Solução dos Exercícios Fourier 2 (b)

Note Title 5/9/2010

Q. 1.

$$y(t) = x(t) * h(t).$$

$$g(t) = x(3t) * h(3t)$$

$x(t) \rightarrow X(j\omega)$
$y(t) \rightarrow Y(j\omega)$
$h(t) \rightarrow H(j\omega)$

$$g(t) = A\, y(Bt)$$

Solução:

Repare que em g(t) houve compressão de função no tempo $\Longrightarrow$ expansão na frequência, logo.

$$\begin{cases} x(3t) & \text{---} \quad \frac{1}{3} X(j\omega/3) \\ h(3t) & \text{---} \quad \frac{1}{3} H(j\omega/3) \end{cases}$$

$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{3} X(j\omega/3) \times \frac{1}{3} H(j\omega/3)$$

Sabemos também que:

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \times H(j\omega)$$

Podemos escrever

$$Y(j\omega/3) = X(j\omega/3) \times H(j\omega/3)$$

Comparando $G(j\omega)$ com $Y(j\omega/3)$, temos

$$G(j\omega) = \frac{1}{9} Y(j\omega/3).$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} Y\left(j\frac{\omega}{3}\right)}$$

$$g(t) = \frac{1}{3} \quad y(3t)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$A \qquad \qquad B$$

$A = 1/3$ e $B = 3$

Q.2

$$e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1+w^2}.$$

Vamos usar a definição para mostrar isso

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-jwt}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-jwt}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-jwt}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-jw)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-1-jw)t}\,dt$$

$$\frac{1}{1-jw} e^{(1-jw)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-1-jw} e^{(-1-jw)t}\Big|_{0}^{\infty} =$$

$$\frac{1}{1-jw} + \frac{1}{1+jw} = \frac{1+jw+1-jw}{1-(-1w^2)} =$$

$$= \frac{2}{1+w^2}$$

a) TF de $te^{-|t|}$

$\downarrow$

derivada na freq.

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} \xleftrightarrow{FT} (-jt)\,x(t)$$

multiplicando por j ambos os lados, temos:

$$j\,\frac{dX(j\omega)}{d\omega} \xleftrightarrow{FT} t\,x(t).$$

No caso de $te^{-|t|}$, temos:

$$te^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} j\,\frac{d}{d\omega}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right) =$$

$$= -\frac{4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

b) Propriedade de dualidade.

$$g(t) \xleftrightarrow{FT} G(j\omega)$$

$$G(jt) \longleftrightarrow 2\pi\, g(-\omega)$$

ou

$$G(t) \longleftrightarrow 2\pi\, g(\omega)$$

Solução:

Repare que $\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}$ é "muito parecido"

Com o resultado anterior $-\dfrac{4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$

$$te^{-|t|} \longleftrightarrow -\frac{4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

$$-\frac{4jt}{(1+t^2)^2} \longrightarrow 2\pi(-\omega)e^{-|\omega|}$$

Multiplicando por j ambos os lados, temos

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2} \longleftrightarrow -2\pi j \omega e^{-|\omega|}$$

0.3.

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$$

$$h(t) = u(t) - u(t-2)$$

a) $x(t)$ é periódico?

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} e^{+j\pi t} + \frac{1}{2} e^{+j5t}$$

ω_1 ω_2

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s$$

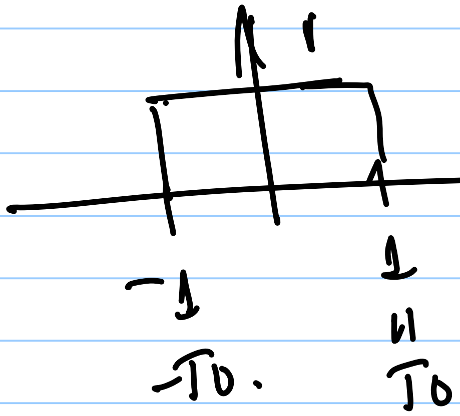
$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}\ s$$

$\frac{T_1}{T_2}$ não é racional $\Rightarrow$ não-periódico

b) $x(t) * h(t)$?

$h(t) = u(t) - u(t-2)$

que é



$2T_0 \dfrac{\sin(\omega T_0)}{\omega T_0}$.

$\Downarrow$

$2 \dfrac{\sin(\omega)}{\omega}$

Como está atrasado de 1, temos

$$H(j\omega) = 2\frac{\sin(\omega)}{\omega} e^{-j\omega}$$

Quando $\omega = k\pi$ ($k \neq 0$ inteiro), $H(jk\pi) = 0$, logo:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) . X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - 5)$$

$$y(t) = 1/2\pi + \frac{1}{2\pi} e^{j5t} \rightarrow \text{periódico.}$$

c) fin , veja b).

