho é mostrado a Energia da condição vertical para cima, que é a energia que deseja-se alcançar. Em verde é mostrado a energia cinética do sistema ao longo do movimento.

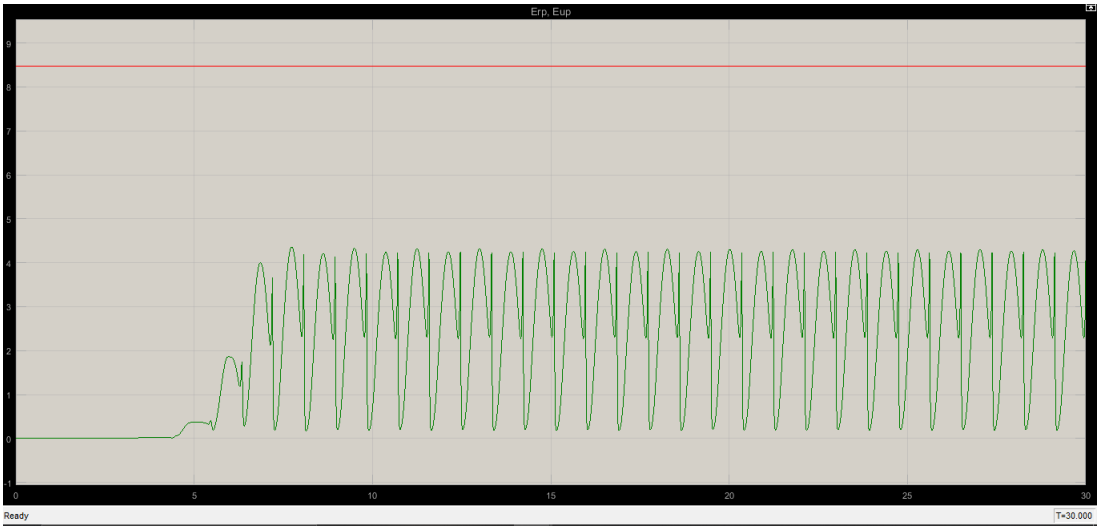

Figura 4.6: Energia do pêndulo com nova lei de subida

4.2 Representações do Modelo Linearizado

4.2.1 Linearização do Modelo

O modelo linearizado é obtido com base nas equações (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), em torno dos pontos de equilíbrio do sistema. Para o caso do sistema carro-pêndulo, existem dois pontos de equilíbrio: $\theta^{eq} = 0°$ (instável) e $\theta^{eq} = 180°$ (estável).

A linearização do modelo é feita desprezando o Atrito de Coulomb e os termos de maior ordem (não-lineares). Também considera-se as

Assim, as equações (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9) linearizadas tornam-se:

$$\dot{x}_1 = x_3 \tag{4.7}$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \tag{4.8}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\alpha}{J}F + \frac{\mu g l}{J}x_2 - \frac{\alpha\beta}{J}x_3 - \frac{sgn(\theta^{eq})f_p l}{J}x_4 \tag{4.9}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{sgn(\theta^{eq})l}{J}F + \frac{sgn(\theta^{eq})\mu g}{J}x_2 - \frac{sgn(\theta^{eq})\beta l}{J}x_3 - \frac{f_p}{J}x_4 \tag{4.10}$$

em que:

$$sgn(\theta^{eq}) = \begin{cases} 1, & se\ \theta^{eq} = 0° \\ -1, & se\ \theta^{eq} = 180° \end{cases} \tag{4.11}$$

4.2.2 Representação em Espaço de Estados

O sistema de equações (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10) pode ser rescrito na forma de Espaço de Estados

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{4.12}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

.Portanto,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \tag{4.13}$$

e

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

onde os coeficientes das Matrizes A e B são:

$$a_1 = \frac{\mu g l}{J}$$

$$a_2 = -\frac{\alpha\beta}{J}$$

$$a_3 = -\frac{sgn(\theta^{eq}) f_p l}{J}$$

$$a_4 = \frac{sgn(\theta^{eq}) \mu g}{J}$$

$$a_5 = -\frac{sgn(\theta^{eq}) \beta l}{J}$$

$$a_6 = -\frac{f_p}{J}$$

$$b_1 = \frac{\alpha K_{Fu}}{J}$$

$$b_2 = \frac{sgn(\theta^{eq})\alpha l K_{Fu}}{J}$$

De acordo com (2.10) e (2.11) e os parâmetros descrito em (2.1), podemos reescrever os coeficientes, para o ponto de equilíbrio $\theta^{eq} = 0°$ como:

$$a_1 = 168.2227$$

$$a_2 = -33.1693$$

$$a_3 = -0.001$$

$$a_4 = 377.181$$

$$a_5 = -70.2727$$

$$a_6 = -0.0023$$

$$b_1 = 114.0492$$

$$b_2 = 241.6253$$

4.2.3 Representação por Funções de Transferência

Após obter uma representação linear do sistema em Espaço de Estados, é possível obter uma representação cujo foco seja a relação entre a entrada e as saídas do sistema, ou seja, as funções de transferência que representam a dinâmica do sistema linearizado.

Seja o sistema em Espaço de Estados representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{4.15}$$

e

$$x(0) = x_0$$

a condição inicial dos estados do sistema.

