Convolução

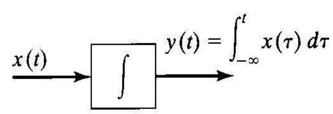
• EXERCÍCIO **0.1**
Considere o integrador mostrado na figura abaixo.

a) Ache a expressão da resposta ao impulso $h(t)$.

b) Usando a integral de comvolução, encontre a resposta do sistema à entrada $x(t)$, com $x(t)$=

 i) $u(t-2)$
 ii) $e^{5t}u(t)$
 iii) $u(t)$
 iv) $(t+1)u(t+1)$

c) Verifique os resultados usando a equação do sistema $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.



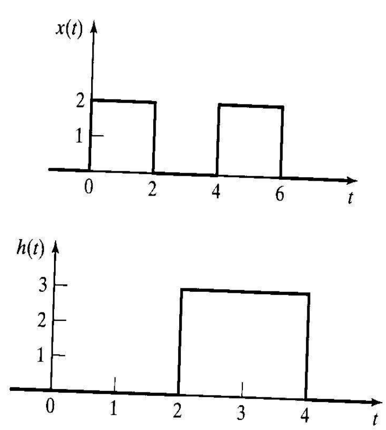
• EXERCÍCIO **0.2**
Um sistema contínuo LIT tem entrada $x(t)$ e resposta ao impulso $h(t)$ (veja figura abaixo).

a) Encontre a resposta do sistema $y(t)$ para $4 \leq t \leq 5$.

b) Encontre o valor máximo da saída.

c) Encontre as faixas temporais em que a saída do sistema é nula.

d) Encontre $y(t)$ para todo t.



• EXERCÍCIO **0.3**

Encontre $x_1(t) * x_2(t)$, onde

$$x_1(t) = 2u(t+2) - 2u(t-2) \tag{1}$$

e

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -4 \\ e^{-|t|}, & -4 \leq t \leq 4 \\ 0, & t > 4. \end{cases} \tag{2}$$

• EXERCÍCIO **0.4**

Sabe-se que a condição na qual um sistema contínuo LIT é BIBO estável é que a resposta ao impulso seja absolutamente integrável, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \tag{3}$$

Mostre que qualquer sistema que não satisfaça esta condição não é BIBO estável, ou seja, mostre que esta condição é também suficiente. (Use, por exemplo, a seguinte entrada limitada).

$$x(t-\tau) = \begin{cases} 1, & h(\tau) > 0 \\ -1, & h(\tau) < 0 \end{cases} \tag{4}$$

• EXERCÍCIO **0.5**

Considere o sistema LIT da figura abaixo.

1. Expresse a resposta ao impulso como uma função das respostas ao impulso dos sub-sistemas.

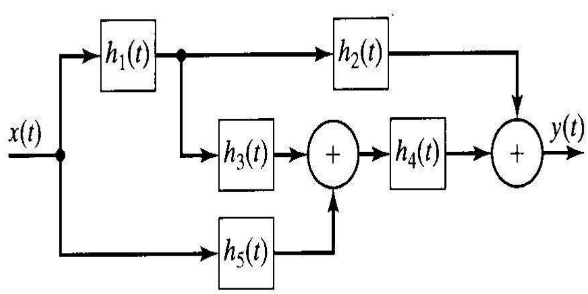
2. Seja

   $$h_1(t) = h_4(t) = u(t)$$

   e

   $$h_2(t) = h_3(t) = 5\delta(t), \; h_5(t) = e^{-2t}u(t)$$

   Encontre a resposta ao impulso do sistema.



