Capítulo 3 - Métodos de Fourier

Prof. Fernando de Oliveira Souza

(baseado nas notas de aula de SDL do Prof. Eduardo Mendes)

`fosouza@cpdee.ufmg.br` (`http://www.cpdee.ufmg.br/~fosouza/`)

Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil

Representações de sinais por Fourier

Representações de sinais como uma combinação linear de um conjunto de sinais básicos.

- Série de Fourier: representações de sinais periódicos como a combinação linear de exponenciais complexas.

Representações de sinais por Fourier

- Sinal Contínuo e Periódico - Série de Fourier (FS)
- Sinal Discreto e Periódico - Série de Fourier Discreta (DTFS)
- Sinal Contínuo e Não-Periódico - Transformada de Fourier (FT)
- Sinal Discreto e Não-Periódico - Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

Resposta Senoidal Sistema LTI (Contínuo)

Considere $x(t) = e^{j\omega t}$, logo

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{j\omega t} H(j\omega) \end{aligned}$$

- $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg\{H(j\omega)\}}$
- $H(j\omega)$ resposta em frequência

Resposta Senoidal Sistema LTI (Contínuo)

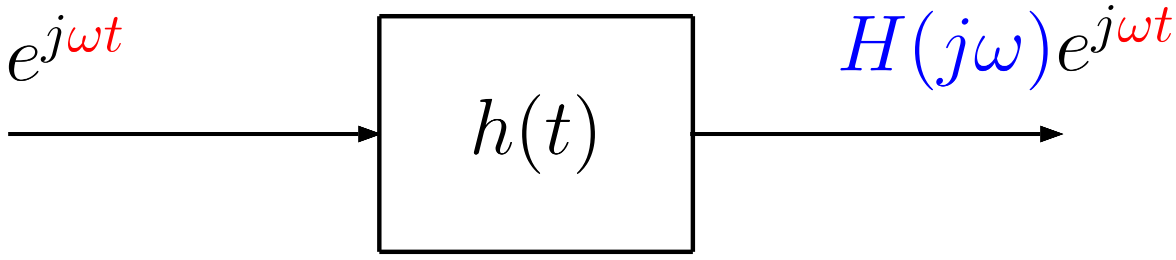
$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg\{H(j\omega)\}}$, logo

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{j\omega t}H(j\omega) \\ &= e^{j\omega t}|H(j\omega)|e^{j\arg\{H(j\omega)\}} \\ &= |H(j\omega)|e^{(j\omega t + \arg\{H(j\omega)\})} \end{aligned}$$

- $H(j\omega)$ resposta em frequência
- $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg\{H(j\omega)\}}$
  - $|H(j\omega)|$ resposta em módulo ou magnitude
  - $\arg\{H(j\omega)\}$ resposta em fase

Resposta Senoidal Sistema LTI (Contínuo)

Em termos de diagrama de blocos,

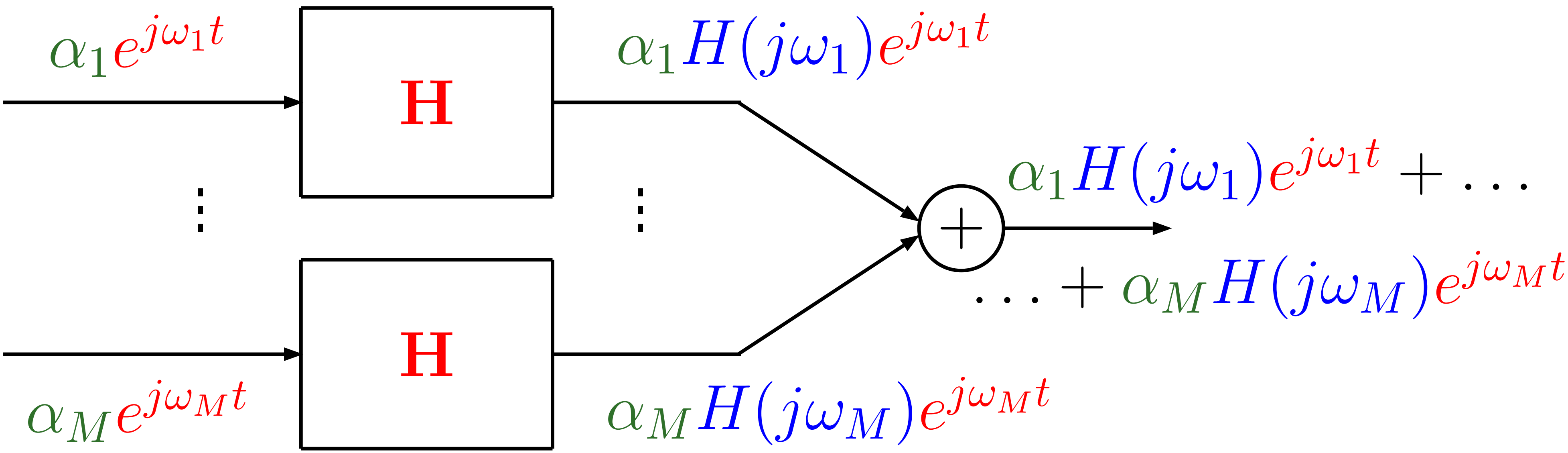


$$\boxed{\begin{gathered} A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{H}\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega)e^{j\omega t} \end{gathered}}$$

- $e^{j\omega t}$ é a autofunção
  - Convolução torna-se uma multiplicação
- $H(j\omega)$ é o autovalor
  - Fator de amplitude

Resposta Senoidal Sistema LTI (Contínuo)

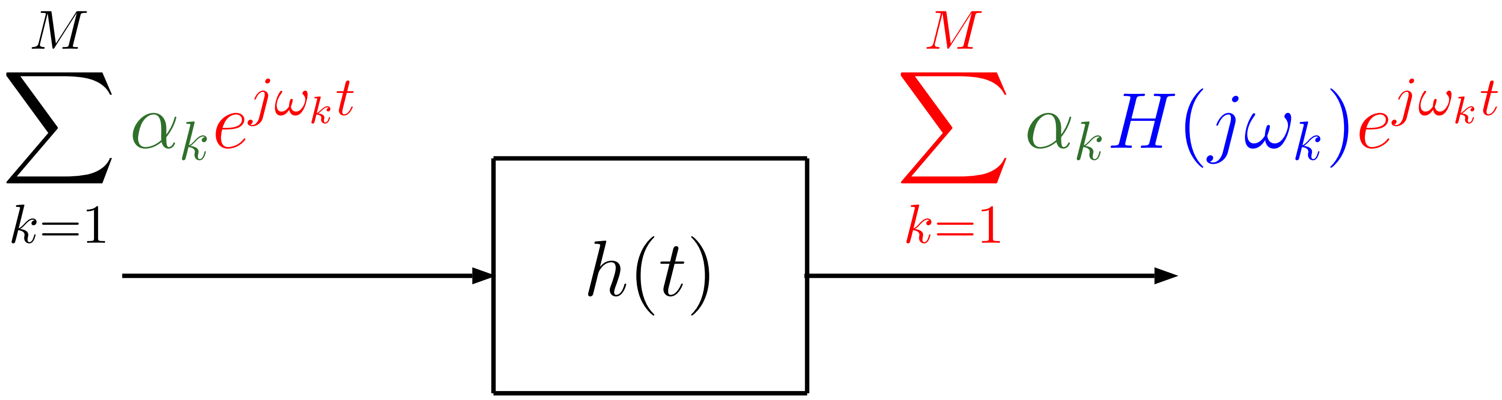
- Assumindo que $\mathbf{H}$ é LTI.
  - Se: $x(t) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k e^{j\omega_k t}$



  - Então: $y(t) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$

Resposta Senoidal Sistema LTI (Contínuo)

- Portanto:



- Se a entrada de um sistema LTI for uma combinação de exponenciais complexas, então a saída também será uma combinação de exponenciais complexas.

Série de Fourier

- Considere o sinal periódico

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = e^{j(2\pi/T_0)t}$$

- Série de Fourier: representações de sinais periódicos como a combinação linear de exponenciais complexas.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k t}$$

Série de Fourier

- Considere o sinal periódico

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k t}$$

- A soma de sinais periódicos é um sinal periódico se todos estes sinais possuem o mesmo período, T.
- $x(t)$, na eq. acima, é periódico então

$$\omega_k = k\omega_0$$

Série de Fourier

- Considere o sinal periódico

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k t}$$

fazendo, $\omega_k = k\omega_0$, temos

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=1}^{M} a_k \phi_k$$

sendo $\phi_k = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T_0)t}$, funções exponenciais *harmonicamente relacionadas* com $x(t)$.

Série de Fourier Contínua

- Série de Fourier: representações de sinais periódicos como a combinação linear de exponenciais complexas.

- Representação por Série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T_0)t}$$

sendo $\phi_k = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T_0)t}$, com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ funções exponenciais *harmonicamente relacionadas* com $x(t)$.

Série de Fourier

- Representação por Série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T_0)t}$$

  - $a_k e^{jk\omega_0 t}$ = constante, para $k = 0$;
  - $a_k e^{jk\omega_0 t}$, $k = \pm 1$ componentes fundamentais ou de primeira harmônica;
  - $a_k e^{jk\omega_0 t}$, $k = \pm 2$, segunda harmônica;
  - $a_k e^{jk\omega_0 t}$, $k = \pm N$, N-ésima harmônica;

Exemplo

Encontre a representação em FS do sinal

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- Período Fundamental é:

$$\begin{cases} T_o = 4, \\ \omega_0 = \pi/2 \end{cases}$$

Exemplo

- Portanto, de posse de $\omega_0 = \pi/2$, temos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= 3\frac{e^{j(\pi/2t+\pi/4)} + e^{-j(\pi/2t+\pi/4)}}{2} \\
&= \underbrace{\frac{3}{2}e^{j\pi/4}}_{a_1} e^{j(1)(\pi/2)t} + \underbrace{\frac{3}{2}e^{-j\pi/4}}_{a_{-1}} e^{j(-1)(\pi/2)t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Logo,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

sendo $\omega_0 = \pi/2$ e

$$a_k = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-j\pi/4} & k = -1 \\ \frac{3}{2}e^{j\pi/4} & k = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício 1

Encontre a representação em FS do sinal

$$x(t) = 2\mathrm{sen}(2\pi t - 3) + \mathrm{sen}(6\pi t)$$

Exercício 2

Encontre a representação em FS do sinal

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

Representação de sinais reais, $x(t) = x^*(t)$ em Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

fazendo $k = -k$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

Portanto,

$$a_k = a_{-k}^* \quad \text{ou} \quad a_k^* = a_{-k}$$

Série de Fourier: Rep. alternativa de sinais reais (i)

Note que,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}]$$

para $x(t) = x^*(t)$ temos, $a_k^* = a_{-k}$, logo

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}]$$

logo,

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{real}\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

Temos que, para $x(t) = x^*(t)$,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{real}\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

escrevendo $a_k = A_k e^{j\theta_k}$, temos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{real}\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\}$$

ou

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

Série de Fourier: Rep. alternativa de sinais reais (iii)

Temos que, para $x(t) = x^*(t)$,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{real}\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

escrevendo $a_k = B_k + jC_k$, temos

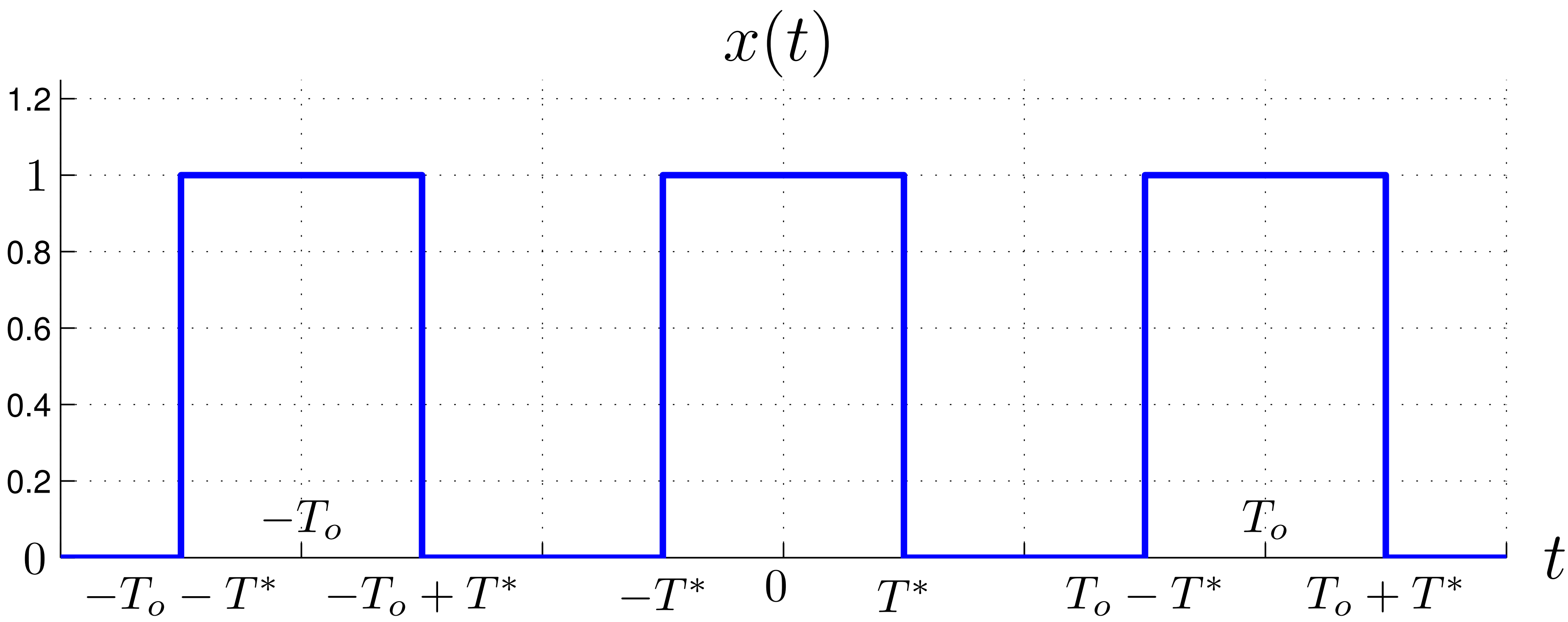
$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\text{real}\{B_k e^{jk\omega_0 t} + jC_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

ou

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \text{sen}(k\omega_0 t)]$$

Determinação dos Coeficientes da FS

Encontre a FS para sinal abaixo.



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad ???$$

Determinação dos Coeficientes da FS

Determinação dos coeficientes da FS

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Multiplicando por $e^{-jn\omega_0 t}$ $(n \in \mathbb{I})$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

Integrando em $t \in [0,\ T_0]$ $(T_0 = 2\pi/\omega_0)$

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^{T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt\right]$$

Determinação dos Coeficientes da FS

Determinação dos coeficientes da FS

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right]}_{??}$$

- Resolva a integral:

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^{T_0} \cos([k-n]\omega_0 t)dt + j\int_0^{T_0} \operatorname{sen}([k-n]\omega_0 t)dt$$

Determinação dos Coeficientes da FS

Temos que,

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right] \\ &= a_n T_0 \end{aligned}$$

Determinação dos Coeficientes da FS

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right] \\ &= a_n T_0\end{aligned}$$

Finalmente,

$$a_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Note que, para $n = 0$, temos

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \text{valor médio de } x(t)$$

Determinação dos Coeficientes da FS

Representação de sinais periódicos de tempo contínuo em Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T_0)t},$$

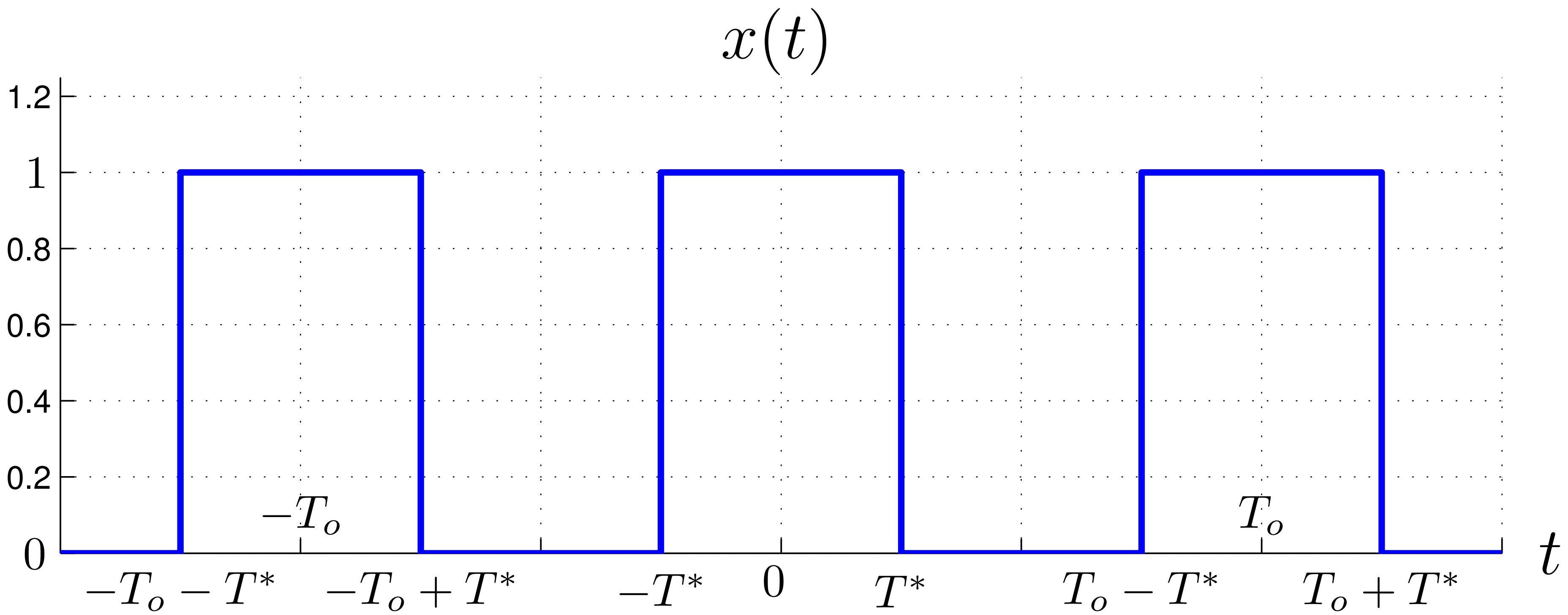
sendo,

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk(2\pi/T_0)t}dt$$

- $\int_{T_0}$: integração em um intervalo de duração T_0

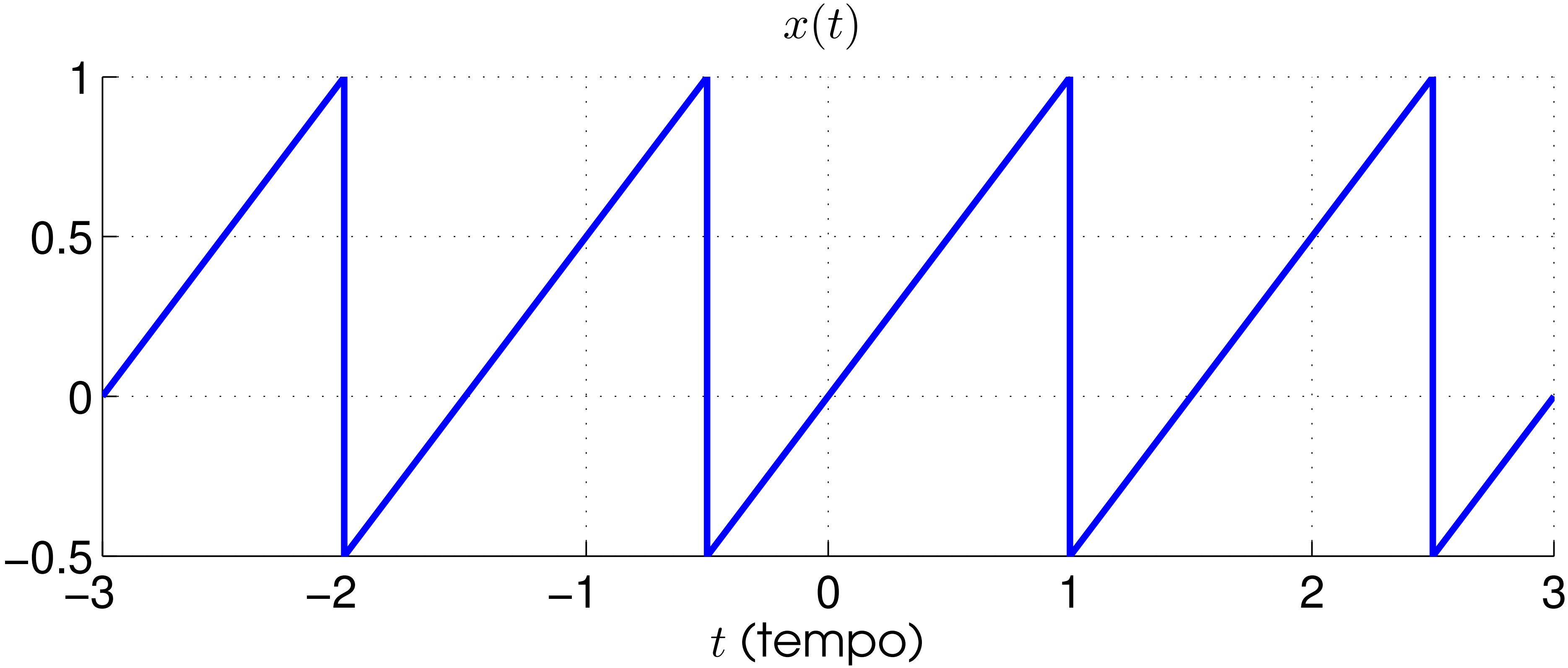
Exercício 3: Onda Quadrada

Encontre a FS para a onda quadrada mostrada abaixo.



Exercício 4: Dente de Serra

Encontre a FS para o sinal dente de serra mostrado abaixo.



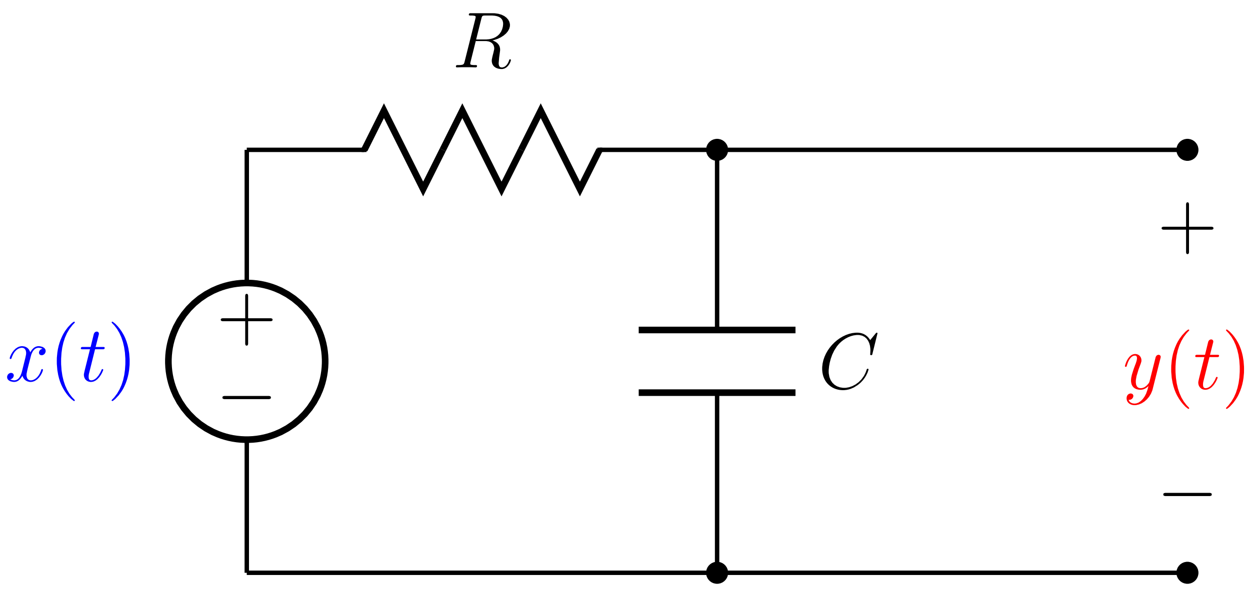
Exercício 5: Trem de Impulsos

Encontre a representação em FS para o seguinte trem de impulsos:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT_o)$$

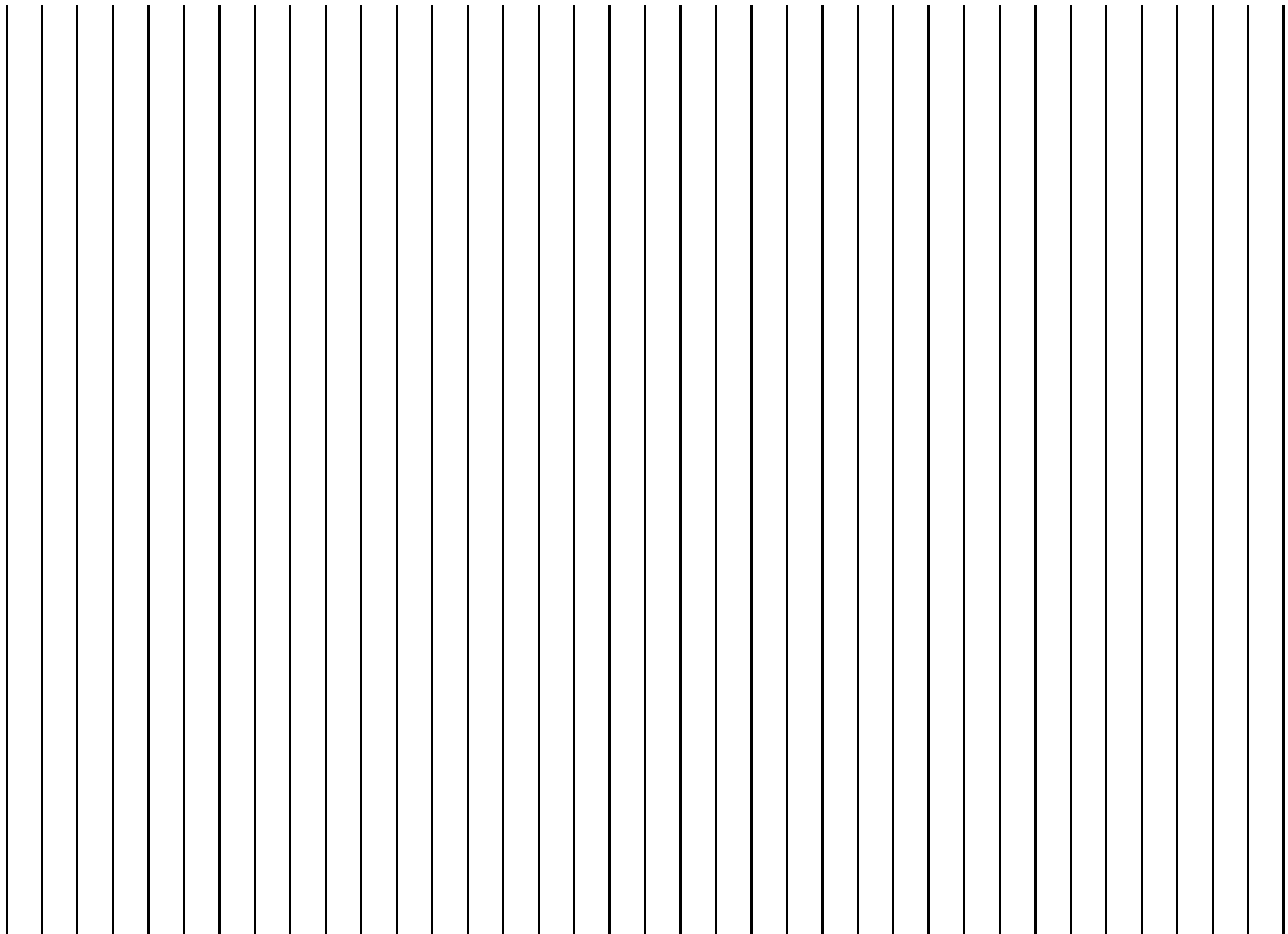
Exercício 6: Circuito RC

Qual a saída deste sistema quando a entrada é uma onda quadrada?



sendo

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



Ortogonalidade

Produto interno entre dois sinais periódicos:

$$\int_T u(t)v^*(t)dt$$

Dois sinais são ortogonais se o produto interno entre eles é zero:

$$\int_T u(t)v^*(t)dt = 0$$

Ortogonalidade

Considere $u(t) = e^{jk\omega_0 t}$ e $v(t) = e^{jm\omega_0 t}$, logo

$$\int_0^{T_0} u(t)v^*(t)dt = \int_0^{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt$$

temos que

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T_0, & k = m \\ \frac{1}{j(k-m)\omega_0} e^{j(k-m)\omega_0 t}\Big|_0^{T_0}, & k \neq m \end{cases}$$

Ortogonalidade

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = m \\ \frac{1}{j(k-m)\omega_0} e^{j(k-m)\omega_0 t}\Big|_0^{T_0}, & k \neq m \end{cases}$$

- $e^{j(k-m)\omega_0 T_0} = e^{j(k-m)2\pi} = 1$

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Erro Médio Quadrático (MSE)

Sendo,

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{a}_k e^{jk\omega_0 t}$$

Então o erro de aproximação é

$$e(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} \hat{a}_k e^{jk\omega_0 t}$$

Considerando a função objetivo:

$$E = \frac{1}{T_0}\int_T |e(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2$$

Minimização do MSE

Identidade: $|a+b|^2 = (a+b)(a^*+b^*)$, logo

$$E = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^{N} \hat{a}_k^* \underbrace{\left(\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt\right)}_{a_k}$$

$$- \sum_{k=-N}^{N} \hat{a}_k \underbrace{\left(\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t) e^{jk\omega_0 t} dt\right)}_{a_k^*}$$

$$+ \sum_{m=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} \hat{a}_k^* \hat{a}_m \left(\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} e^{-j(k-m)\omega_0 t} dt}_{T_0,\quad k=m} \right)$$

Minimização do MSE

Identidade: $|a+b|^2 = (a+b)(a^*+b^*)$, logo

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^{N} \hat{a}_k^* a_k \\ &- \sum_{k=-N}^{N} \hat{a}_k a_k^* + \sum_{m=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} \hat{a}_k^* \hat{a}_m \end{aligned}$$

Completanto quadrados, temos

$$E = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt + \sum_{k=-N}^{N} |\hat{a}_k - a_k|^2 - \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2$$

Minimização do MSE

$$E = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt + \sum_{k=-N}^{N} |\hat{a}_k - a_k|^2 - \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2$$

- O valor de $\hat{a}_k$ que minimiza E é

$$\hat{a}_k = a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- A medida que N aumenta o erro E diminui.

$$E = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-N}^{N} |\hat{a}_k|^2$$

Convergência da Série de Fourier

Condições de Dirichlet:

- $x(t)$ deve ser absolutamente integrável:

$$|a_k| \leq \frac{1}{T}\int_T |x(t)e^{-jk\omega_0 t}|dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|dt < \infty$$

- Portanto, se

$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

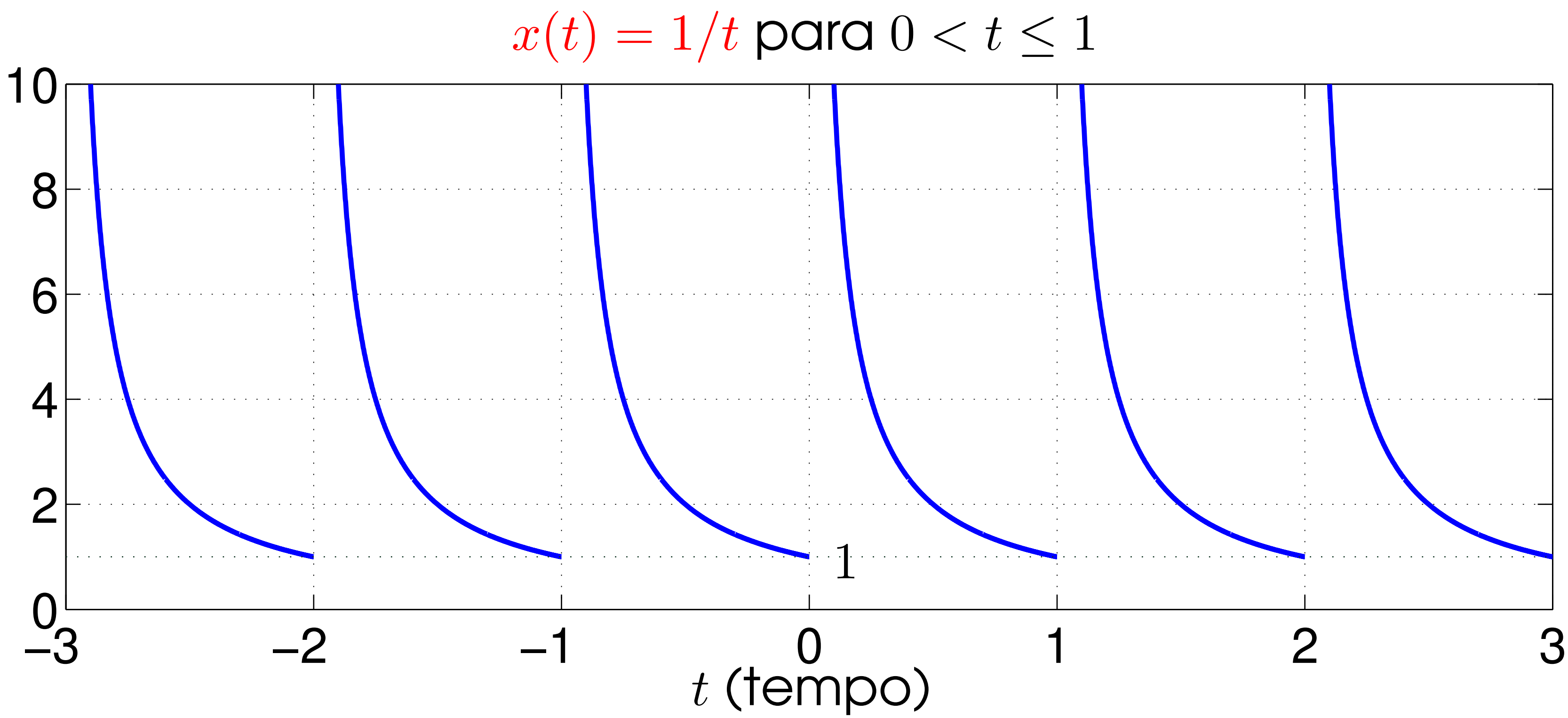
então

$$|a_k| < \infty$$

Convergência da Série de Fourier

Condições de Dirichlet:

- $x(t)$ deve ser absolutamente integrável;
- Contra-exemplo:

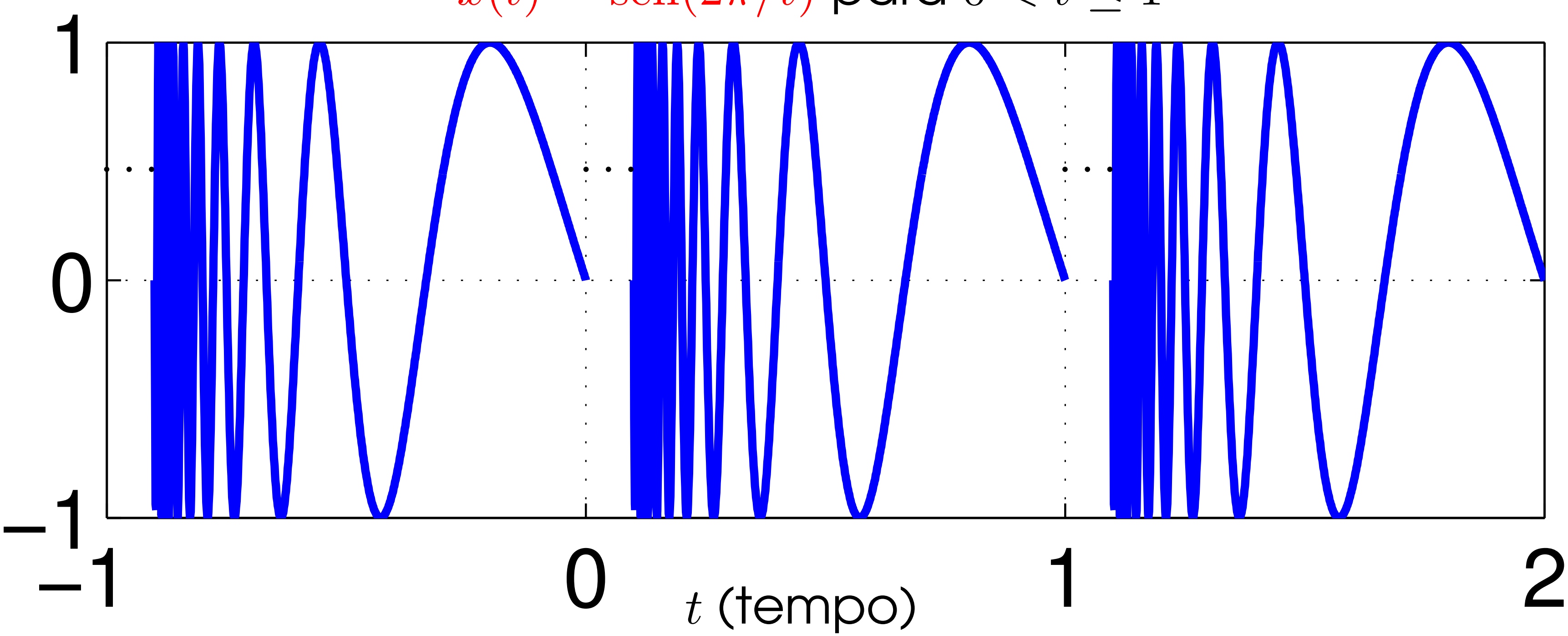


Convergência da Série de Fourier

Condições de Dirichlet:

- $x(t)$ tem variação limitada, ou seja, existe um número finito de máximos e mínimos;
- Contra-exemplo:

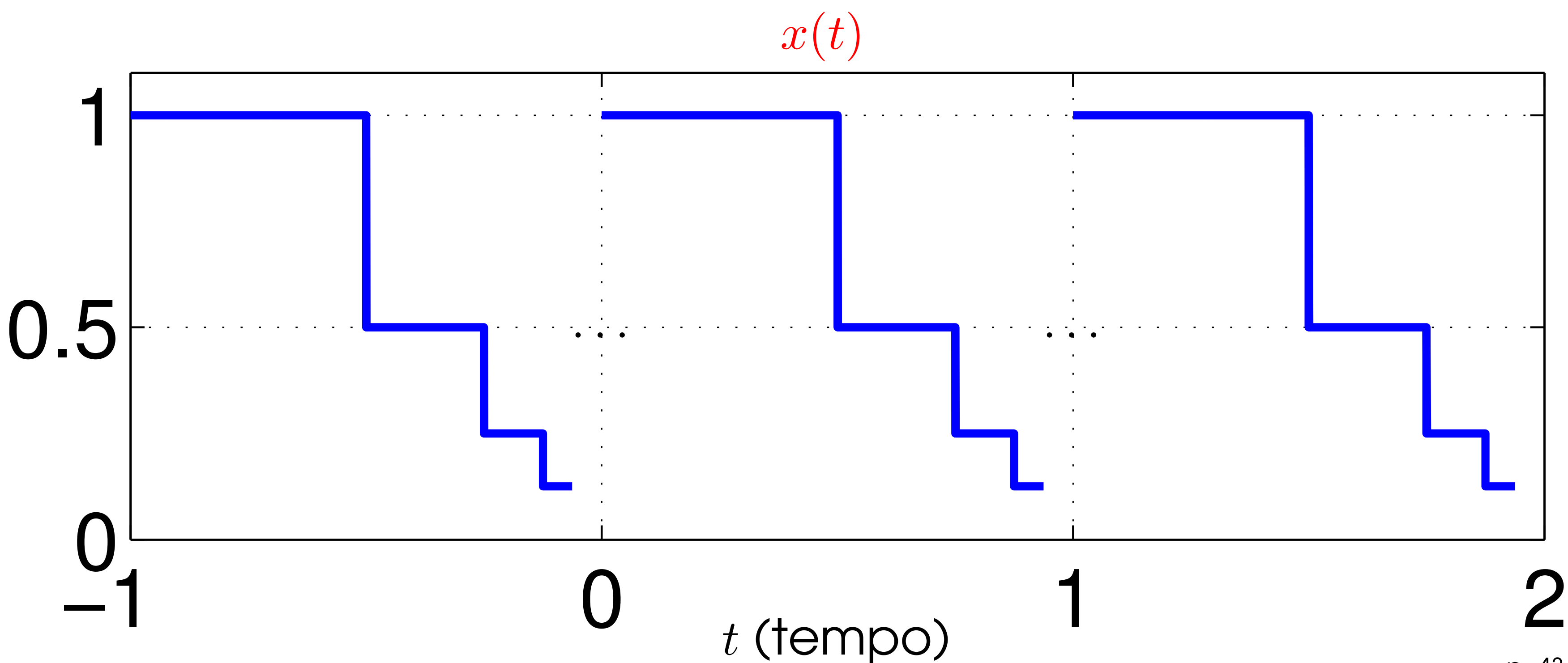
$x(t) = \mathrm{sen}(2\pi/t)$ para $0 < t \leq 1$



Convergência da Série de Fourier

Condições de Dirichlet:

- $x(t)$ em qualquer intervalo de duração finita, existe apenas um número finito de descontinuidades. Além disso, cada descontinuidade é finita;
- Contra-exemplo:



Representações de sinais por Fourier

- Sinal Contínuo e Periódico - Série de Fourier (FS)
- Sinal Discreto e Periódico - Série de Fourier Discreta (DTFS)
- Sinal Contínuo e Não-Periódico - Transformada de Fourier (FT)
- Sinal Discreto e Não-Periódico - Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

Representações de sinais por Fourier

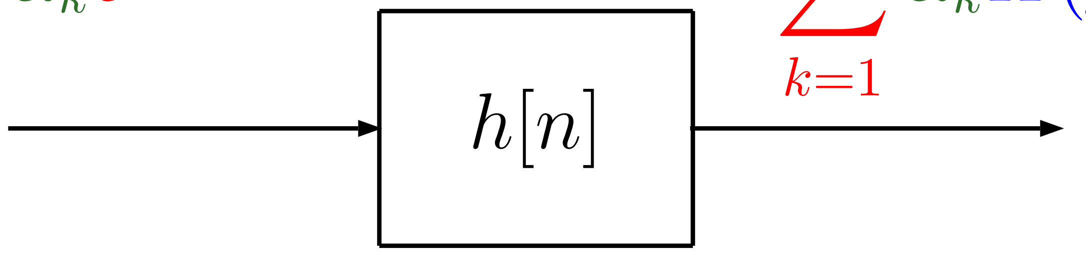
Representações de sinais como uma combinação linear de um conjunto de sinais básicos.

- Série de Fourier: representações de sinais periódicos como a combinação linear de exponenciais complexas.

Resposta Senoidal Sistema LTI (Discreto)

- Temos:

$$\sum_{k=1}^{M} \alpha_k e^{j\omega_k n} \qquad \sum_{k=1}^{M} \alpha_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k n}$$



- Se a entrada de um sistema LTI for uma combinação de exponenciais complexas, então a saída também será uma combinação de exponenciais complexas.

Série de Fourier Discreta

- Considere o sinal periódico

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = e^{j(2\pi/N)n}$$

- Série de Fourier: representações de sinais periódicos como a combinação linear de exponenciais complexas.

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k n}$$

Série de Fourier Discreta

- Considere o sinal periódico

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k n}$$

- A soma de sinais periódicos é um sinal periódico se todos estes sinais possuem o mesmo período, N.
- $x[n]$, na eq. acima, é periódico então:

$$\omega_k = k\omega_0$$

Série de Fourier Discreta

- Considere o sinal periódico

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k n}$$

fazendo, $\omega_k = k\omega_0$, temos

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=1}^{M} a_k \phi_k$$

sendo $\phi_k = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N_0)n}$, funções exponenciais *harmonicamente relacionadas* com $x[n]$.