Q.4

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega).$$

a) $x(t)$ é real e não negativo

b) $\mathcal{F}^{-1}\left((1+j\omega) X(j\omega) \right) = Ae^{-2t}u(t)$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$

Solução:

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\left((1+j\omega) X(j\omega) \right) \right) = \frac{A}{j\omega+2}$$

$$\downarrow$$

$$(1+j\omega) X(j\omega) = \frac{A}{j\omega+2}$$

$$X(j\omega) = \frac{A}{(j\omega+2)(1+j\omega)} =$$

$$= A\left(\frac{a}{j\omega+2} + \frac{b}{1+j\omega} \right) =$$

$$= \frac{(a + ja\omega + 2b + j\omega b)A}{(j\omega+2)(1+j\omega)}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+2b=1. \\ a+b=0 \end{array}\right\} \rightarrow b=1,\ a=-1$$

$$A\left(\frac{-1}{j\omega+2}+\frac{1}{j\omega+1}\right)$$

$$x(t)=-Ae^{-2t}u(t)+Ae^{-t}u(t)$$

Sabemos que.

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\,d\omega}_{2\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$$

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|-Ae^{-2t}+Ae^{-t}\right|^2u(t)\,.\,dt=1$$

$$A^2\int_0^{\infty}\left|e^{-4t}+e^{-2t}-2e^{-3t}\right|dt=1$$

$$A^2\left[\int_0^{\infty}e^{-4t}\,dt+\int_0^{\infty}e^{-2t}\,dt-2\int_0^{\infty}e^{-3t}\,dt\right]=1$$

$$A^2\left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^{\infty} - 2\,\frac{(-1)}{3}e^{-3t}\Big|_0^{\infty}\right] = 1$$

$$A^2\left[+\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right] = 1.$$

$$A^2\left[\frac{3}{12} + \frac{6}{12} - \frac{8}{12}\right] = 1$$

$$A^2 \times \frac{1}{12} = 1 \rightarrow A^2 = 12 \rightarrow A = \sqrt{12}$$

x é ñ-negativo.

$$x(t) = \sqrt{12}\left(-e^{-2t} + e^{-t}\right)u(t).$$

0.5.

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

a) $x(t)$ é real

b) $x(t) = 0$ para $t \leq 0$

c) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Re(X(j\omega)) e^{j\omega t} d\omega = |t| e^{-|t|}$

Solução:

Para gerar só a parte real de $X(j\omega)$, ou seja, $Re(X(j\omega))$ é preciso de a função no tempo tem que ser par.

$$Par(x(t)) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = |t| e^{-|t|}$$

Mas

$x(t) = 0$ para $t \leq 0$

$x(-t) = 0$ para $t > 0$

Sol:

$$x(t) = 2|t| e^{-(t)} u(t).$$

Q.6.

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{j\omega+3}} \longrightarrow \left(e^{-3t}-e^{-4t}\right)u(t)$$

Solution: Deconvolution.

$$y(t) = \left(e^{-3t}-e^{-4t}\right)u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega+3} - \frac{1}{j\omega+4}$$

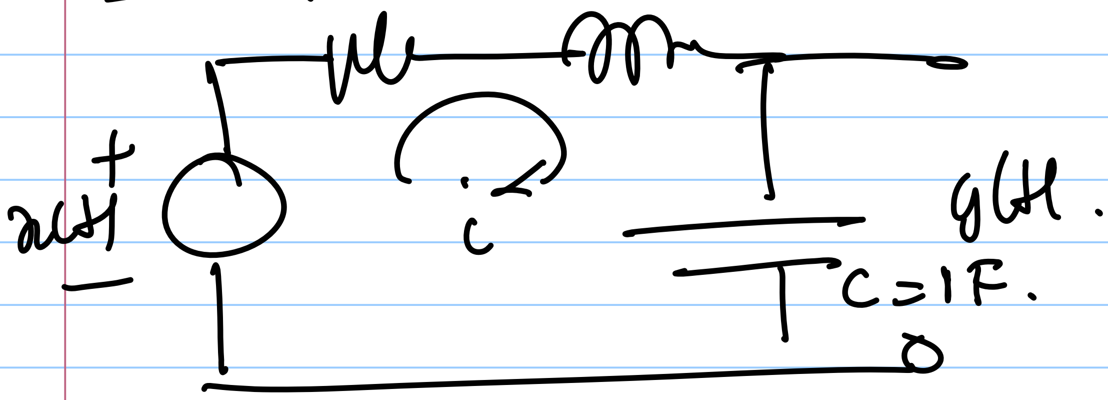
$$= \frac{1}{(j\omega+3)(j\omega+4)}$$

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{1}{\cancel{(j\omega+3)}(j\omega+4)} \times \frac{\cancel{j\omega+3}}{1}$$

$$= \frac{1}{j\omega+4}$$, So:

$$x(t) = e^{-4t}u(t).$$

Q.7 $R = 1\Omega$ $L = 1H$



$$i = C\dot{y}.$$

$$x = RC\dot{y} + LC\ddot{y} + y.$$

$$\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}x.$$

$$\downarrow$$

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + \frac{R}{L}(j\omega)Y(j\omega) + \frac{1}{LC}Y(j\omega) =$$

$$= \frac{1}{LC}X(j\omega)$$

$$Y(j\omega)\left[(j\omega)^2 + \frac{R}{L}(j\omega) + \frac{1}{LC}\right] = \frac{X(j\omega)}{LC}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1/LC}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}(j\omega) + \frac{1}{LC}} = H(j\omega)$$

$\mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$.