Aplicando a Transformada de Laplace, podemos reescrever (4.15) como

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$sX(s) - AX(s) = x_0 + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

e

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

onde o primeiro termo está relacionado às condições iniciais e o segundo termo está relacionado à entrada do sistema. Assumindo que o estado inicial é nulo ($x_0 = 0$), e que as saídas do sistema ($\theta(t)$ e $x(t)$) não possuem relação direta com a entrada $u(t)$, a equação é reduzida a:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) \tag{4.16}$$

em que

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{4.17}$$

é a matriz de transferência do sistema.

Sendo $y = Cx + Du$, podemos obter as funções de Transferência para a posição do carrinho e para o ângulo θ. Para isso, devemos decompor C em dois vetores, cada um relacionado a uma saída de interesse:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

para a posição do carrinho no trilho (x), e

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

para o ângulo do pêndulo (θ).

A função de transferência para a posição do carrinho será:

$$H_x(s) = C_1(sI - A)^{-1}B$$

$$H_x(s) = \frac{b_1 s^2 + (a_3 b_2 - a_6 b_1)s + (a_1 b_2 - a_4 b_1)}{s^4 - (a_2 + a_6)s^3 + (a_2 a_6 - a_4 - a_3 a_5)s^2 - (a_1 a_5 - a_2 a_4)s}$$

$$H_x(s) = \frac{114s^2 + 0.01419s - 2370}{s^4 + 33.17s^3 - 377.2s^2 - 689.4s} \tag{4.20}$$

Analogamente, a função de transferência para o ângulo do pêndulo será:

$$H_\theta(s) = C_2(sI - A)^{-1}B$$

$$H_\theta(s) = \frac{b_2 s + (a_5 b_1 - a_2 b_2)}{s^3 - (a_2 + a_6)s^2 + (a_2 a_6 - a_4 - a_3 a_5)s - (a_1 a_5 - a_2 a_4)}$$

$$H_\theta(s) = \frac{241.6s + 9.095x10^{-13}}{s^3 + 33.17s^2 - 377.2s - 689.4} \tag{4.21}$$

Para a discretização do modelo, foi utilizada a Transformada Bilinear. Esse método tem duas vantagens importantes: mantém a ordem do sistema e mapeia todo o eixo imaginário do plano S em uma única volta no círculo de raio unitário do plano Z. Também considerou-se o Tempo de Amostragem $T_s = 0.01s$.

As funções de transferência para o modelo discreto obtidas são:

- Para a posição do carrinho:

$$H_x(z) = \frac{0.0024645(z+1)^2(z-1.047)(z-0.9954)}{(z-1.108)(z-1)(z-0.984)(z-0.6543)} \tag{4.22}$$

- Para o ângulo do pêndulo:

$$H_\theta(z) = \frac{0.0052239(z-1)(z+1)^2}{(z-1.108)(z-0.984)(z-0.6543)} \tag{4.23}$$

4.3 Projeto de Controladores para Modelo Linearizado

Essa seção descreve os controladores projetados para a estabilização do ângulo e da posição do carrinho.

4.3.1 Estabilização do Sistema por Controle Cascata

Para a estabilização do sistema carrinho-pêndulo próximo ao ponto de equilíbrio $\theta^{eq} = 0°$, utilizou-se o método do Controle em Cascata.

Analisando a função de transferência (4.22), vemos que o sistema é instável, pois possui um pólo fora do círculo de raio unitário. O Lugar das Raízes de (4.22) traçado abaixo mostra que é muito difícil controlar a posição com a entrada do sistema, pois sua função de tranferência também apresenta um zero de fase não mínima à esquerda do pólo instável.

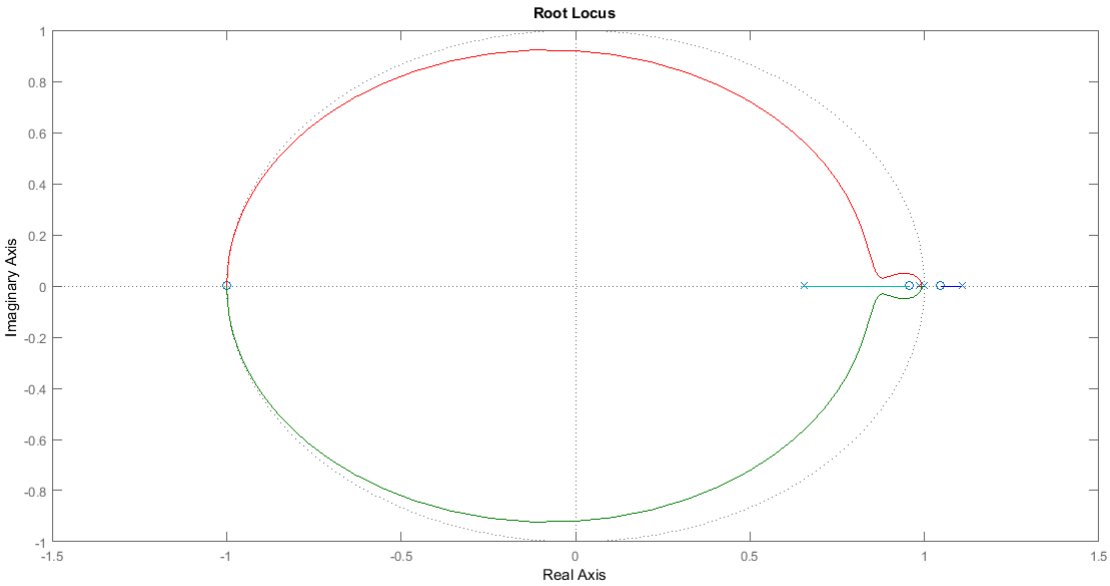

Figura 4.7: Lugar das Raízes de (4.22)