Série de Fourier Discreta

- Repare que:

$$e^{j(k+M)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} \underbrace{e^{jM\omega_0 n}}_{=1} = e^{jk\omega_0 n}$$

se

$$e^{jM\omega_0} = e^{j2\pi n} = 1$$

logo

$$M\omega_0 = 2\pi \Rightarrow M = 2\pi/\omega_0 = \underline{N}$$

- Portanto, só existem N exponenciais complexas distintas, ou seja

$$e^{jk\omega_0 n} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$$

Série de Fourier Discreta

$$x[n] = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

- Só existem N exponenciais complexas distintas, ou seja

$$e^{jk\omega_0 n} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$$

- Portanto, a série de DTFS leva em conta apenas N coeficientes a_k, pois $a_k = a_{k+N}$,

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

Série de Fourier Discreta

- Série de Fourier Discreta:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

- Considere k no intervalo de 1 a N:

$$x[n] = \underline{a_1 e^{j1\omega_0 n}} + a_2 e^{j2\omega_0 n} + \ldots + a_N e^{jN\omega_0 n}$$

- Considere k no intervalo de 2 a $N+1$:

$$x[n] = a_2 e^{j2\omega_0 n} + \ldots + a_N e^{jN\omega_0 n} + \underline{a_{N+1} e^{j(N+1)\omega_0 n}}$$

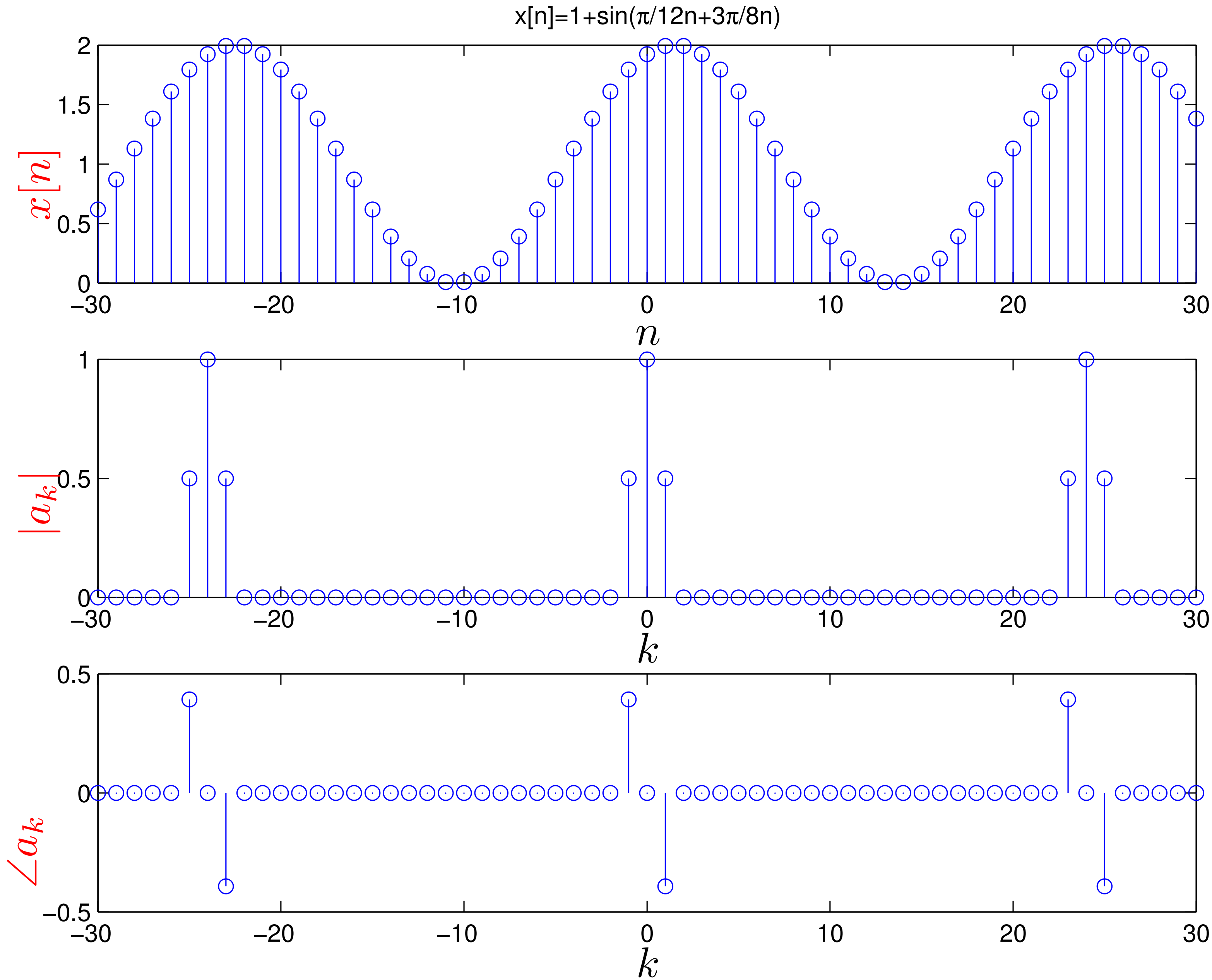
- $a_k = a_{k+N}$

Exercício 1

Determine os coeficientes da DTFS de

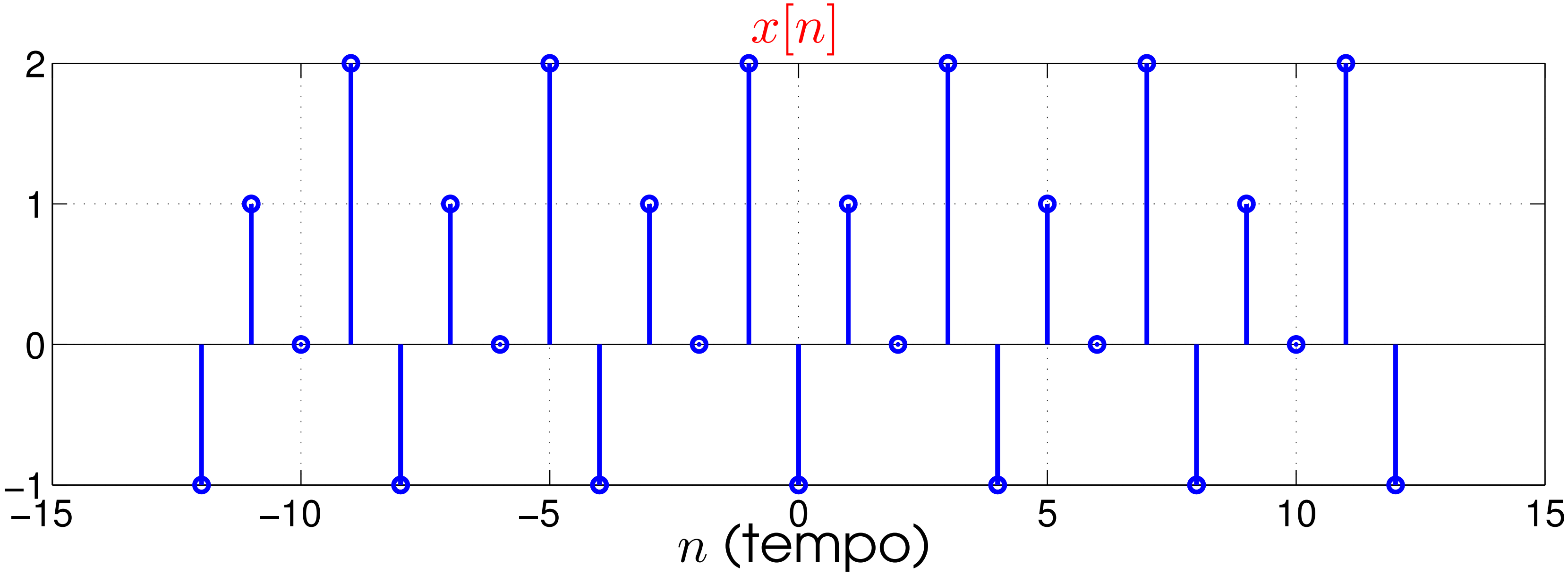
$$x[n] = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}n + \frac{3\pi}{8}\right)$$

Exercício 1



Exercício 2

Representente o sinal em Série de Fourier



Determinação dos Coeficientes da DTFS

Determinação dos coeficientes da FS

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

Multiplicando por $e^{-jr\omega_0 n}$

$$x[n]e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} e^{-jr\omega_0 n}$$

Somando N parcelas

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{jk\omega_0 n} e^{-jr\omega_0 n}$$

Determinação dos coeficientes da FS

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\omega_0 n}$$

Temos que:

$$\sum_{n=<N>} e^{j(k-r)2\pi/Nn} = \begin{cases} N, & k = r \\ (1 - e^{j(k-r)2\pi})/(\cdot) = 0, & k \neq r \end{cases}$$

Soma finita

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ (1-\alpha^N)/(1-\alpha), & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Determinação dos Coeficientes da DTFS

Determinação dos coeficientes da FS

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j(k-r)\omega_0 n} = a_r N$$

Portanto:

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]e^{-jr\omega_0 n}$$

Representação de sinais periódicos de tempo discreto em Série de Fourier

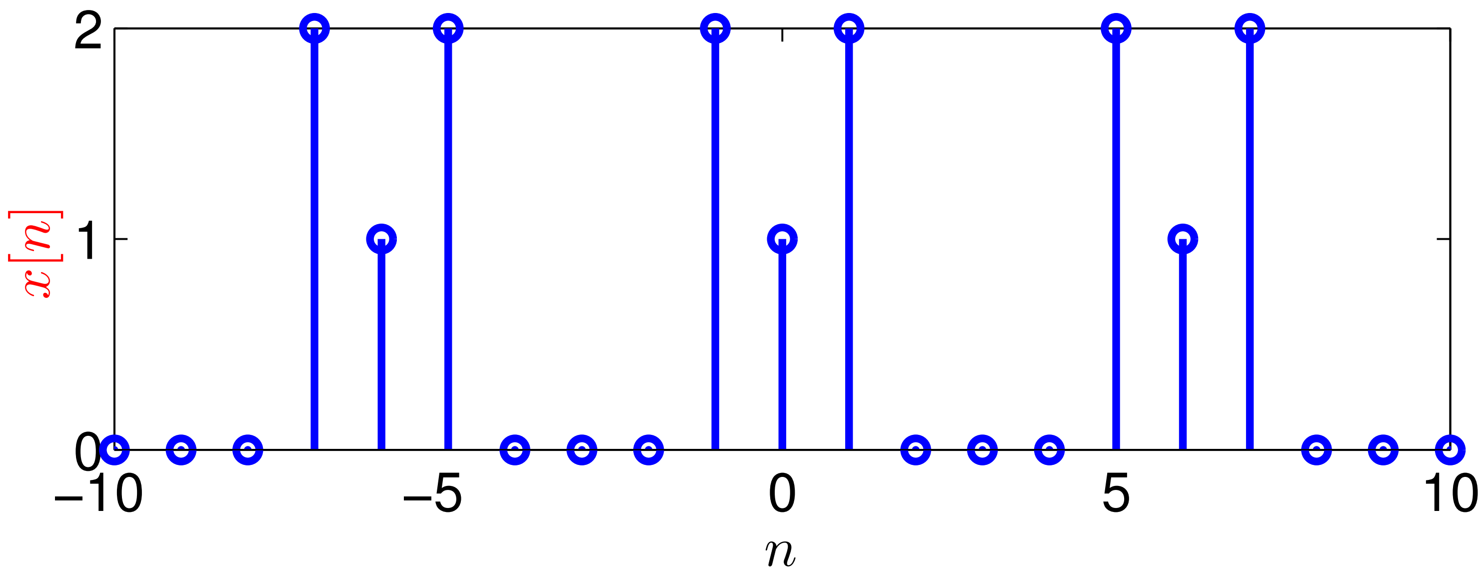
$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n},$$

sendo,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Exemplo

Determine os coeficientes da DTFS do sinal

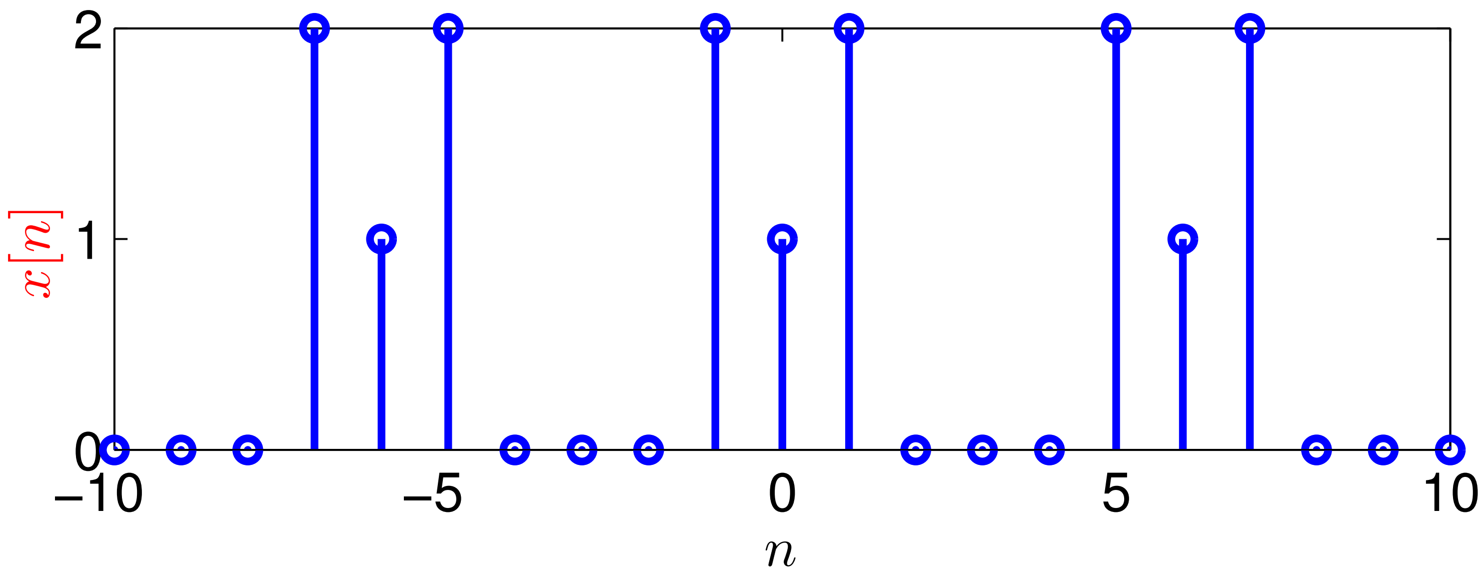


$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}, \text{ com } a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

- $\omega_0 = ???\quad \rightarrow \quad N = ???$

Exemplo

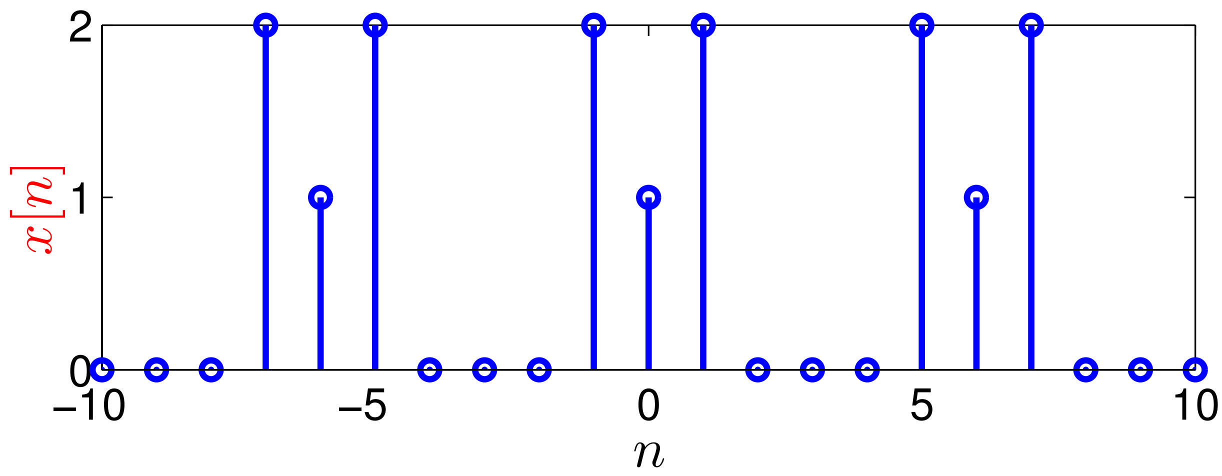
Determine os coeficientes da DTFS do sinal



$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}, \text{ com } a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

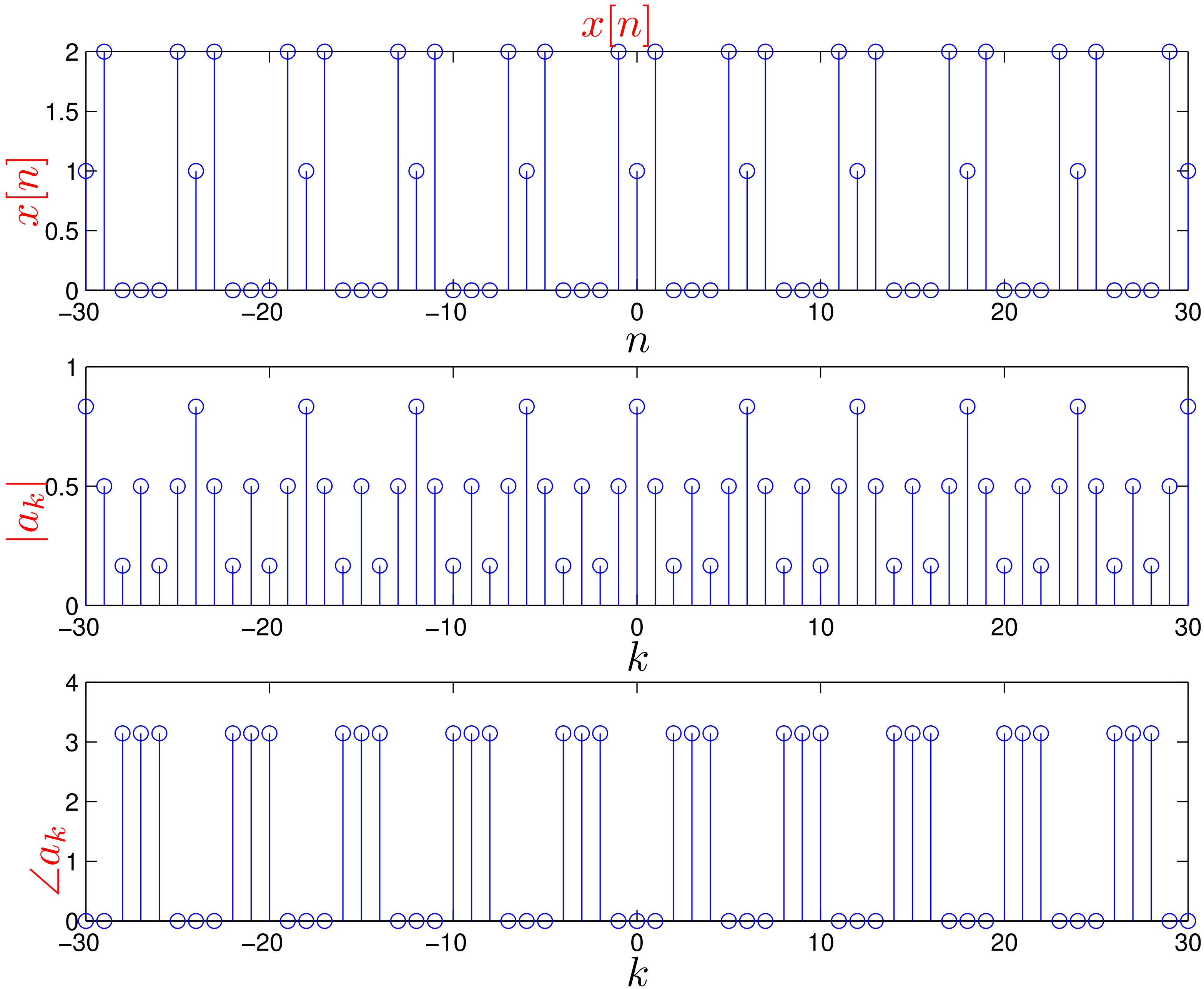
- $N = 6 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 2\pi/6 = \pi/3$

Exemplo



$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{6}\sum_{n=-1}^{1} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n} \\
&= \frac{2}{6}e^{jk\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}e^{-jk\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\frac{e^{jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{\pi}{3}}}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cos(k\frac{\pi}{3})
\end{aligned}
$$

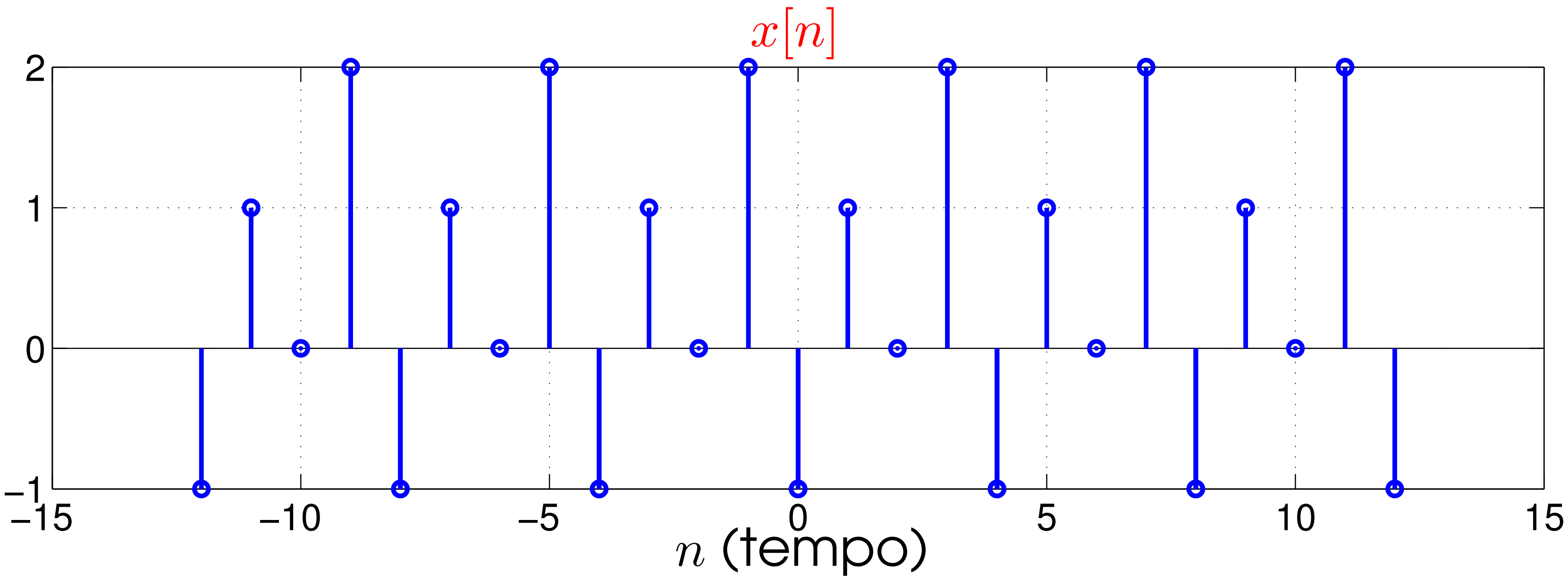
Exemplo



Exercício 3

Represente o sinal em Série de Fourier

$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$



calcule os coeficientes usando:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

Exemplo: Inversa - IDTFS

Considere os coeficientes da série de Fourier dados por:

$$a_k = \cos\left(\frac{6\pi}{17}k\right)$$

- Determine o sinal $x[n]$.
- Temos que:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Exemplo: solução

- Usando a fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} a_k &= \cos\left(\frac{6\pi}{17}k\right) = \frac{e^{j\frac{6\pi}{17}k} + e^{-j\frac{6\pi}{17}k}}{2} \\ &= \frac{e^{-jk\frac{2\pi}{17}(-3)} + e^{-jk\frac{2\pi}{17}(3)}}{2} \\ &= \frac{1}{17}\left(\frac{17}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{17}(-3)} + \frac{17}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{17}(3)}\right) \end{aligned}$$

- $\omega_o = \frac{2\pi}{17} \rightarrow N = 17$

Exemplo: solução

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n} \\
&= \frac{1}{17}\left(\frac{17}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{17}(-3)} + \frac{17}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{17}(3)}\right) \\
&= \frac{1}{17}\left(\frac{17}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{17}(-3+qN)} + \frac{17}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{17}(3+qN)}\right)
\end{aligned}
$$

- Logo:

$$
x[n] = \begin{cases} \frac{17}{2} & n = -3 + qN, \;\; q \in \mathbb{I} \\ \frac{17}{2} & n = 3 + qN, \;\; q \in \mathbb{I} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

Exercício 4

Considere os coeficientes da série de Fourier dados por:

$$a_k = \cos\left(\frac{10\pi}{21}k\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{21}k\right)$$

- Determine o sinal $x[n]$.
- Temos que:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Exercício 5

Considere os coeficientes da série de Fourier dados por:

$$a_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[k-2m] - 2\delta[k+3m]$$

- Determine o sinal $x[n]$.
- Temos que:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Propriedades das Séries de Fourier

- Sinal Contínuo e Periódico - Série de Fourier (FS)
- Sinal Discreto e Periódico - Série de Fourier Discreta (DTFS)
  - Propriedades da FS e da DTFS
- Sinal Contínuo e Não-Periódico - Transformada de Fourier (FT)
- Sinal Discreto e Não-Periódico - Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

Propriedades das Séries de Fourier

- Notação:

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

relaciona o sinal $x(t)$ com seus coeficientes da série de Fourier

- de maneira similar:

$$x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

Propriedades das Séries de Fourier

- Linearidade:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{FS} c_k = Aa_k + Bb_k$$

sendo

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \text{ e } b_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Propriedades das Séries de Fourier

Seja,

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \text{ e } b_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

logo com $z(t) = Ax(t) + By(t)$, temos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0}(Ax(t) + By(t))e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= A\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}_{a_k} + B\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}_{b_k} \end{aligned}$$

então, $c_k = Aa_k + Bb_k$

Exemplo: Linearidade

- Determine a FS do sinal

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) - B\cos(\omega_0 t)$$

Fazendo $y(t) = \cos(\omega_0 t)$, temos

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \begin{cases} a_{-1} & = & \frac{1}{2} \\ a_1 & = & \frac{1}{2} \\ a_k & = & 0,\ \forall |k| \neq 1 \end{cases}$$

Logo, $x(t) = Ay(t) - By(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = Aa_k - Ba_k$

Propriedades das Séries de Fourier

- Deslocamento no tempo:

$$x(t - t_0) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

sendo $a_k = \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$. Logo,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t - t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{fazendo: } \tau = t - t_0 \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-jk\omega_0 (\tau + t_0)} d\tau \\ &= e^{-jk\omega_0 t_0} \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau}_{a_k} = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k \end{aligned}$$

Exercício 6: *Linearidade e Deslocamento no tempo*

- Determine a FS do sinal

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) - B\cos(\omega_0[t + \tau])$$

Use a propriedade de deslocamento no tempo:

$$x(t - t_0) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

Propriedades das Séries de Fourier

- Reflexão no tempo:

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k, \text{ então } x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$$

Temos que, $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ e

$$\begin{aligned} x(-t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t}, \quad \text{fazendo: } k = -m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm\omega_0 t} : \underline{x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}} \end{aligned}$$

- Reflexão no tempo:

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k, \text{ então } x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$$

Logo:

- Se $x(t)$ for par i.e. $x(t) = x(-t)$, então:

$$a_{-k} = a_k$$

- Se $x(t)$ for ímpar i.e. $x(t) = -x(-t)$, então:

$$a_{-k} = -a_k$$

Propriedades das Séries de Fourier

- Se $x(t)$ for real, então:

$$a_{-k} = a_k^*$$

- Se $x(t)$ for par i.e. $x(t) = x(-t)$, então:

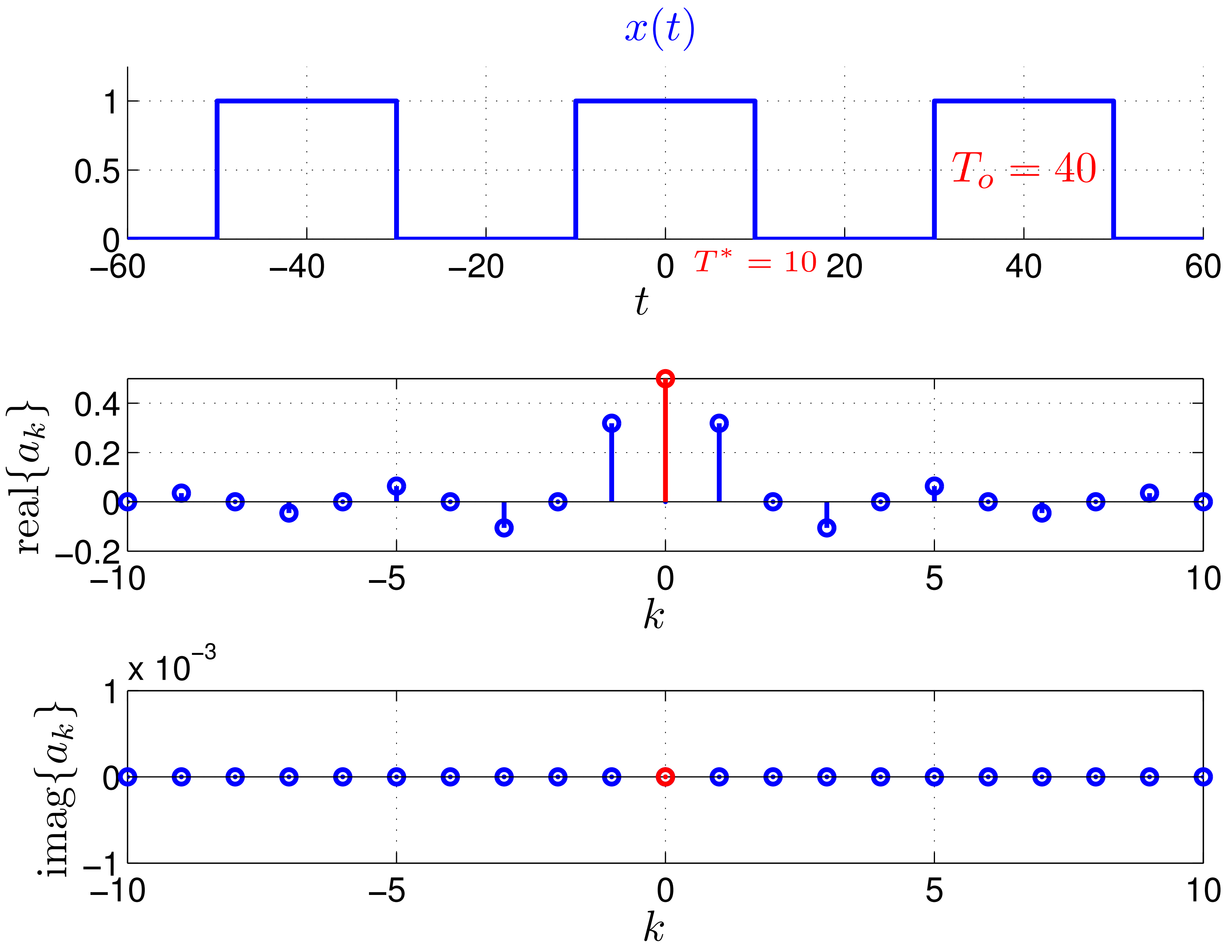
$$a_{-k} = a_k$$

- Portanto, se $x(t)$ for par e real, então

$$a_k = a_k^*$$

ou seja a_k também é real.

FS da Onda Quadrada: Sinal real e par



Propriedades das Séries de Fourier

- Se $x(t)$ for real, então:

$$a_{-k} = a_k^*$$

- Se $x(t)$ for ímpar i.e. $x(t) = x(-t)$, então:

$$a_{-k} = -a_k$$

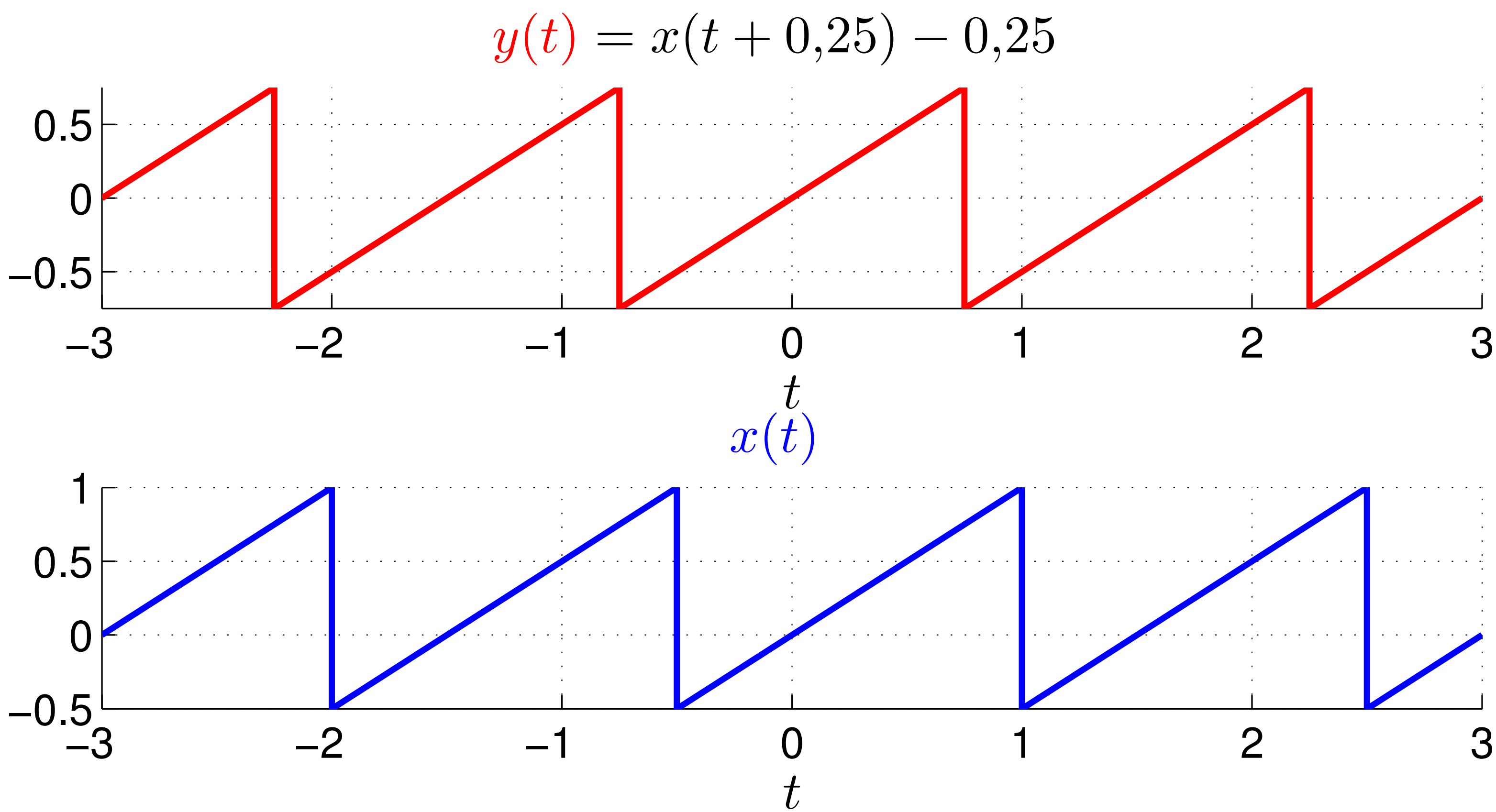
- Portanto, se $x(t)$ for ímpar e real, então

$$-a_k = a_k^*$$

ou seja a_k também é puramente imaginário.

Exemplo: Dente de Serra

Determine $x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k$, sendo $x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$,



Exemplo: Dente de Serra

Definindo

$$y(t) = \underbrace{x(t + 0{,}25)}_{p(t)} - \underbrace{0{,}25}_{q(t)}$$

e

$$q(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$$

Temos

$$y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = e^{jk\omega_0/4} a_k + b_k$$

Exemplo: Dente de Serra

- Temos que: $q(t) = -0{,}25$, então

$$q(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k, \text{ sendo } b_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ -0{,}25, & k = 0 \end{cases}$$

- Do exemplo resolvido anteriormente:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0{,}25 \\ a_k &= \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{jk\omega_o}\left(e^{-jk\omega_o} + \frac{1}{2}e^{jk\omega_o/2}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(e^{-jk\omega_o} - e^{jk\omega_o/2}\right)\right], \; \forall k \neq 0 \end{aligned}$$

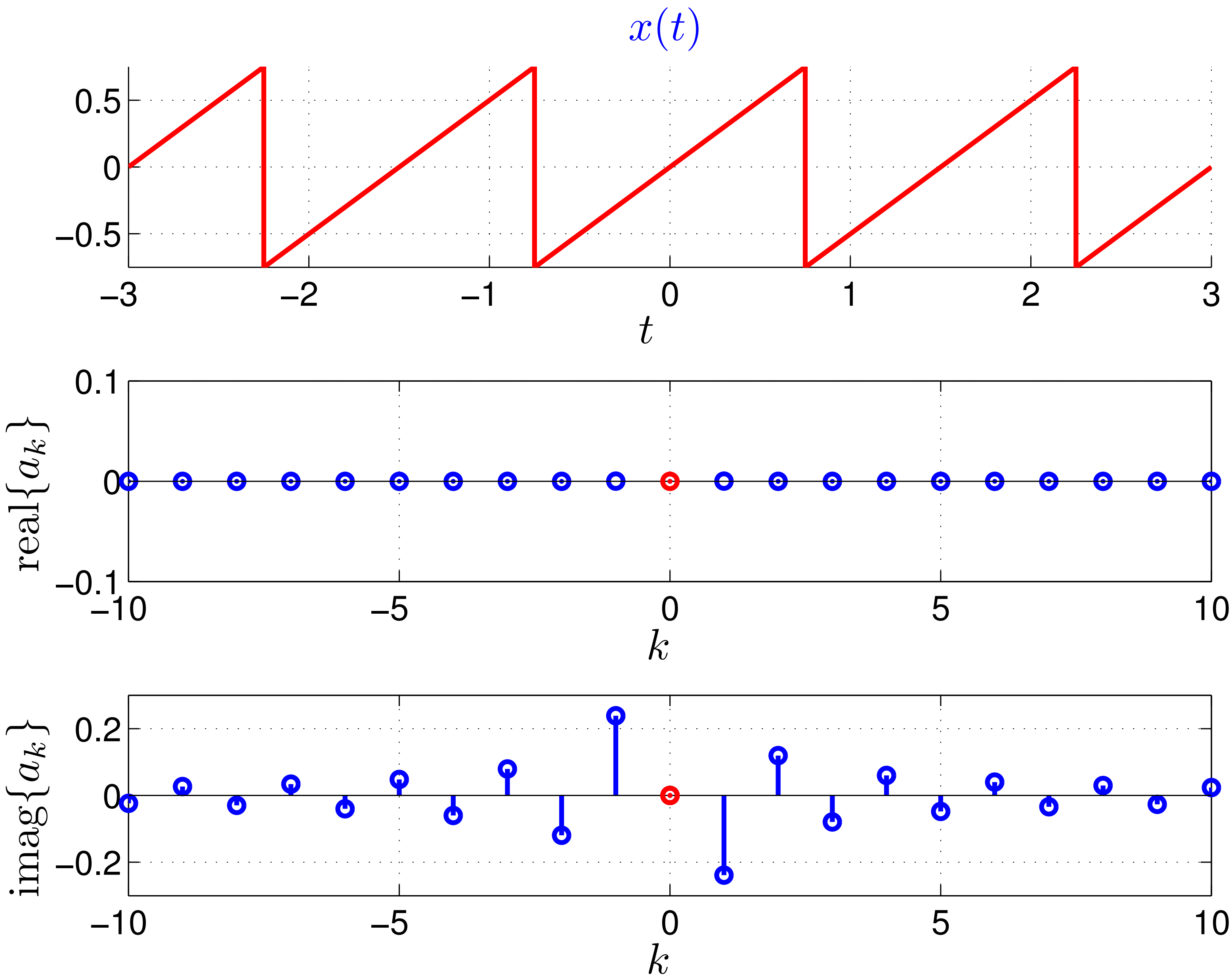
Exemplo: Dente de Serra

$$y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = e^{jk\omega_0/4} a_k + b_k$$

Logo

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_k &= e^{jk\omega_0/4} \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{jk\omega_o} \left(e^{-jk\omega_o} + \frac{1}{2} e^{jk\omega_o/2} \right) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{k^2\omega_0^2} \left(e^{-jk\omega_o} - e^{jk\omega_o/2} \right) \right], \ \forall k \neq 0 \end{aligned}$$

Exemplo: Dente de Serra: Sinal real e ímpar



Propriedades das Séries de Fourier

- Mudança de escala de tempo:

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k, \text{ então } x(\alpha t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

- $\alpha \in \mathbb{R}^+$
- $x(t)$ tem período T e frequência ω_0
- $x(\alpha t)$ tem período T/α e frequência $\alpha\omega_0$

Temos que,

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

- **Multiplicação:** Seja $x(t)$ e $y(t)$ periódicos com período T

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k, \quad \text{então} \quad y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$$

Então,

$$x(t)y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$$

Propriedades das Séries de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \; y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}, \; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{jm\omega_0 t}\right) y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \left(\frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-j(k-m)\omega_0 t}dt\right) \end{aligned}$$

sendo

$$b_k = \left(\frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right)$$

então,

$$c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \underbrace{\left(\frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j(k-m)\omega_0 t} dt \right)}_{b_{k-m}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$$

Observação: para $k = 0$, temos

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) y(t) e^{-j0\omega_0 t} dt = \underline{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) y(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{-m}}$$

Propriedades das Séries de Fourier

- Relação de Parseval para sinais periódicos

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

ou,

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)x^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_k^*$$

- Potência Média em um período

Propriedades das Séries de Fourier

Temos que

$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {a^*}_k e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {a^*}_{-k} e^{jk\omega_0 t}$$

logo, $x^*(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} {a^*}_{-k}$. Sabendo que

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)y(t)dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{-m}$$

Logo: $\displaystyle \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)x^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_k^*$

- Convolução periódica

$$x(t) \circledast y(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = Ta_k b_k$$

sendo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

Propriedades das Séries de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \\
&= \int_T x(\tau)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0(t-\tau)}\right)d\tau \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \underbrace{\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau}_{Ta_k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{Ta_k b_k}_{c_k} e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

Propriedades da FS

- Linearidade

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$$

- Deslocamento no tempo

$$x(t - t_0) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

- Deslocamento na frequência

$$e^{jm\omega_0 t} x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{k-m}$$

Propriedades da FS

- Conjugação

$$x^*(t) \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$$

- Reflexão no tempo

$$x^*(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$$

- Mudança de escala no tempo

$$x^*(\alpha t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

sendo $\alpha > 0$

Propriedades da FS

- Convolução periódica

$$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \overset{FS}{\longleftrightarrow} Ta_k b_k$$

- Multiplicação

$$x(t)y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$$

- Diferenciação

$$dx(t)/dt \overset{FS}{\longleftrightarrow} jk\omega_0 a_k$$

Propriedades da FS

- Integração

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \overset{FS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{jk\omega_0} a_k$$

- Sinais reais

$$x(t) \in \mathbb{R} \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k = a^*_{-k}$$

- Sinais reais e pares

$$x(t) = x(-t) \in \mathbb{R} \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k = a_{-k} \in \mathbb{R}$$

Propriedades da FS

- Sinais reais e ímpares

$$x(t) = -x(-t) \in \mathbb{R} \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} a_k = -a_{-k} \in \mathbb{I}m$$

- Decomposição Par e Ímpar

$$x_{\text{par}}(t) = \text{Par}\{x(t)\} \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} \text{Real}\{a_k\}$$

$$x_{\text{ímpar}}(t) = \text{Ímpar}\{x(t)\} \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} j\text{Imag}\{a_k\}$$

- Relação de Parseval

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Propriedades da DTFS

- Linearidade

$$z[n] = Ax[n] + By[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$$

- Deslocamento no tempo

$$x[n - n_0] \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = e^{-jk\omega_0 n_0} a_k$$

- Deslocamento na frequência

$$e^{jm\omega_0 n} x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{k-m}$$

Propriedades da DTFS

- Conjugação

$$x^*[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$$

- Reflexão no tempo

$$x[-n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$$

- Mudança de escala no tempo

$$x[n/m] \overset{FS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{m} a_k$$

se n é múltiplo de m e $m > 0$

Propriedades da DTFS

- Convolução periódica

$$\sum_{k=<N>} x[r]y[n-r] \overset{FS}{\longleftrightarrow} N a_k b_k$$

- Multiplicação

$$x[n]y[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} \sum_{m=<N>} a_m b_{k-m}$$