Exercício 0.1

a) $y(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot 1 \, d\tau =$

$= \int_0^t u(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(\tau)}_{x(\tau)} \underbrace{u(t-\tau)}_{h(t-\tau)}\, d\tau$

$h(t-\tau) = u(t-\tau) \Rightarrow h(t) = u(t)$

b)

i) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau - 2)\, u(t-\tau)\, d\tau$

$\tau - 2 \geq 0 \rightarrow \tau \geq 2 \Rightarrow 2 \leq \tau \leq t$

$t - \tau \geq 0 \rightarrow \tau \leq t$

$y(t) = \int_2^t d\tau = \tau \Big|_2^t = t - 2$

Logo: $y(t) = \begin{cases} t-2 & t \geq 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$

ii) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{5\tau} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$

$\tau \geq 0 \longrightarrow \tau \geq 0$

$t - \tau \geq 0 \longrightarrow \tau \leq t \Rightarrow 0 \leq \tau \leq t$

$y(t) = \int_0^t e^{5\tau}\, d\tau = \frac{1}{5} e^{5\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right)$

Logo: $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}(e^{5t}-1) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

ou $y(t) = \frac{1}{5}(e^{+5t}-1)\,u(t)$

iii) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z)\,u(t-z)\,dz$

$0 \leq z \leq t$

$y(t) = \int_0^t dz = z\Big|_0^t = t$

Logo: $y(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

ou $y(t) = t\,u(t)$

iv) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (z+1)\,u(z+1)\,u(t-z)\,dz$

$z+1 \geq 0 \rightarrow z \geq -1$ $\rightarrow$ $-1 \leq z \leq t$

$t-z \geq 0 \rightarrow z \leq t$

$y(t) = \int_{-1}^{t} (z+1)\,dz = \frac{z^2}{2} + z\Big|_{-1}^{t} =$

$= \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2} + 1 = \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$

$y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t + 1/2\right) u(t+1)$

a)

i) $y(t) = \int_0^t u(\tau - 2)\, d\tau = \int_2^t d\tau = t - 2 \;, t \geq 2$

$0 \;, t < 2$

ii) $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{5\tau} u(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{5\tau}\, d\tau =$

$= \frac{1}{5} e^{5\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right) \;, t \geq 0$

$0 \quad t < 0 .$

iii) $y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau)\, d\tau = \int_0^t d\tau = t \;, t > 0$

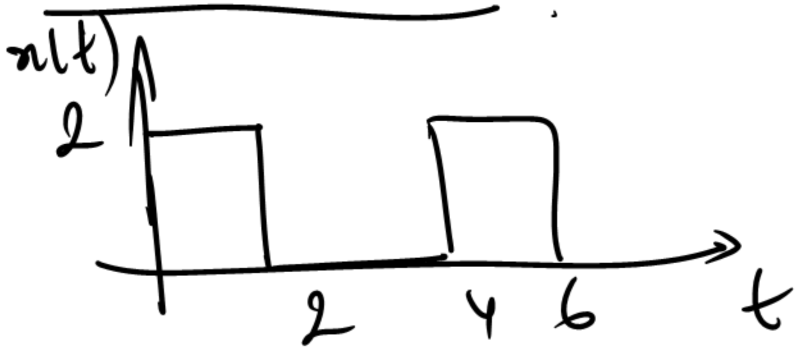
$y(t) = 0 \;, t < 0$

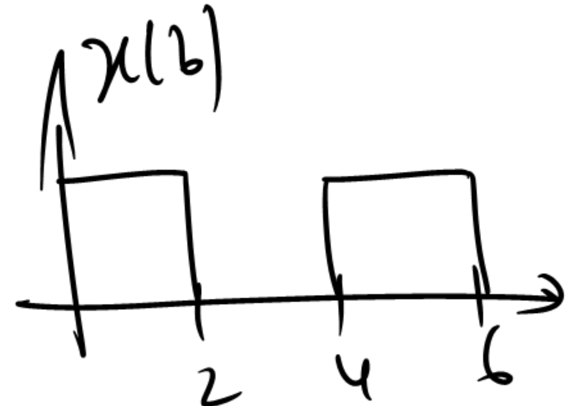
iv) $y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau + 1)(\tau + 1)\, d\tau = \frac{\tau^2}{2} + \tau \Big|_{-1}^t$