Por outro lado, a função de Transferência (4.23) embora possua um pólo instável, pode ser controlada diretamente pela entrada do sistema, desde que seja possível ajustar o controlador para garantir que os pólos em malha fechada estejam dentro do círculo de raio unitário. Por isso, para implementar a estratégia do controle cascata, optou-se por ter a dinâmica do ângulo do pêndulo na malha interna e a dinâmica da posição do carrinho na malha externa. Portanto, é necessário obter uma representação da dinâmica da posição em função do ângulo. Isso pode ser feito reescrevendo (4.9) como:

$$\dot{x}_3 = a_1 x_2 + a_2 x_3 + a_3 x_4 \tag{4.24}$$

Utilizando a Transformada de Laplace na equação acima, podemos reescrever

$$sx_3 = a_1 x_2 + a_2 x_3 + a_3 x_4$$

$$(s - a_2)x_3 = a_1 x_2 + a_3 x_4$$

$$s(s - a_2)x_1 = a_1 x_2 + s a_3 x_2$$

$$H_{x\theta}(s) = \frac{a_3 s + a_1}{s(s - a_2)}$$

Substituindo os coeficientes, temos:

$$H_{x\theta}(s) = \frac{-0.001s + 168.2}{s(s + 33.17)} \tag{4.25}$$

Utilizando a Transformada Bilinear e considerando o tempo de Amostragem $T_s = 0.01s$, podemos obter a função de Transferência discreta:

$$H_{x\theta}(z) = \frac{0.003603(z+1.002)(z+1)}{(z-1)(z-0.7155)} \tag{4.26}$$

Utilizando o Lugar das Raízes, é possível projetar os controladores para a posição do carrinho e o ângulo do pêndulo. Os pólos e zeros dos controladores são escolhidos de forma a garantir erro nulo em regime permanente.

Para (4.23), obteve-se o controlador:

$$C_{\theta}(z) = \frac{5(z-0.95)}{(z-1)} \tag{4.27}$$

O Lugar das Raízes do Sistema em Malha Fechada é mostrado a seguir:

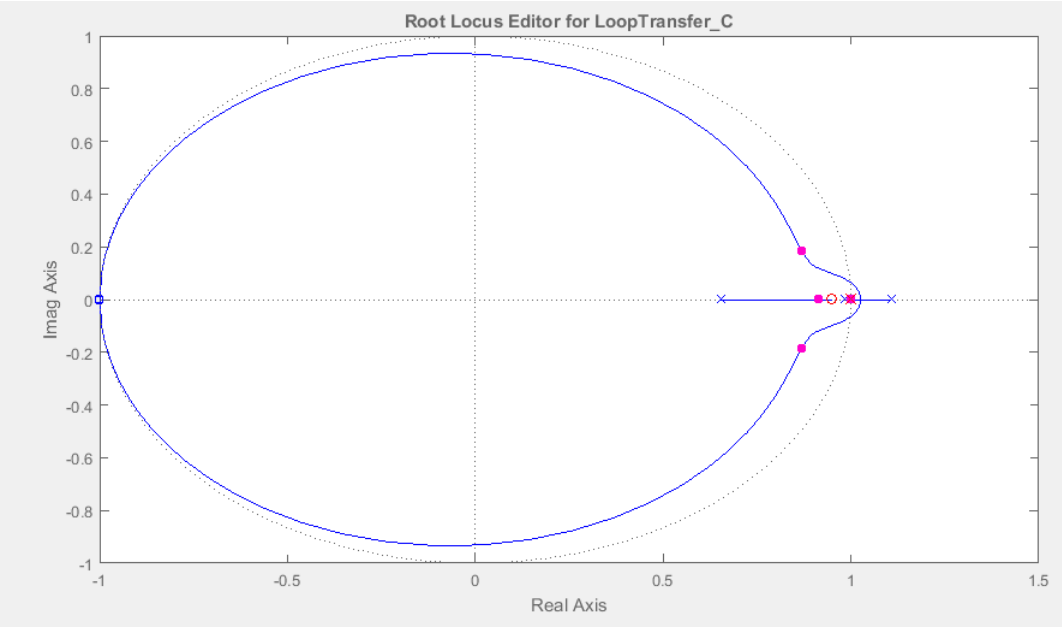

Figura 4.8: Lugar das Raízes da Malha do ângulo do pêndulo

Também projetou-se o controlador para a posição do carrinho em função do ângulo, utilizando (4.26), que representa a malha externa do sistema:

$$C_{x\theta}(z) = \frac{1.2(z-0.85)}{(z-0.45)} \tag{4.28}$$

O Lugar das Raízes do sistema em malha fechada é mostrado a seguir:

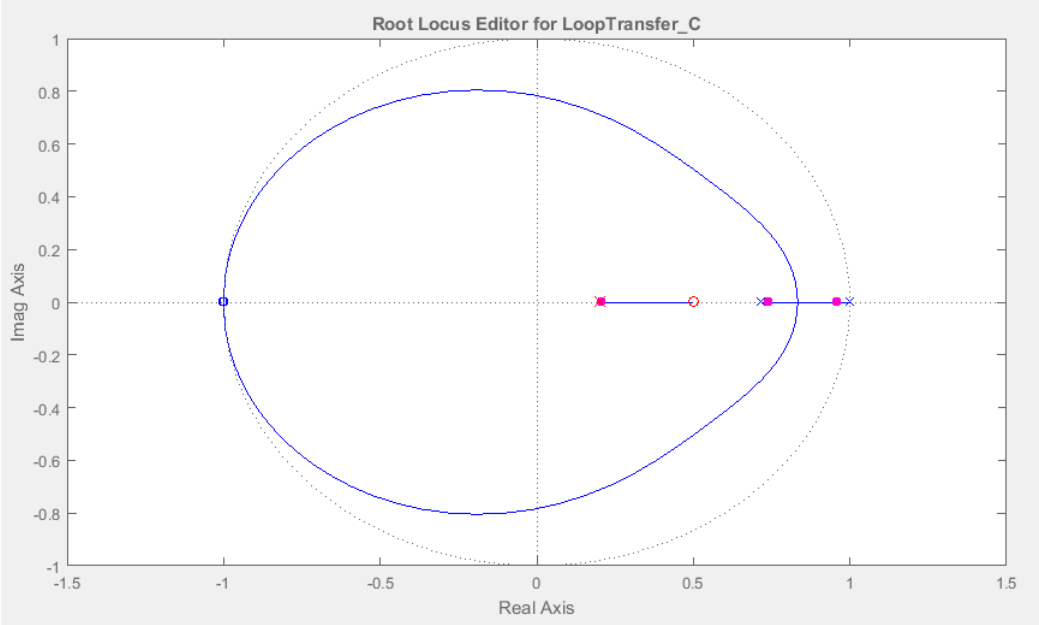

Figura 4.9: Lugar das Raízes da Malha da Posição do carrinho

Os controladores projetados foram implementados no sistema construído em Matlab para validação.

Inicialmente, testou-se apenas o controlador para o ângulo do pêndulo, desconsiderando a dinâmica da posição do carrinho.

O resultado é mostrado abaixo.

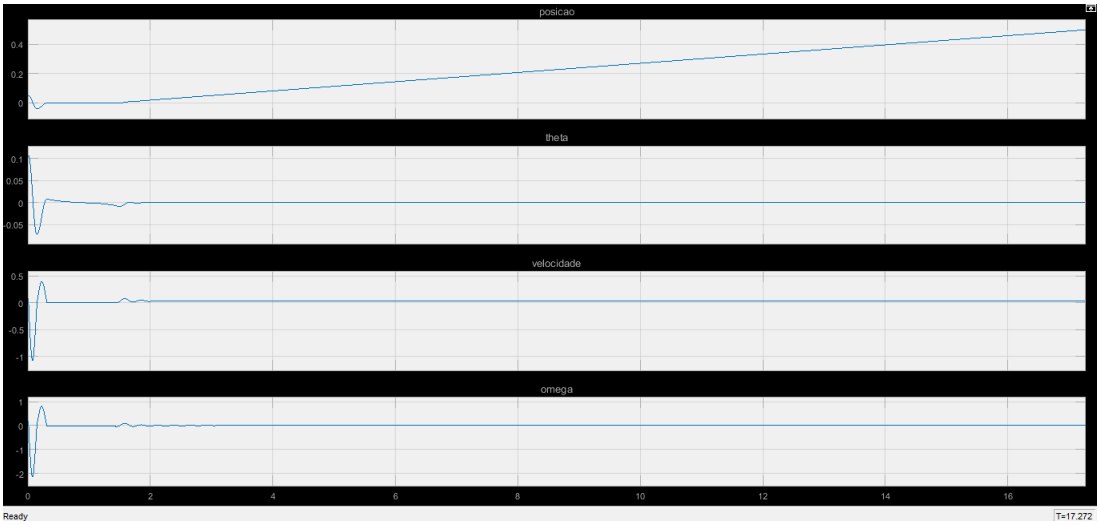

Figura 4.10: Resposta do sistema para o Controlador do ângulo do pêndulo

É possível notar que o controlador é capaz de estabilizar o ângulo em cerca de 1.0s, embora haja considerável oscilação no início. O resultado valida a eficácia do controlador projetado. Nota-se também que o carrinho chega a bater na extremidade do trilho, uma vez que não existe ação de controle atuando sobre sua dinâmica.