- Primeira diferença

$$x[n]-x[n-1] \overset{FS}{\longleftrightarrow} (1-e^{-jk\omega_0})a_k$$

Propriedades da DTFS

- Somatório

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{FS} (1 - e^{-jk\omega_0})^{-1} a_k$$

- Sinais reais

$$x[n] \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{FS} a_k = a^*_{-k}$$

- Sinais reais e pares

$$x[n] = x[-n] \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{FS} a_k = a_{-k} \in \mathbb{R}$$

Propriedades da DTFS

- Sinais reais e ímpares

$$x[n] = x[-n] \in \mathbb{R} \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k = a_{-k} \in \mathbb{I}m$$

- Decomposição Par e Ímpar

$$x_{\text{par}}(t) = \text{Par}\{x(t)\} \overset{FS}{\longleftrightarrow} \text{Real}\{a_k\}$$

$$x_{\text{ímpar}}[n] = \text{Ímpar}\{x[n]\} \overset{FS}{\longleftrightarrow} j\text{Imag}\{a_k\}$$

- Relação de Parseval

$$\sum_{n=<N>} |x(t)|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2$$

Exercício 7: Oppenheim 3.25

Considere os sinais

$$x(t) = \cos(4\pi t), \ \ y(t) = \text{sen}(4\pi t), \ \ z(t) = x(t)y(t)$$

a) Determine os coeficientes da FS de $x(t)$

b) Determine os coeficientes da FS de $y(t)$

c) Determine os coeficientes da FS de $z(t)$ utilizando e sem utilizar a propriedade de multiplicação

Exercício 8: *Oppenheim 3.25*

Considere os sinais

$$x[n] = 1 + \cos(2\pi/6n), \quad y[n] = \text{sen}(2\pi/6n + \pi/4),$$

$$z[n] = x[n]y[n]$$

a) Determine os coeficientes da FS de $x[n]$

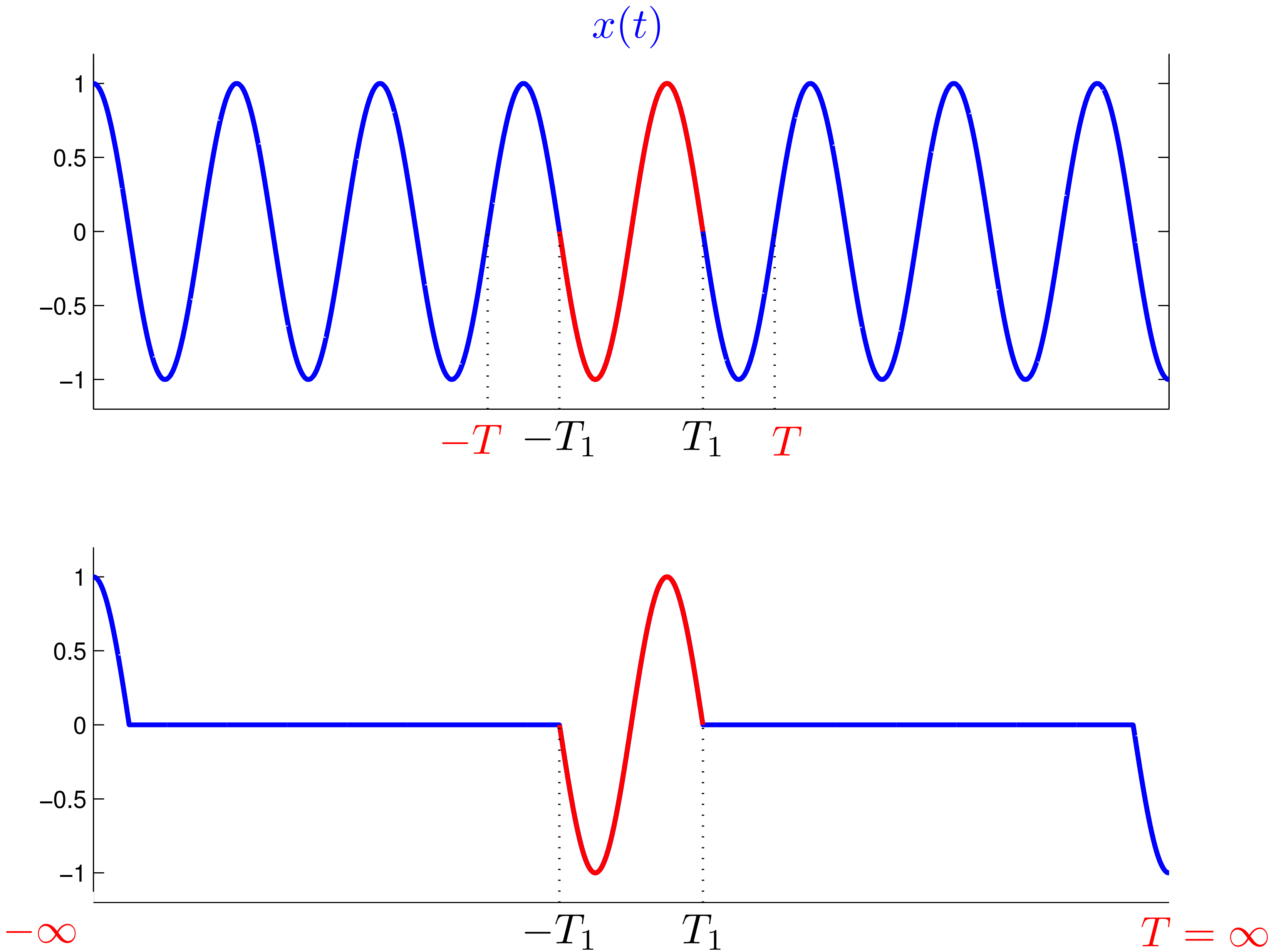
b) Determine os coeficientes da FS de $y[n]$

c) Determine os coeficientes da FS de $z[n]$ utilizando e sem utilizar a propriedade de multiplicação

Representações de sinais por Fourier

- Sinal Contínuo e Periódico - Série de Fourier (FS)
- Sinal Discreto e Periódico - Série de Fourier Discreta (DTFS)
- Sinal Contínuo e Não-Periódico - Transformada de Fourier (FT)
- Sinal Discreto e Não-Periódico - Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

Transformada de Fourier (FT)



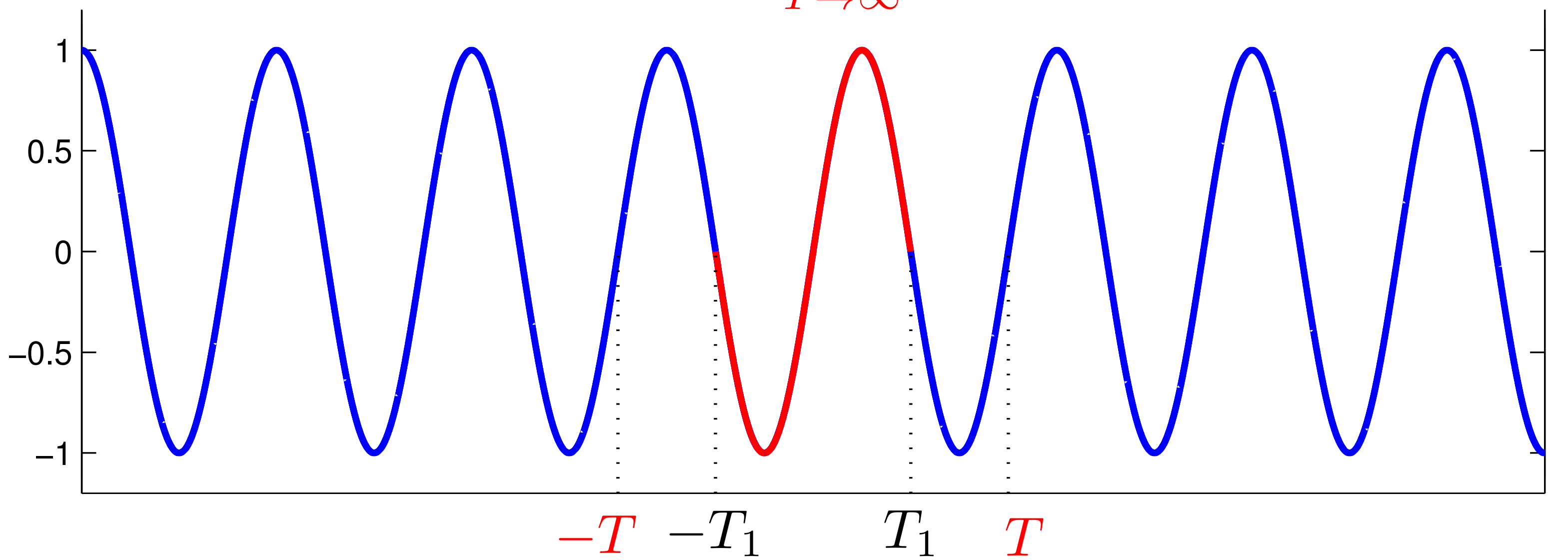
Transformada de Fourier (FT)

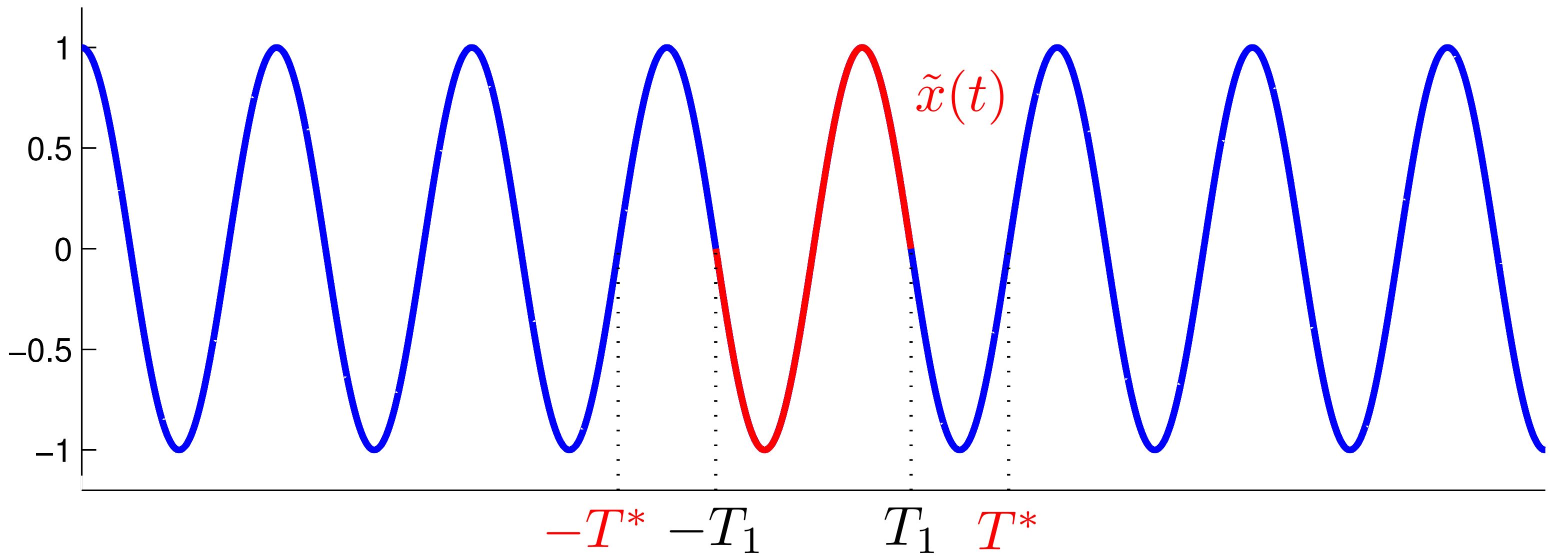
- Fourier intuiu que um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico com período infinito

$$\tilde{x}(t) = \lim_{T \to \infty} x(t)$$

Transformada de Fourier (FT)

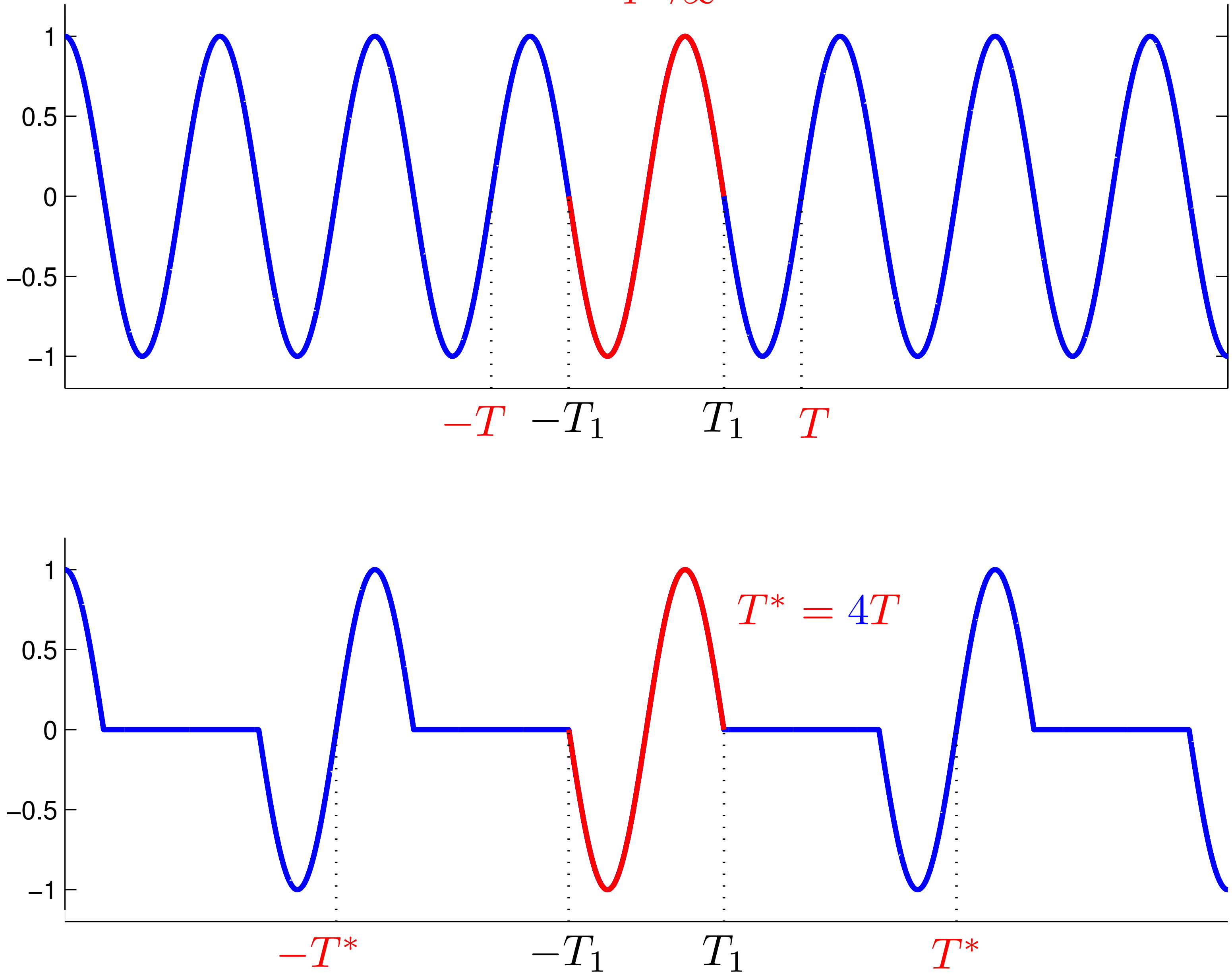
$$\tilde{x}(t) = \lim_{T \to \infty} x(t)$$





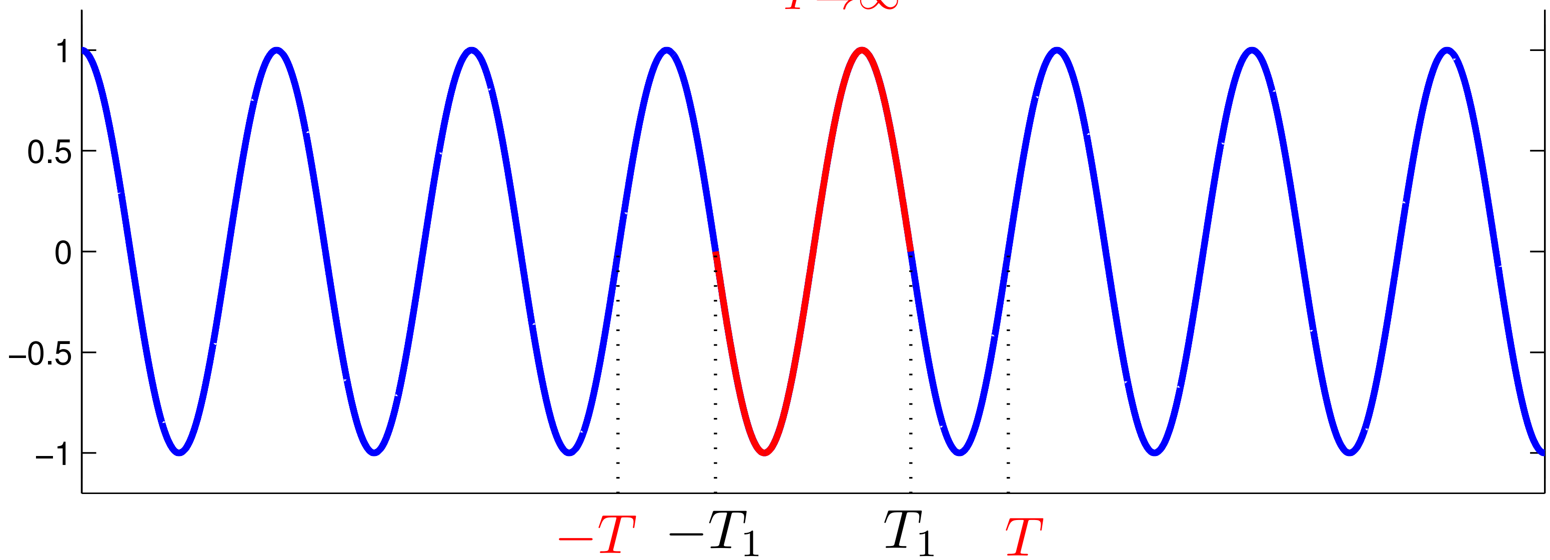
Transformada de Fourier (FT)

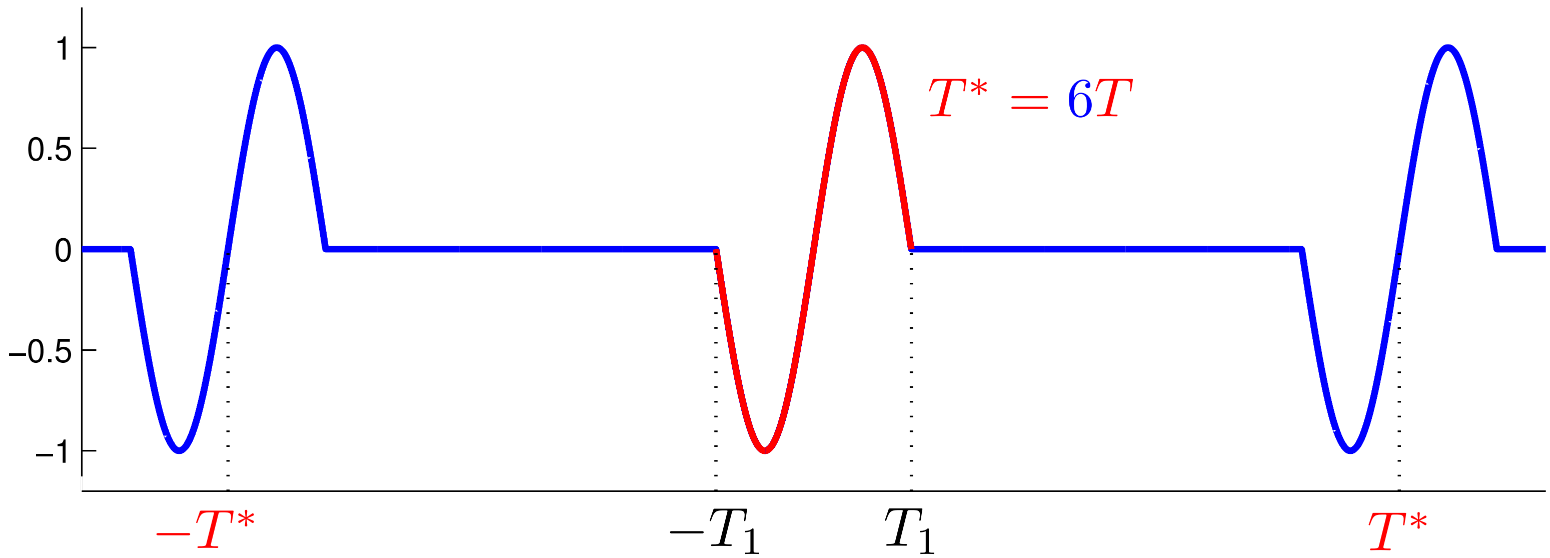
$$\tilde{x}(t) = \lim_{T\to\infty} x(t)$$



Transformada de Fourier (FT)

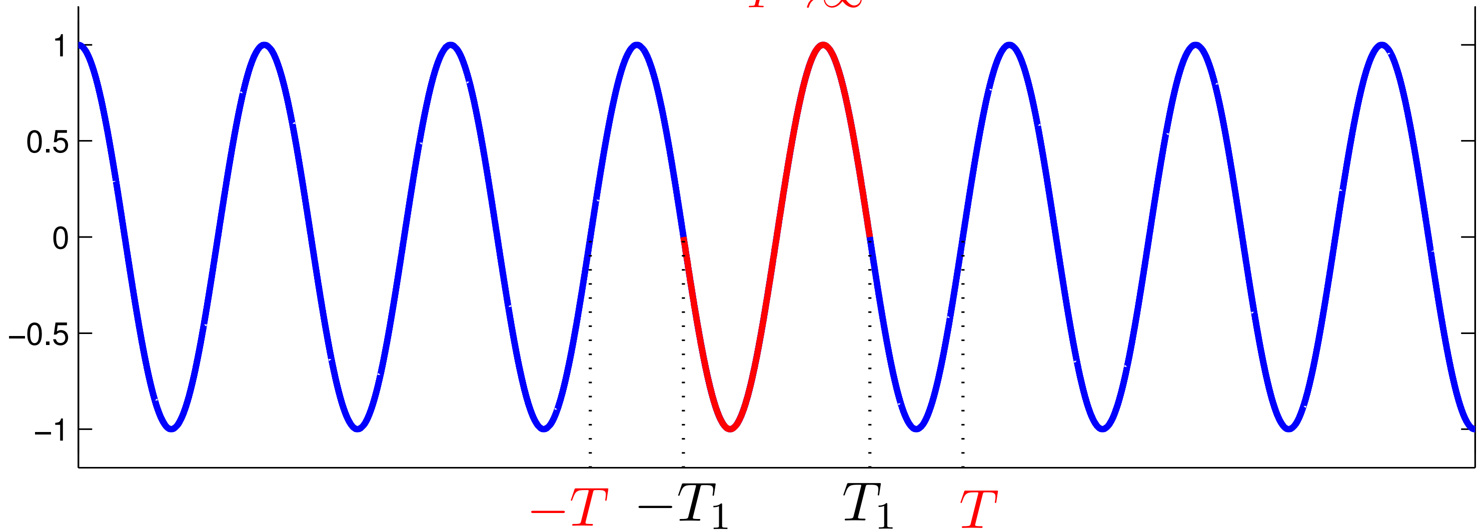
$$\tilde{x}(t) = \lim_{T\to\infty} x(t)$$

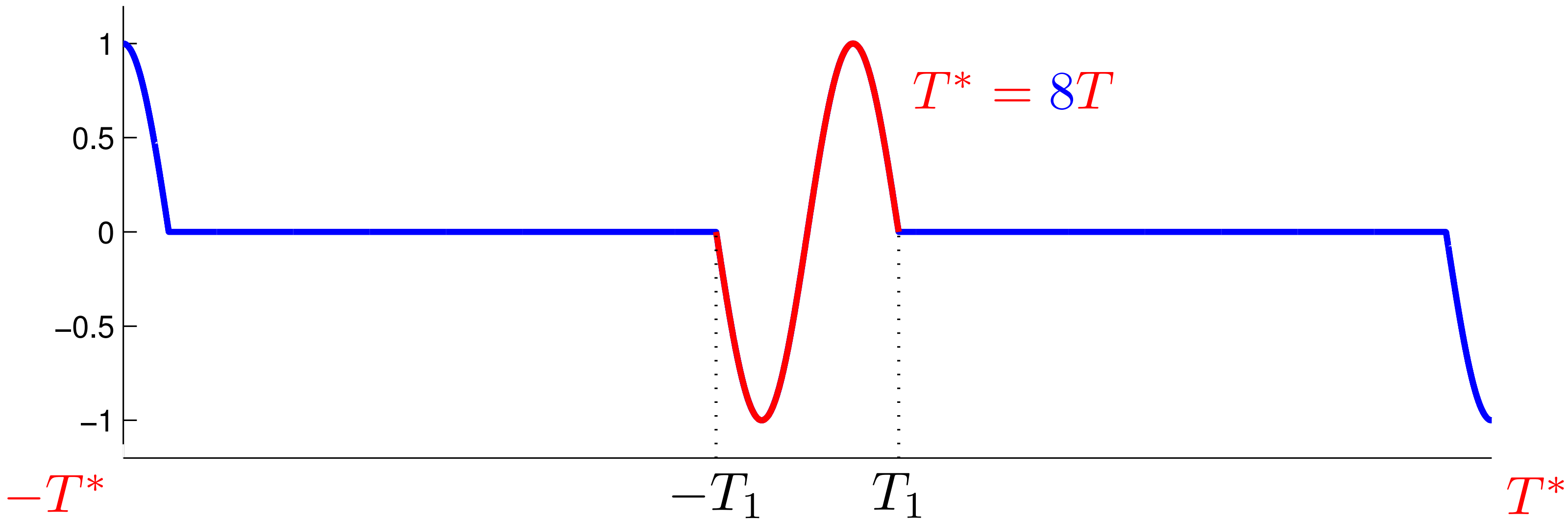




Transformada de Fourier (FT)

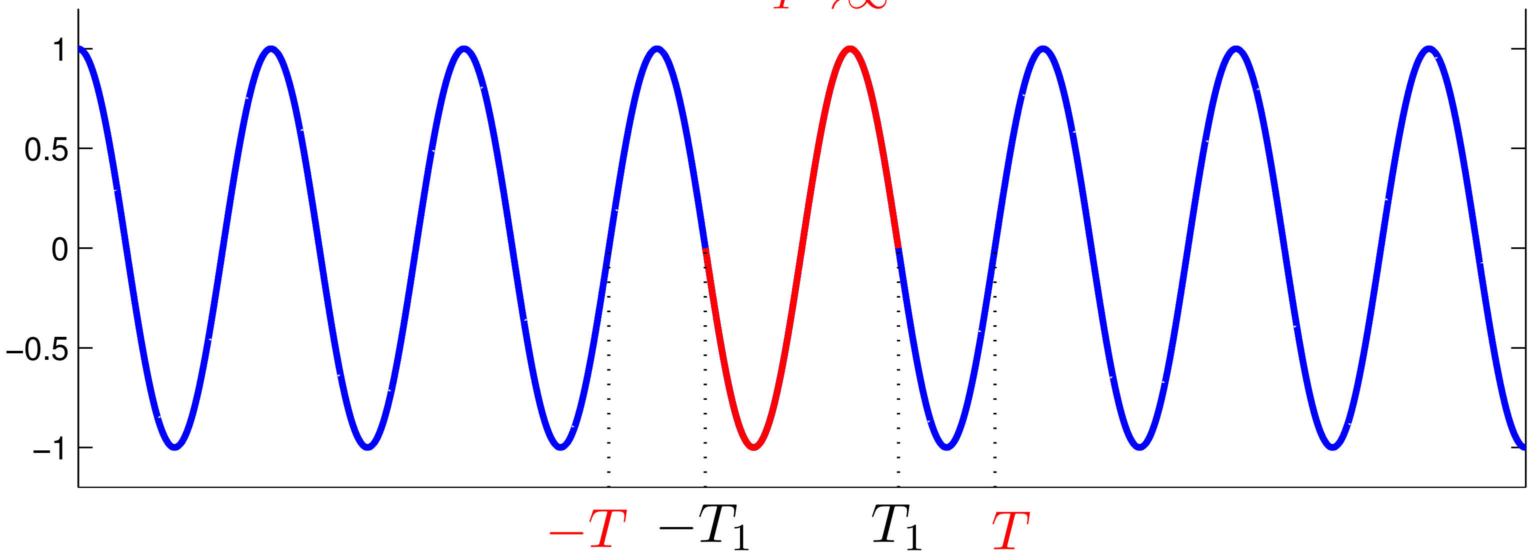
$$\tilde{x}(t) = \lim_{T\to\infty} x(t)$$

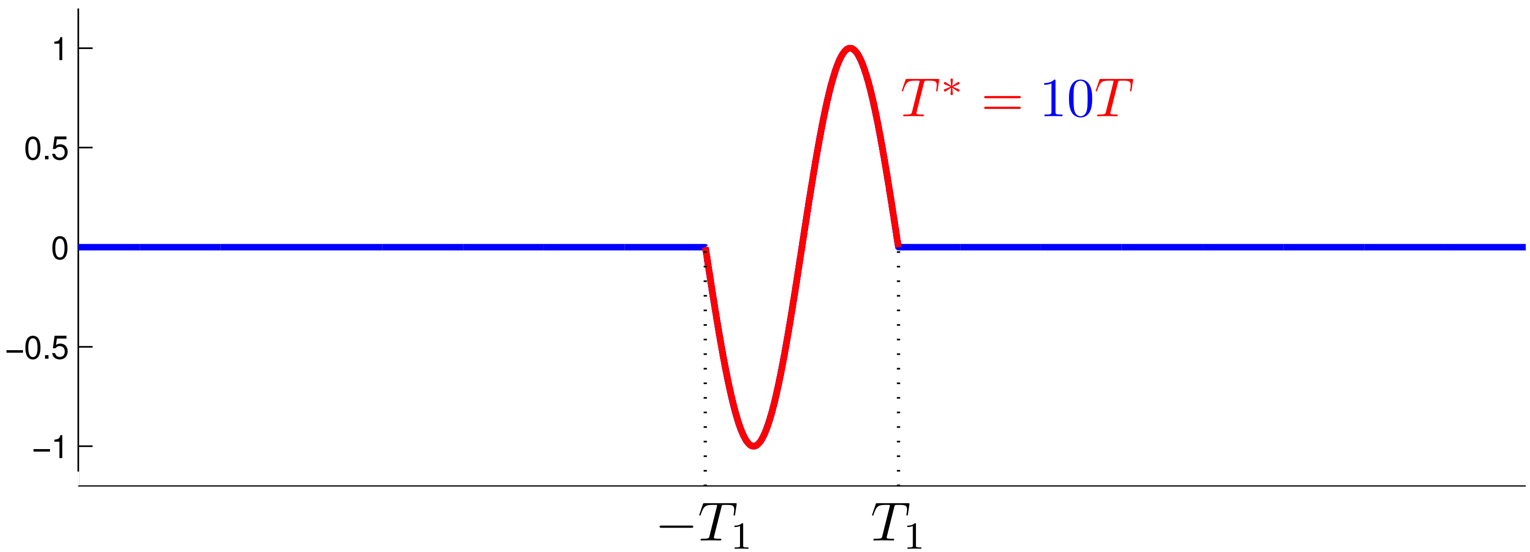




Transformada de Fourier (FT)

$$\tilde{x}(t) = \lim_{T\to\infty} x(t)$$





Transformada de Fourier (FT)

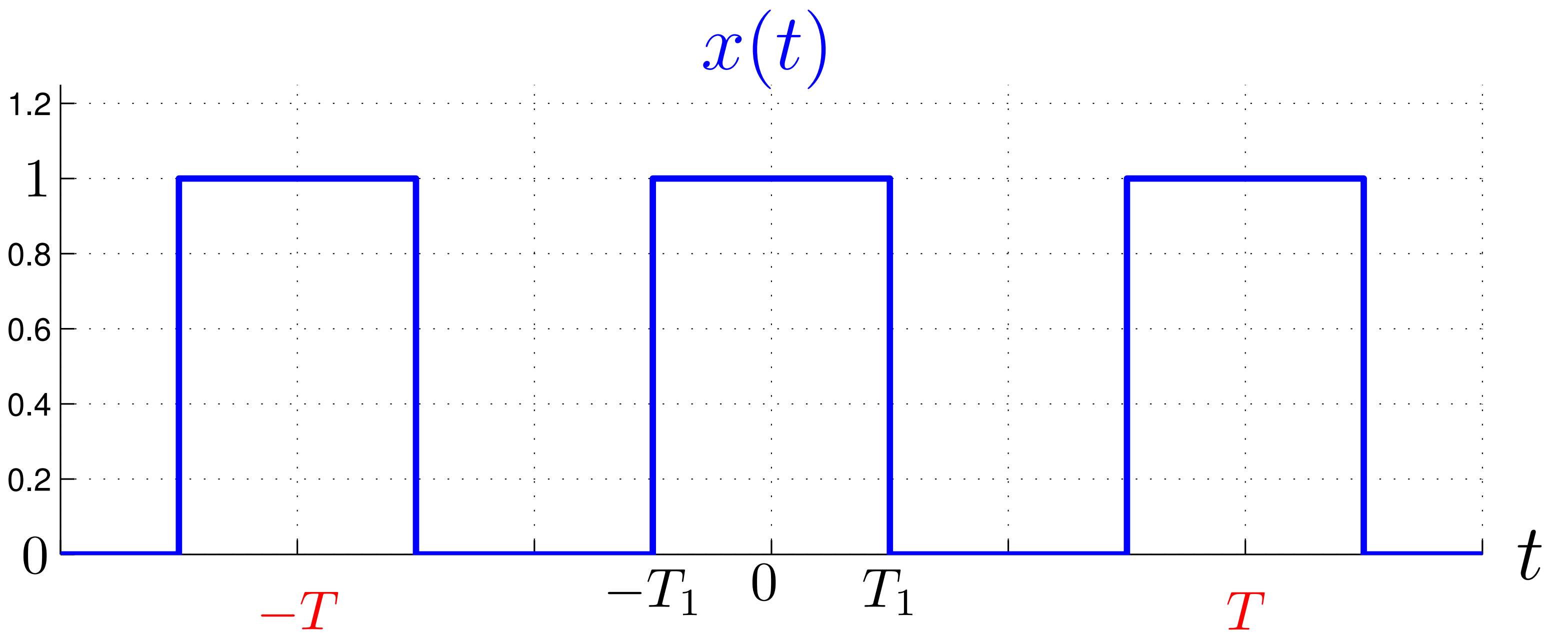
- Fourier intuiu que um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico com período infinito

$$\tilde{x}(t) = \lim_{T\to\infty} x(t)$$

- Enquanto o período aumenta a frequência diminui e as componentes harmonicamente relacionadas tornam-se mais próximas em frequência.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Exemplo: Encontre a FS para a onda quadrada mostrada abaixo e faça $T \to \infty$.



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Transformada de Fourier (FT)

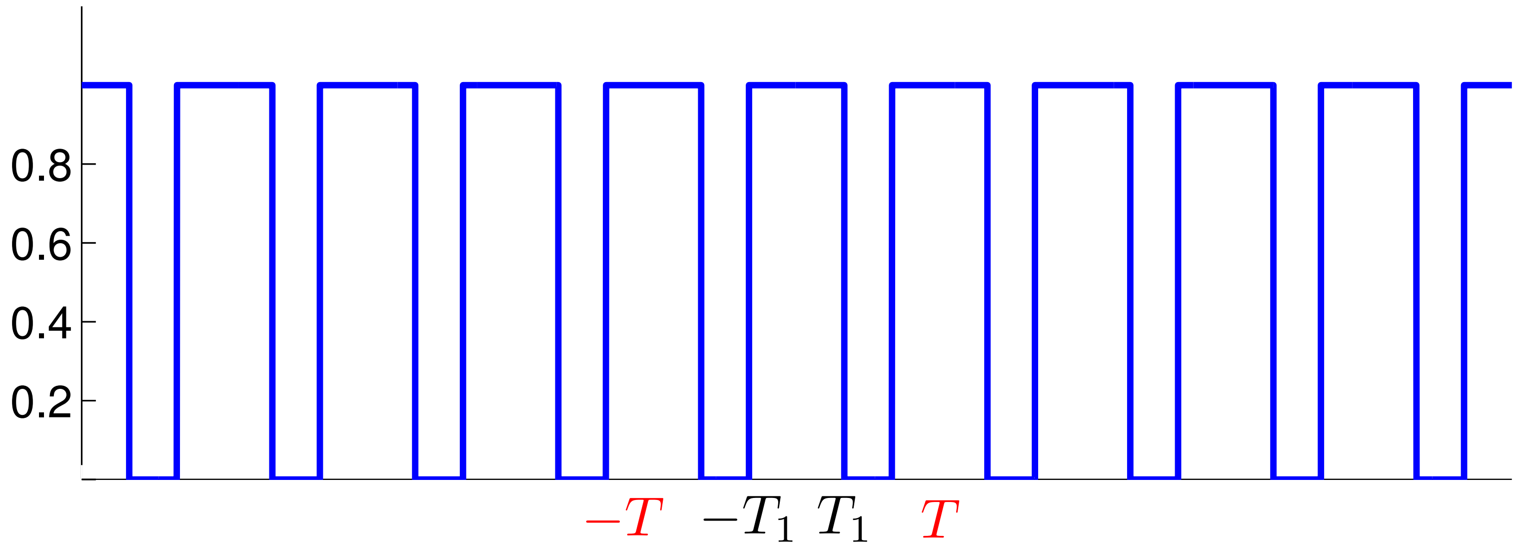
$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \;\Rightarrow\; Ta_k = \int_{-T_1}^{T_1} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

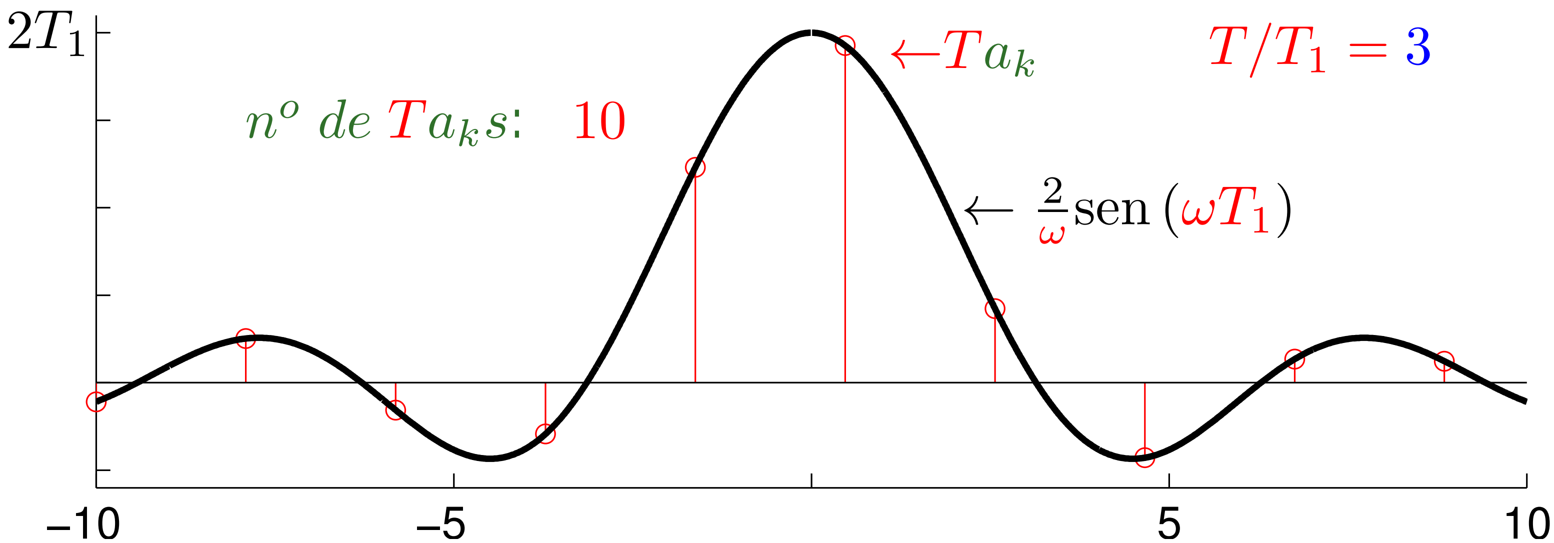
logo,

$$\begin{aligned} Ta_0 &= \int_{-T_1}^{T_1} x(t)e^{-j0}dt = 2T_1 \\ Ta_k &= \int_{-T_1}^{T_1} 1e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{2}{k\omega_0}\operatorname{sen}(k\omega_0 T_1) \quad \rightarrow T_1 \triangleq \text{constante} \end{aligned}$$

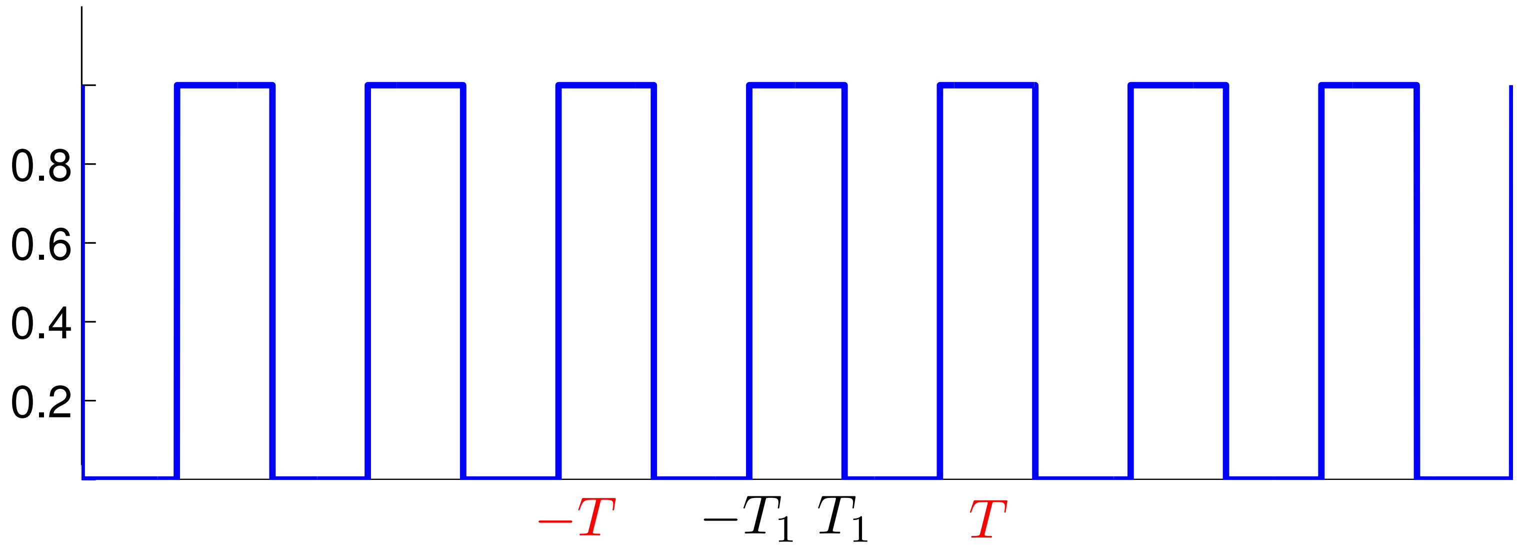
- Note que $T \rightarrow \infty$ então $k\omega_0 \rightarrow \omega$