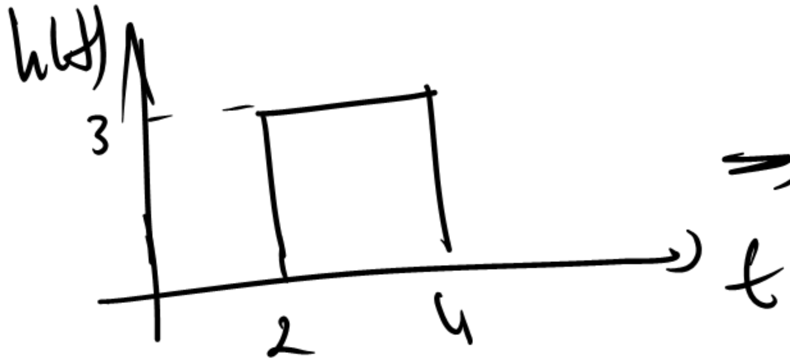
$= \frac{t^2}{2} + t + 1/2 \;, t \geq -1$

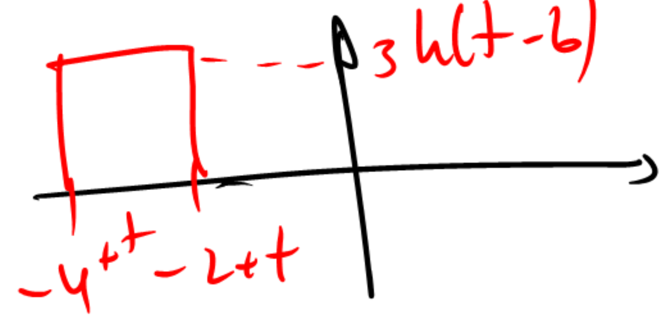
$0 \;, t < -1$

Exercício 0.2

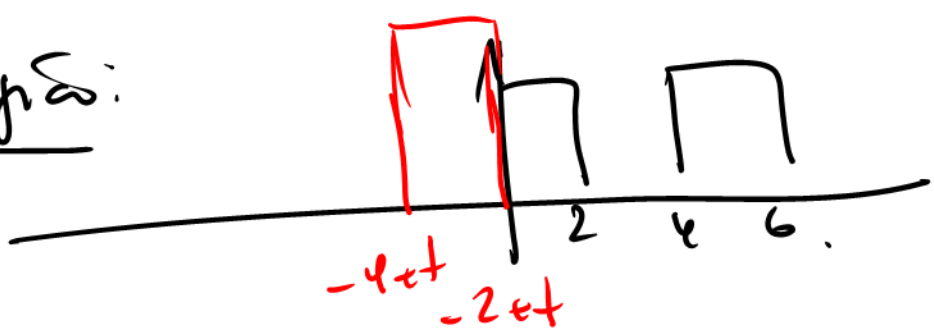








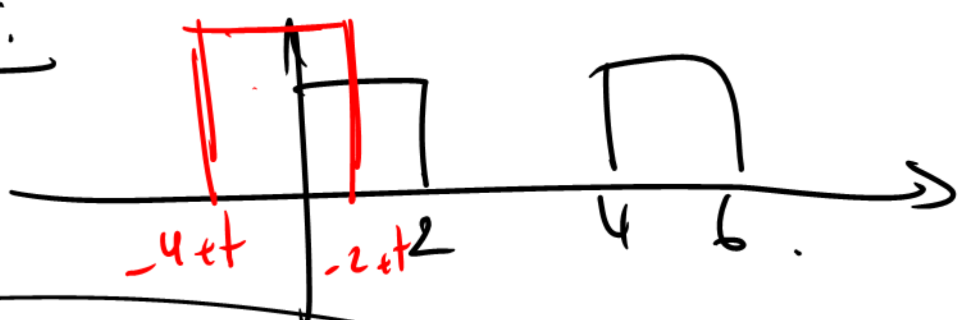
1ª Região:



$-2+t=0 \rightarrow t=2$

Para $t \leq 2 \rightarrow g(t)=0$.