A entrada de controle é mostrada abaixo:

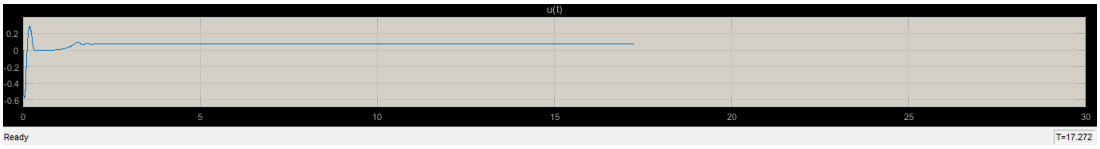

Figura 4.11: Entrade de controle para o Controlador do ângulo do pêndulo

Em seguida, implementa-se o controlador da malha externa (posição do carrinho). A figura abaixo mostra o resultado obtido.

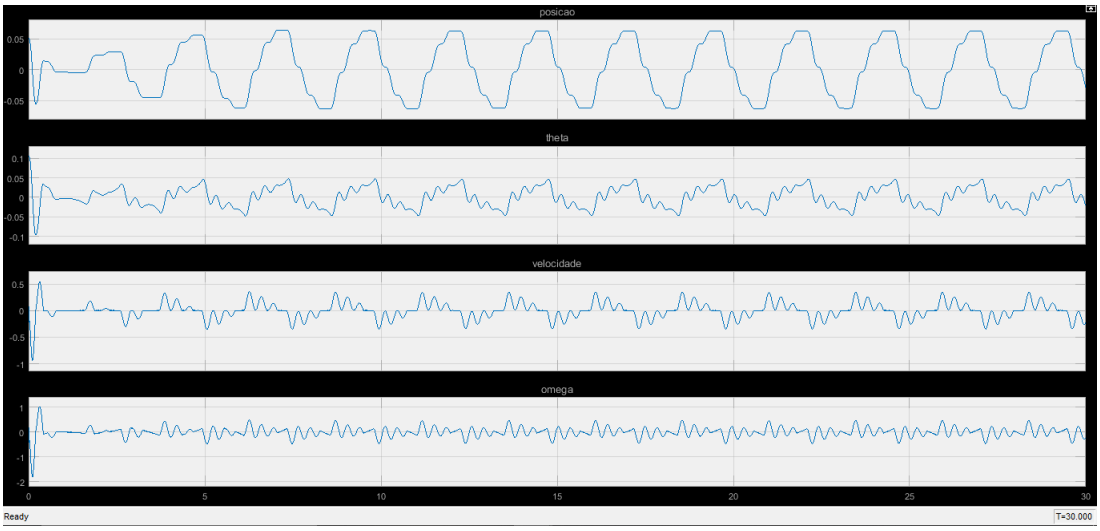

Figura 4.12: Controle Cascata considerando Atrito de Coulomb

A entrada de controle é mostrada a seguir:

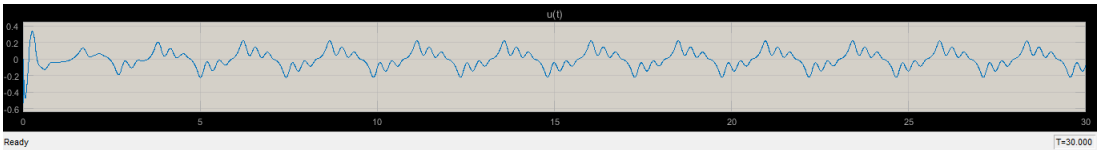

Figura 4.13: Entrada de Controle considerando Atrito de Coulomb

Vemos que ao implementar o controlador da posição do carrinho, o sistema torna-se oscilatório, sem que as variáveis de interesse se estabilizem no ponto de equilíbrio desejado. Ao analisar a dinâmica do sistema, vemos que isso ocorre devido ao atrito de Coulomb do carrinho com o trilho (não-linear). Para validar o controle em cascata do modelo linearizado, desprezamos, então, o atrito de Coulomb. O sistema é simulado novamente e o resultado é mostrado abaixo.

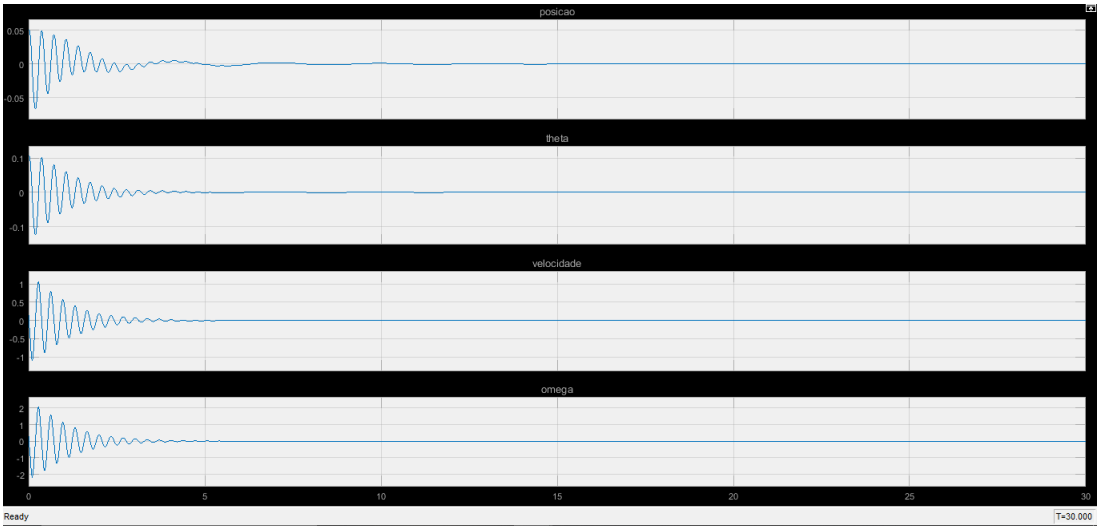

Figura 4.14: Controle Cascata desprezando Atrito de Coulomb

A seguir vemos a entrada de controle:

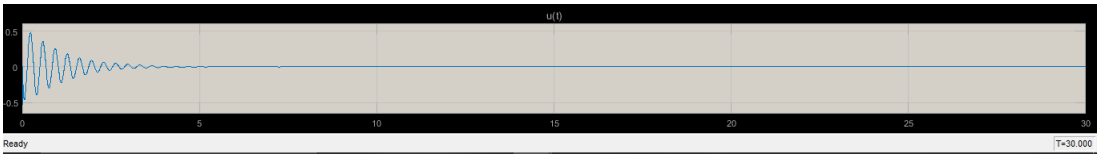

Figura 4.15: Entrada de Controle desprezando Atrito de Coulomb

É possível verificar que a posição do carrinho e o ângulo do pêndulo atingem os pontos de referência desejados em menos de 10 segundos, considerando um ângulo inicial de $\pi/10$. Conclui-se que os controladores são capazes de estabilizar o sistema dentro de um período satisfatório.

4.3.2 Estabilização do Sistema por Controle em Espaço de Estados

O projeto do controlador por Realimentação de Estados é feito com base na Fórmula de Ackermann. Como os controladores são implementados em ambiente simulado, é todos os estados do sistema são conhecidos. Porém, no caso da planta física do laboratório de Controle, apenas o ângulo do pêndulo e a posição do carrinho são medidas. Uma alternativa para esse caso seria construir obrservadores de estados para medir a velocidade do carrinho e a velocidade angular do pêndulo.

Para isso, escolhe-se quatro pólos reais e estáveis para o sistema em malha fechada.

os pólos escolhidos são:

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.8 & 0.99 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Obtém-se o vetor de ganhos de Estados para o Controlador do tipo u=-Kx.

$$K = \begin{bmatrix} -39.5329 & 48.6806 & -42.4815 & 20.4952 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Finalmente, o controlador é implementado em ambiente simulado para validação. O resultado obtido é mostrado a seguir:

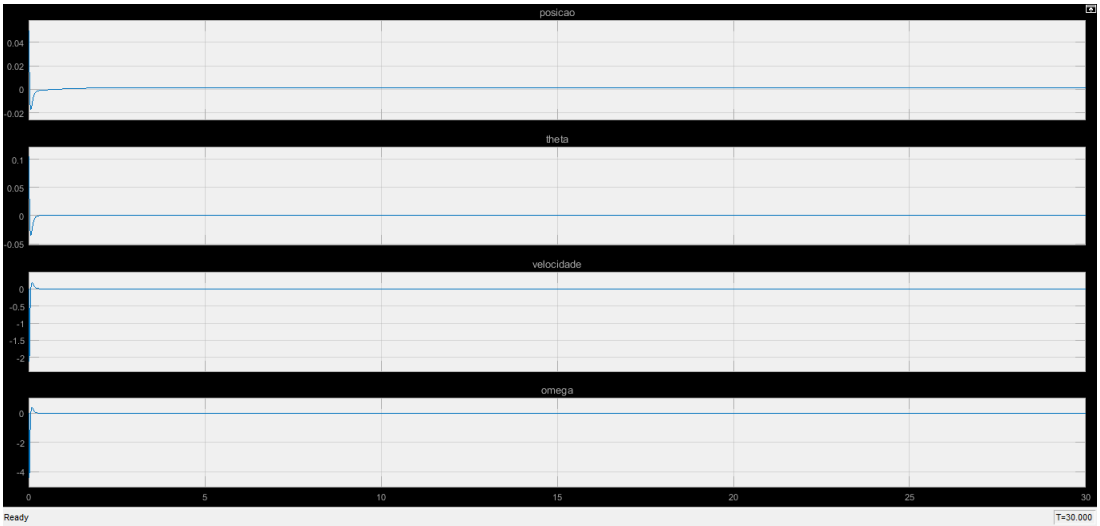

Figura 4.16: Resposta do Sistema para Controle por Realimentação de Estados com Atrito de Coulomb

A entrada de controle do sistema é plotada abaixo:

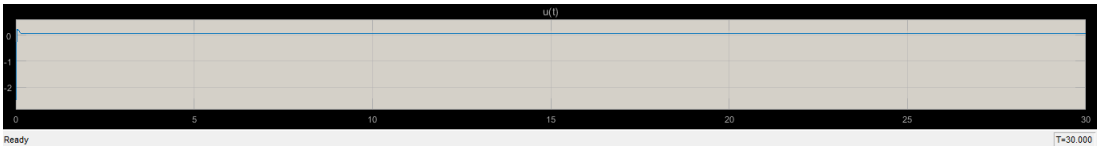

Figura 4.17: Entrada de Controle por Realimentação de Estados com Atrito de Coulomb

É possível notar que o controlador projetado é capaz de estabilizar o ângulo do pêndulo. Porém, verifica-se que a posição do carrinho apresenta um pequeno erro em regime permanente. Isso é mostrado na figura abaixo.