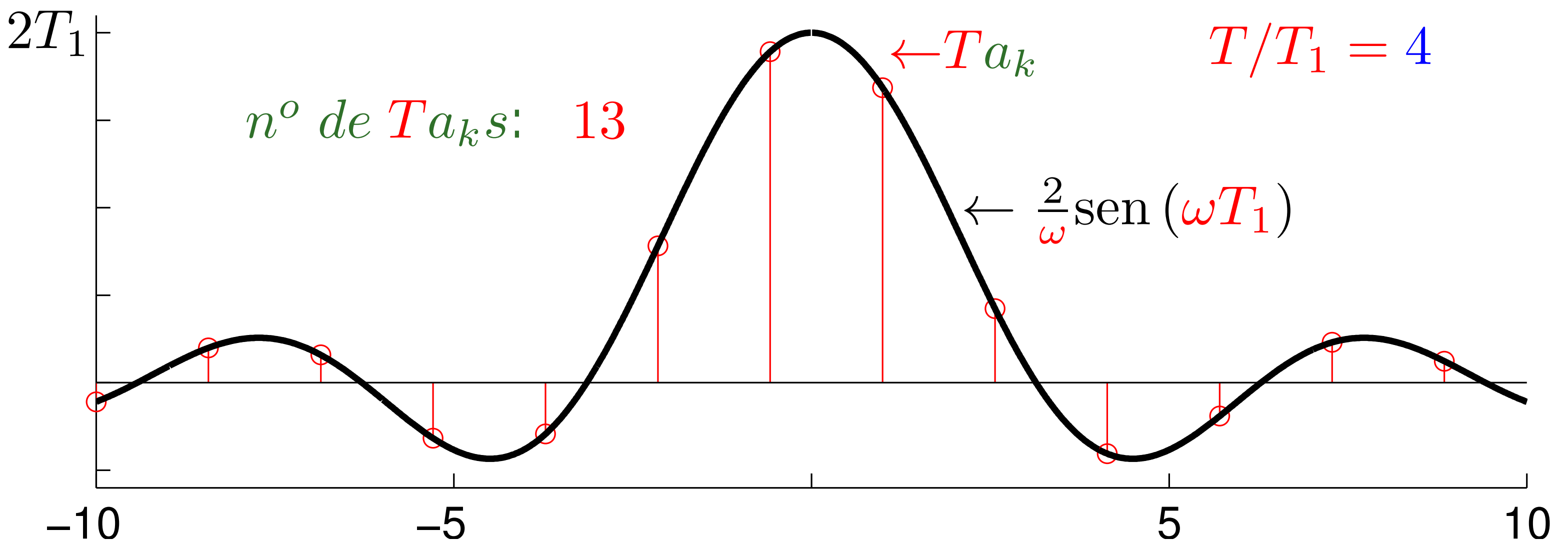
Transformada de Fourier (FT)



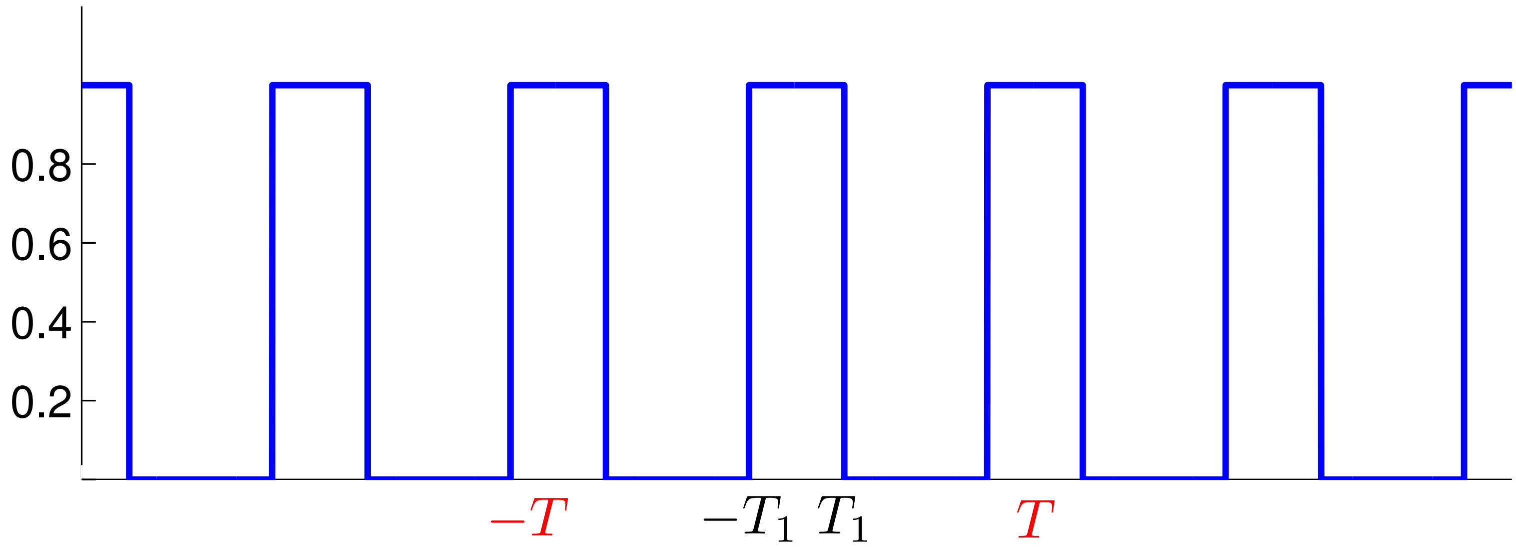


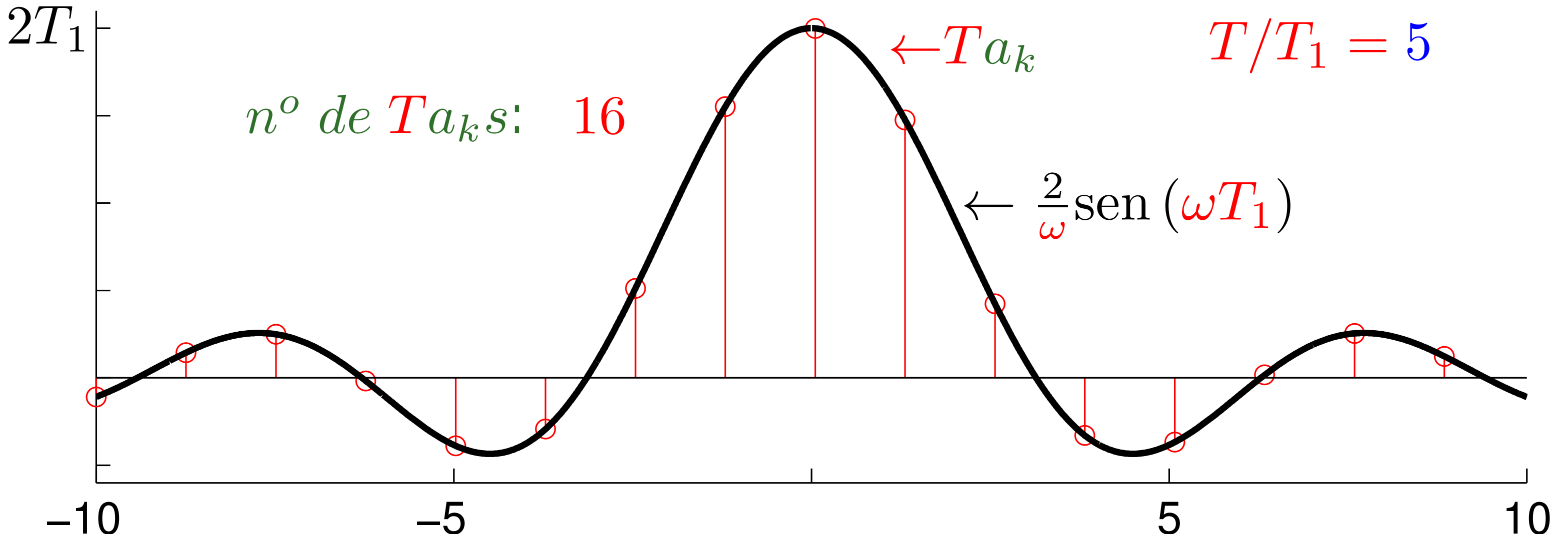
Transformada de Fourier (FT)



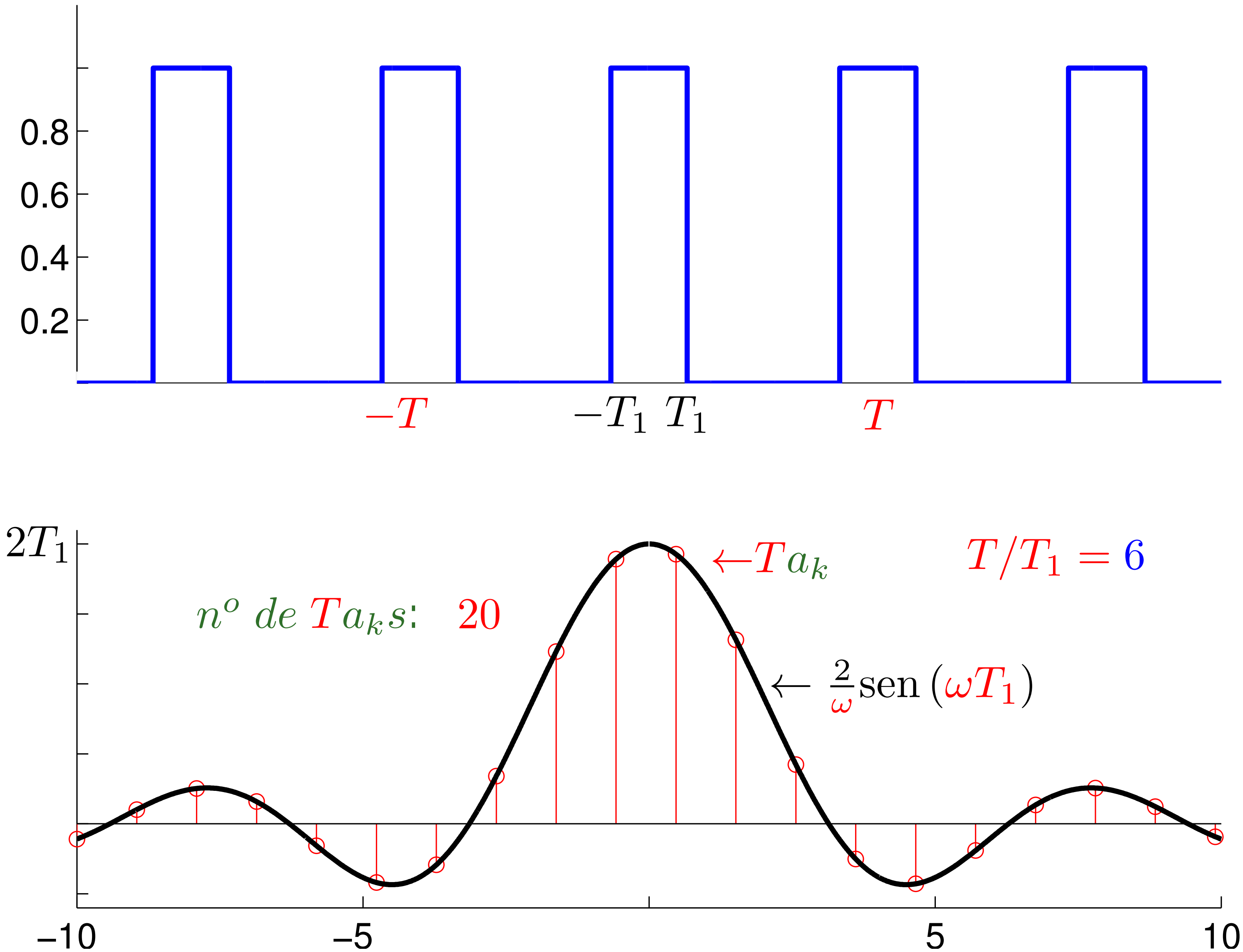


Transformada de Fourier (FT)

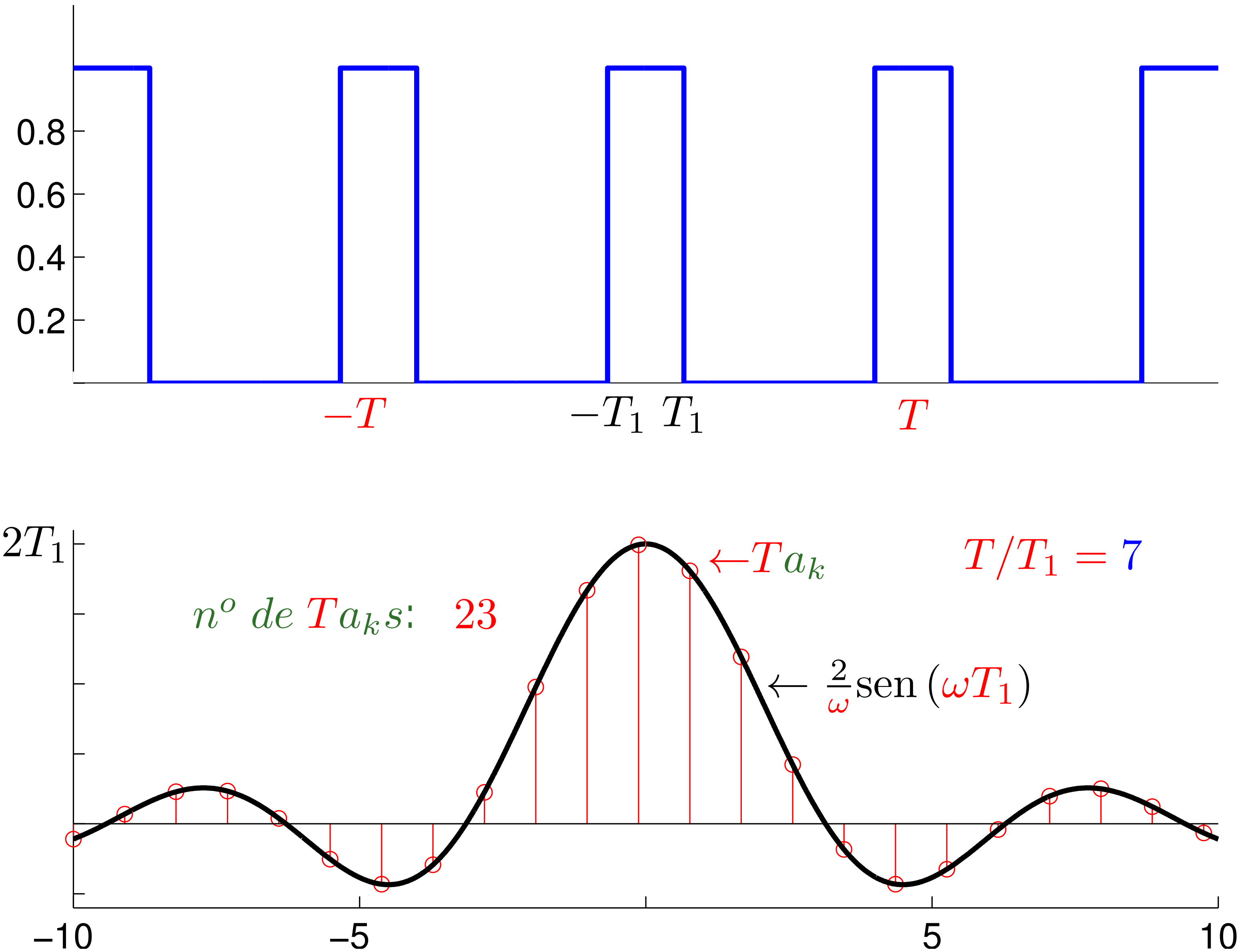




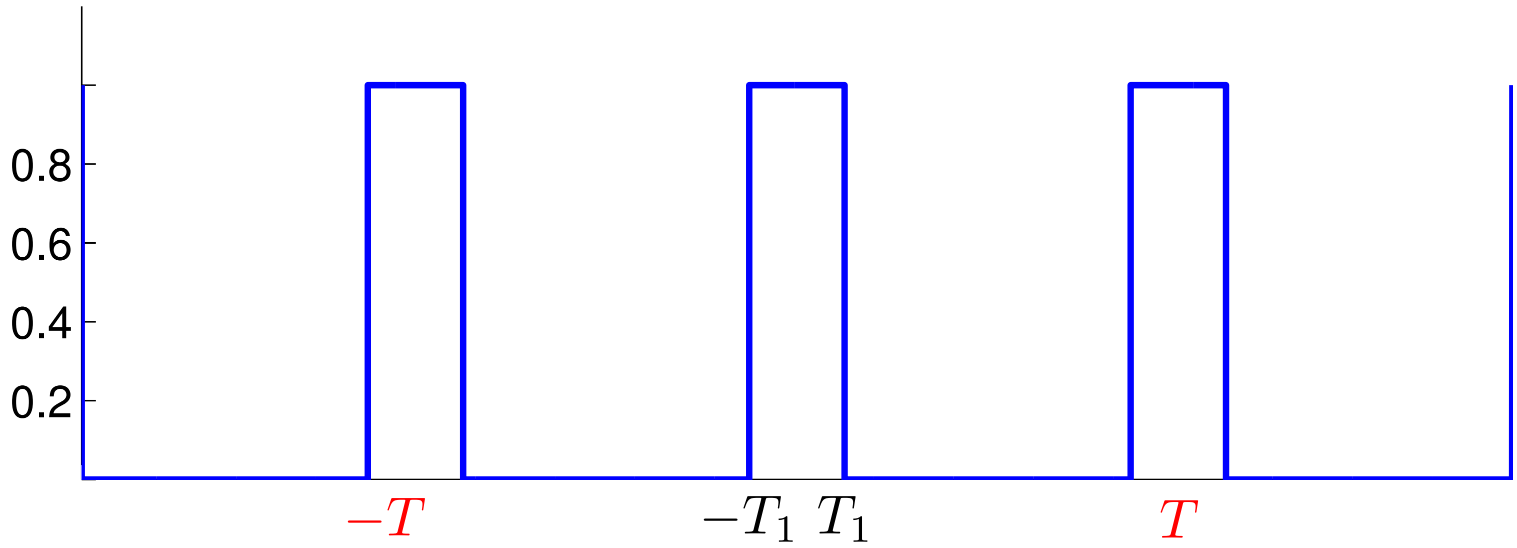
Transformada de Fourier (FT)

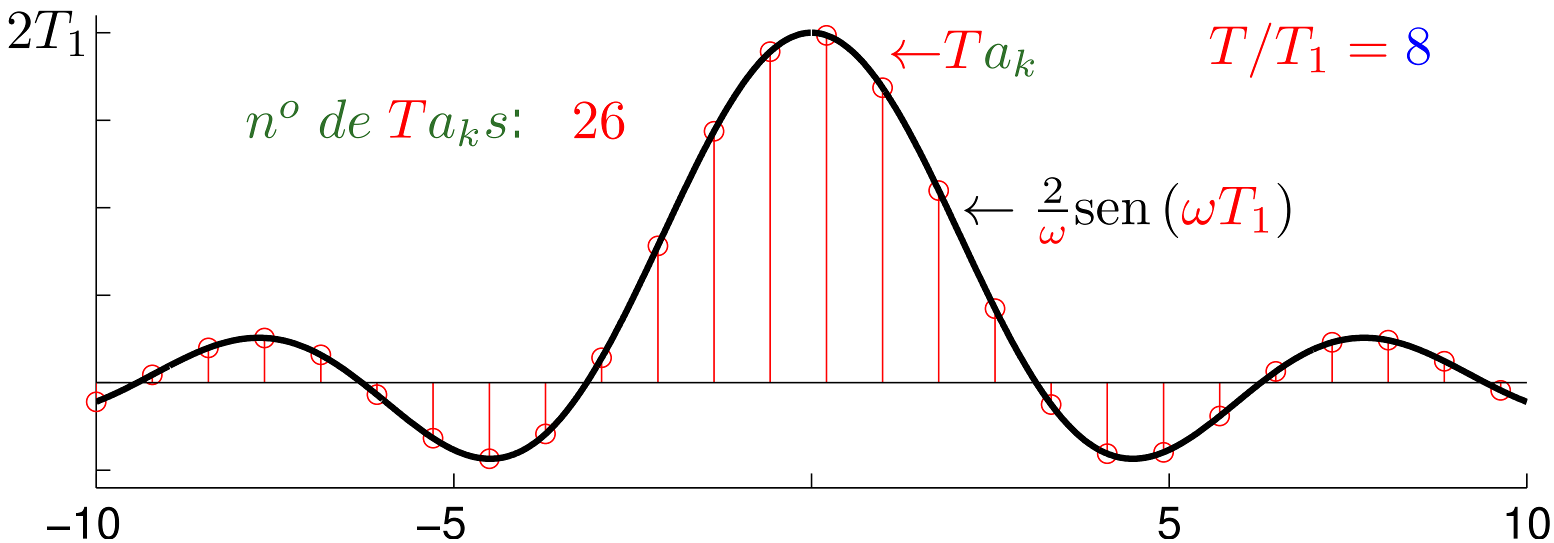


Transformada de Fourier (FT)

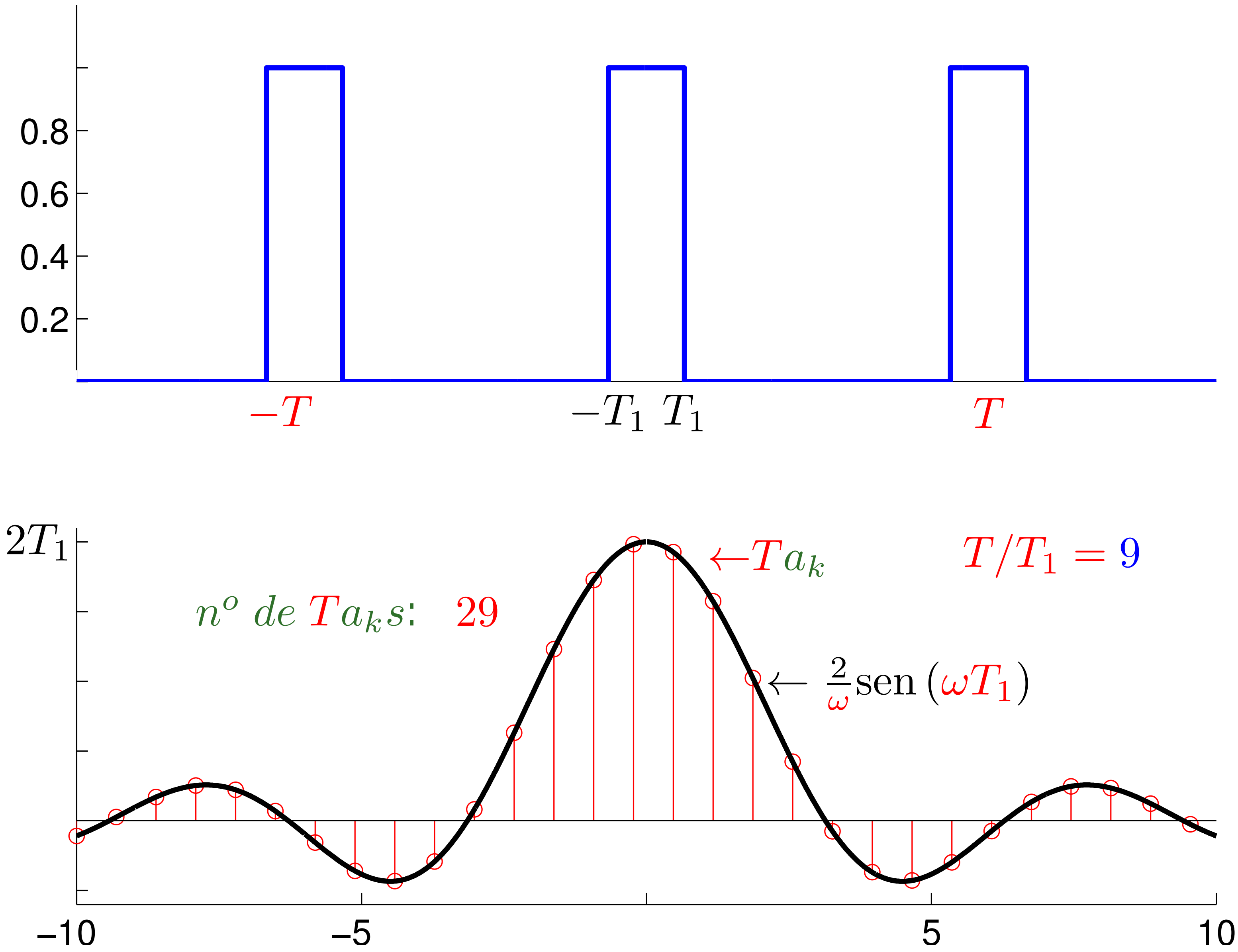


Transformada de Fourier (FT)

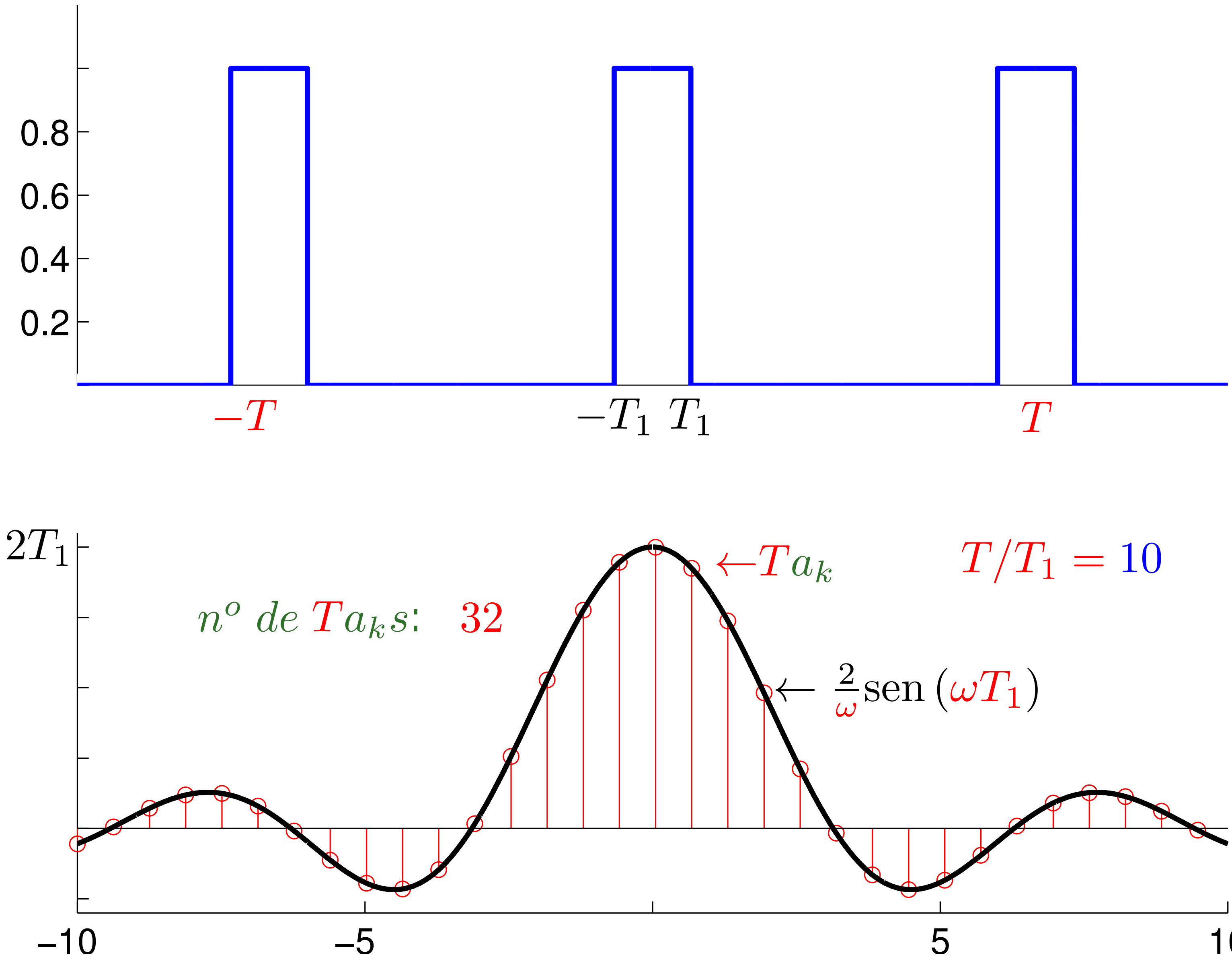




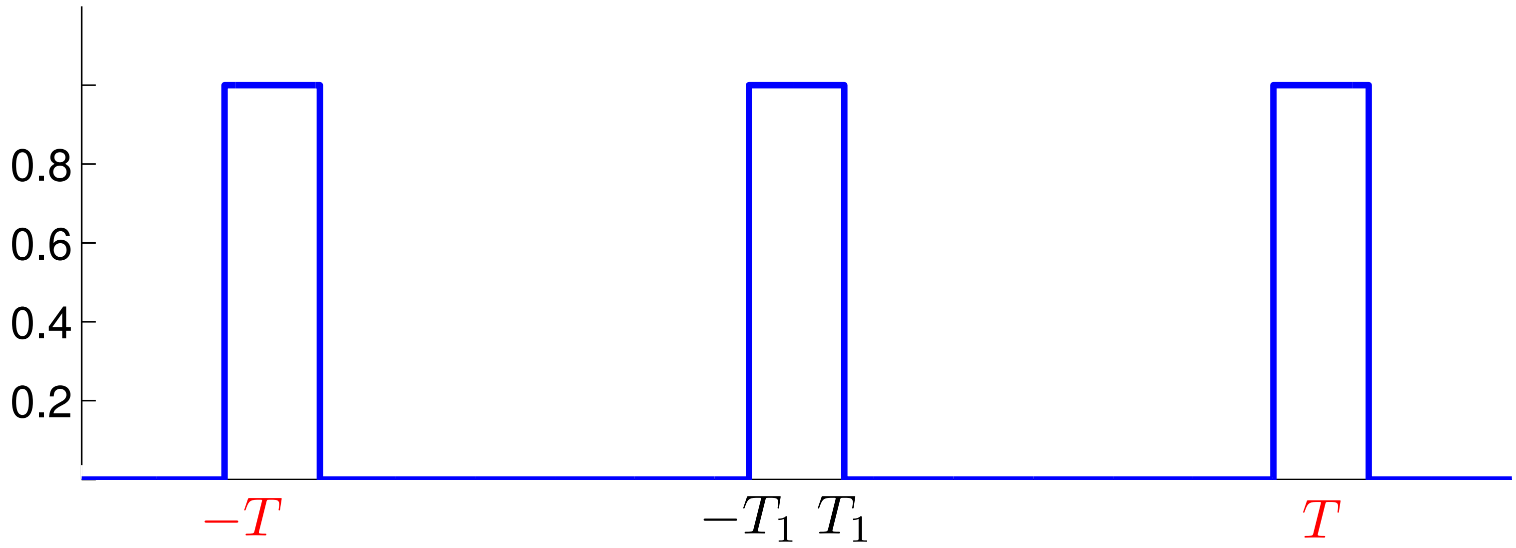
Transformada de Fourier (FT)

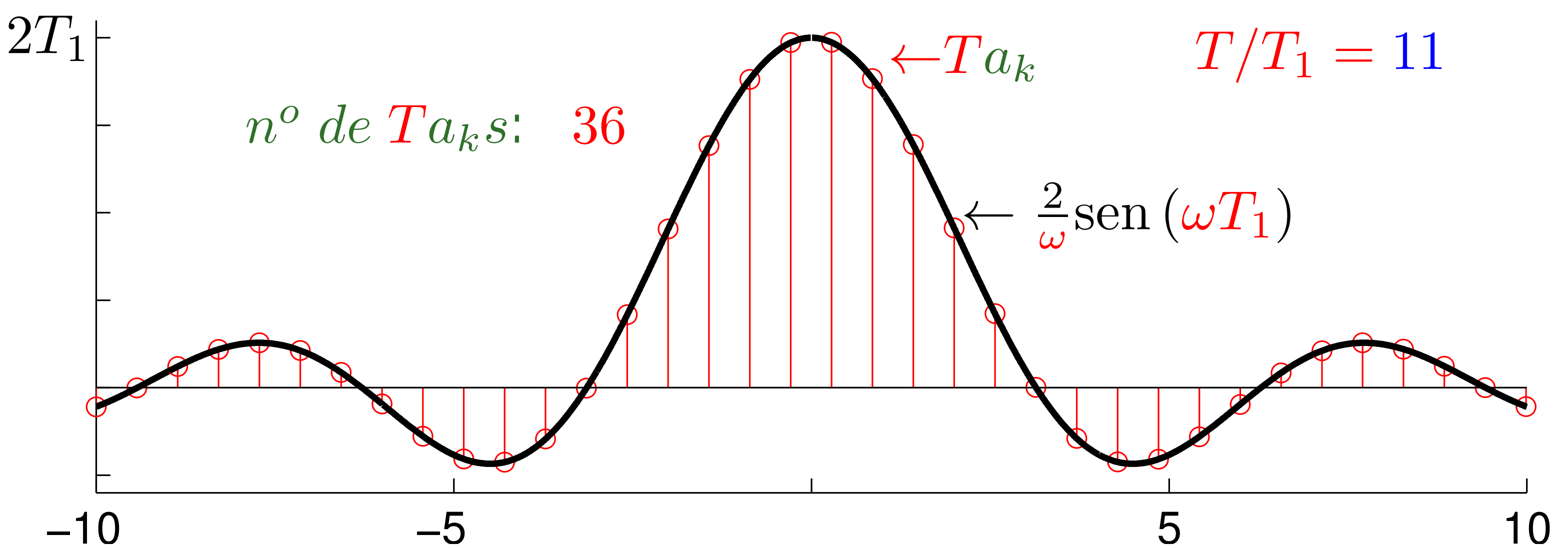


Transformada de Fourier (FT)

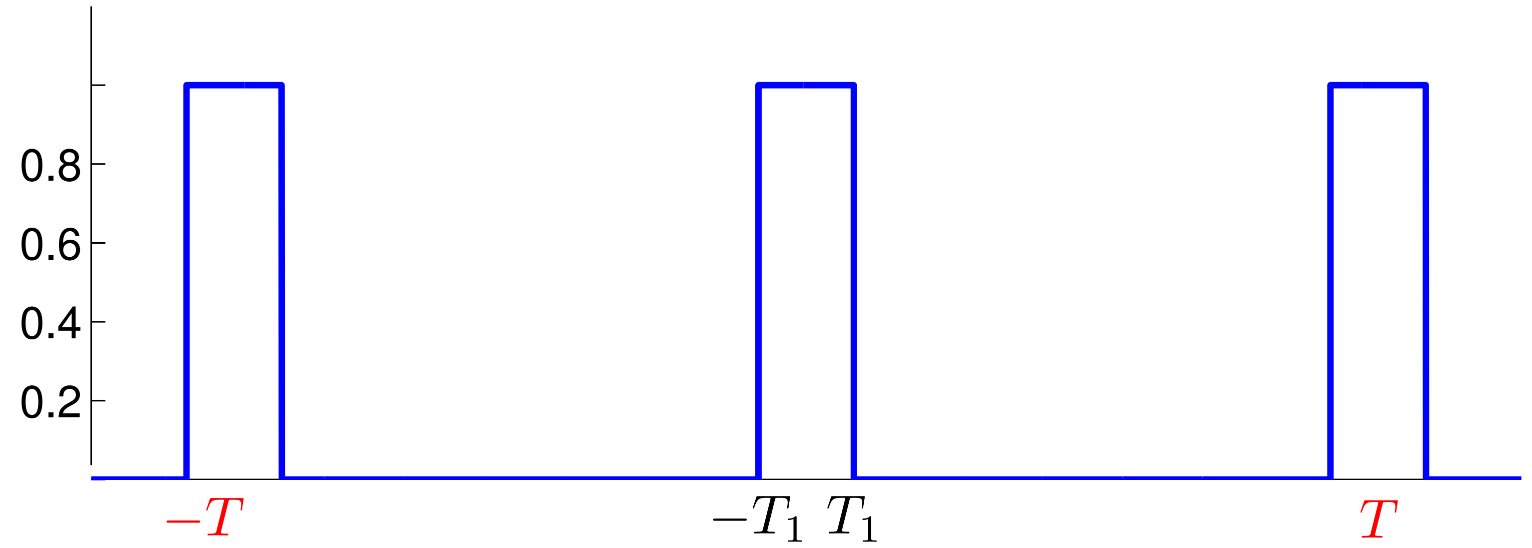


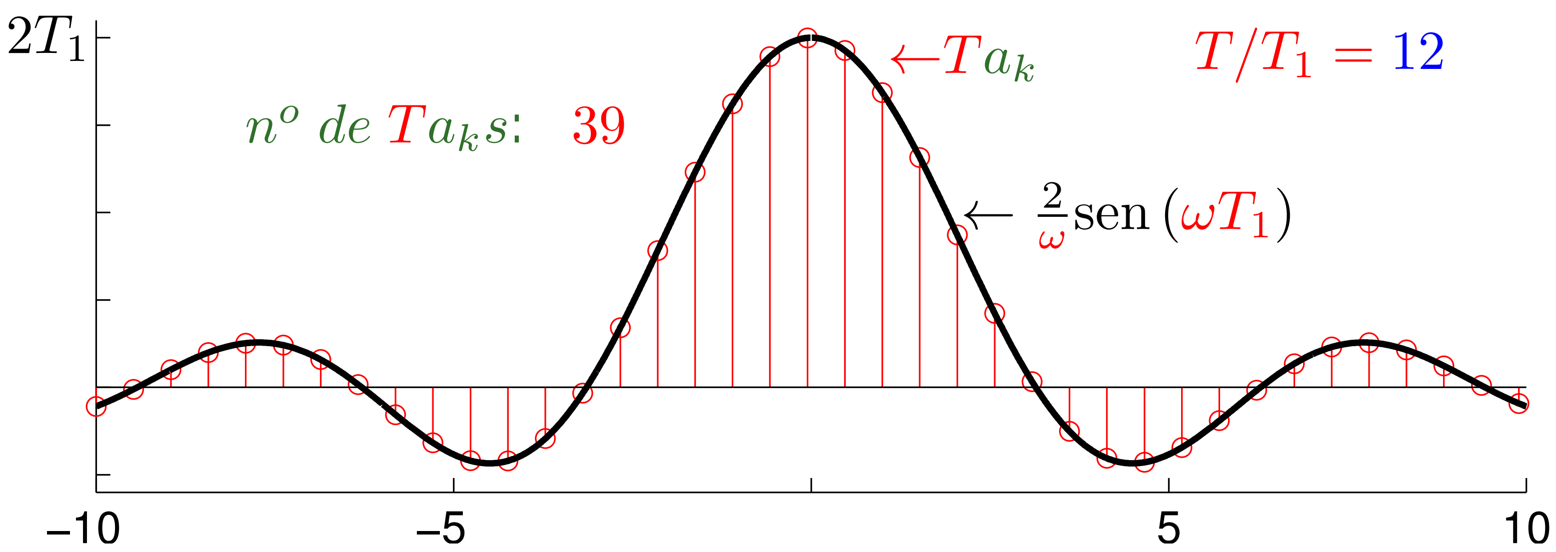
Transformada de Fourier (FT)



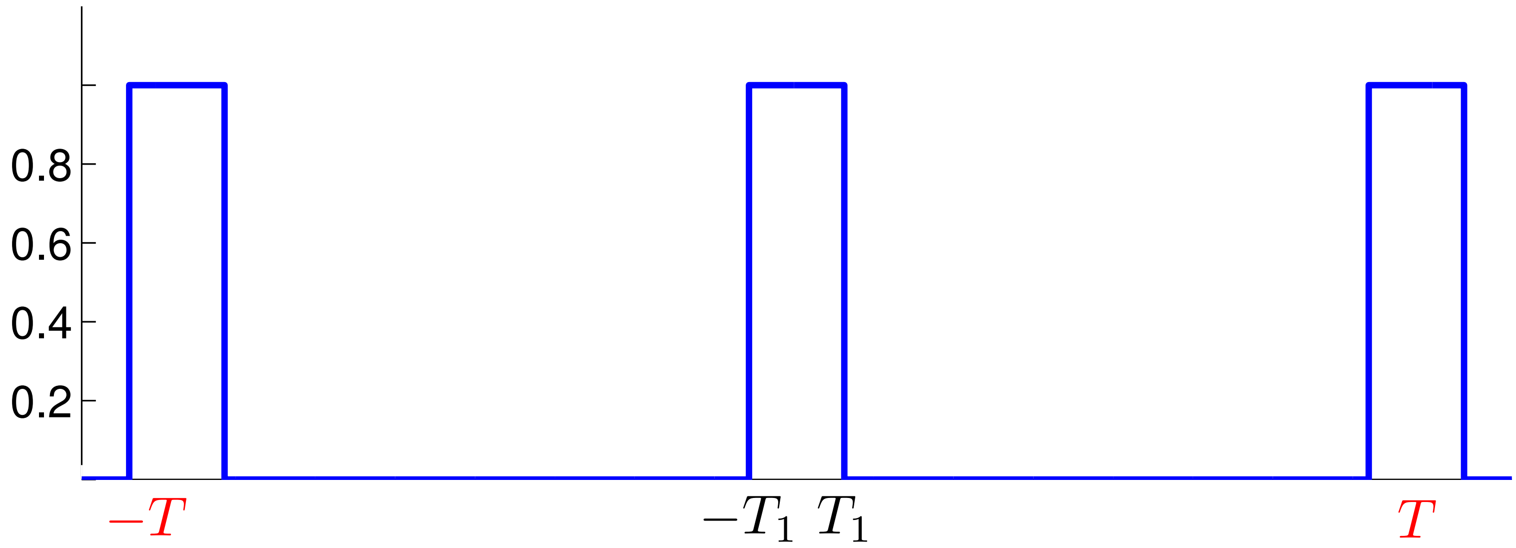


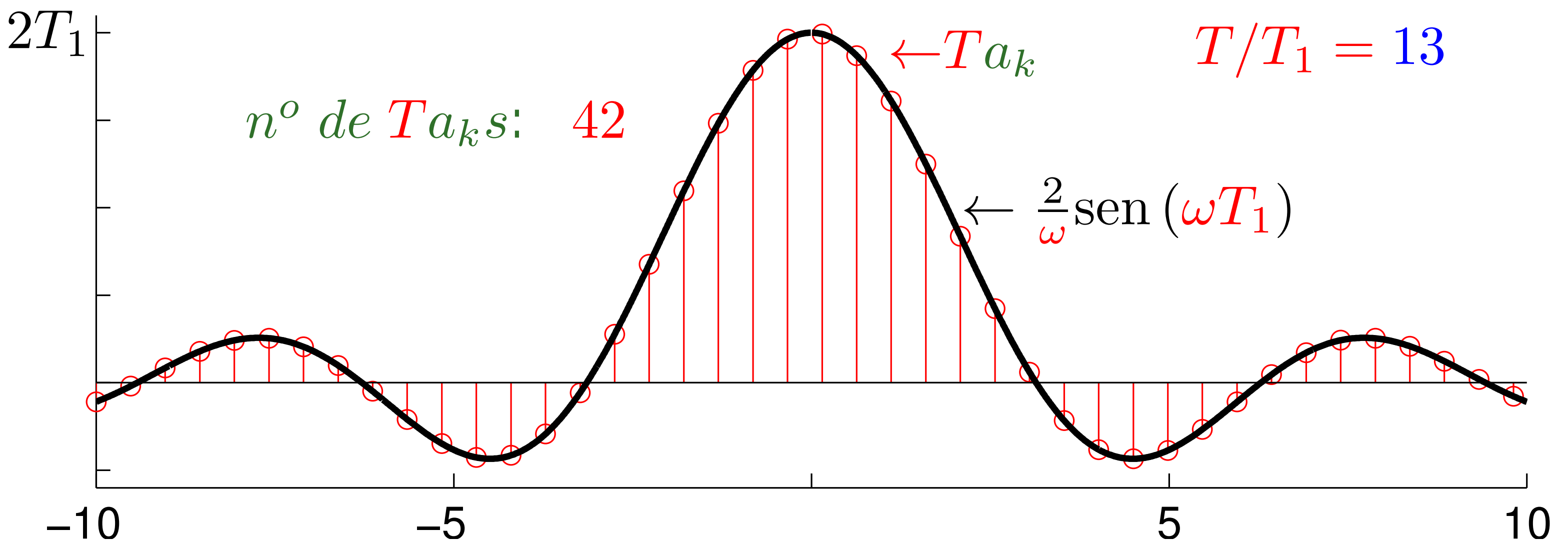
Transformada de Fourier (FT)