2ª Região:



$-2+t=2 \rightarrow t=4$.

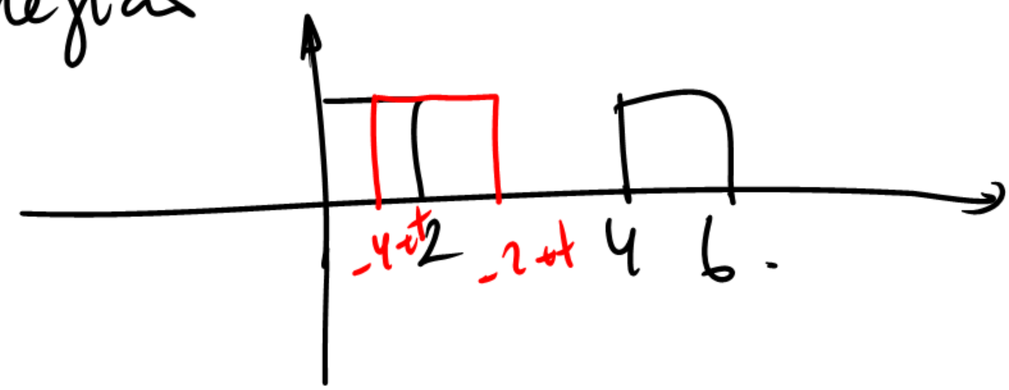
$-4+t=0 \rightarrow t=4$

$$y(t) = \int_0^{t-2} 3.2\, d\tau = 6\tau\Big|_0^{t-2} =$$

$$= 6(t-2) = 6t - 12$$

para $2 < t \leq 4$.

3ª região



$-4+t = 2 \rightarrow t = 6.$

$-2+t = 4 \rightarrow t = 6.$

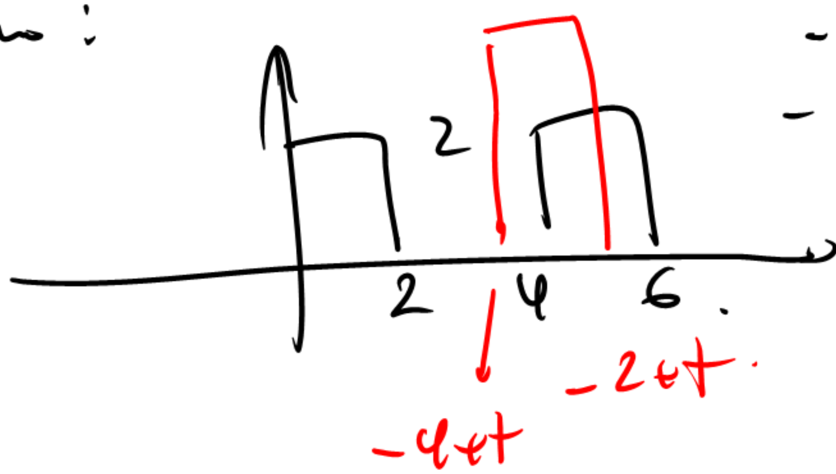
$$y(t) = \int_{t-4}^{2} 6\, d\tau = 6\tau\Big|_{t-4}^{2} =$$

$$= 12 - 6(t-4)$$

para $4 < t \leq 6$.

4ª región:

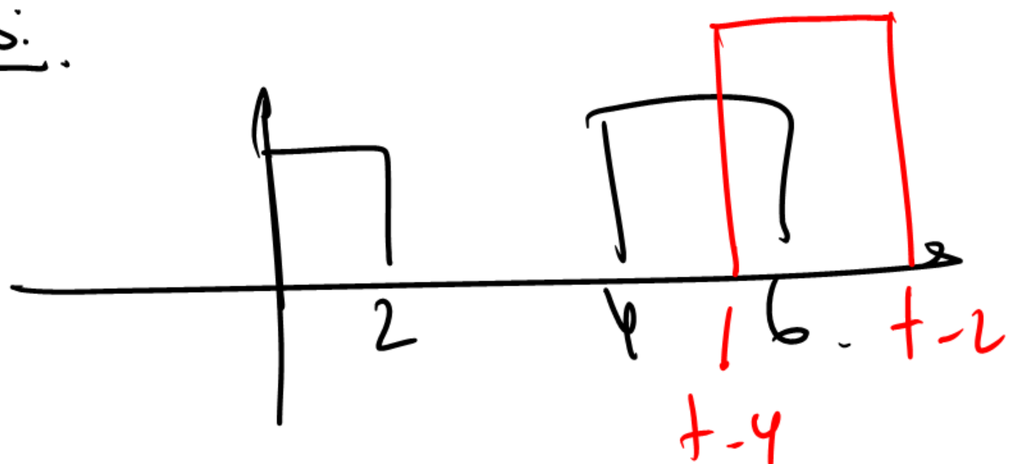
$-2+t=6$
$-4+t=4$ $\Rightarrow t=8$



$$y(t)=\int_4^{t-2} 6\,d\tau = 6\tau\Big|_4^{t-2} = 6(t-2)-24$$

para $6 < t \le 8$

<u>5ª región:</u>

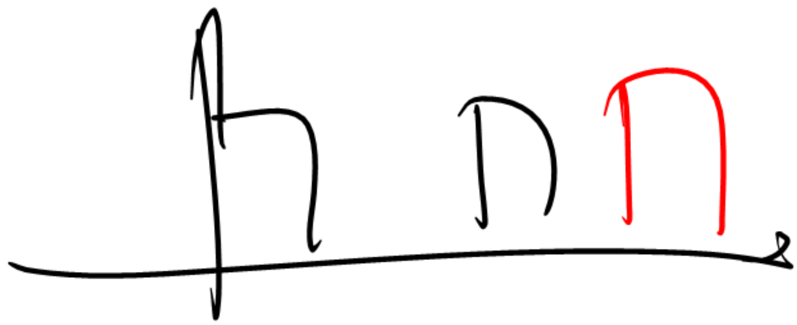


$t-4=6 \Rightarrow t=10$

$$y(t)=\int_{t-4}^{6} 6\,d\tau = 6\tau\Big|_{t-4}^{6} = 36-6(t-4)$$

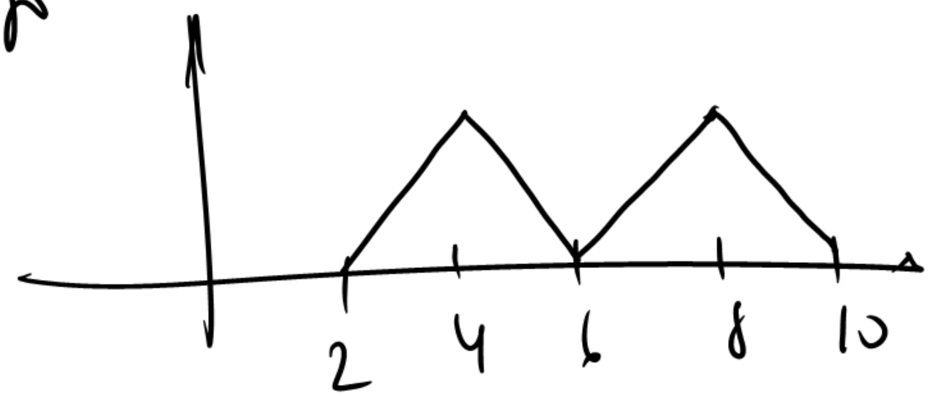
para $8 < t \le 10$

6ª repet.:



$y(t) = 0$ para $t > 10$

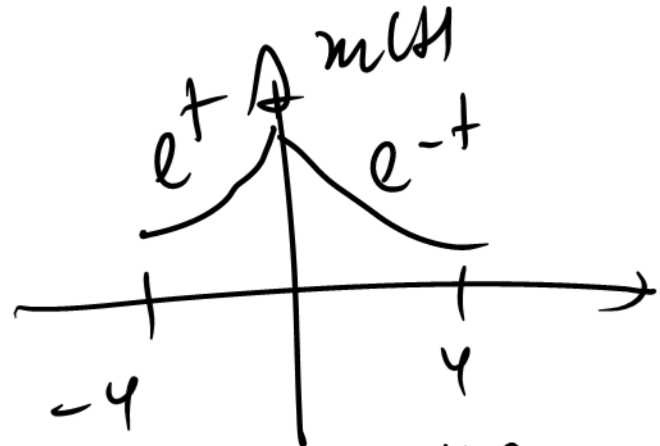
Logo:

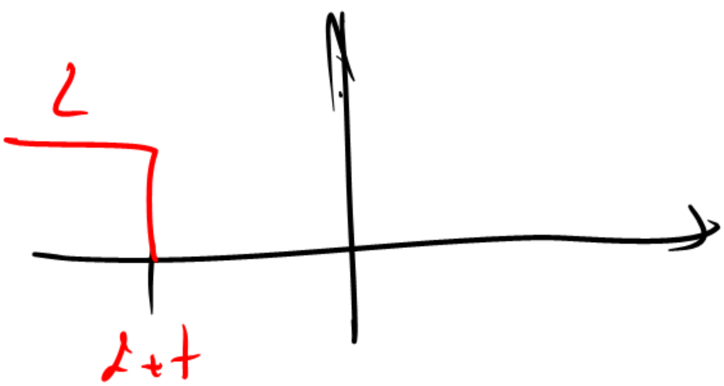


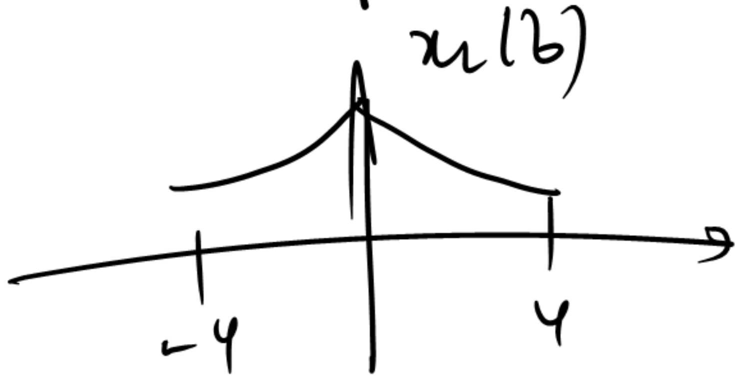
Valores zero: $\begin{cases} t \leq 2 \\ t = 6 \\ t \geq 10 \end{cases}$

O máximo é 12

Exercício 0.3

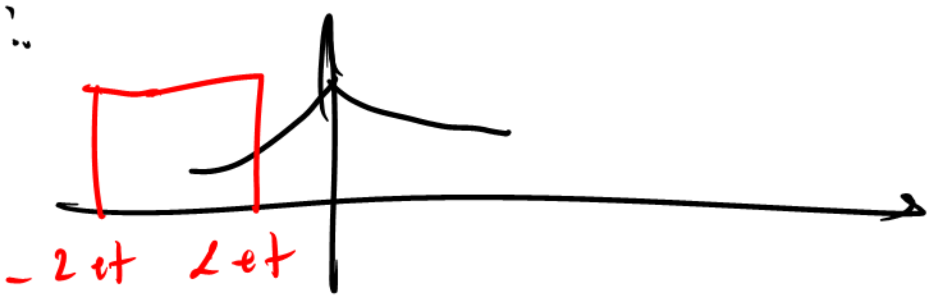






1ª região: $2+t \le -4 \rightarrow t \le -6 \rightarrow y(t) = 0$.