Figura 4.18: Erro em Regime Permanente do Sistema com Atrito de Coulomb

O controlador é testado, então, para o caso em que despreza-se o atrito de Coulomb, devido à sua natureza não-linear. O resultado é mostrado a seguir.

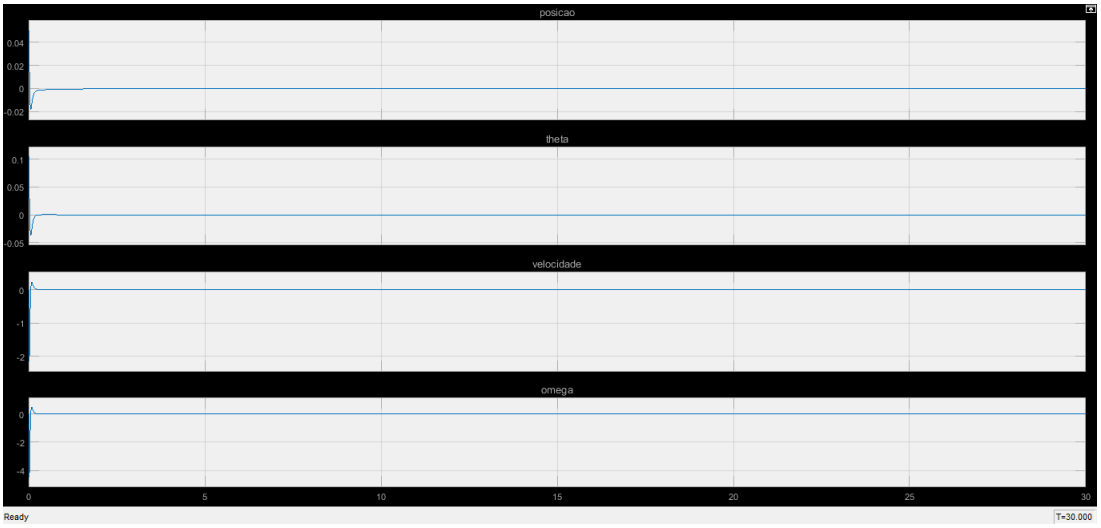

Figura 4.19: Controle por Realimentação de Estados desprezando Atrito de Coulomb

A entrada de controle é mostrada a seguir:

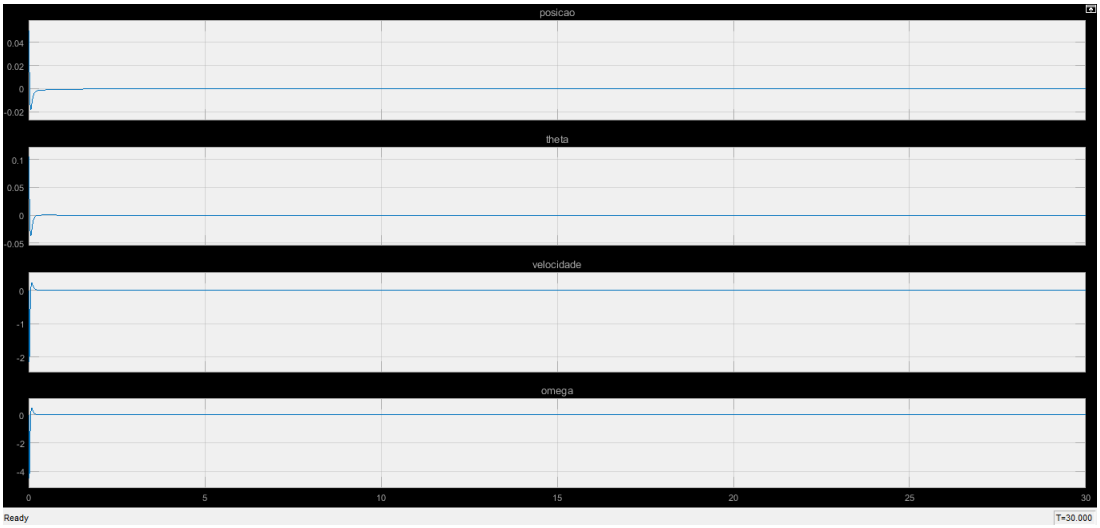

Figura 4.20: Entrada de Controle por Realimentação de Estados desprezando Atrito de Coulomb

Vemos que para esse caso, o controlador é capaz de estabilizar o sistema sem que haja erro em regime permanente. É possível notar, também, que o sistema é estabilizado em menos de 3s, sem que haja oscilação considerável para ambas as variáveis de interesse. Isso acontece porque os pólos desejados em malha fechada foram alocados sobre o eixo real, com um dos pólos bem próximo ao círculo de raio unitário.

4.4 Resumo do Capítulo

Nesse capítulo foram apresentados os projetos de controladores utilizados para a subida e estabilização do pêndulo-invertido.