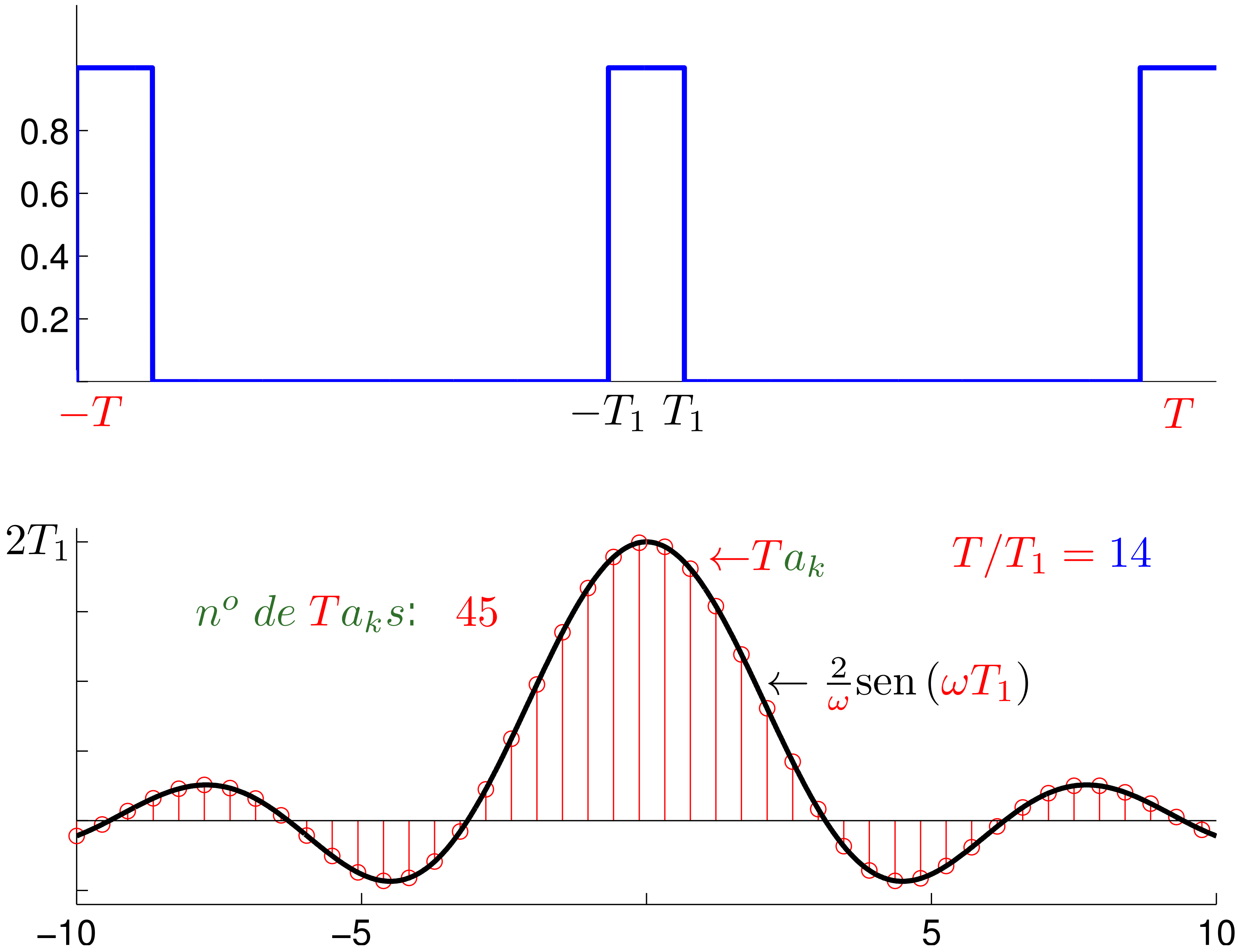


Transformada de Fourier (FT)

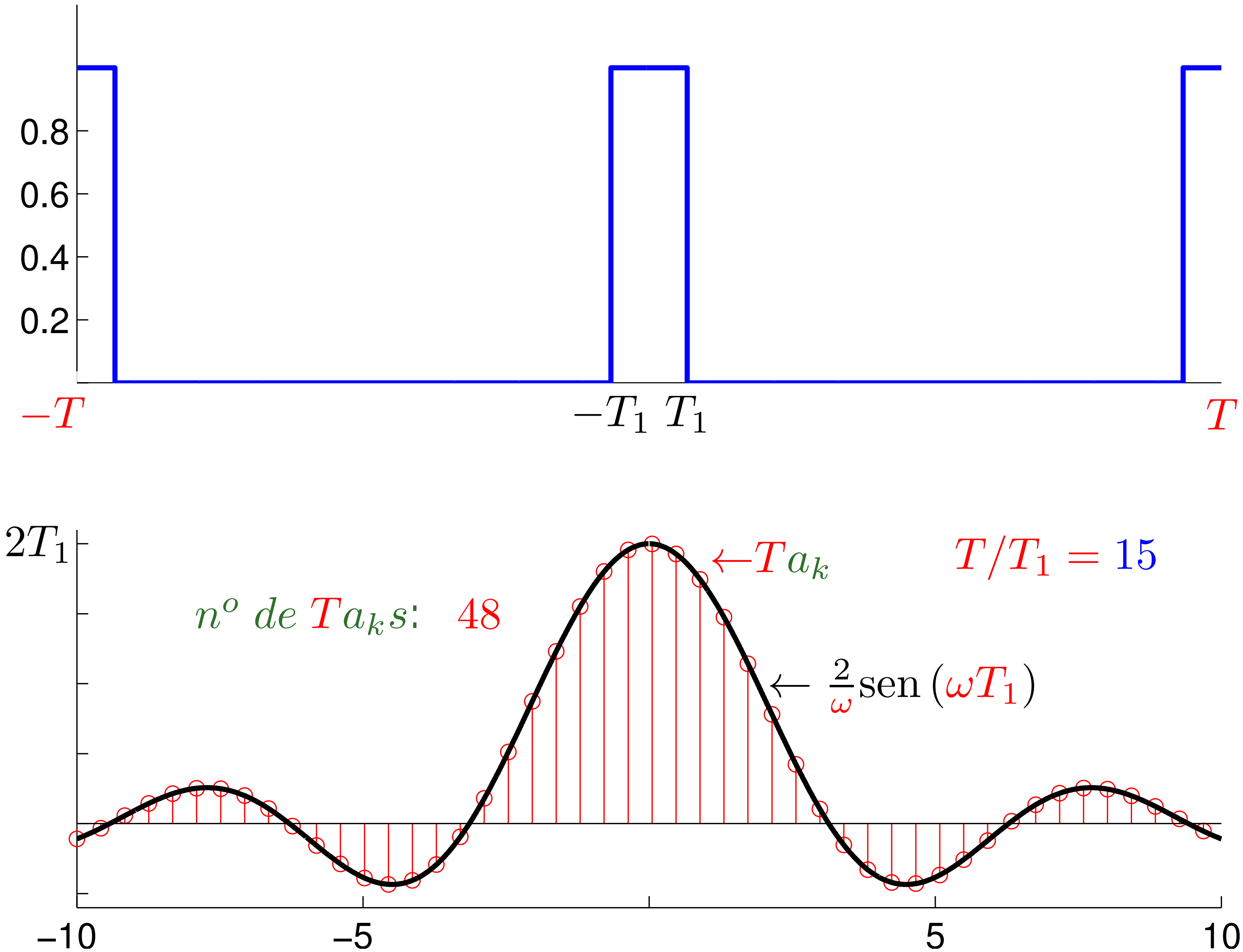




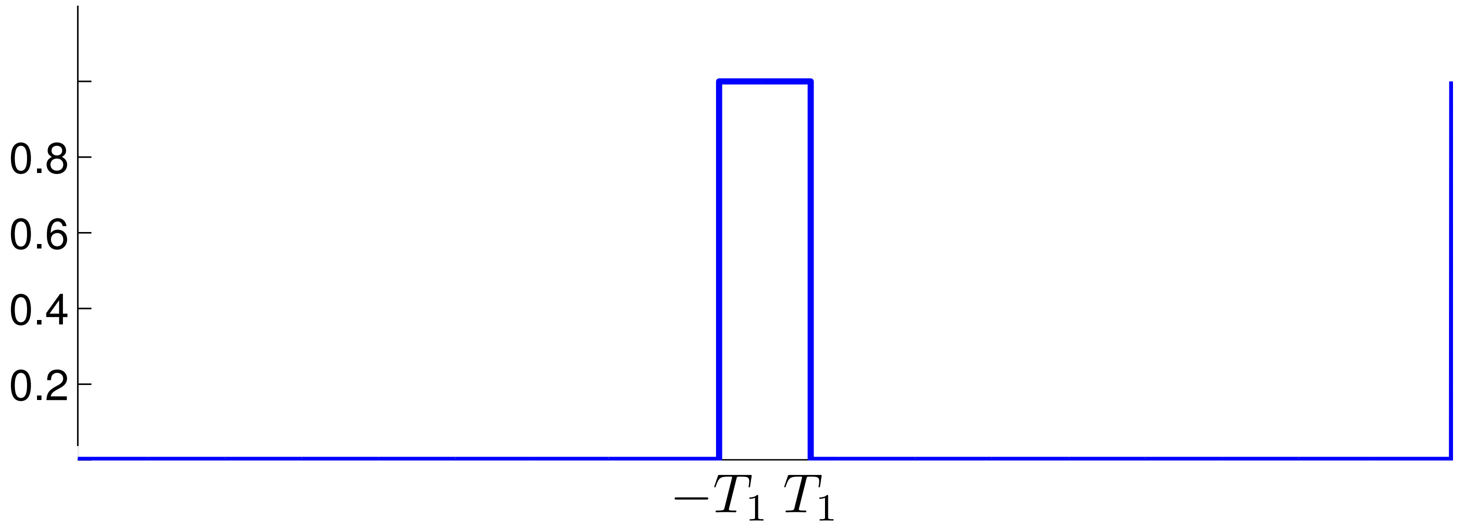
Transformada de Fourier (FT)

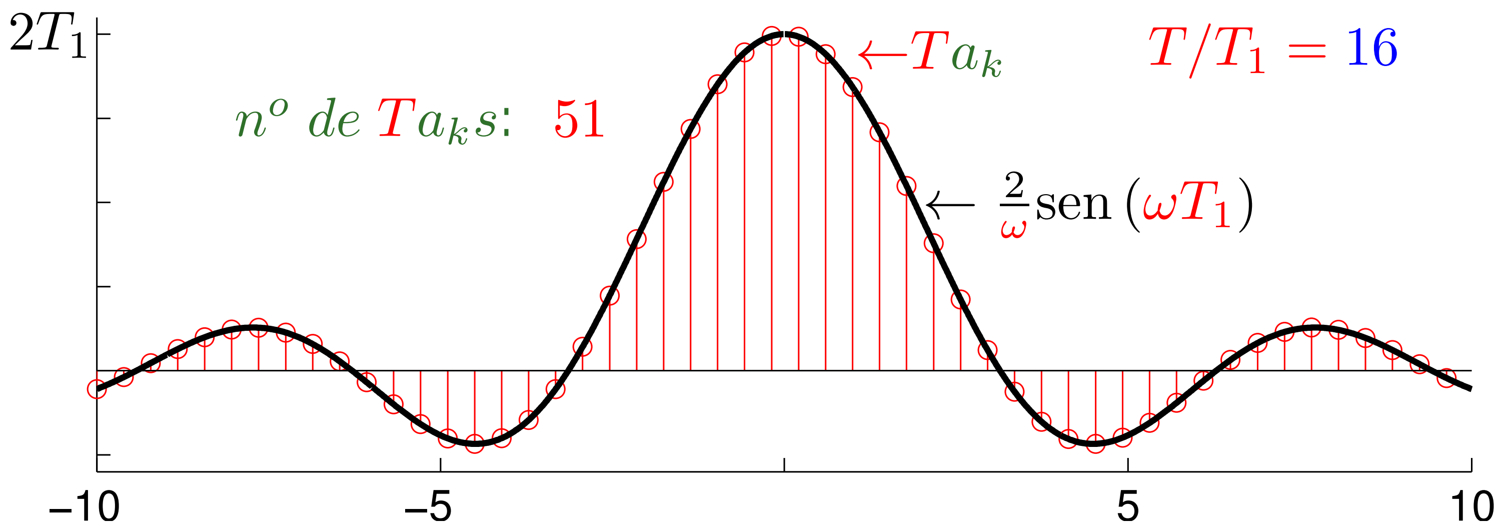


Transformada de Fourier (FT)



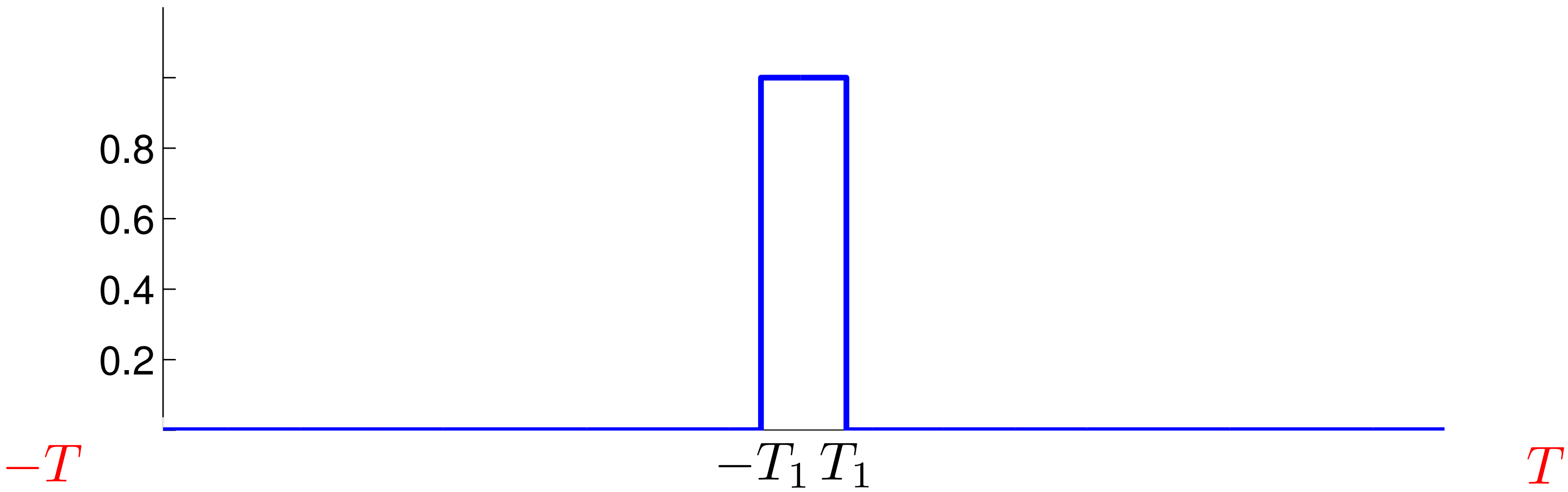
Transformada de Fourier (FT)

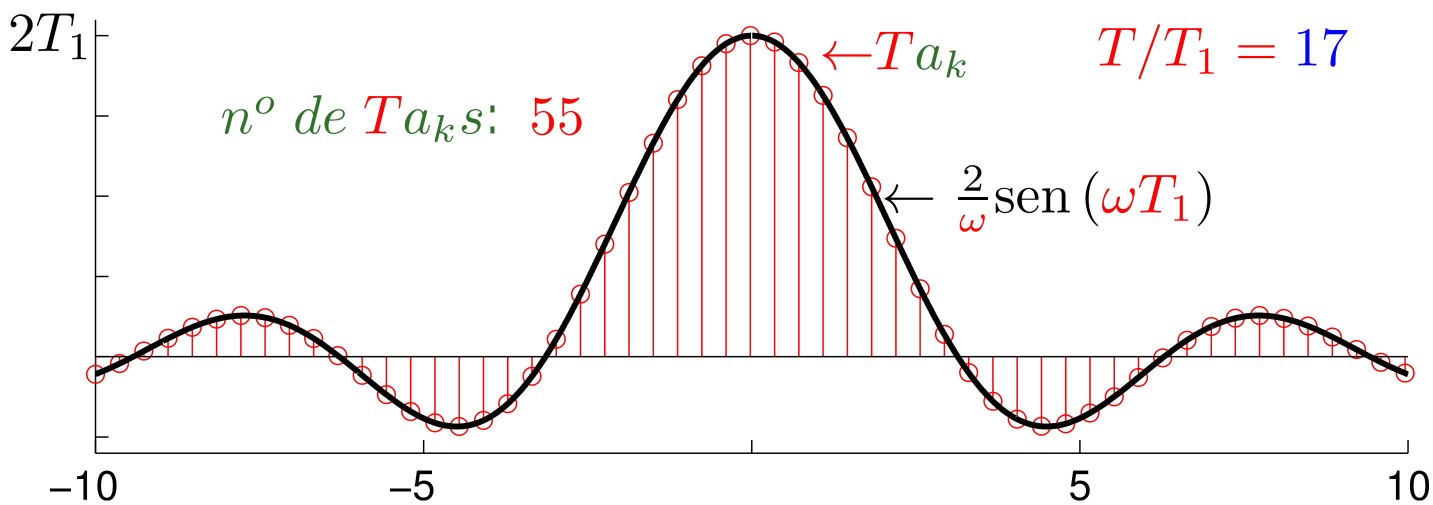




Transformada de Fourier (FT)

Observando que a FT do pulso é $\frac{2}{\omega}\mathrm{sen}\,(\omega T_1)$.





Determinação da Representação em FT

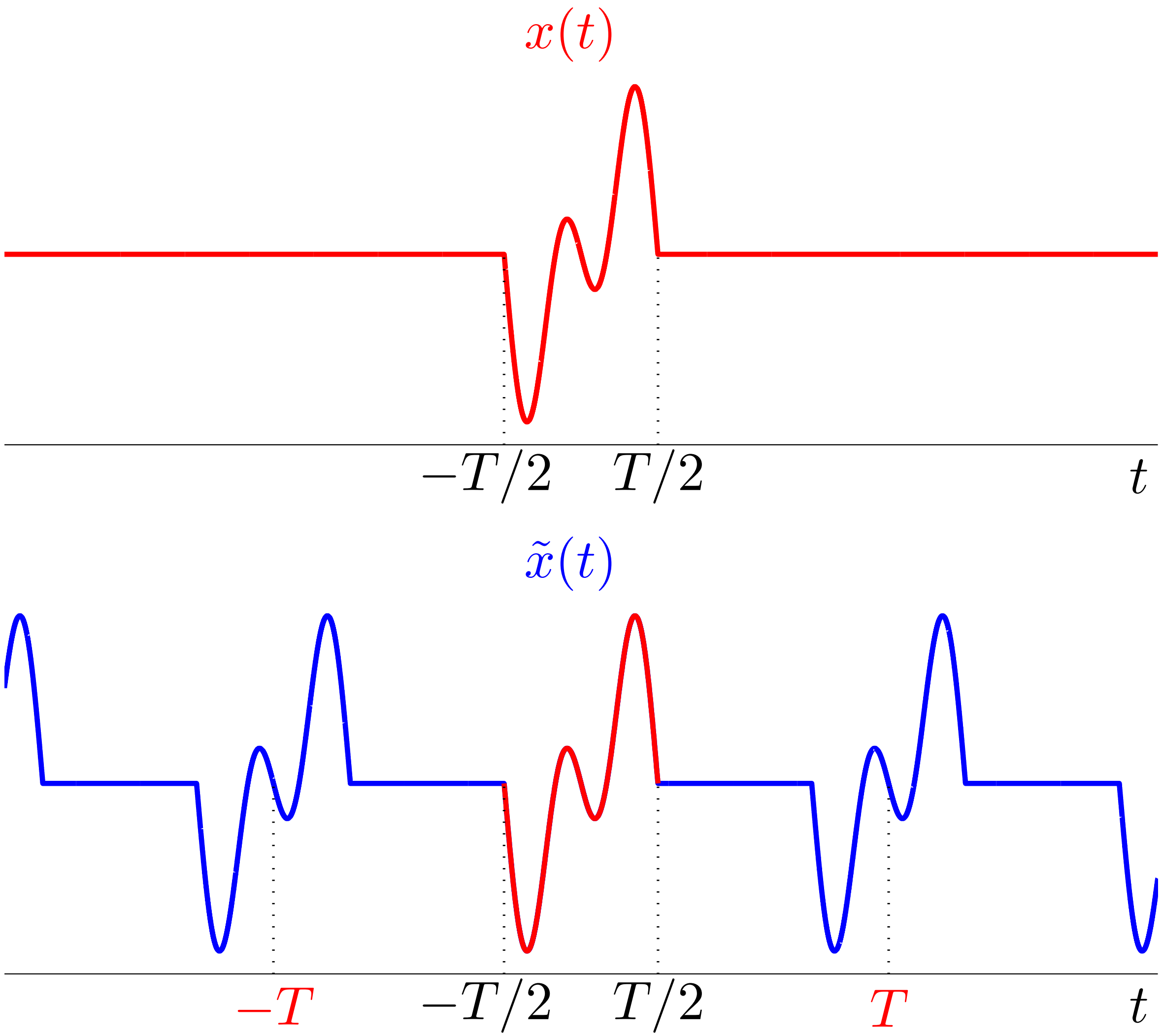
- Logo temos que:

$$
\begin{aligned}
Ta_k\big|_{T\to\infty} &= \left.\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right|_{k\omega_0\to\omega} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = X(j\omega)
\end{aligned}
$$

  - $X(j\omega)$: espectro de $x(t)$.
  - Integral ou Transformada de Fourier

Determinação da Representação em FT

Determine a FT de $x(t)$ aplicando a FS no sinal $\tilde{x}(t)$ e fazendo $T \to \infty$.



Determinação da Representação em FT

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \tilde{a}_k = \frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

logo,

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- $\tilde{a}_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$, sendo $\omega_0 = 2\pi/T$

Determinação da Representação em FT

- $\tilde{a}_k = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}_{X(jk\omega_0)} = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$

- $x(t) = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t)$:

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

$$x(t) = \lim_{\omega_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

Determinação da Representação em FT

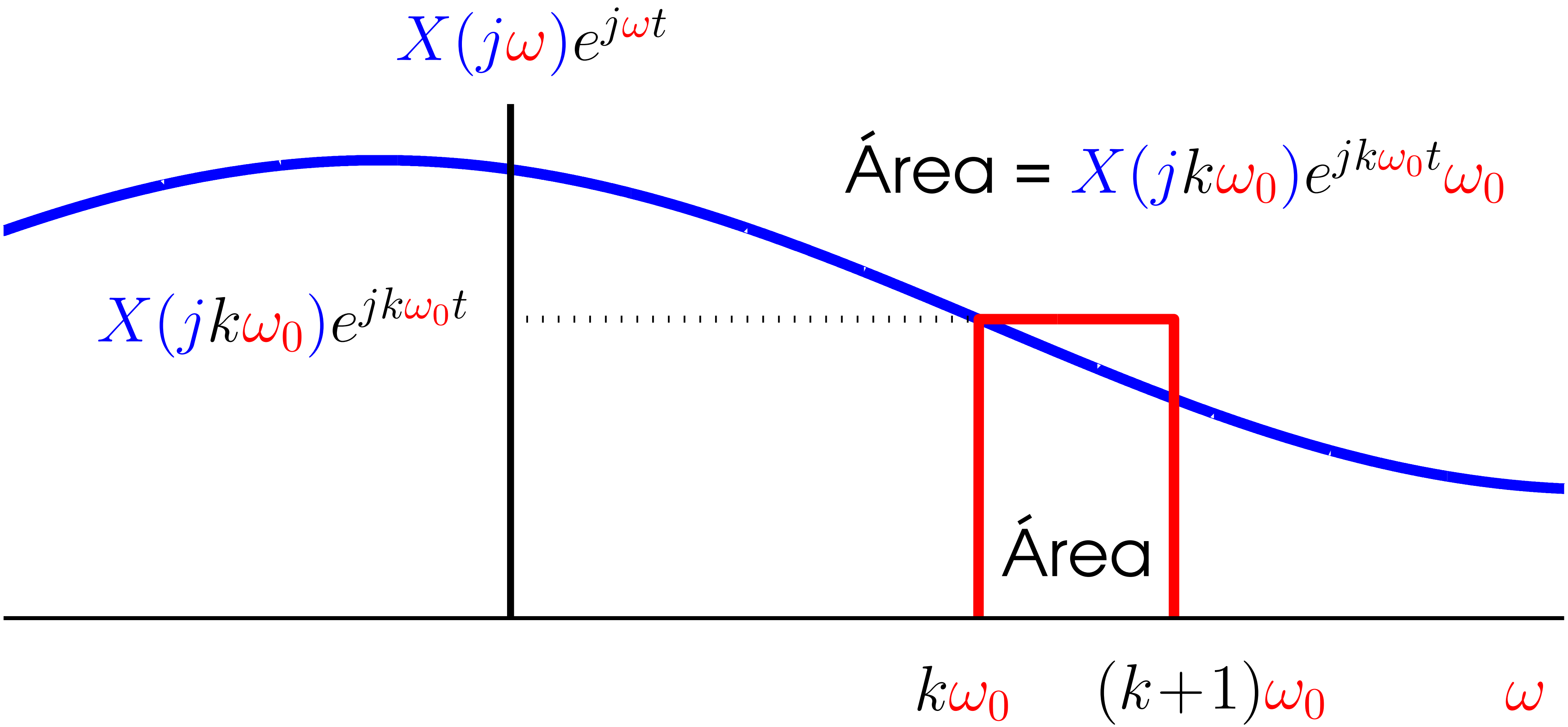
- $x(t) = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t)$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{\omega_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \\
&= \lim_{\omega_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} [(k+1) - k]\omega_0
\end{aligned}
$$

- Sendo $\omega_0 = 2\pi/T$, temos:

  <u>Se $T \to \infty$, então, $\omega_0 \to 0$</u>

Determinação da Representação em FT



$$x(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Determinação da Representação em FT

- $x(t) = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t)$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{\omega_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}\omega_0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega
\end{aligned}
$$

Representação em FT

- Transformada ou Integral de Fourier

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

  - $X(j\omega)$: espectro de $x(t)$.

- Transformada Inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Minimização do Erro

- Considere $x(t)$ e $\hat{x}(t)$ dado por

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \text{ com } X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- Então o MSE entre $x(t)$ e $\hat{x}(t)$, dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 = 0$$

apenas se $x(t)$ for absolutamente integrável ao quadrado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Convergência da FT

- Condições de Dirichlet
  - $x(t)$ for integrável absolutamente integrável:
  - $x(t)$ tenha um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito
  - $x(t)$ tenha um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito. E, cada uma dessas descontinuidades precisam ser finitas.

Exemplo: Exponencial

Calcule a FT do sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$. Logo:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

Logo a integral não converge para $a < 0$.

Então para $a \geq 0$ temos,

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Exemplo: Exponencial

- Transformada de Fourier (FT)

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

- $|X(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$
- $\measuredangle X(j\omega) = \arctan\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

Exercício 1: Exponencial

Calcule a FT do sinal $x(t) = e^{-a|t|}$ com $a > 0$:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$$

- Transformada ou Integral de Fourier

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Exercício 2: Pulso

Obtenha a FT do sinal:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases}$$

- Transformada ou Integral de Fourier

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Exemplo: Pulso na Frequência

Determine o sinal $x(t)$ a partir de

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & W < |\omega| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} 1e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{jt2\pi}e^{j\omega t}\Big|_{-W}^{W} = \frac{1}{\pi t}\frac{1}{2j}\left(e^{jWt} - e^{-jWt}\right) \\ &= \frac{1}{\pi t}\mathrm{sen}(Wt), \quad \forall t \neq 0 \\ x(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{sen}(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \quad \text{(Regra de L'Hôpital)} \end{aligned}$$

Exercício 3 : Impulso no tempo

Determine a transformada de Fourier para o impulso $\delta(t)$.

- Transformada ou Integral de Fourier

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

FT para Sinais Periódicos

- Sinais periódicos de tempo contínuo: FS
- Sinais aperiódicos de tempo contínuo: FT
- Contexto unificado: FT para sinais periódicos e aperiódicos.

Exercício 4: Impulso na frequência

Determine a transformada inversa de Fourier de $X(j\omega) = \delta(\omega)$.

- Transformada Inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

FT para Sinais Periódicos

- Considere o sinal $x(t)$ com FT:

$$X(j\omega) = a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

logo

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_k\delta(\omega - k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}d\omega \\ &= a_k e^{jk\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0)d\omega \\ &= a_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

FT para Sinais Periódicos

- Para uma combinação linear de impulsos igualmente espaçados na frequência

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

temos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{(Série de Fourier)}$$

- Temos o par de Transformada de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \overset{FT}{\longleftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

Exemplo: FT para Sinais Periódicos

- Determine a FT do sinal

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

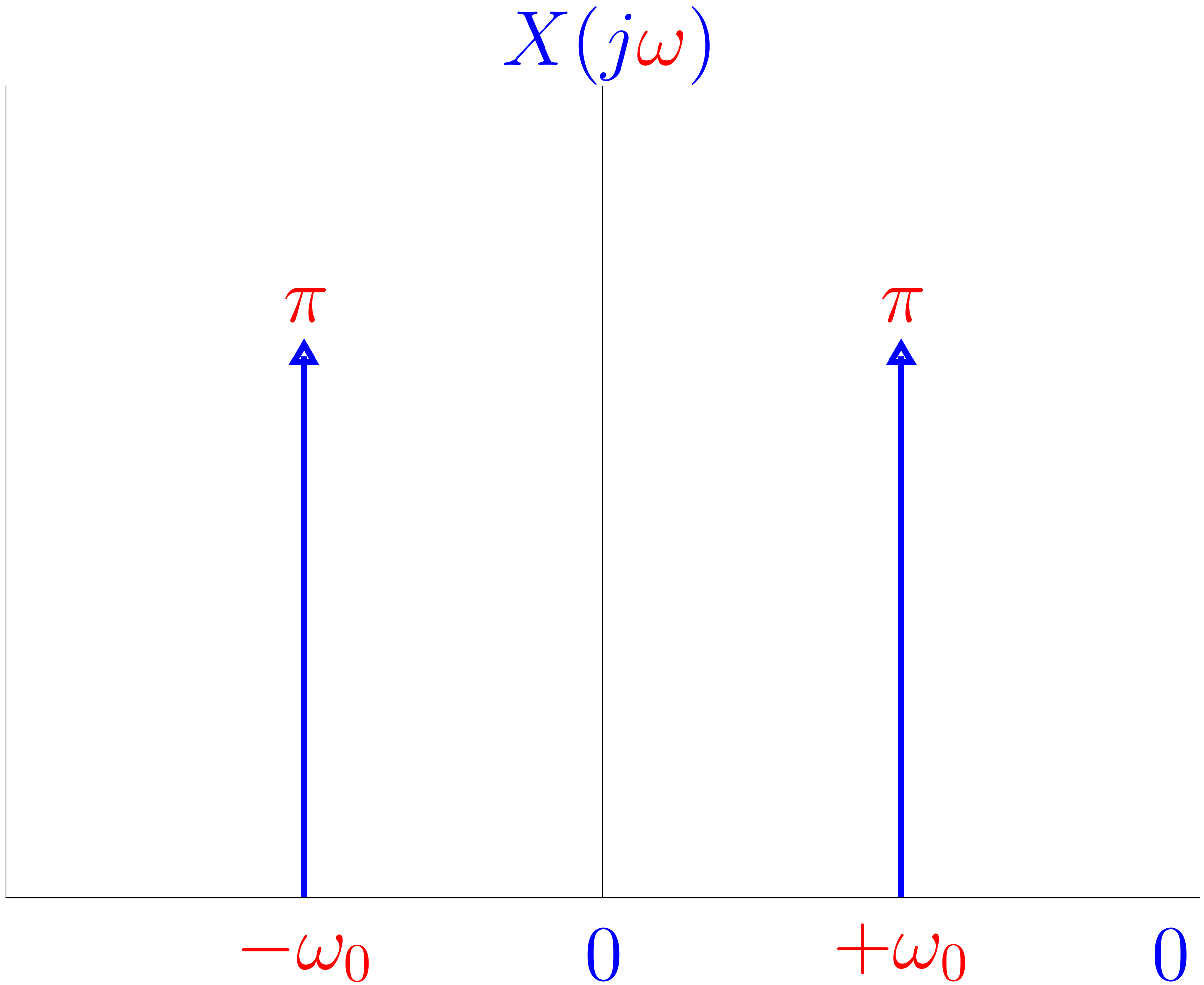
$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \begin{cases} a_{-1} & = & \frac{1}{2} \\ a_1 & = & \frac{1}{2} \\ a_k & = & 0,\ \forall |k| \neq 1 \end{cases}$$

Logo,

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega + 1\omega_0) + \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega - 1\omega_0)$$

Exemplo: FT para Sinais Periódicos

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega + 1\omega_0) + \pi\delta(\omega - 1\omega_0)$$



Exercício 5: FT para Sinais Periódicos

- Determine a FT do sinal

$$x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$$

Sabendo que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

Exercício 6: FT para Sinais Periódicos

Determine a FT do trem de impulsos

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT)$$

Sabendo que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

Representações de sinais por Fourier

- Sinal Contínuo e Periódico - Série de Fourier (FS)
- Sinal Discreto e Periódico - Série de Fourier Discreta (DTFS)
- Sinal Contínuo e Não-Periódico - Transformada de Fourier (FT)
- Sinal Discreto e Não-Periódico - Transformada de Fourier Discreta (DTFT)
  - Propriedades da FT e da DTFT

Série de Fourier Discreta (DTFS)

- Repare que:

$$\begin{aligned} e^{j(N+k)\omega_0 n} &= e^{jN\omega_0 n} e^{jk\omega_0 n}, \text{ mas } N\omega_0 = N\frac{2\pi}{N} = 2\pi \\ &= e^{j2\pi n} e^{jk\omega_0 n}, \text{ mas } e^{j2\pi n} = 1 \\ &= e^{jk\omega_0 n} \end{aligned}$$

- Portanto a série de Fourier Discreta tem apenas N coeficientes a_k.

- $k \underbrace{\omega_0}_{=2\pi/N} \in \underbrace{[W, W+2\pi]}_{\text{Largura } 2\pi}$, pois $k \in \underbrace{[M, M+N-1]}_{N \text{ parcelas}}$

Determinação dos Coeficientes da DTFS

Representação de sinais periódicos de tempo discreto em Série de Fourier

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n},$$

sendo,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Transformada de Fourier (DTFT)

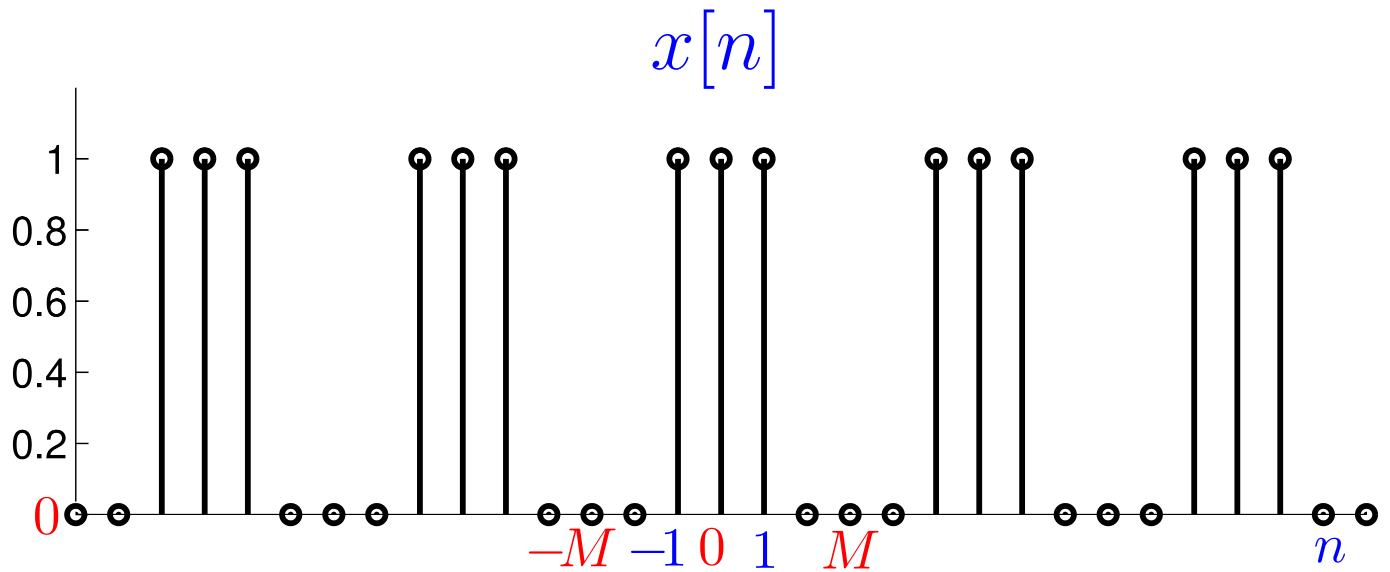
- Fourier intuiu que um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico com período infinito

$$\tilde{x}[n] = \lim_{N \to \infty} x[n]$$

- Enquanto o período aumenta a frequência diminui e as componentes harmonicamente relacionadas tornam-se mais próximas em frequência.

Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

Exemplo: Encontre a DTFS para a onda quadrada mostrada abaixo.



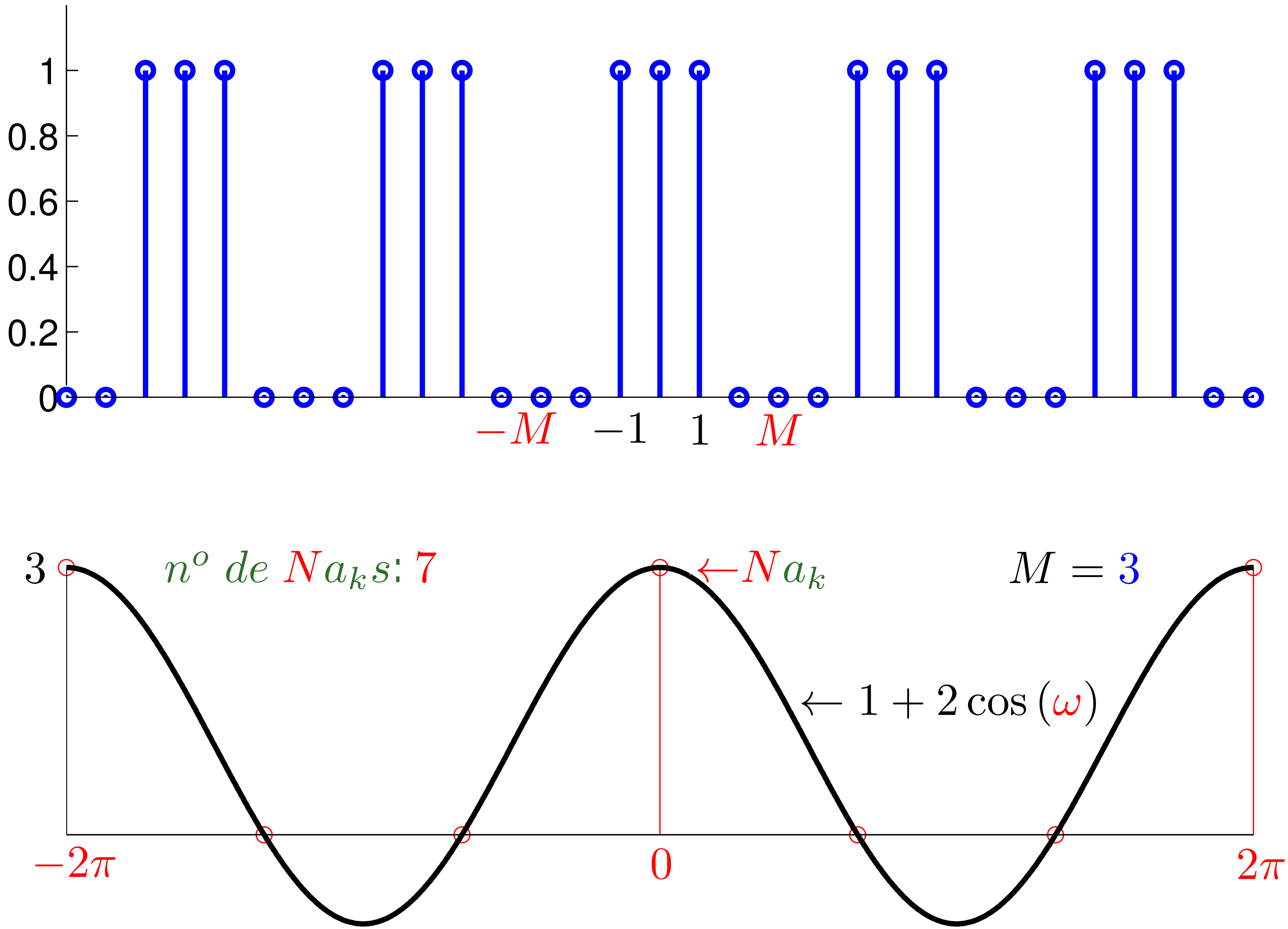
$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}, \qquad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \quad \Rightarrow \quad N a_k = \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

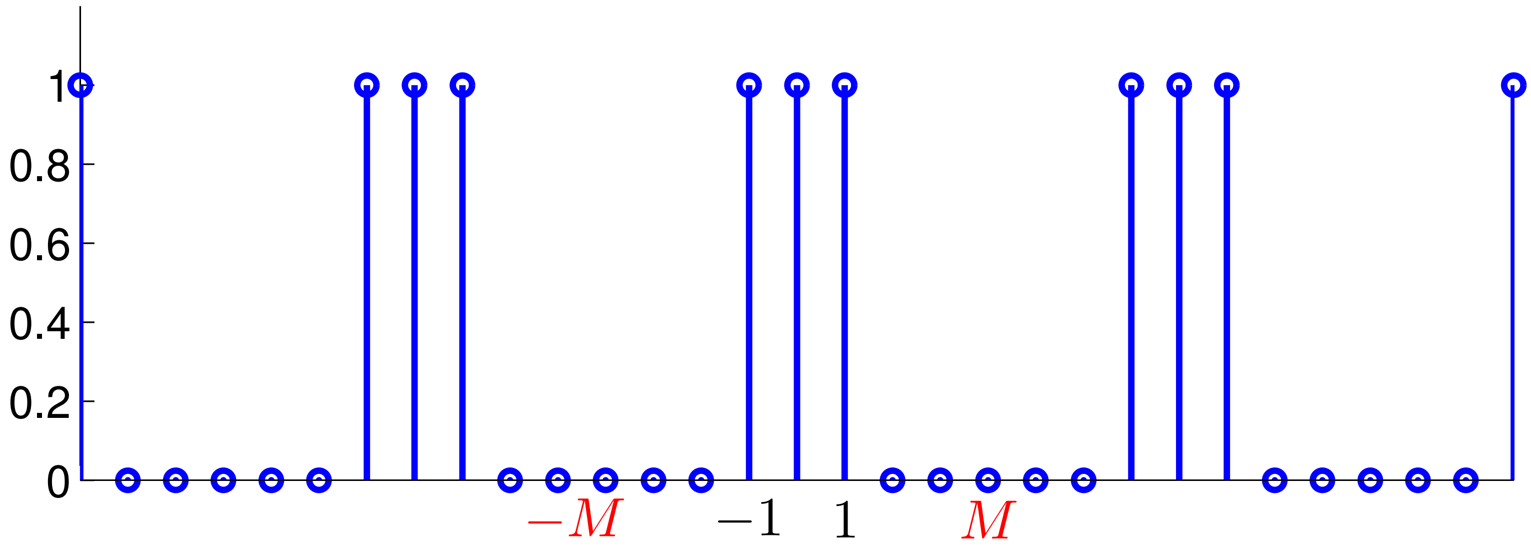
logo,

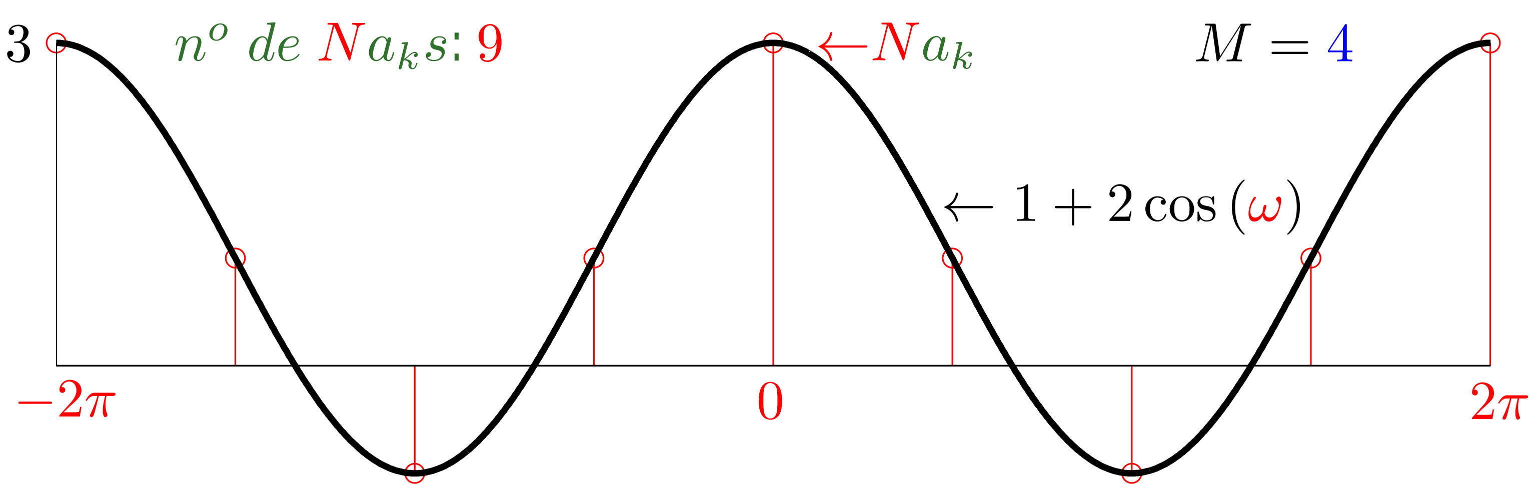
$$\begin{aligned} N a_k &= \sum_{n=-1}^{1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \\ &= 1 e^{-jk\omega_0(-1)} + 1 e^{-jk\omega_0(0)} + 1 e^{-jk\omega_0(1)} \\ &= e^{jk\omega_0} + 1 + e^{-jk\omega_0} \\ &= 1 + 2\cos(k\omega_0) \end{aligned}$$

Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

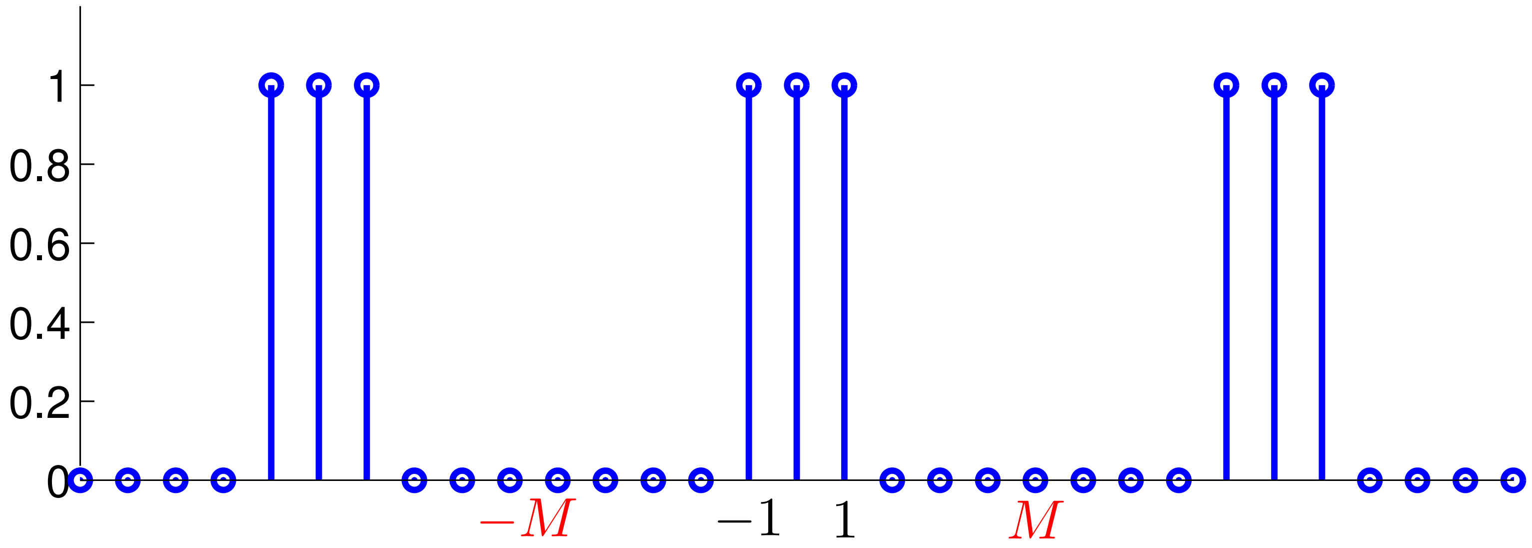


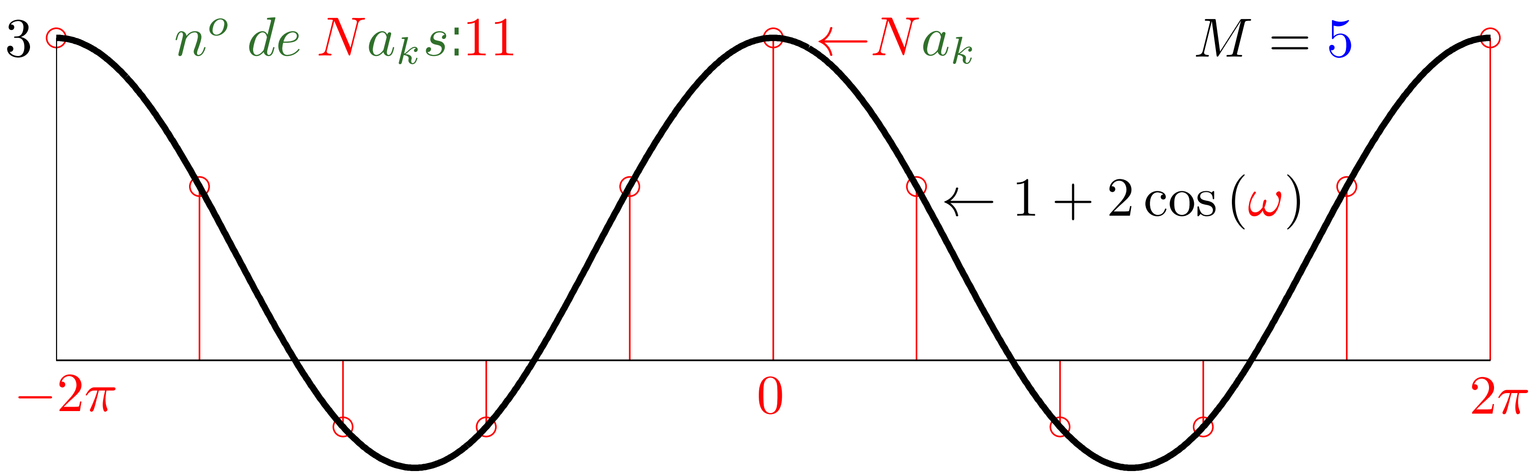
Transformada de Fourier Discreta (DTFT)



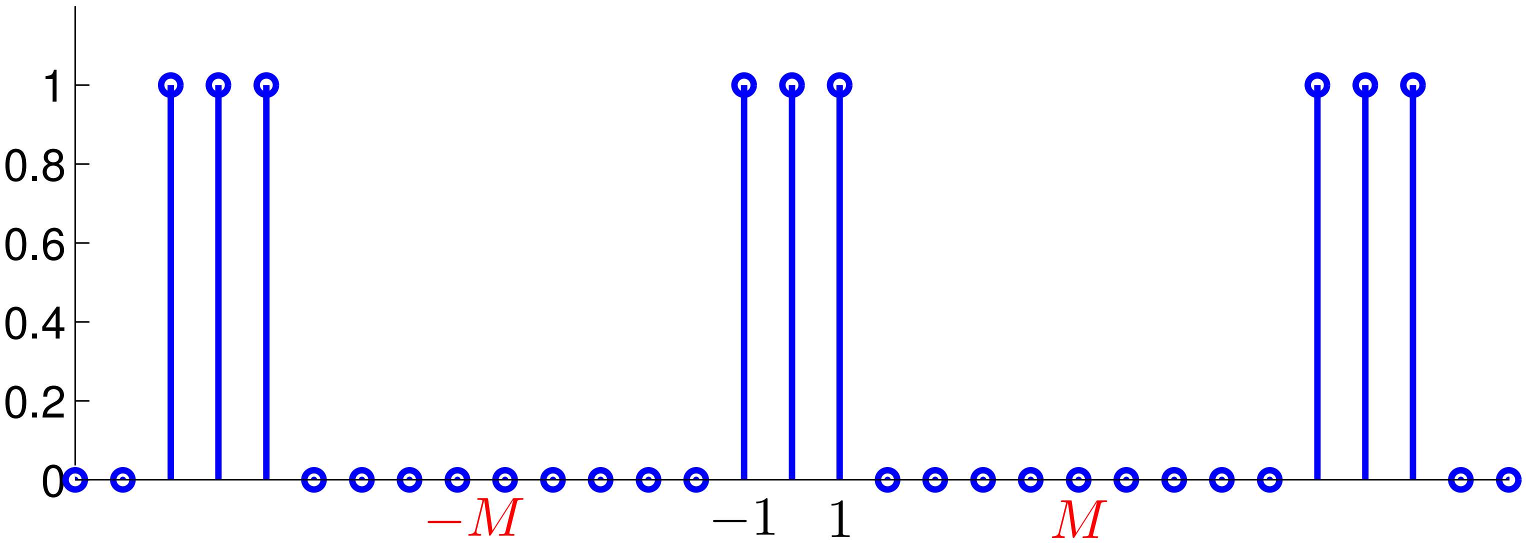


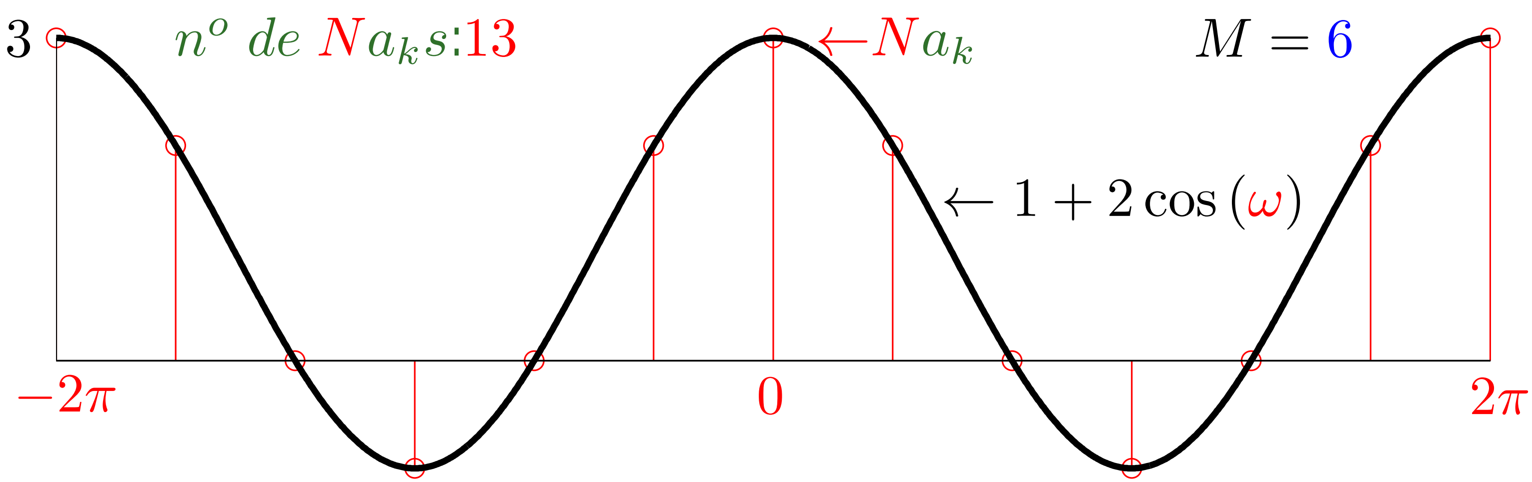
Transformada de Fourier Discreta (DTFT)



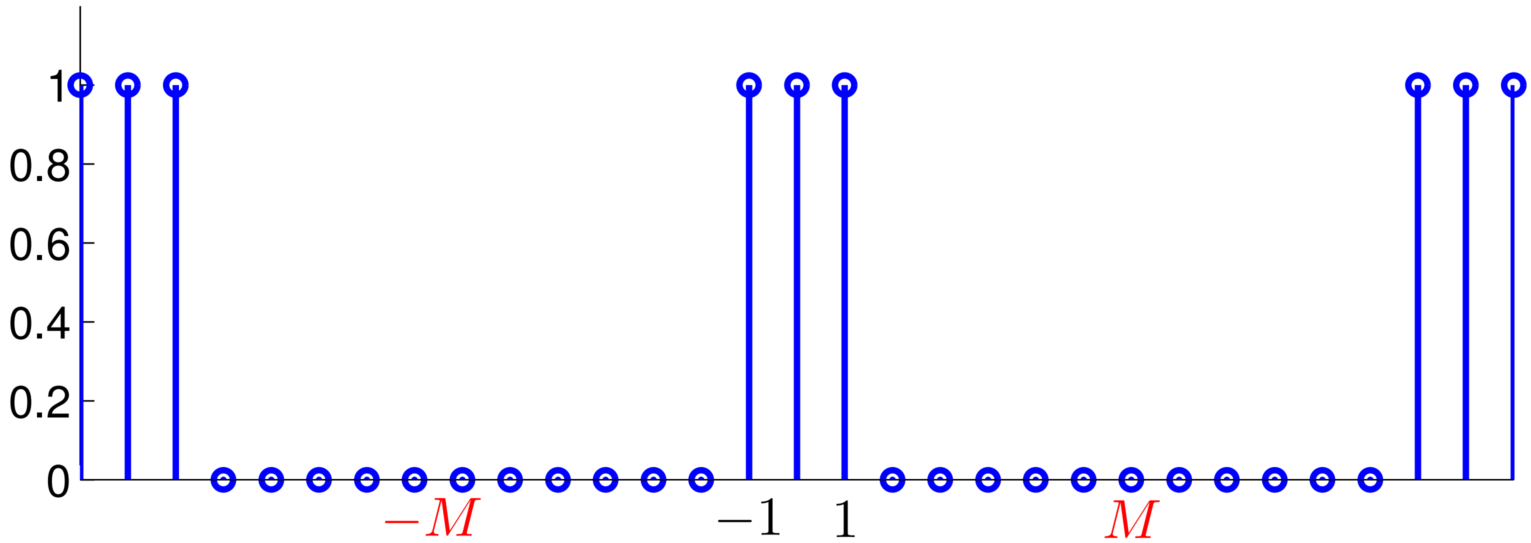


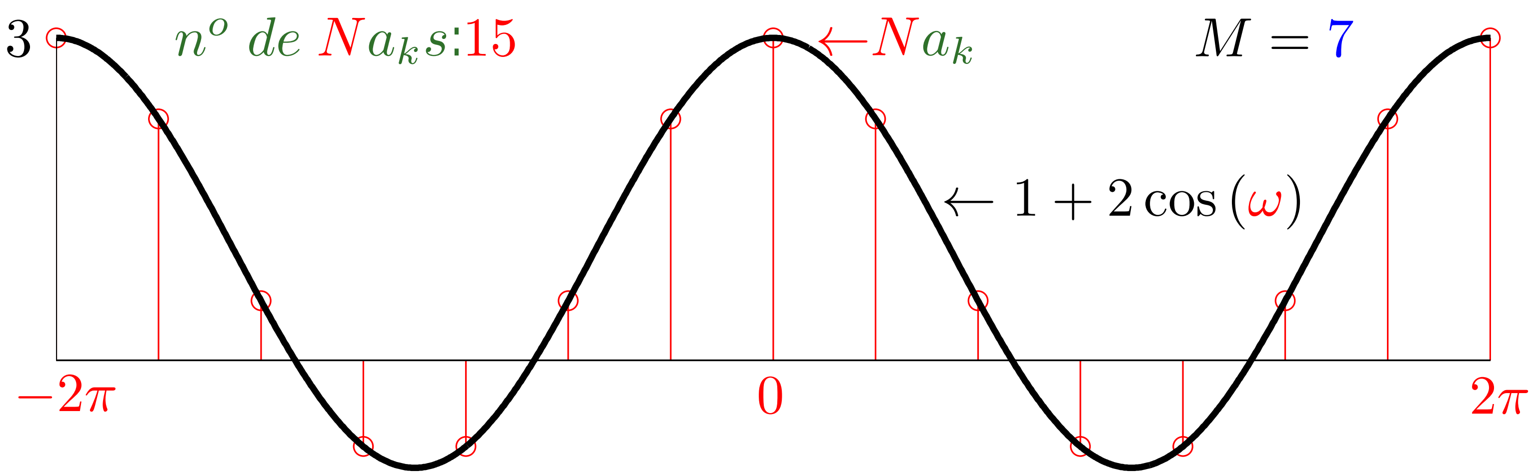
Transformada de Fourier Discreta (DTFT)



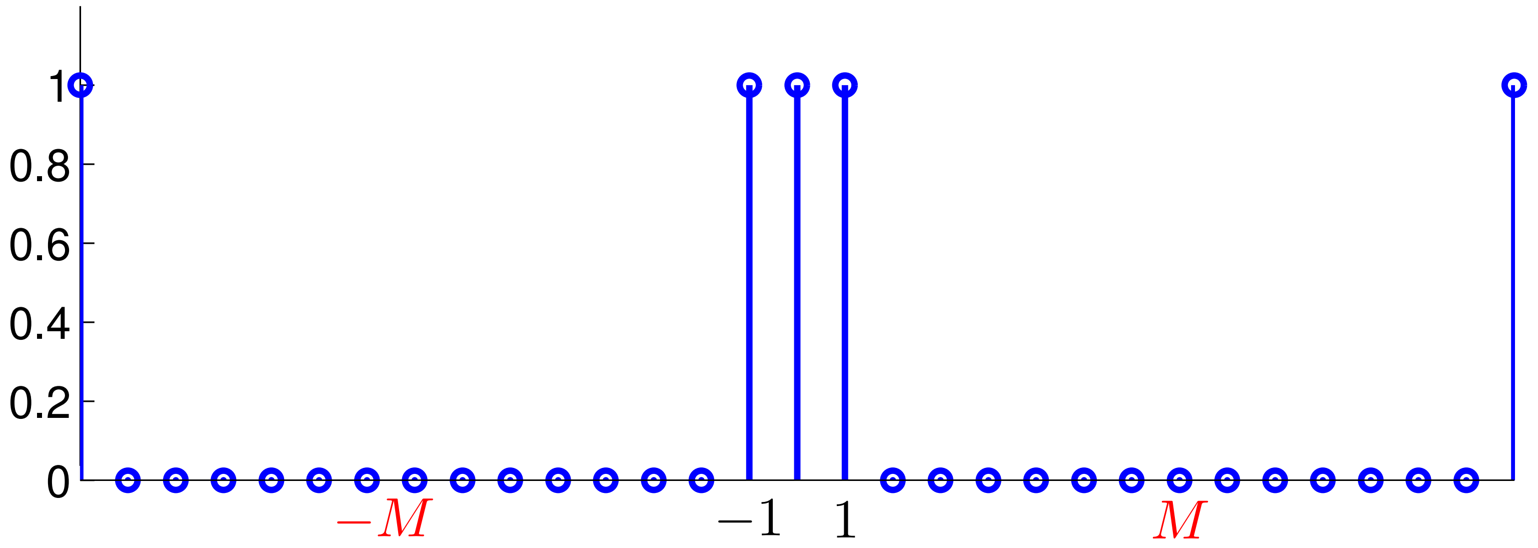


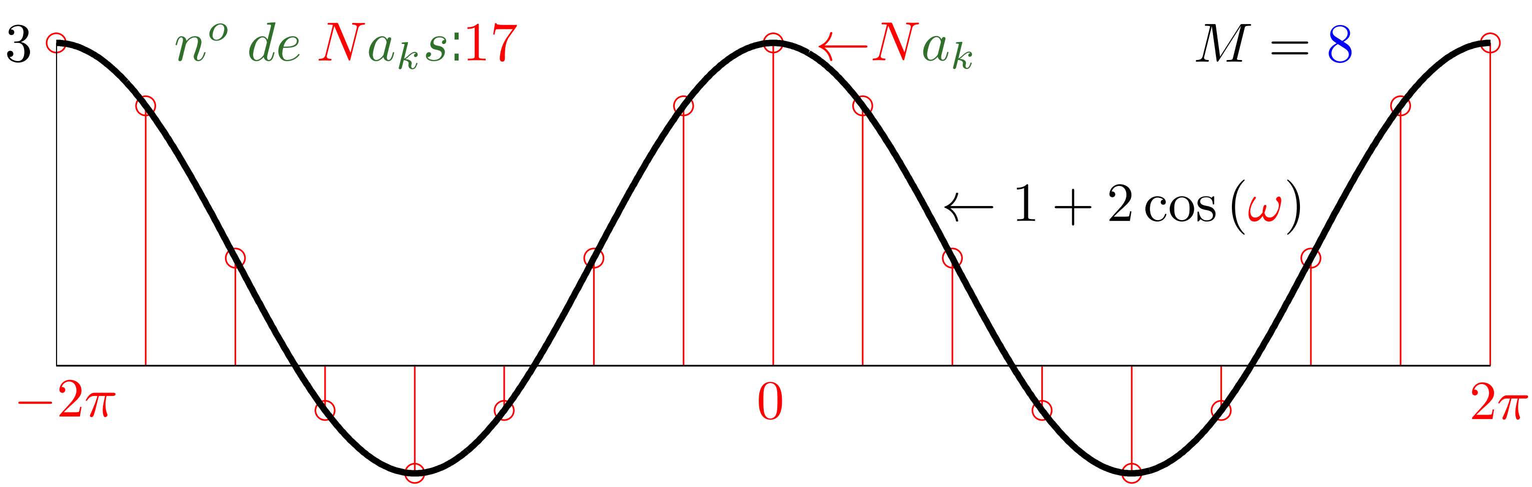
Transformada de Fourier Discreta (DTFT)



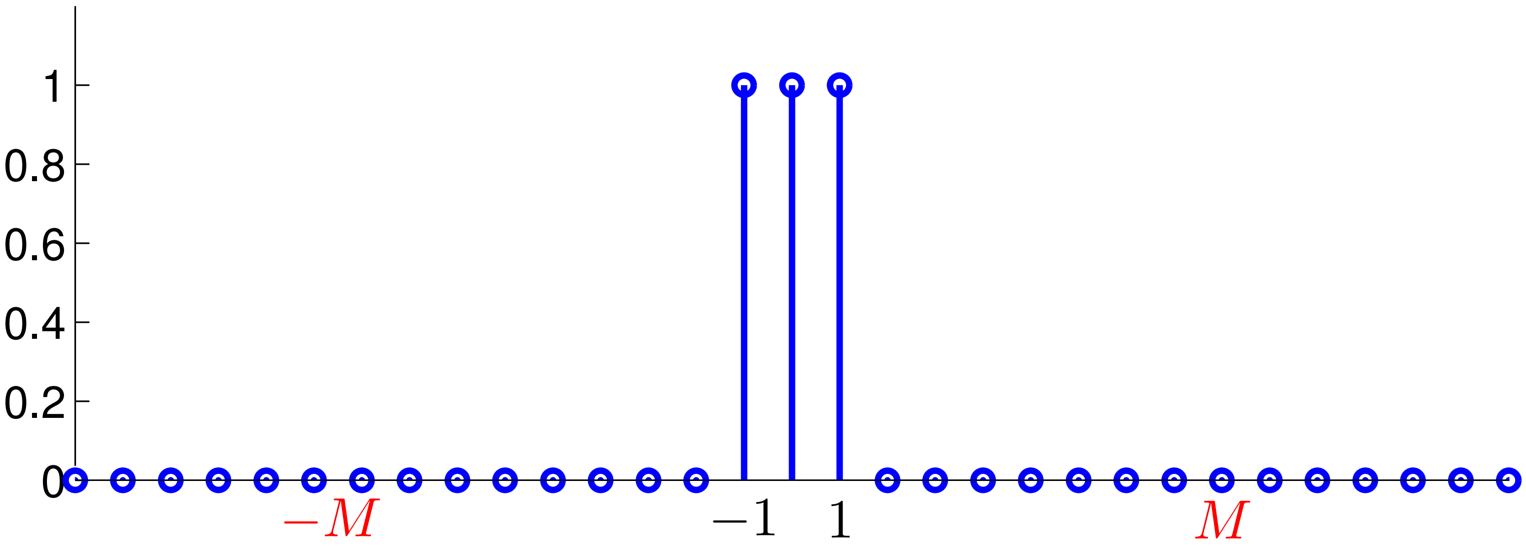


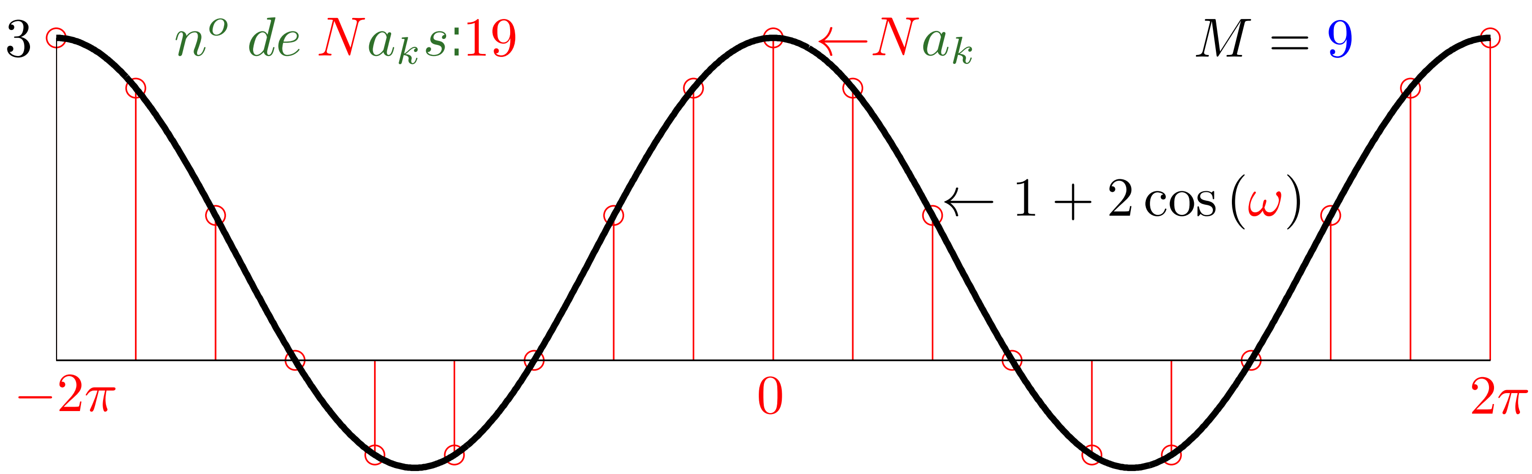
Transformada de Fourier Discreta (DTFT)



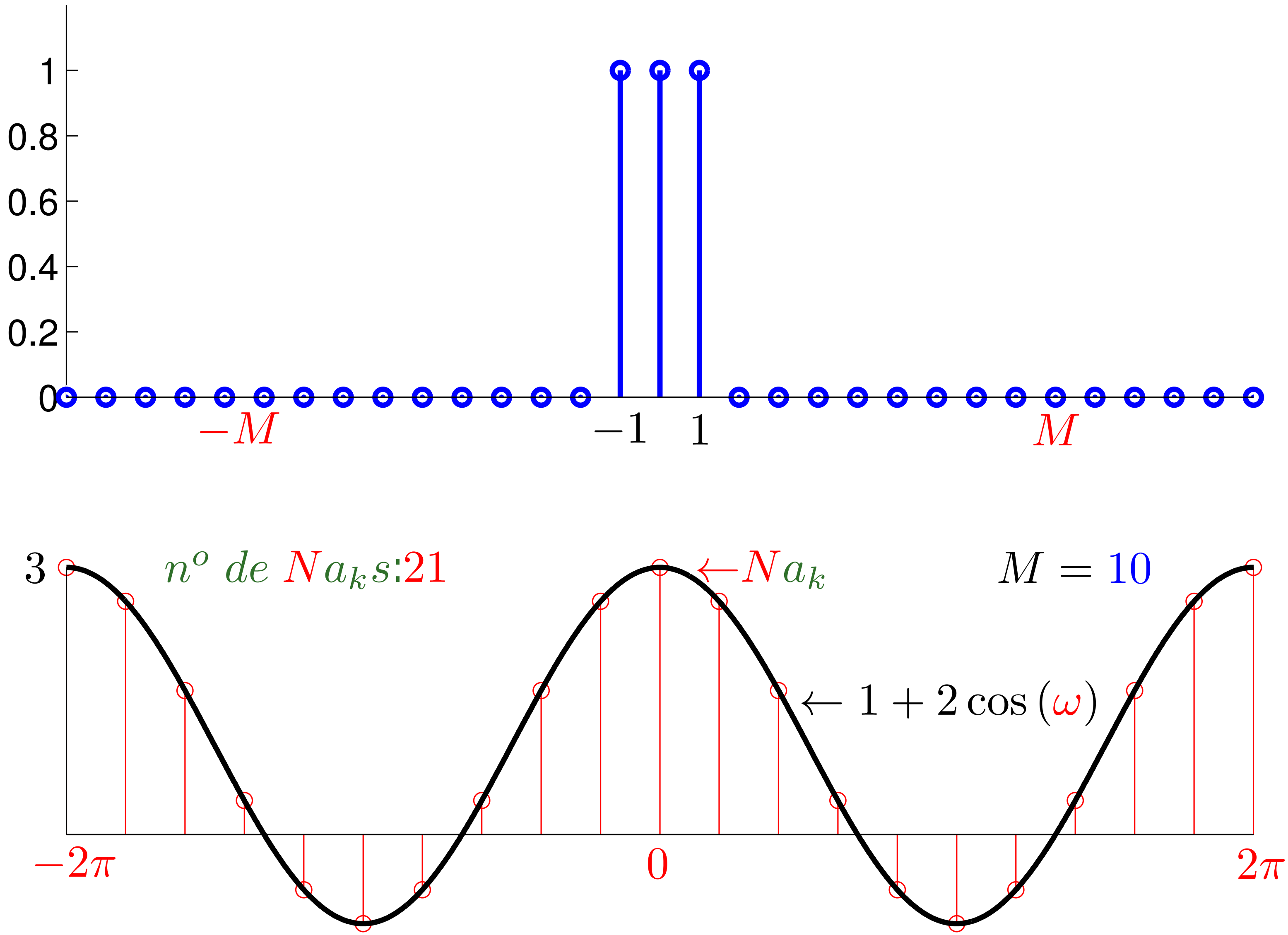


Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

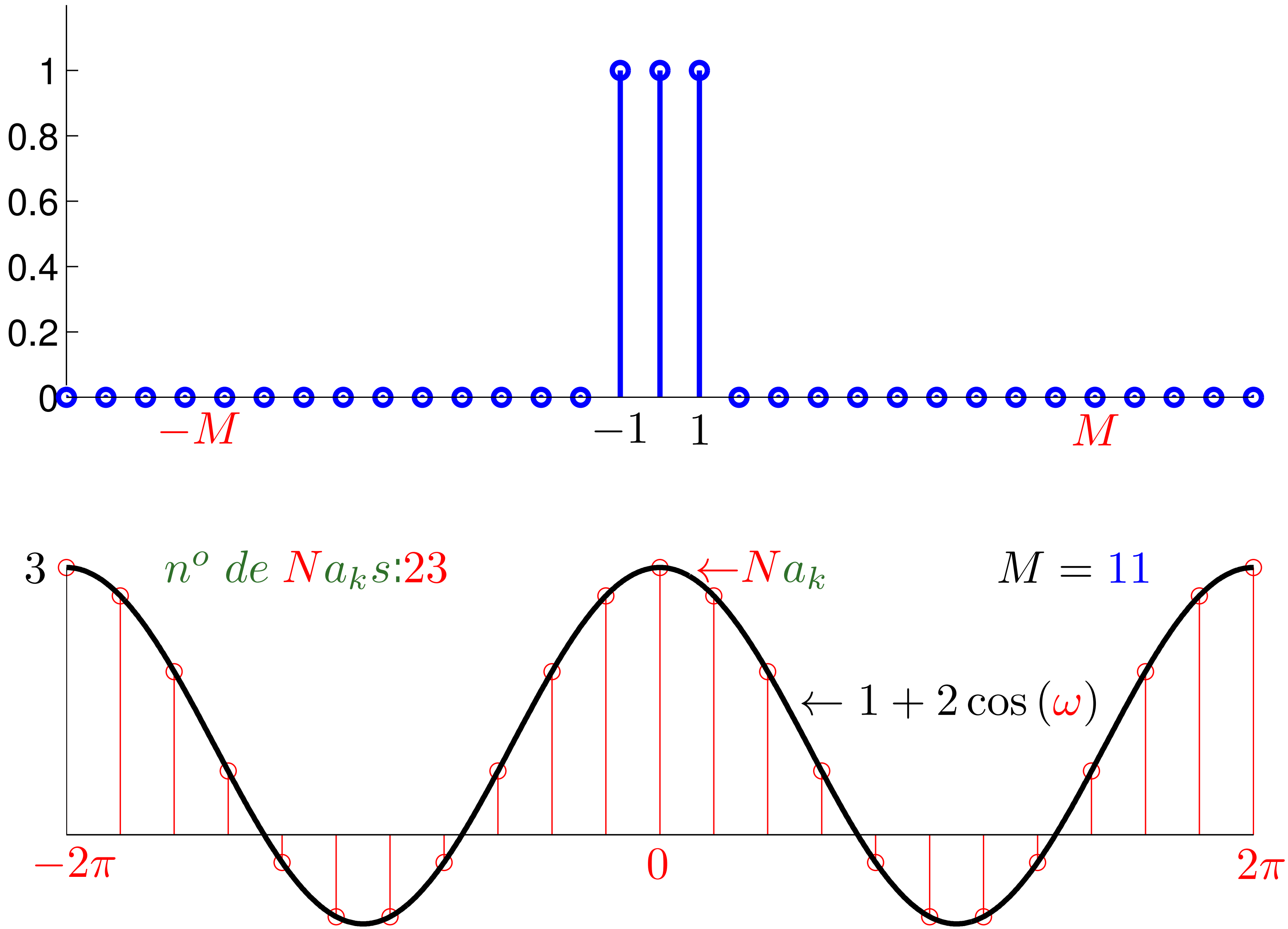




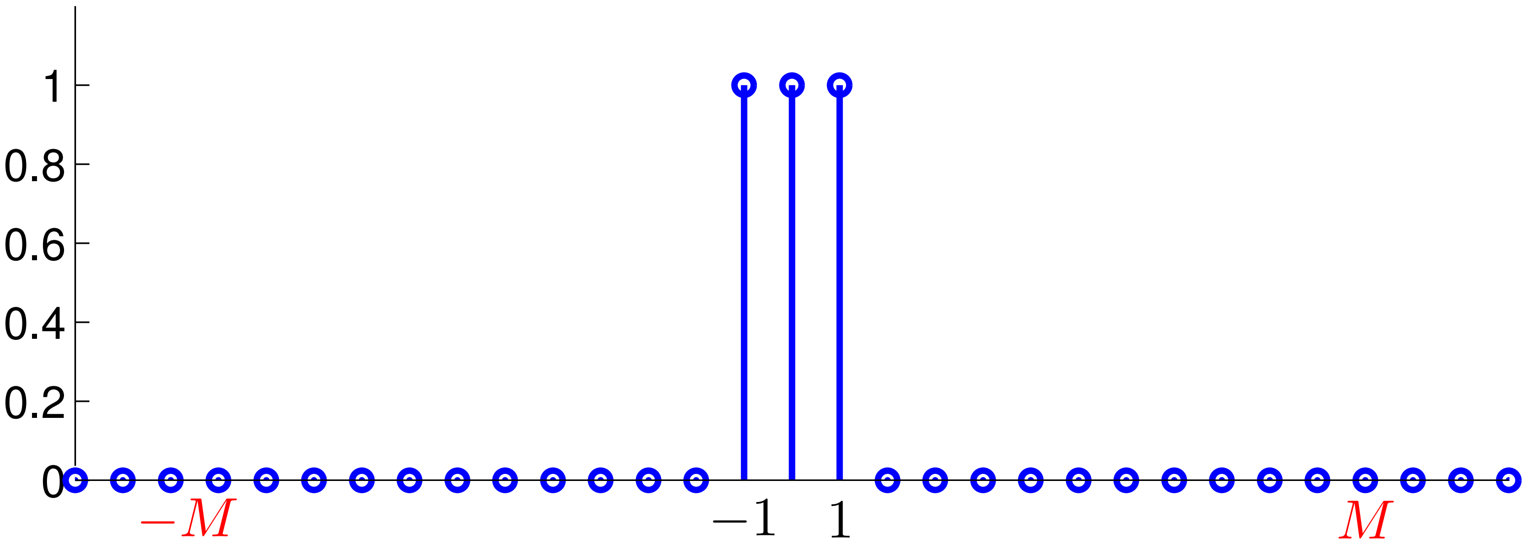
Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

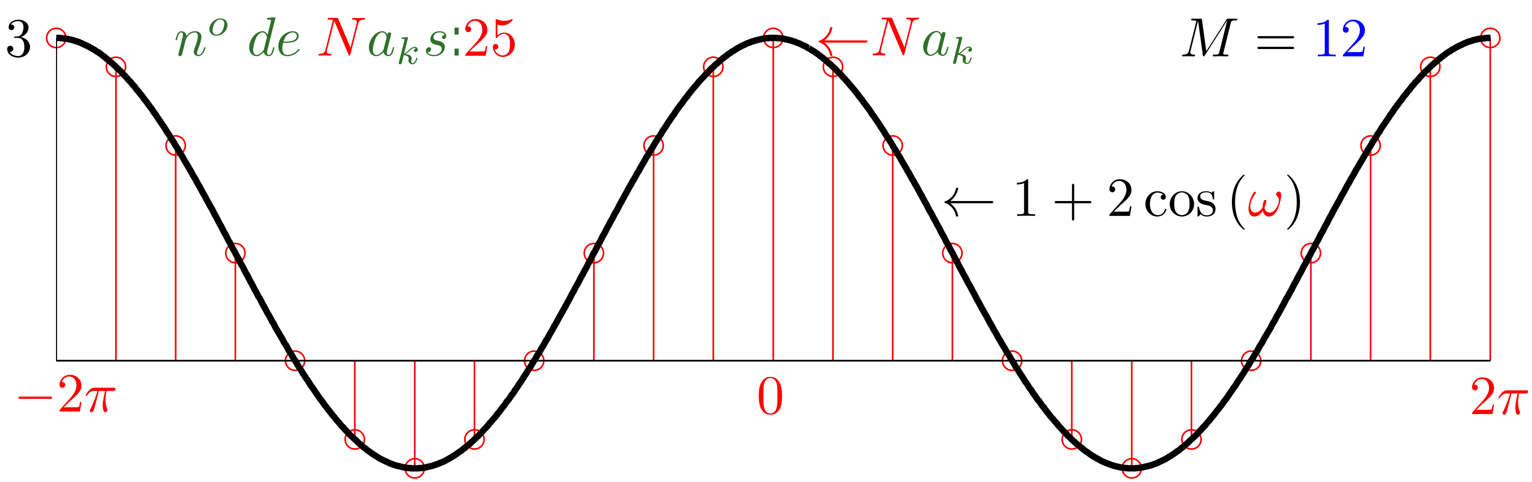


Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

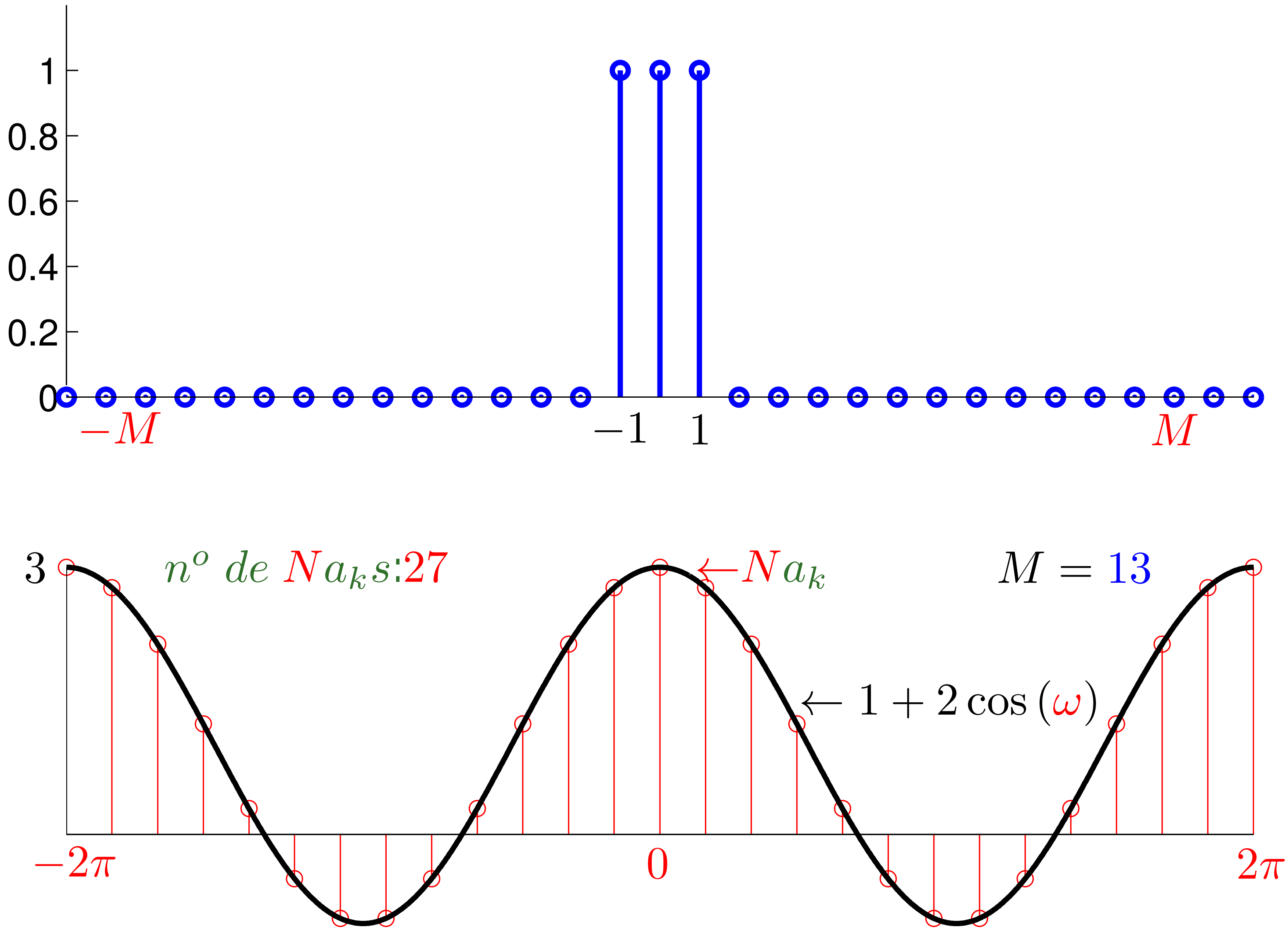


Transformada de Fourier Discreta (DTFT)