2ª região:

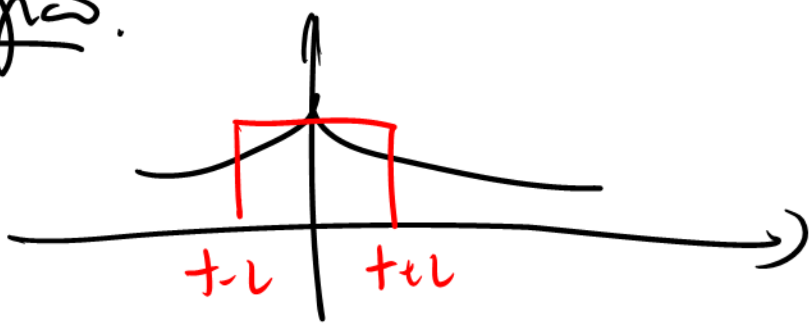


$2+t = 0 \rightarrow t = -2$. ✓ $\qquad -6 < t \le -2$

$-2+t = -4 \rightarrow t = -2$ ✓

$$y(t) = \int_{-4}^{t+2} 2\, e^{\tau}\, d\tau = 2\left[e^{t+2} - e^{-4}\right]$$

3ª região:



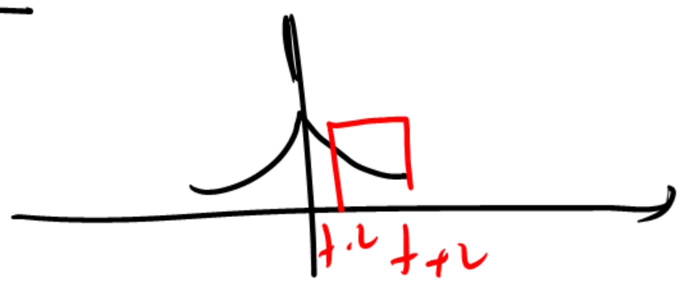
$t+2 = 4 \rightarrow t = 2. \qquad -2 < t \leq 2$

$t-2 = 0 \rightarrow t = 2$

$$y(t) = 2\int_{t-2}^{0} e^{b}\,db + 2\int_{0}^{t+2} e^{-b}\,db =$$

$$= 2[1 - e^{t-2}) + 2[1 - e^{-(t+2)}]$$

4ª região:



$t-2 = 4 \rightarrow t = 6 \qquad \rightarrow 2 < t \leq 6$

$$y(t) = \int_{t-2}^{4} e^{-b}\,db = 2\left[e^{-(t-2)} - e^{-4}\right]$$

3º caso: $t > 6 \rightarrow y = 0$.

Exercício 0.4

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

$$x(t-\tau) = \begin{cases} 1 , & h(\tau) > 0 \\ -1 , & h(\tau) < 0 \end{cases}$$

Repare $|x(t-\tau)| < 1 \rightarrow$ limitada

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$h(\tau)\, x(t-\tau) = \begin{cases} h(\tau) & \text{se } h(\tau) > 0 \\ -h(\tau) & \text{se } h(\tau) < 0 \end{cases}$$

logo:

$$h(\tau)\, x(t-\tau) = |h(\tau)|.$$

Prova: Supondo $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$ e usando as expressões acima, temos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \infty$$

O sistema não é BIBO estável e para ser é preciso que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty.$$

Esercizio 0.5

1) $h(t) = \left[(h_1 * h_3 + h_5) * h_4 \right] + h_1 * h_2 =$

$= h_1 * h_2 + h_1 * h_3 * h_4 + h_4 * h_5.$

2) $h_1 = h_4 = u.$

$h_2 = h_3 = 5\delta(t)$

$h_5 = e^{-2t} u(t)$

$h(t) = u(t) * 5\delta(t) + u(t) * 5\delta(t) * u(t) +$

$+ u(t) * e^{-2t} u(t).$

$u(t) * 5\delta(t) = 5u(t).$

$u(t) * u(t) * 5\delta(t) = t u(t)$

$u(t) * e^{-2t} u(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^t = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) u(t)$

Logo.

$$h(t) = 5u(t) + tu(t) + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)u(t)$$