A lei de controle não-linear não foi capaz de levantar o pêndulo até uma zona de estabilização, onde o ângulo estivesse próximo do desejado e fosse possível chavear o controle para um dos controles lineares. Esse problema é explicado pela presença de forças de atrito no sistema físico, utilizado como referência para esse trabalho, em especial a natureza não linear do Atrito de Coulomb. Tais forças de Atrito não foram consideradas por durante o projeto.

Também foram apresentadas duas estratégias lineares para estabilização do sistema. Vimos que o Atrito de Coulomb dificulta a ação dos controladores. Quando esse termo é desconsiderado, os controladores projetados são capazes de estabilizar o sistema.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Considerações Finais

Os resultados obtidos mostram que o modelo da planta do Laboratório de Controle de Processos Secos da EE-UFMG, utilizado como referência nesse trabalho, apresenta algumas características que dificultam a implementação de lei de controle capazes de levantá-lo da condição inicial de pêndulo simples e estabilizá-lo na condição de pêndulo invertido. As dinâmicas das forças de atrito presentes no modelo, em especial o Atrito de Coulomb, são características dificilmente consideradas nos modelos de referência encontrados na literatura acadêmica, embora o levantamento e estabilização de pêndulos invertidos seja um assunto com extensa referência no estudo de controle.

A lei de controle proposta por não é capaz de realizar o levantamento completo do pêndulo para a condição desejada, devido às dinâmicas descritas acima. Um possível estudo futuro poderia readequá-la para que seja capaz de levantar o pêndulo do modelo em estudo até a zona de estabilização, onde controladores lineares seriam capazes de estabilizar o pêndulo na condição vertical para cima.

Para a estabilização do sistema, as leis de controle baseadas no modelo em cascata apresentam oscilações em torno dos pontos de equilíbrio, não conseguindo convergir para as condições desejadas, devido à natureza não linear do Atrito de Coulomb. Quando esse atrito é desprezado, vemos que os controladores são capazes de estabilizar tanto o ângulo do pêndulo como a posição do carrinho nas condições de equilíbrio, embora haja considerável oscilação nos regimes transitórios.

Já o controlador por realimentação de estados é capaz de se aproximar das condições de equilíbrio de forma mais rápida e sem oscilação, mesmo com a presença do Atrito de Coulomb. Quando o atrito é desprezado, vemos que o sistema atinge as condições de equilíbrio desejadas mais rápido que os controladores do modelo em cascata. Isso porque o projeto em Espaço de Estados permite a alocação dos pólos em malha fechada em quaisquer lugares desejados, garantindo maior liberdade para o projeto dos controladores.

5.2 Propostas de Continuidade

Baseado nos resultados obtidos nesse projeto, uma proposta interessante de continuidade seria adaptar a lei de controle não linear para atender o modelo utilizado como referência

para esse trabalho. Também seria interessante implementar as leis de controle na planta física do Laboratório de Controle de Processos da Escola de Engenharia da UFMG. Isso possibilitaria analisar o desempenho das leis projetadas na planta real e a comparação com os resultados obtidos em ambiente simulado.

Referências Bibliográficas

[1] J. A. Acosta, R. Ortega, A. Astolfi, and A. D. Mahindrakar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(12):1936–1955, December 2005.

[2] Carlos Aguilar-Ibáñez, Miguel S. Suarez-Castanon, and Nareli Cruz-Cortés. Output feedback stabilization of the inverted pendulum system: a Lyapunov approach. *Nonlinear Dynamics*, 70(1):767–777, 2012.

[3] K. J. Aström, J. Aracil, and F. Gordillo. A family of smooth controllers for swinging up a pendulum. *Automatica*, 44(7):1841 – 1848, 2008.

[4] T. Bouarar, K. Guelton, and N. Manamanni. Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi–Sugeno descriptors. *{ISA} Transactions*, 49(4):447 – 461, 2010.

[5] Debasish Chatterjee, Amit Patra, and Harish K. Joglekar. Swing-up and stabilization of a cart–pendulum system under restricted cart track length. *Systems & Control Letters*, 47(4):355 – 364, 2002.

[6] Haibo He, Zhen Ni, and Jian Fu. A three-network architecture for on-line learning and optimization based on adaptive dynamic programming. *Neurocomputing*, 78(1):3 – 13, 2012. Selected papers from the 8th International Symposium on Neural Networks (ISNN 2011).

[7] Feedback Instruments Ltd. Digital Pendulum System - Getting Started.

[8] Victor Gouvêa Santos. Atualização de uma Plataforma para Ensino de Controle: Aplicação ao Pêndulo Invertido, 2009.

[9] J. Si and Yu-Tsung Wang. Online learning control by association and reinforcement. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 12(2):264–276, March 2001.

[10] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International, Inc., second edition edition.

[11] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):14–23, February 1996.

[12] Tzu-Sung Wu, Mansour Karkoub, Ho-Sheng Chen, Wen-Shyong Yu, and Ming-Guo Her. Robust tracking observer-based adaptive fuzzy control design for uncertain nonlinear {MIMO} systems with time delayed states. *Information Sciences*, 290:86 – 105, 2015.

[13] Jun Zhao and Mark W. Spong. Hybrid control for global stabilization of the cart–pendulum system. *Automatica*, 37(12):1941 – 1951, 2001.