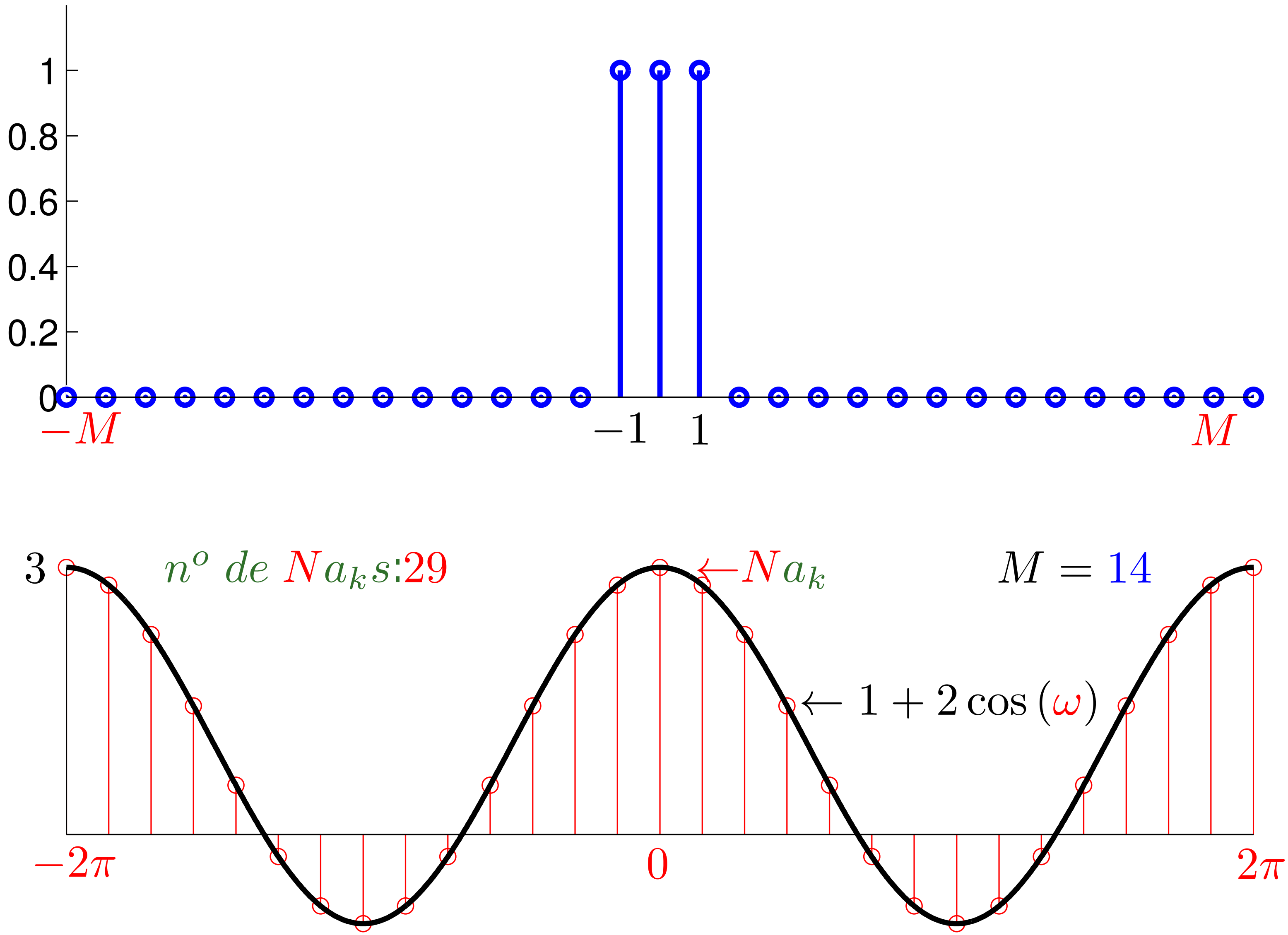




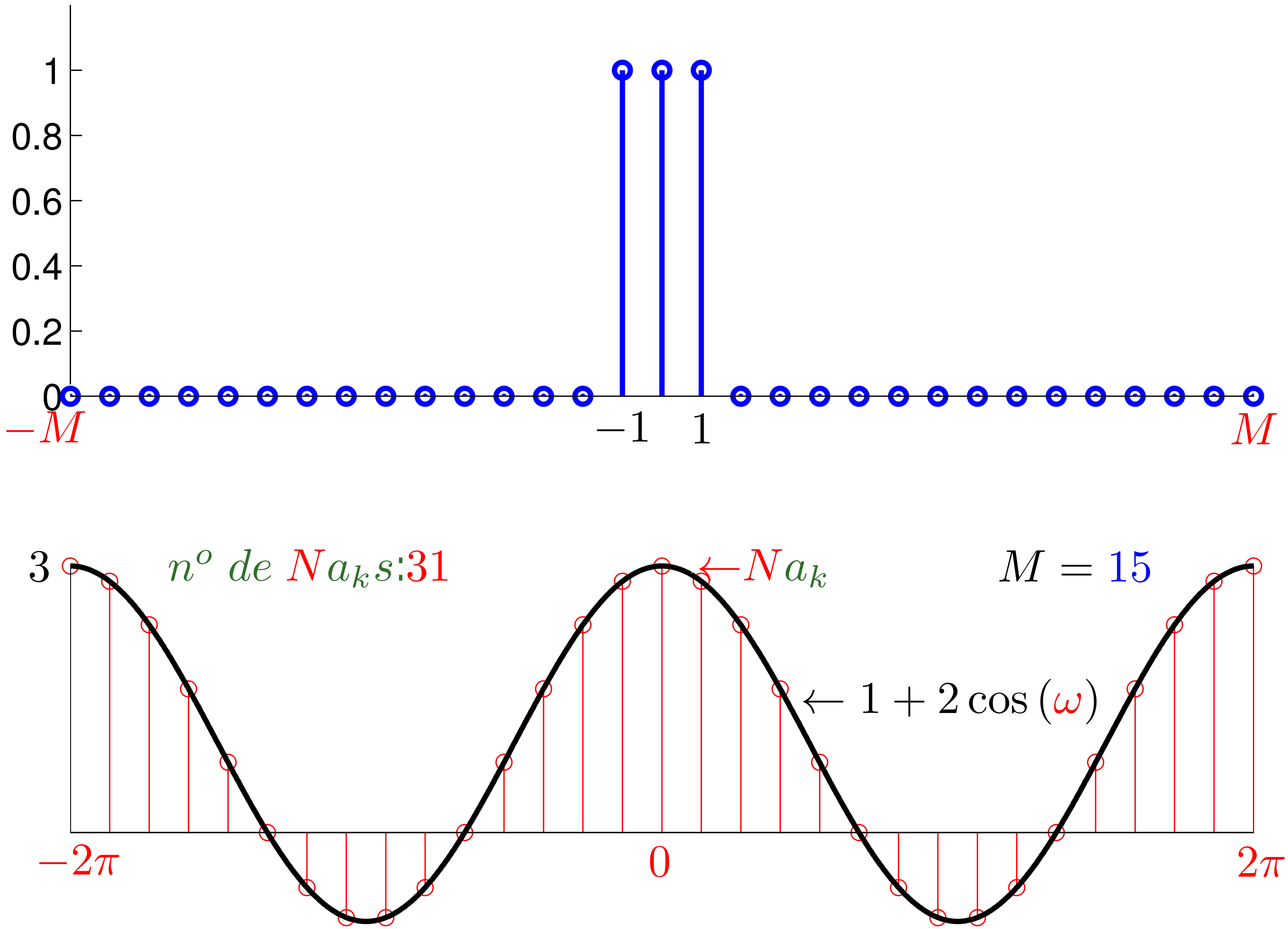
Transformada de Fourier Discreta (DTFT)



Transformada de Fourier Discreta (DTFT)



Transformada de Fourier Discreta (DTFT)



Determinação da DTFT

- Logo temos que:

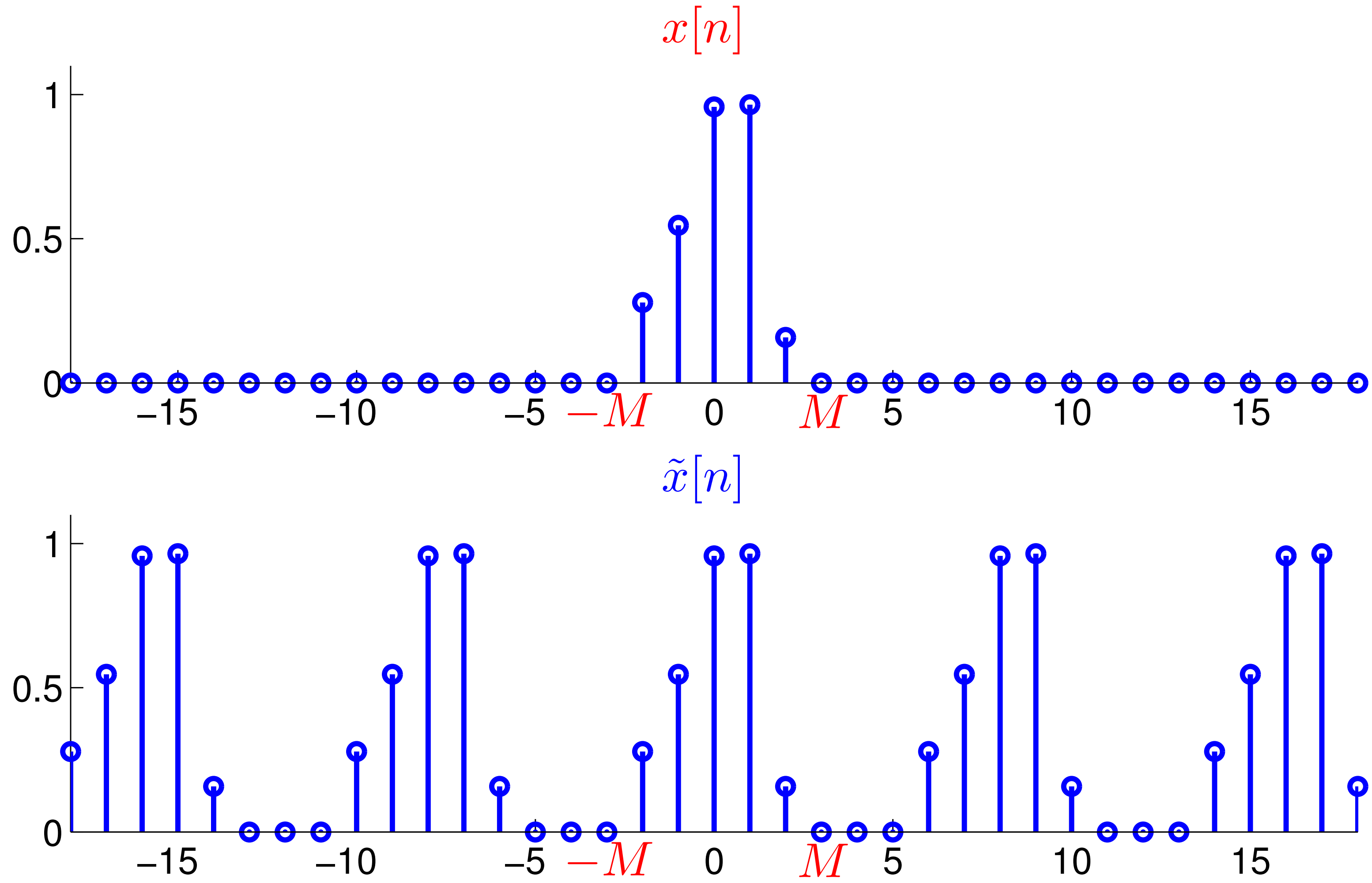
$$N a_k \Big|_{N\to\infty} = \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \Bigg|_{k\omega_0 \to \omega, N\to\infty}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- $X(e^{j\omega})$: espectro de $x[n]$.
- $X(e^{j\omega})$: periódico em ω com período 2π.
- Transformada de Fourier discreta

Determinação da DTFT inversa

Determine a IDTFT de $x[n]$ aplicando a DTFS no sinal $\tilde{x}[n]$ e fazendo $N \to \infty$.



Determinação da DTFT inversa

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \tilde{a}_k e^{jk\omega_0 n}, \qquad \tilde{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

logo,

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^{M} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^{M} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

- $\tilde{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$, sendo $\omega_0 = 2\pi/N$

Determinação da DTFT inversa

- $$\tilde{a}_k = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n}}_{X(e^{jk\omega_0})} = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$$

- $x[n] = \lim_{N \to \infty} \tilde{x}[n]$:

$$x[n] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = 2\pi/N$$

$$x[n] = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$$

Determinação da DTFT inversa

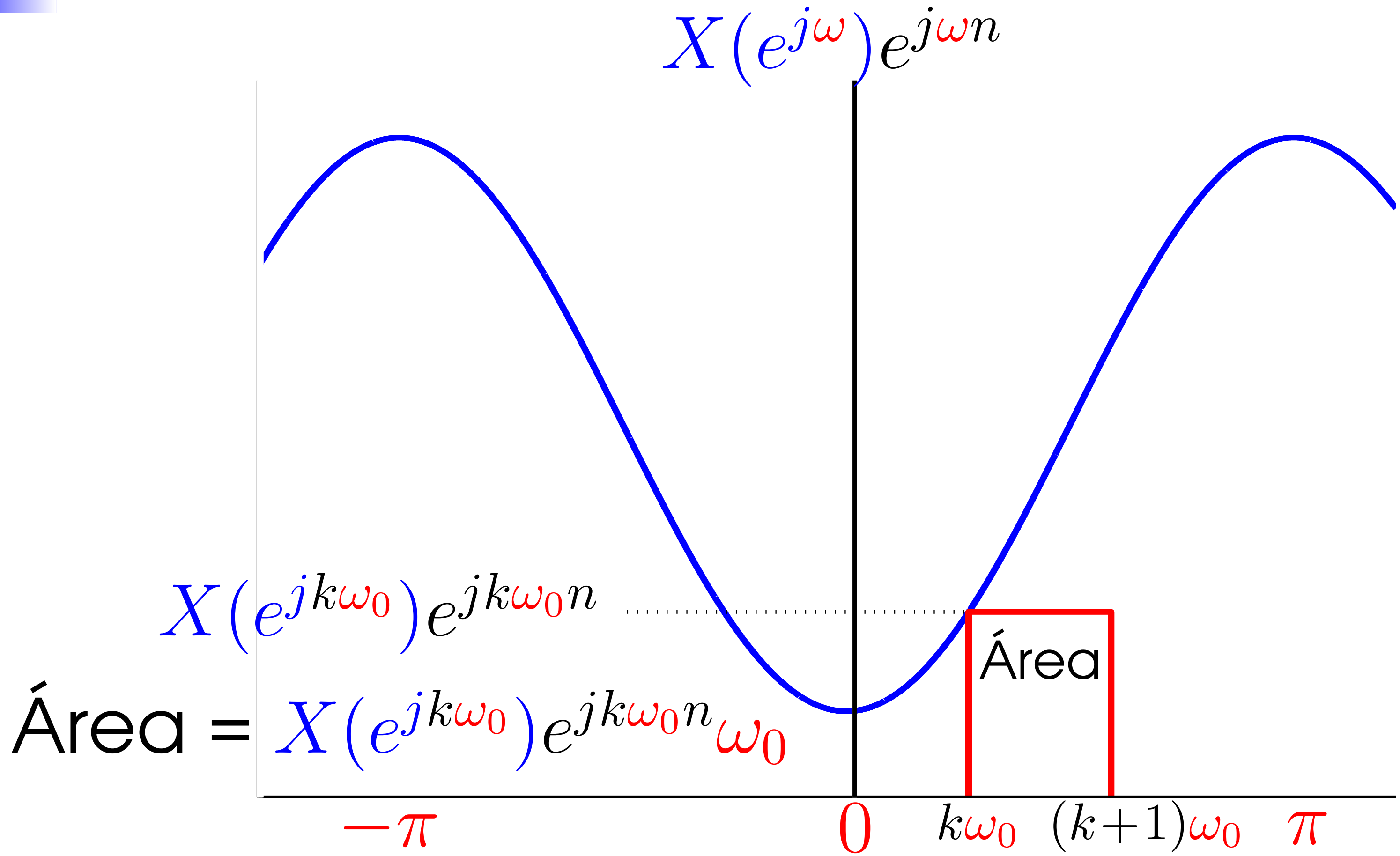
- $x[n] = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}[n]$

$$x[n] = \lim_{\omega_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}\omega_0$$
$$= \lim_{\omega_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}[(k+1)-k]\omega_0$$

- Sendo $\omega_0 = 2\pi/N$, temos:

  Se $N \to \infty$, então, $\omega_0 \to 0$

Determinação da DTFT inversa



$$x[n] = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0})e^{jk\omega_0 n}\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Determinação da DTFT inversa

- $x[n] = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}[n]$

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega
\end{aligned}
$$

Representação em DTFT

- Transformada de Fourier de tempo discreto

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

  - $X(e^{j\omega})$: espectro de $x[n]$.

- Transformada Inversa de Fourier

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Exemplo: Pulso Retangular

- Determine a DTFT do sinal:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq M \\ 0 & |n| > M \end{cases}$$

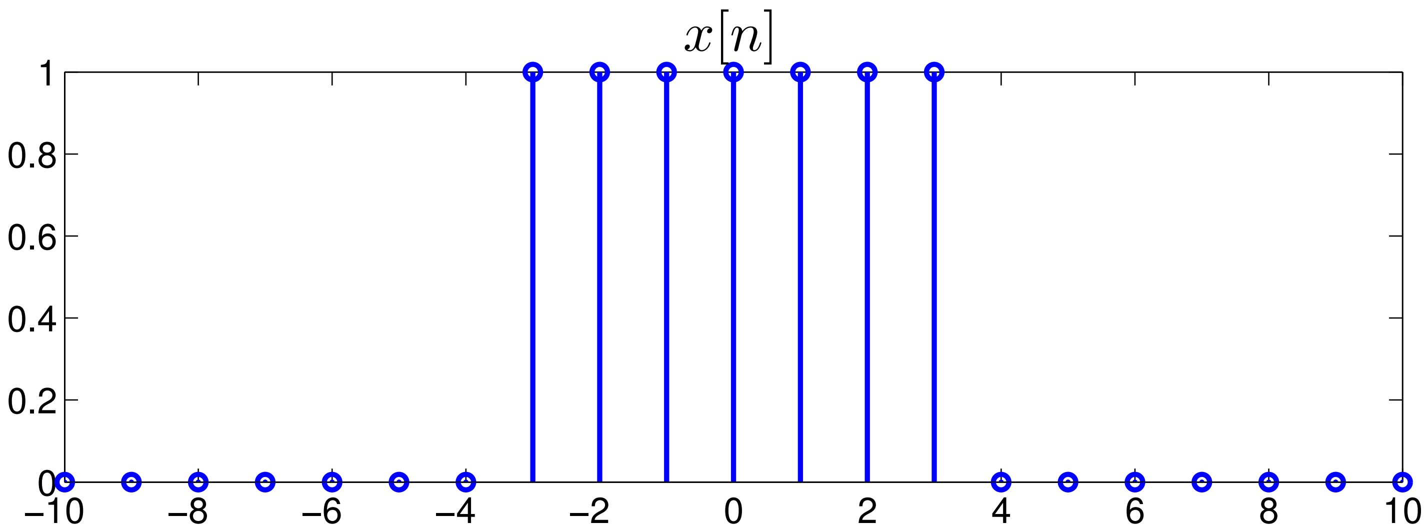
- Solução

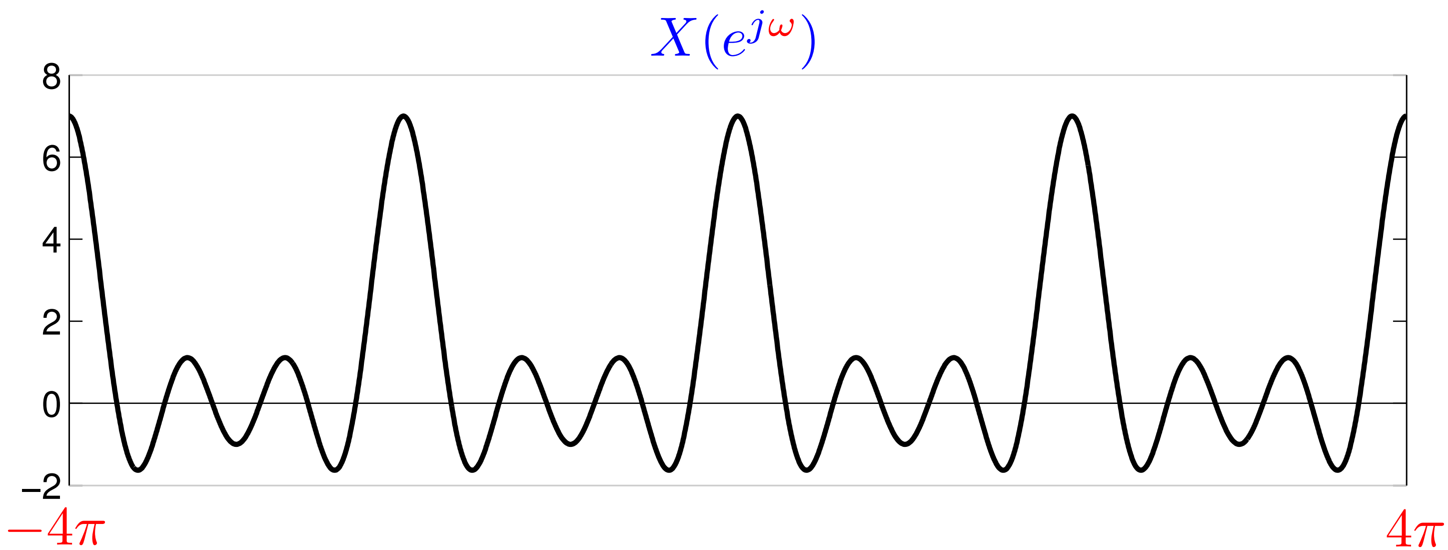
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n}$$

Exemplo: Pulso Retangular

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n}, \quad \text{fazendo: } m = n + M \\
&= \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\omega(m-M)} = e^{j\omega M}\sum_{m=0}^{2M} e^{-j\omega m} \\
&= e^{j\omega M}\frac{1 - e^{-j\omega(2M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\
&= e^{j\omega M}\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}(2M+1)}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}}\left[\frac{e^{j\frac{\omega}{2}(2M+1)} - e^{-j\frac{\omega}{2}(2M+1)}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}\right] \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2}(2M+1))}{\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})}
\end{aligned}
$$

Exemplo: Pulso Retangular





Exercício 1 : Impulso

Determine a DTFT do sinal:

$$x[n] = \delta[n]$$

- Transformada de Fourier de tempo discreto

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Exercício 2 : Onda Quadrada na Freq.

Determine o sinal $x[n]$ (domínio do tempo) a partir do espectro de frequência:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases},$$

com $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$

- Transformada Inversa de Fourier

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Exercício 3: Trem de Impulsos na Frequência

- Determine a IDTFT de:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi\ell)$$

- Transformada Inversa de Fourier

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

DTFT para Sinais Periódicos

- Sinais periódicos de tempo discreto: DTFS
- Sinais aperiódicos de tempo discreto: DTFT
- Contexto unificado: DTFT para sinais periódicos e aperiódicos.

DTFT para Sinais Periódicos

- Para $X(e^{j\omega})$ como uma combinação linear de impulsos igualmente espaçados na frequência

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi\ell)$$

logo (do exercício anterior)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

- Série de Fourier

Exercício 4 : DTFT para Sinais Periódicos

- Determine a DTFT do sinal

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

- Para sinais periódicos:

$$\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi\ell)$$

Exercício 5: DTFT para Sinais Periódicos

Determine a DTFT do trem de impulsos

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[n - iN]$$

- Para sinais periódicos:

$$\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi\ell)$$

Representações de sinais por Fourier

- Sinal Contínuo e Periódico - Série de Fourier (FS)
- Sinal Discreto e Periódico - Série de Fourier Discreta (DTFS)
- Sinal Contínuo e Não-Periódico - Transformada de Fourier (FT)
- Sinal Discreto e Não-Periódico - Transformada de Fourier Discreta (DTFT)
  - Propriedades da FT e da DTFT

Simetria sinal real: Propriedades da FT

- O sinal $x(t)$ é real $\rightarrow x^*(t) = x(t)$. Logo,

$$\begin{aligned} X^*(j\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{+j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega t)}dt = X(-j\omega) \end{aligned}$$

- Isto significa que:

$$\begin{cases} \text{Real}\{X(j\omega)\} &= \text{Real}\{X(-j\omega)\} \\ \text{Imag}\{X(j\omega)\} &= -\text{Imag}\{X(-j\omega)\} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} |X(j\omega)| &= |\{-X(j\omega)\}| \\ \measuredangle X(j\omega) &= -\measuredangle\{-X(j\omega)\} \end{cases}$$

Simetria sinal real e par: Propriedades da FT

- O sinal $x(t)$ é real e par: $x^*(t) = x(t)$ e $x(t) = x(-t)$. Logo

$$
\begin{aligned}
X^*(j\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{+j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)}dt \\
& \left\{ \begin{array}{l} \tau = -t, d\tau = -dt \\ t \to +\infty : \tau \to -\infty, t \to -\infty : \tau \to +\infty \end{array} \right. \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = X(j\omega)
\end{aligned}
$$

- Isso só é verdade se $X(j\omega)$ é?

Simetria sinal real e par: Propriedades da FT

- O sinal $x(t)$ é real: $x^*(t) = x(t)$. Logo,

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

- O sinal $x(t)$ é real e par: $x^*(t) = x(t)$ e $x(t) = x(-t)$. Logo,

$$X^*(j\omega) = X(j\omega) \text{ então } X(j\omega) \text{ é real.}$$

- Das conclusões acima, temos que

$$X(-j\omega) = X(j\omega) \text{ então } X(j\omega) \text{ é par.}$$

- Portanto, $X(jw)$ é real e par.

Simetria sinal real e ímpar: Propriedades da FT

- O sinal $x(t)$ é real e ímpar: $x^*(t) = x(t)$ e $x(t) = -x(-t)$. Logo

$$
\begin{aligned}
X^*(j\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{+j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt = -\int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)}dt \\
&\left\{\begin{array}{l} \tau = -t, d\tau = -dt \\ t \rightarrow +\infty : \tau \rightarrow -\infty, t \rightarrow -\infty : \tau \rightarrow +\infty \end{array}\right. \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = -X(j\omega)
\end{aligned}
$$

- Isso só é verdade se $X(jw)$ é?

Simetria sinal real e ímpar: Propriedades da FT

- O sinal $x(t)$ é real: $x^*(t) = x(t)$. Logo,

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

- O sinal $x(t)$ é real e ímpar: $x^*(t) = x(t)$ e $x(t) = -x(-t)$. Logo,

$X^*(j\omega) = -X(j\omega)$ então $X(j\omega)$ é puramente imaginário.

- Das conclusões acima, temos que

$X(-j\omega) = -X(j\omega)$ então $X(j\omega)$ é ímpar.

- Portanto, $X(jw)$ é puramente imaginário e ímpar.

Linearidade: Propriedades da FT

$$ax(t) + by(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} aX(jw) + bY(jw)$$

Esta propriedade pode ser demonstrada lembrando que a integral da soma de duas funções é a soma das integrais de cada função.

Exercício 6: Linearidade

Determine a transformada inversa de

$$X(jw) = \frac{-j\omega}{(j\omega)^2 + 3jw + 2}$$

- Par de transformada:

$$e^{-at}u(t), \ \ (a > 0) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}$$

- Expansão em frações parciais

$$X(jw) \ = \ \frac{-j\omega}{(j\omega)^2 + 3jw + 2} = \frac{A}{j\omega + 1} + \frac{B}{j\omega + 2}$$

Deslocamento no tempo: Propriedades da FT

$$x(t-t_0) \overset{FT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

- Considere o sinal $z(t) = x(t-t_0)$.
- Calculando a FT, temos:

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$$

fazendo $\tau = t - t_0 \rightarrow t = \tau + t_0$ e $dt = d\tau$

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \end{aligned}$$

Deslocamento na frequência: Propriedades FT

$$X(j(\omega - \omega_0)) \overset{FT}{\longleftrightarrow} e^{j\omega_0 t}x(t)$$

- Considere $Z(j\omega) = X(j(\omega - \omega_0))$.
- Usando a Transformada Inversa, temos:

$$z(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \omega_0))e^{j\omega t}d\omega$$

- Fazendo $\nu = \omega - \omega_0$, temos:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)e^{j(\nu+\omega_0)t}d\nu \\ &= e^{j\omega_0 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)e^{j\nu t}d\nu = e^{j\omega_0 t}x(t) \end{aligned}$$

Exemplo: Deslocamento na frequência

Encontre a DTFT inversa de

$$X(j\omega) = \pi\left(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right)$$

Ex.: Solução sem usar propriedades

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi\left(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0)e^{j\omega t}d\omega + \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0)d\omega + e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)d\omega\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}\right) = \cos(\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

Ex. 7: Deslocamento na frequência

Encontre a DTFT inversa de

$$X(j\omega) = \pi\left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$$

usando a propriedade de deslocamento na frequência

$$X(j(\omega - \omega_0) \overset{FT}{\longleftrightarrow} e^{j\omega_0 t}x(t)$$

Ex. 8: Deslocamento na frequência

Usando o par

$$\delta(\omega - \omega_0) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

encontre a transformada de Fourier de

$$\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

Escalonamento: Propriedades FT

$$x(at) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

- Seja $z(t) = x(at)$, para:
  - $a > 0$: $a = |a|$ ($\tau = |a|t \rightarrow t = \frac{\tau}{|a|} \rightarrow dt = \frac{d\tau}{|a|}$):

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(|a|t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{|a|}\tau}d\tau$$

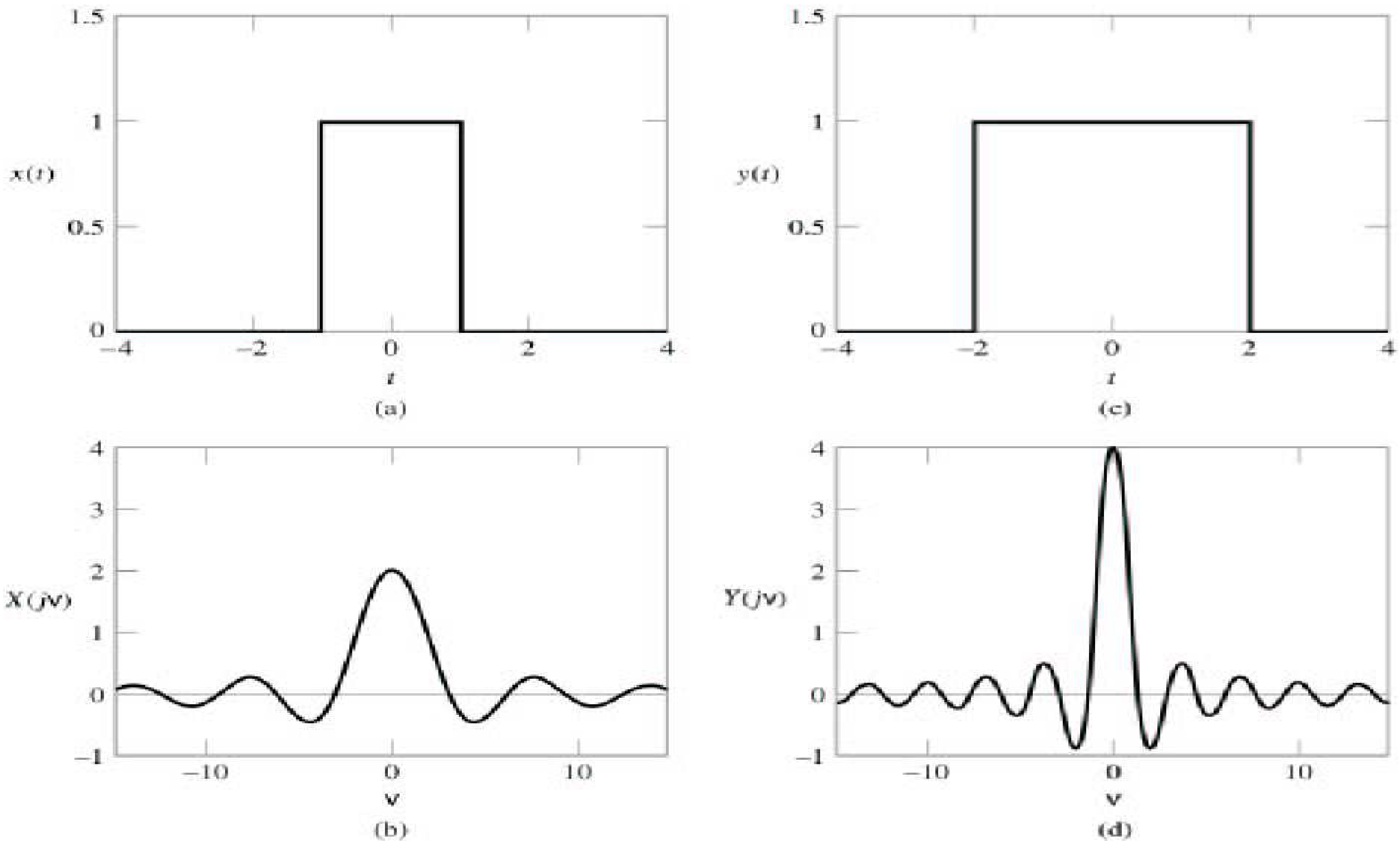
  - $a < 0$: $a = -|a|$ ($\tau = -|a|t \rightarrow t = -\frac{\tau}{|a|} \rightarrow dt = -\frac{d\tau}{|a|}$):

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-|a|t)e^{-j\omega t}dt = -\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{+j\frac{\omega}{|a|}\tau}[-d\tau]$$

- Logo, combinando os itens anteriores

$$Z(j\omega) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau = \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{(para: } a \neq 0\text{)}$$

Escalonamento: Propriedades FT



Escalonamento: *Propriedade DTFT*

- Escalonamento caso Discreto
  - Considere o sinal $z[n] = x[an]$
  - Se $|a| > 1$ podendo ser inteiro informação de $x[n]$ é perdida pois n só pode assumir valores inteiros.
  - Se $|a| < 1$ poderá não perder informação, pois n em $z[n]$ poderá assumir valores inteiros.

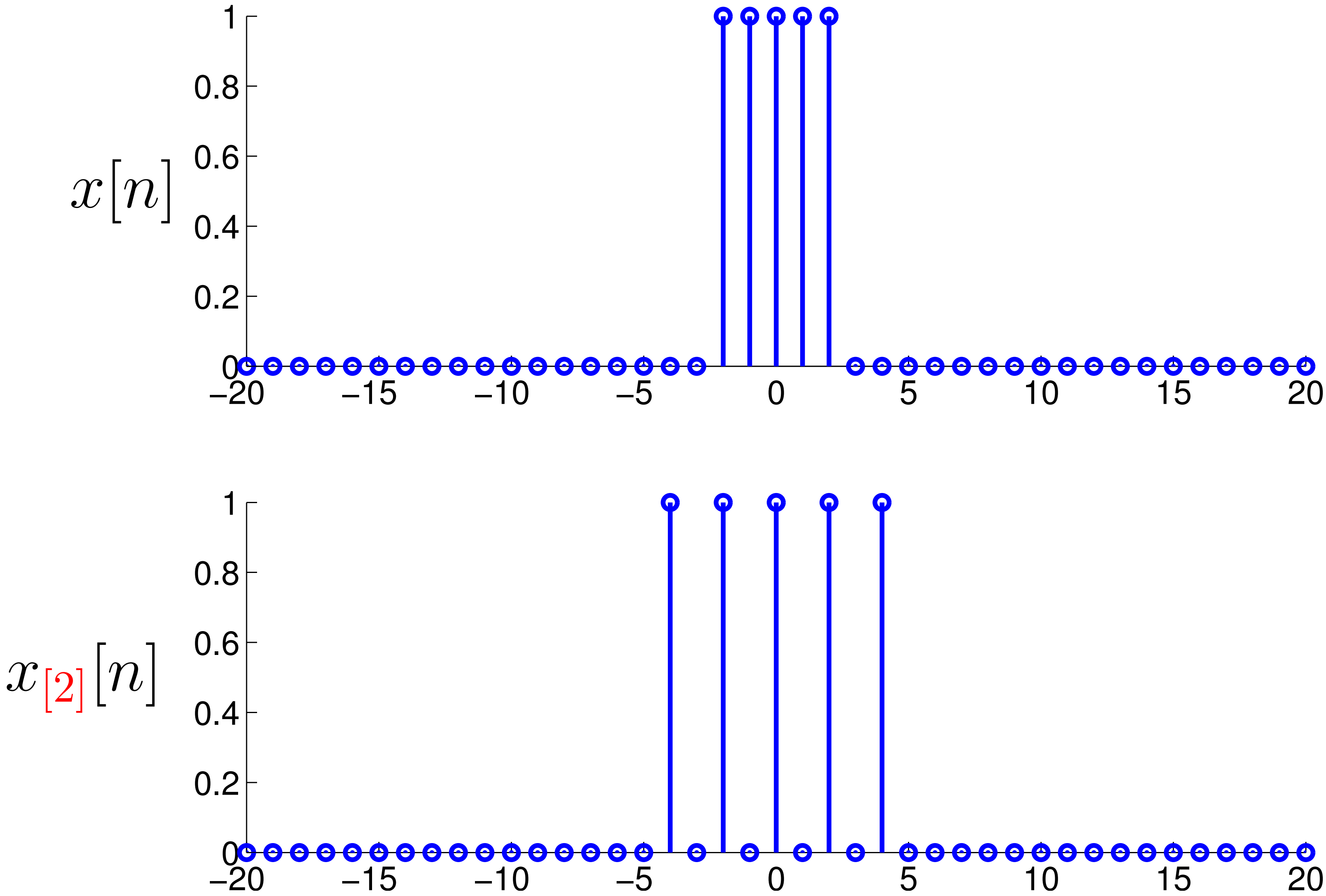
Escalonamento: Propriedade DTFT

- Defina o sinal:

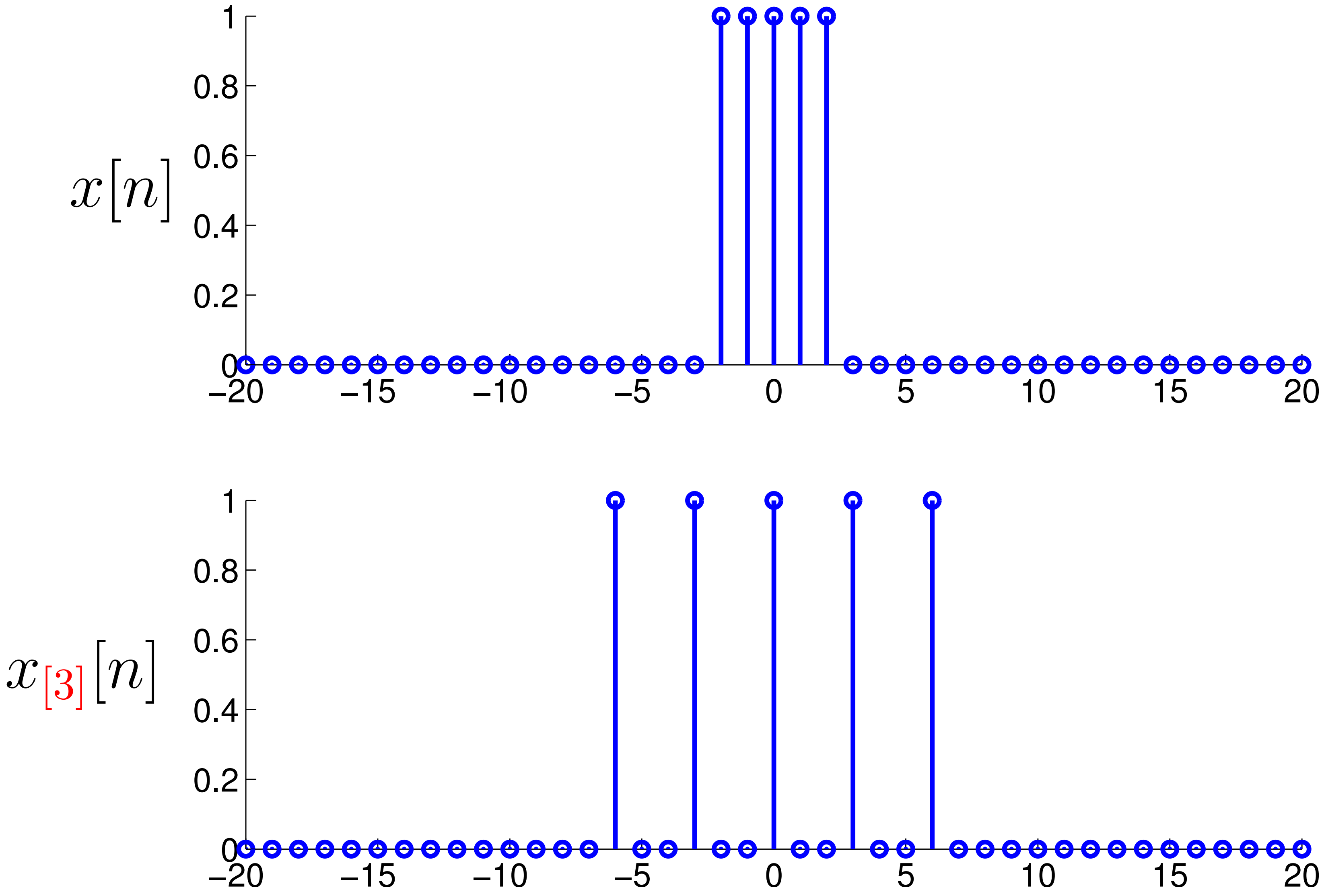
$$x_{[k]}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } k \\ 0, & \text{se } n \text{ não for múltiplo de } k \end{cases}$$

- Sendo k positivo e inteiro

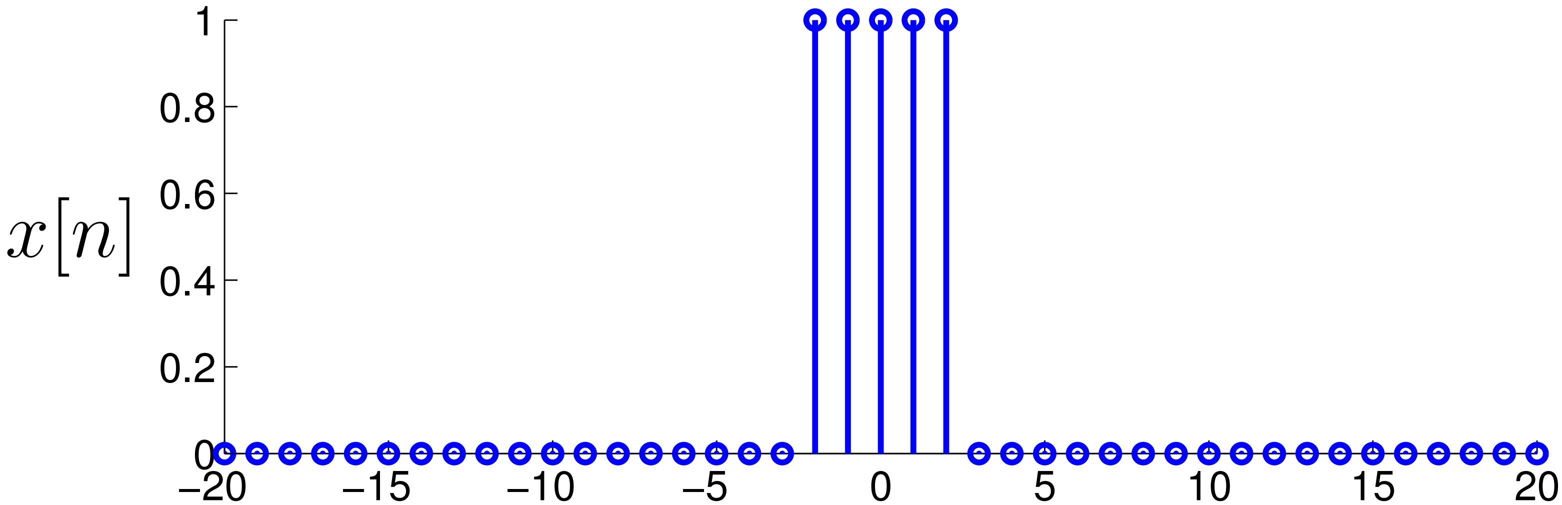
Propriedades da FT

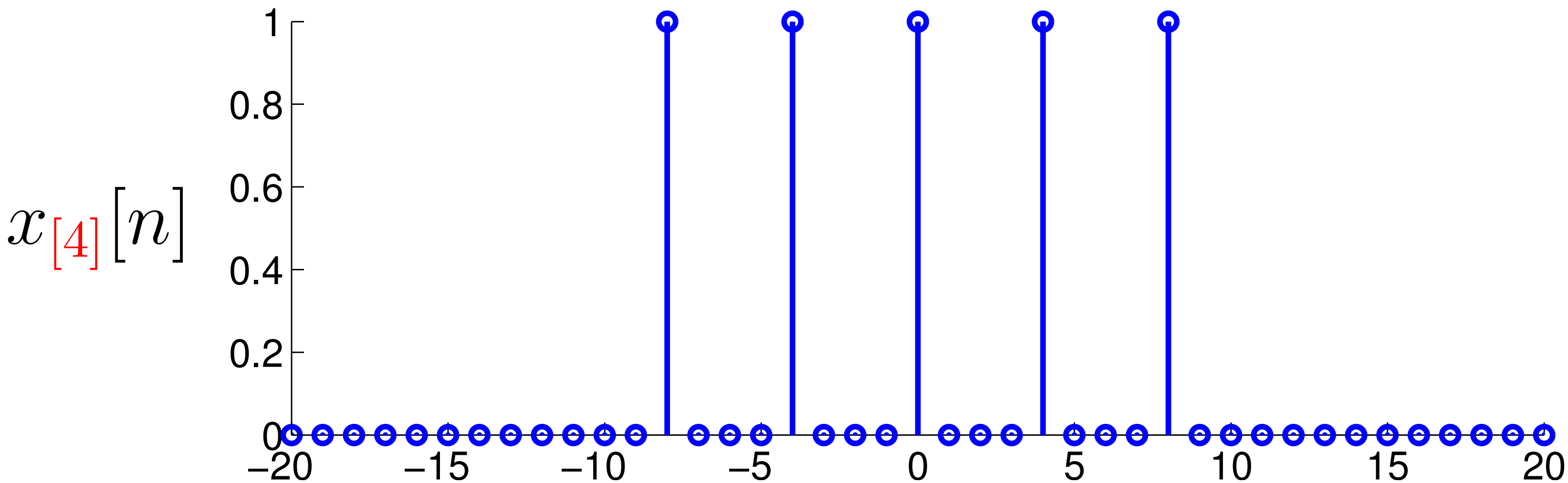


Propriedades da FT



Propriedades da FT





Propriedades da FT

A DTFT de $x_{[k]}[n]$ é dada por

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{[k]}[n]e^{-j\omega n}$$

- $x_{[k]}[n] \neq 0$ se $r = n/k$, (r inteiro), logo $n = rk$

$$\begin{aligned} X_{(k)}(e^{j\omega}) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{[k]}[rk]e^{-j\omega rk}, \quad x_{[k]}[rk] = x[r] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega}) \end{aligned}$$

Escalonamento: Propriedade DTFT

- Portanto, temos o resultado:
  - Seja k positivo e inteiro
  - Defina o sinal:

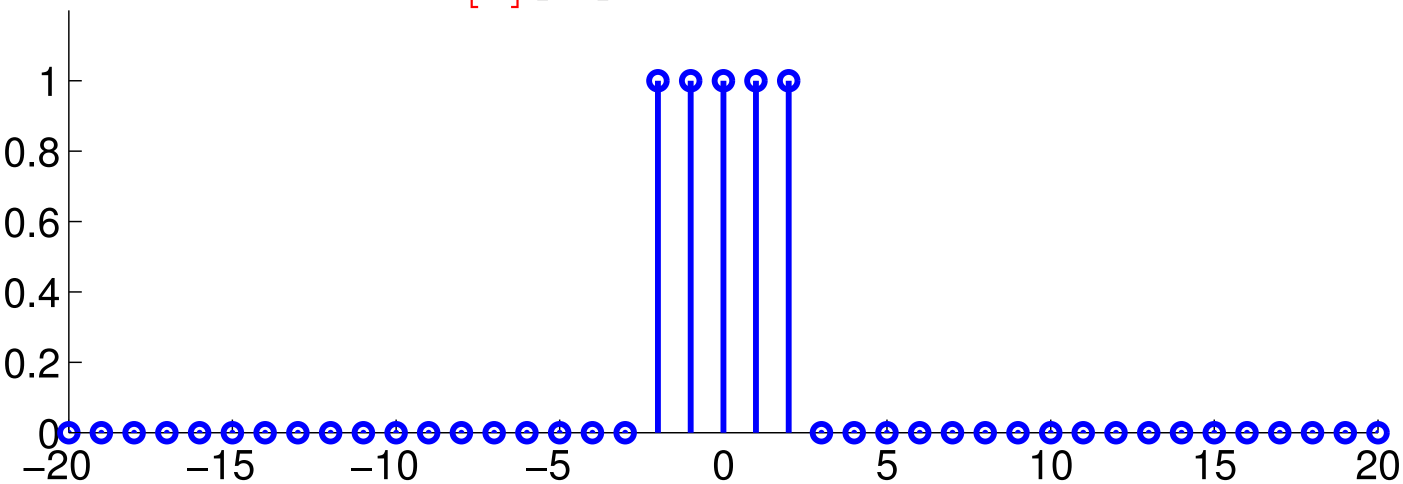
$$x_{[k]}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } k \\ 0, & \text{se } n \text{ não for múltiplo de } k \end{cases}$$

- Então:

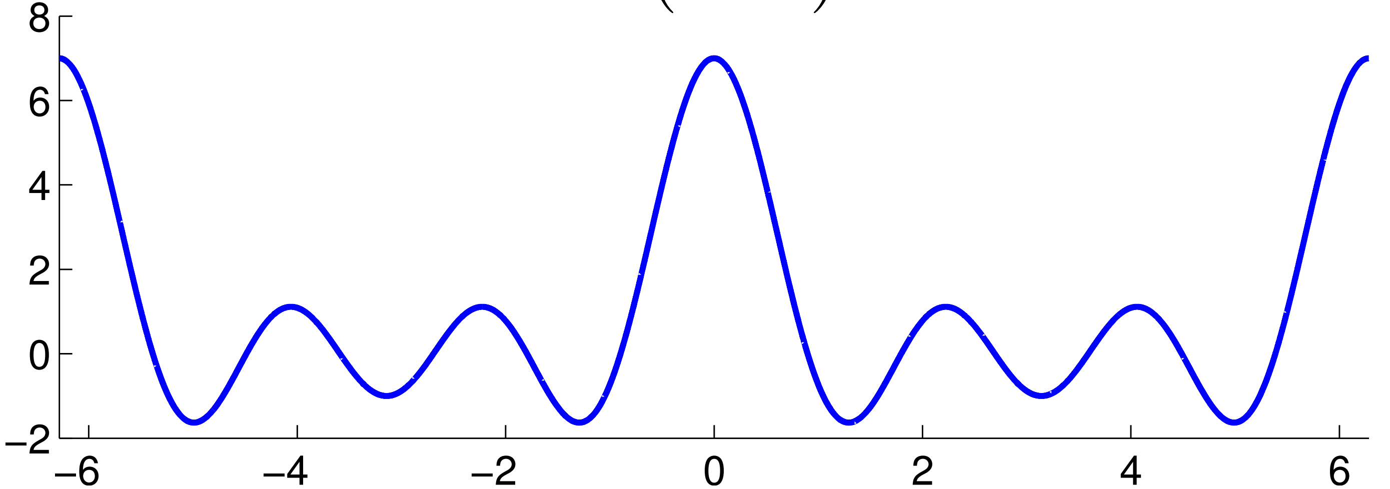
$$x_{[k]}[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega})$$

Escalonamento: Propriedade DTFT

$$x_{[k]}[n] \quad \rightarrow \quad k = 1$$

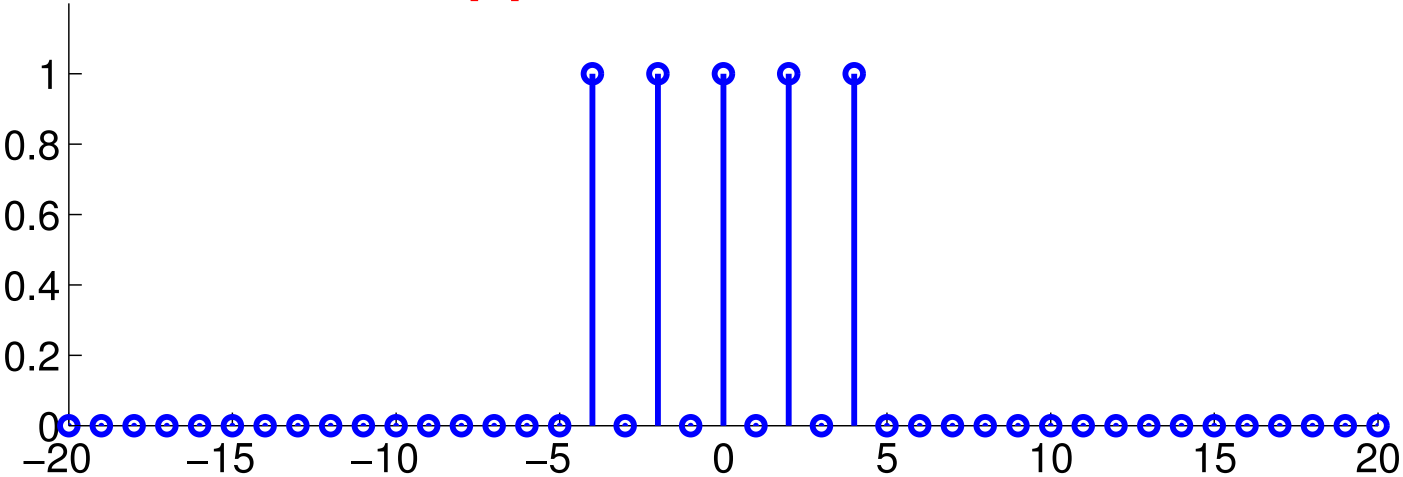


$$X(e^{jk\omega})$$

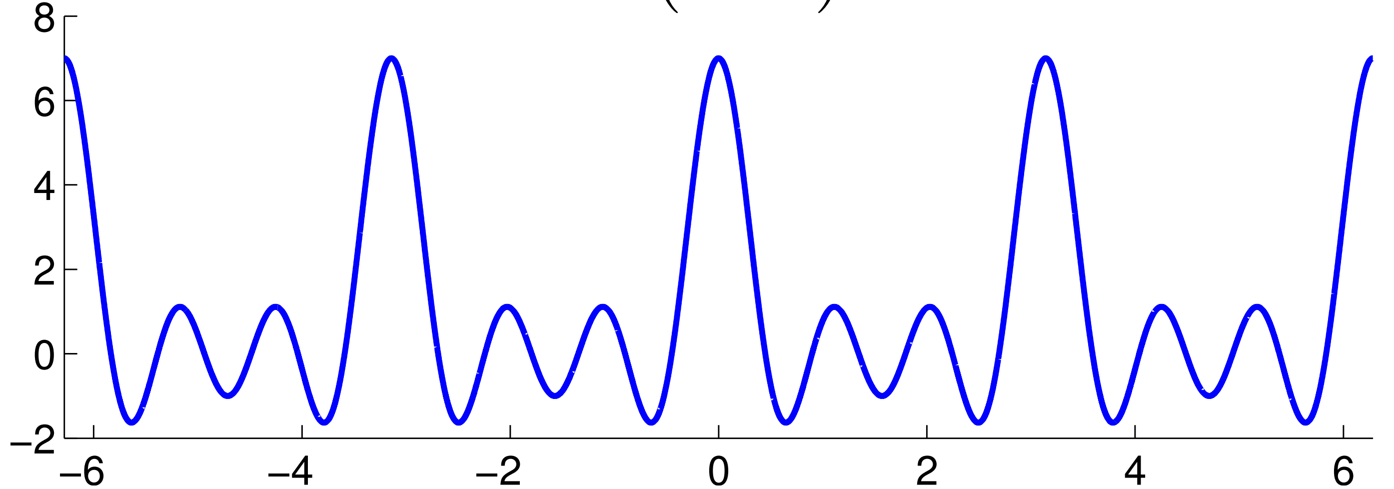


Escalonamento: Propriedade DTFT

$$x_{[k]}[n] \quad \rightarrow \quad k = 2$$

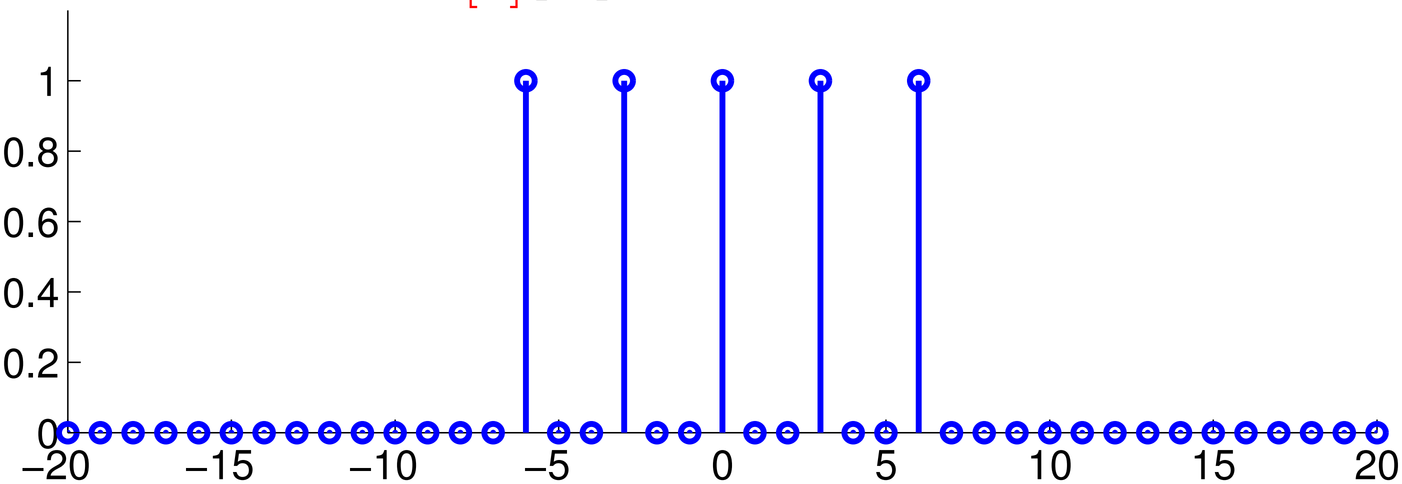


$$X(e^{jk\omega})$$

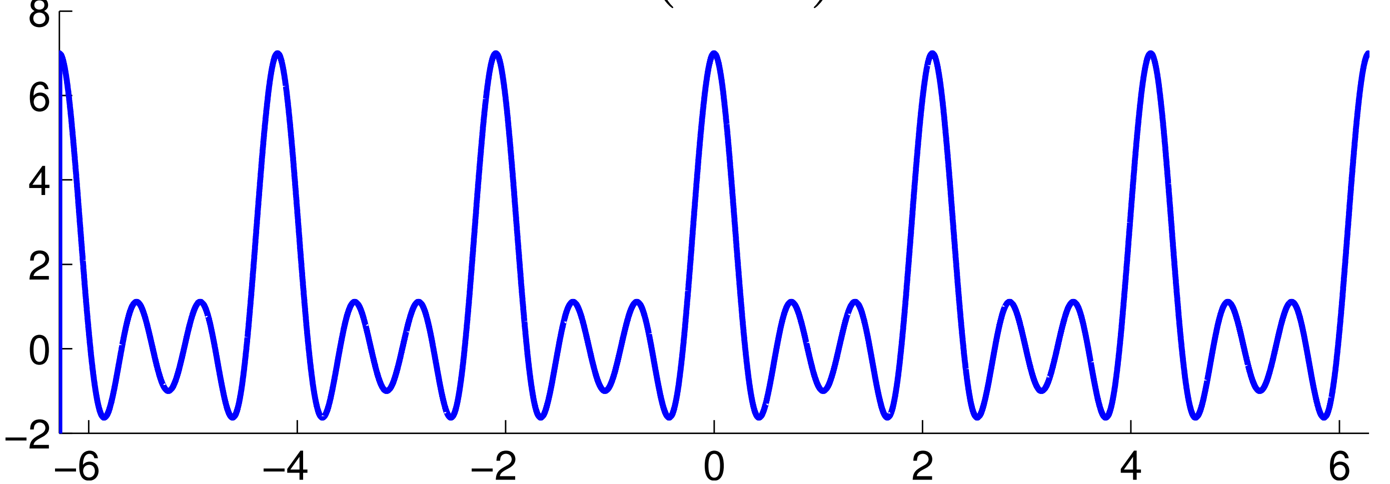


Escalonamento: Propriedade DTFT

$$x_{[k]}[n] \quad \rightarrow \quad k = 3$$

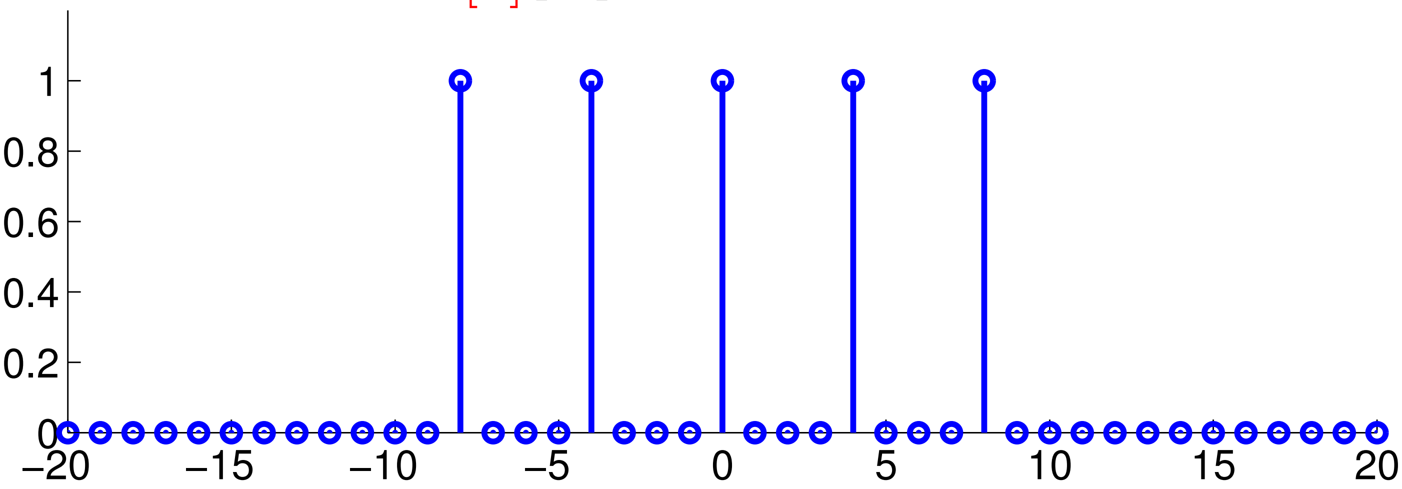


$$X(e^{jk\omega})$$

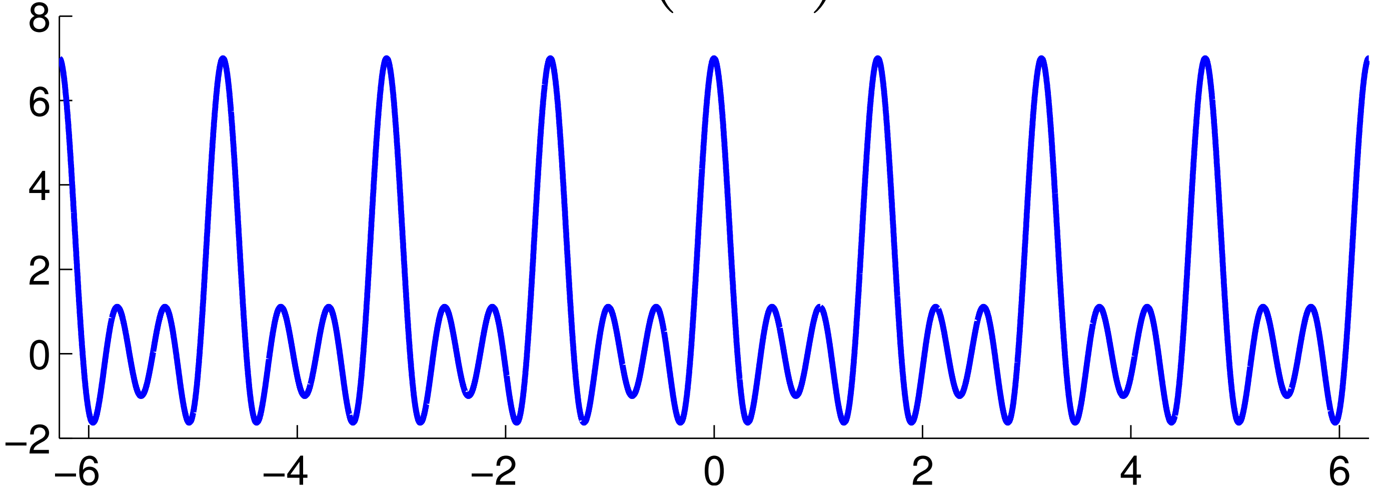


Escalonamento: Propriedade DTFT

$$x_{[k]}[n] \quad \rightarrow \quad k = 4$$



$$X(e^{jk\omega})$$



Diferenciação no Tempo: Propriedade FT

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

- Demonstração:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{d}{dt}\{e^{j\omega t}\}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{aligned}$$

Integração no Tempo: Propriedade FT

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(j0)\delta(\omega)$$

- Para sinais com média zero

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega)$$

- Para o degrau:

$$u(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Diferenciação na Frequência: Propriedade FT

$$\frac{dX(j\omega)}{dw} \overset{FT}{\longleftrightarrow} -jtx(t)$$

- Demonstração:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ \frac{dX(j\omega)}{d\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{d}{d\omega}\{e^{-j\omega t}\}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

Ex. 9: Diferenciação na Frequência

Determine a FT do sinal

$$y(t) = te^{-at}u(t)$$

use a propriedade:

$$\frac{dX(j\omega)}{dw} \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} -jtx(t)$$

Diferença: Propriedade DTFT

$$y[n] - y[n-1] \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-j\omega})Y(e^{j\omega})$$

- Demonstração: considere o sinal:

$$x[n] = y[n] - y[n-1]$$

considerando o sinal não-periódico e aplicando a propriedade de deslocamento no tempo temos

$$X(e^{j\omega}) = (1 - e^{-j\omega})Y(e^{j\omega})$$

Soma: *Propriedade DTFT*

- Para $|\omega| \leq \pi$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0})\delta(\omega)$$

- $\forall \omega$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Convolução Não-Periódica: Propriedade FT

$$h(t) * x(t) \xleftrightarrow{FT} H(j\omega)X(j\omega)$$

- Demostração:

$$y(t) \;=\; h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Sendo que $x(t-\tau)$ é

$$x(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega$$

Convolução Não-Periódica: Propriedade FT

- Logo

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega\right)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right)}_{H(j\omega)} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega
\end{aligned}
$$

Exemplo: Convolução Não-Periódica

Determine a saída $y(t)$ de um sistema LIT, cuja resposta ao impulso é $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, quando uma entrada $x(t) = 3e^{-t}u(t)$ foi aplicada.

Exemplo: Convolução Não-Periódica

- Pela propriedade da Convolução, temos:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

- Calculando a Transformada de Fourier dos sinais $h(t)$ e $x(t)$:

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t) \quad \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} \quad H(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 2}$$

$$x(t) = 3e^{-t}u(t) \quad \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} \quad X(j\omega) = \frac{3}{j\omega + 1}$$

Exemplo: Convolução Não-Periódica

- Pela propriedade da Convolução, temos:

$$
\begin{aligned}
Y(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) = \frac{2}{j\omega+2}\frac{3}{j\omega+1} \\
&= \frac{6}{(j\omega+2)(j\omega+1)} = \frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+1}
\end{aligned}
$$

- Calculando: $A = -6$ e $B = 6$

$$
(A+B)(j\omega) + (2B+A) = 6 \rightarrow \begin{cases} A+B=0 & \rightarrow \quad A=-B \\ 2B+A=6 & \rightarrow \quad 2B-B=6 \\ & \rightarrow \quad B=6 \text{ e } A=-6 \end{cases}
$$

Exemplo: Convolução Não-Periódica

- Portanto

$$
\begin{aligned}
Y(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) = \frac{2}{j\omega+2}\frac{3}{j\omega+1} \\
&= \frac{6}{(j\omega+2)(j\omega+1)} = \frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+1} \\
&= -\frac{6}{j\omega+2} + \frac{6}{j\omega+1}
\end{aligned}
$$

- Finalmente

$$
6\left(\frac{-1}{j\omega+2} + \frac{1}{j\omega+1}\right) \xleftrightarrow{FT} -6e^{-2t}u(t) + 6e^{-t}u(t)
$$

Modulação (Multiplicação): Propriedade FT

$$x(t)z(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega)$$

- Os sinais $x(t)$ e $z(t)$ podem ser escritos usando a Transformada Inversa.

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\nu) e^{j\nu t} d\nu \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta) e^{j\eta t} d\eta \end{aligned}$$

Modulação (Multiplicação): *Propriedade FT*

- Então $y(t) = x(t)y(t)$ pode ser reescrita:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Z(j\nu)X(j\eta)e^{j(\nu+\eta)t}d\nu d\eta$$

- Fazendo $\nu = \omega - \eta$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta)Z(j(\omega-\eta))d\eta\right)}_{X(j\omega)*Z(j\omega)} e^{j\omega t}d\omega$$

Exercício 10: Modulação (Multiplicação)

Encontre a FT de:

$$x(t) = \frac{4}{\pi^2 t^2}\text{sen}^2(2t)$$

- Propriedade:

$$x(t)z(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega)$$

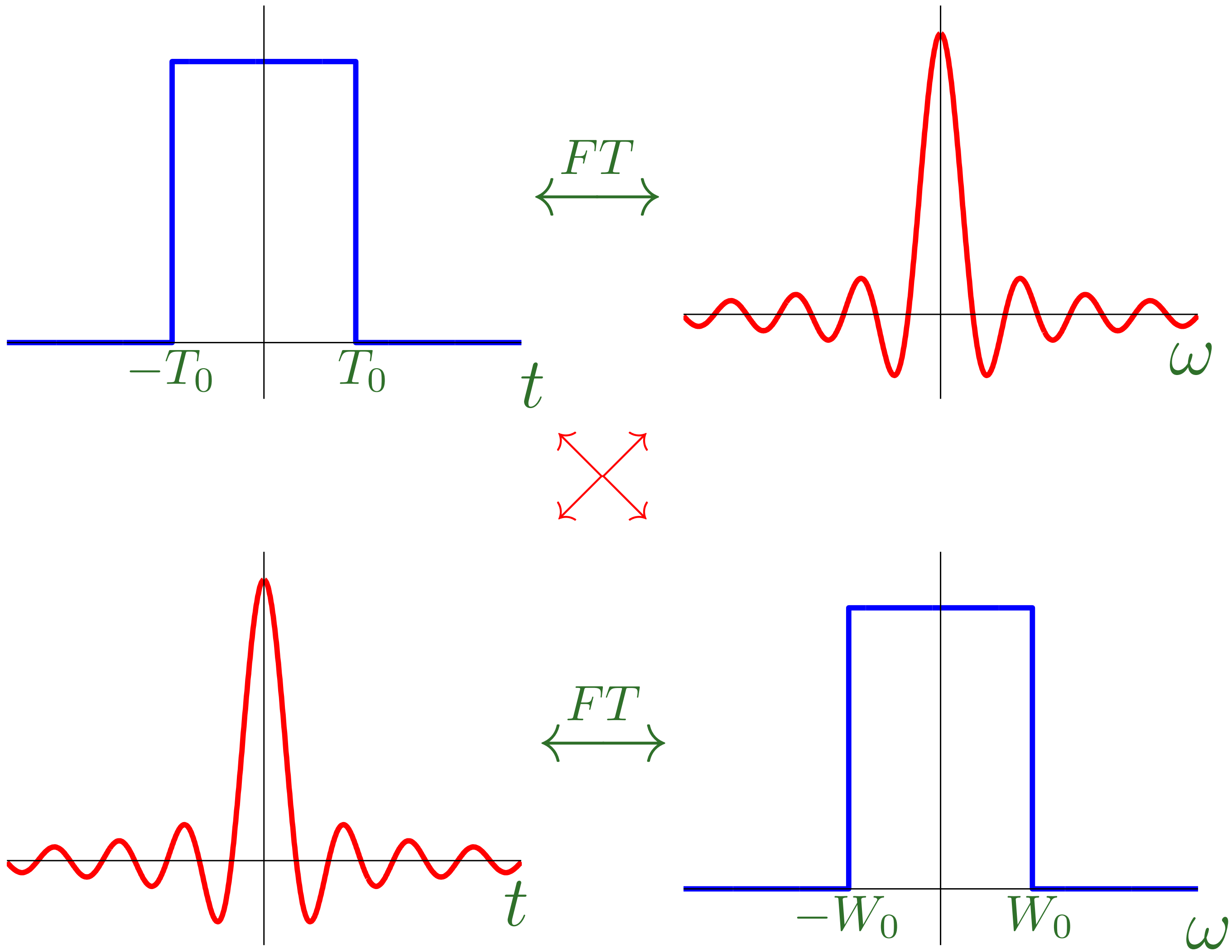
- Par de transformada:

$$\frac{1}{\pi t}\text{sen}(Wt) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Dualidade: *Propriedade FT*

- Simetria entre o domínio do tempo e da frequência:
  - Pulso contínuo em $t \longrightarrow$ sinc em ω
  - Pulso contínuo em $\omega \longrightarrow$ sinc em t
  - constante em $\omega \longrightarrow \delta(t)$
  - constante em $t \longrightarrow \delta(\omega)$

Dualidade: *Propriedade FT*



Dualidade: Propriedade FT

Em resumo, temos:

$$x(t) \overset{FT}{\Longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$X(jt) \overset{FT}{\Longleftrightarrow} 2\pi x(-\omega)$$

Dualidade: Propriedade FT

Demonstração:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \xrightarrow{\omega=\tau} X(j\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\tau t}dt$$

fazendo $t = -\omega$, ($t \to -\infty$: $\omega \to \infty$, $t \to \infty$: $\omega = -\infty$, $dt = -d\omega$),

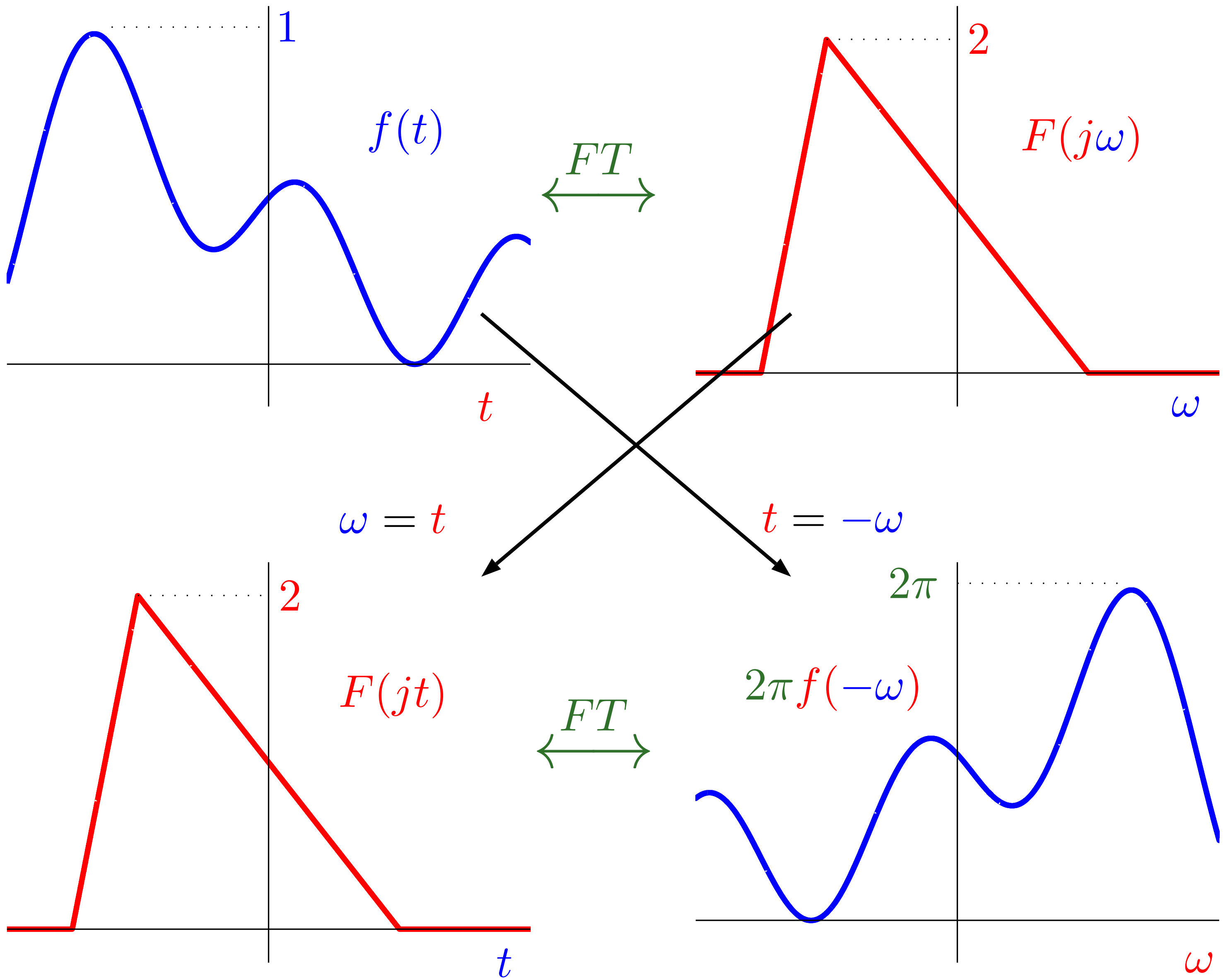
$$X(j\tau) = \int_{\infty}^{-\infty} x(-\omega)e^{j\tau\omega}[-d\omega]$$

fazendo $\tau = t$

$$X(jt) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big[2\pi x(-\omega)\Big]e^{j\omega t}d\omega$$

- Transformada inversa de Fourier

Dualidade: *Propriedade FT*



Exemplo: Dualidade

Usando a propriedade de Dualidade, encontre a FT da seguinte função:

$$x(t) = \frac{1}{1 + jt}$$

Solução: Dualidade

- Sabemos que:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \overset{FT}{\longleftrightarrow} f(t) = e^{-t}u(t)$$

- Dualidade: $F(jt) = 2\pi f(-\omega)$, logo:

$$\begin{array}{ccc} F(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega} & \overset{FT}{\longleftrightarrow} & f(t) = e^{-t}u(t) \\ \downarrow \omega = t & & \downarrow \times 2\pi,\ t = -\omega \\ F(jt) = \dfrac{1}{1 + jt} & \overset{FT}{\longleftrightarrow} & 2\pi e^{\omega}u(-\omega) \end{array}$$

Exercício 11: Dualidade

Encontre a Transformada inversa de: $u(\omega)$

- Usando a propriedade de Dualidade:

$$y(t) \overset{FT}{\Longleftrightarrow} Y(j\omega)$$
$$Y(jt) \overset{FT}{\Longleftrightarrow} 2\pi y(-\omega)$$

- a propriedade de reflexão

$$x(-t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(-j\omega)$$

- e o par de transformada

$$u(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Relações de Parseval

- As relações de Parseval afirmam que:
  - A energia (ou potência) da representação no tempo de um sinal é igual a energia (ou potência) da representação na frequência.
- $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Relações de Parseval

- Considere um sinal não-períodico contínuo $x(t)$. A energia do sinal é

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Note que $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$ e que $x^*(t)$ pode ser escrito como

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

Relações de Parseval

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right\}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)X(j\omega)d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}
$$

Exercício 12

Encontre o valor da integral

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{|j\omega + 2|^2} d\omega$$

usando a Relação de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Linearidade (Tabela Propriedades)

- $Ax(t) + By(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} Aa_k + Bb_k$
- $Ax[n] + By[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} Aa_k + Bb_k$
- $Ax(t) + By(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} AX(j\omega) + BY(j\omega)$
- $Ax[n] + By[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega})$

Deslocamento no tempo (Tabela Propriedades)

- $x(t-t_0) \overset{FS}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$
- $x[n-n_0] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 n_0} a_k$
- $x(t-t_0) \overset{FT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
- $x[n-n_0] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

Deslocamento na frequência (Tabela Prop.)

- $e^{jM\omega_0 t}x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{k-M}$
- $e^{jM\omega_0 n}x[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} a_{k-M}$
- $e^{j\omega_0 t}x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j(\omega - \omega_0))$
- $e^{j\omega_0 n}x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

Conjugação *(Tabela Propriedades)*

- $x^*(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$
- $x^*[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$
- $x^*(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega)$
- $x^*[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X^*(e^{-j\omega})$

Reflexão no tempo *(Tabela Propriedades)*

- $x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$
- $x[-n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$
- $x(-t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(-j\omega)$
- $x[-n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$

Escalonamento (Tabela Propriedades)

- $x(\alpha t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$, $\alpha > 0$ (período T/α)
- $x_{[m]}[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{m} a_k$, $m > 0$, inteiro (período Nm)
- $x(at) \overset{FS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$
- $x_{[m]}[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{jm\omega})$

$$x_{[m]}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } m \\ 0, & \text{se } n \text{ não for múltiplo de } m \end{cases}$$

Convolução periódica (Tabela Propriedades)

- $x(t) \circledast y(t) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} T a_k b_k$
- $x[n] \circledast y[n] \stackrel{DTFS}{\longleftrightarrow} N a_k b_k$
- $x(t) * y(t) \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega) Y(j\omega)$
- $x[n] * y[n] \stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$

Multiplicação/Modulação (Tabela Propriedades)

- $x(t)y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell b_{k-\ell} \qquad \rightarrow a_k * b_k$

- $x[n]y[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} \sum_{\ell=<N>} a_\ell b_{k-\ell} \qquad \rightarrow a_k \circledast b_k$

- $x(t)y(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$

- $x[n]y[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega})$

Diferenciação/Diferença (Tabela Propriedades)

- $$\frac{dx(t)}{dt} \overset{FS}{\longleftrightarrow} jk\omega_0 a_k$$
- $$x[n] - x[n-1] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jk\omega_0})a_k$$
- $$\frac{dx(t)}{dt} \overset{FT}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$
- $$x[n] - x[n-1] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jk\omega})X(e^{j\omega})$$

Integração/Soma (Tabela Propriedades)

- $$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \overset{FS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{jk\omega_0} a_k$$
- $$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(1-e^{-jk\omega_0})} a_k$$
- $$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$
- $$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{X(j\omega)}{(1-e^{-j\omega})} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Sinais reais e pares *(Tabela Propriedades)*

- $x(t)$ real e par $\overset{FS}{\longleftrightarrow}$ a_k real e par
- $x[n]$ real e par $\overset{DTFS}{\longleftrightarrow}$ a_k real e par
- $x(t)$ real e par $\overset{FT}{\longleftrightarrow}$ $X(j\omega)$ real e par
- $x[n]$ real e par $\overset{DTFT}{\longleftrightarrow}$ $X(e^{j\omega})$ real e par

Sinais reais e ímpares (Tabela Propriedades)

Para $x(t)$ e $x[n]$ reais e ímpares

- $x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$ puramente imaginário e ímpar
- $x[n] \overset{DTFS}{\longleftrightarrow} a_k$ puramente imaginário e ímpar
- $x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$ puramente imaginário e ímpar
- $x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ puramente imaginário e ímpar

Relações de Parseval (Tabela Propriedades)

- $$\frac{1}{T}\int_{<T>}|x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2 \qquad \longrightarrow FS$$
- $$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^2 = \sum_{k=<N>}|a_k|^2 \qquad \longrightarrow DTFS$$
- $$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega \qquad \longrightarrow FT$$
- $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega \qquad \longrightarrow DTFT$$

Exercício 13

Encontre o valor do somatório abaixo usando a Relação de Parseval

$$\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2(Wn)}{\pi^2 n^2}$$

Use o Teorema de Parseval:

$$\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Exercício 14: Convolução periódica Discreta

Encontre $x[n]$ dado:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \left(\frac{e^{-j3\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right) \circledast \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{21\omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)$$

Propriedade:

$$w[n]z[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} W(e^{j\omega}) \circledast Z(e^{j\omega})$$

logo,

$$2\pi w[n]z[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} W(e^{j\omega}) \circledast Z(e^{j\omega})$$

Exercício 15: Deslocamento na frequência

Encontre a DT Transformada Inversa de

$$Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j(\omega+\frac{\pi}{4})}}$$

Exercício 16: Sinal periódico

Determine a transformada do trem de impulsos

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT)$$

Exercício 17 : Propriedades

Calcule a DTFT do sinal

$$x[n] = ne^{j\frac{\pi}{8}n}\alpha^{n-3}u[n-3]$$

Exercício 18: Propriedades

Determine a saída $y(t)$ de um sistema LIT, cuja resposta ao impulso é

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

quando uma entrada

$$x(t) = 3e^{-t}u(t)$$

foi aplicada.

Exercício 19: *Propriedades*

Seja a resposta ao impulso de um sistema LIT

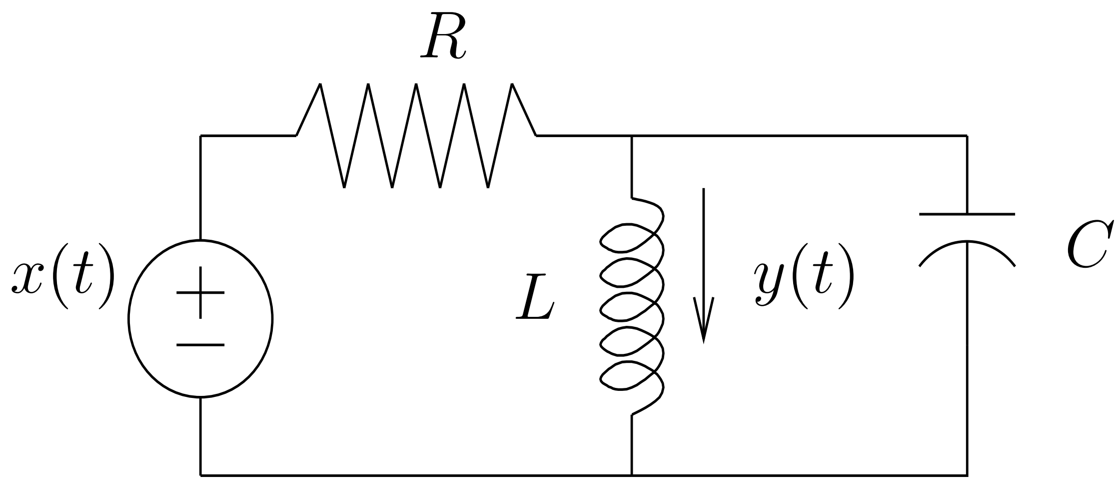
$$h[n] = \frac{1}{\pi n}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Encontre a saída $y[n]$ em resposta às entradas:

$$\begin{cases} x_1[n] = \frac{1}{\pi n}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{8}n\right) \\ x_2[n] = \frac{1}{\pi n}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{cases}$$

Exercício 20: Propriedades

Seja $x(t)$ a entrada e $y(t)$ a saída,



a) a equação diferencial que descreve o circuito;

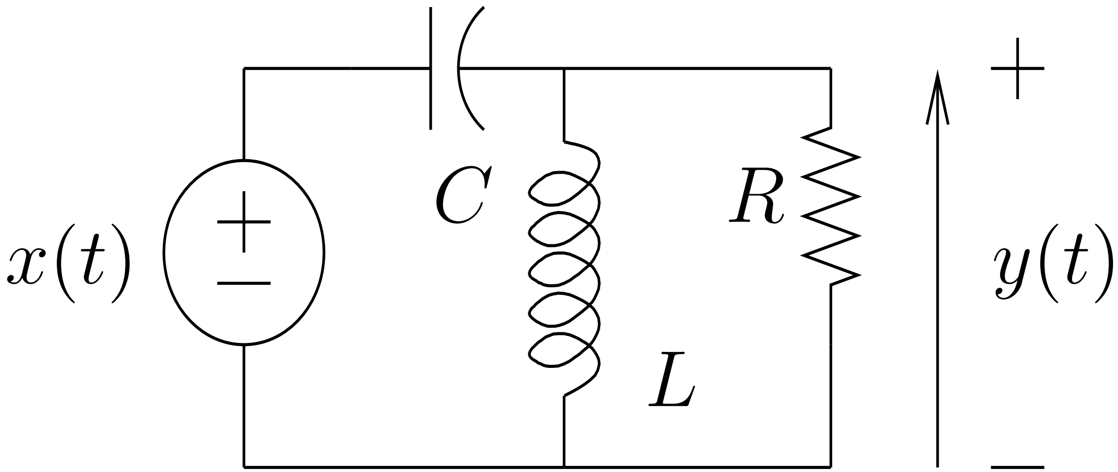
b) a resposta em frequência do circuito;

c) a resposta ao impulso $h(t)$.

$$v_\ell = L\frac{di}{dt}, \quad i_c = C\frac{dv}{dt}$$

Exercício 21: *Propriedades*

Considerando $x(t)$ como entrada e $y(t)$ como saída,



a) a equação diferencial que descreve o circuito;

b) a resposta em frequência do circuito;

c) a resposta ao impulso $h(t)$.