Capítulo 2 - Representação no Domínio do Tempo para Sistemas LIT

Prof. Fernando de Oliveira Souza

(baseado nas notas de aula de SDL do Prof. Eduardo Mendes)

`fosouza@ppgee.ufmg.br`

Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil

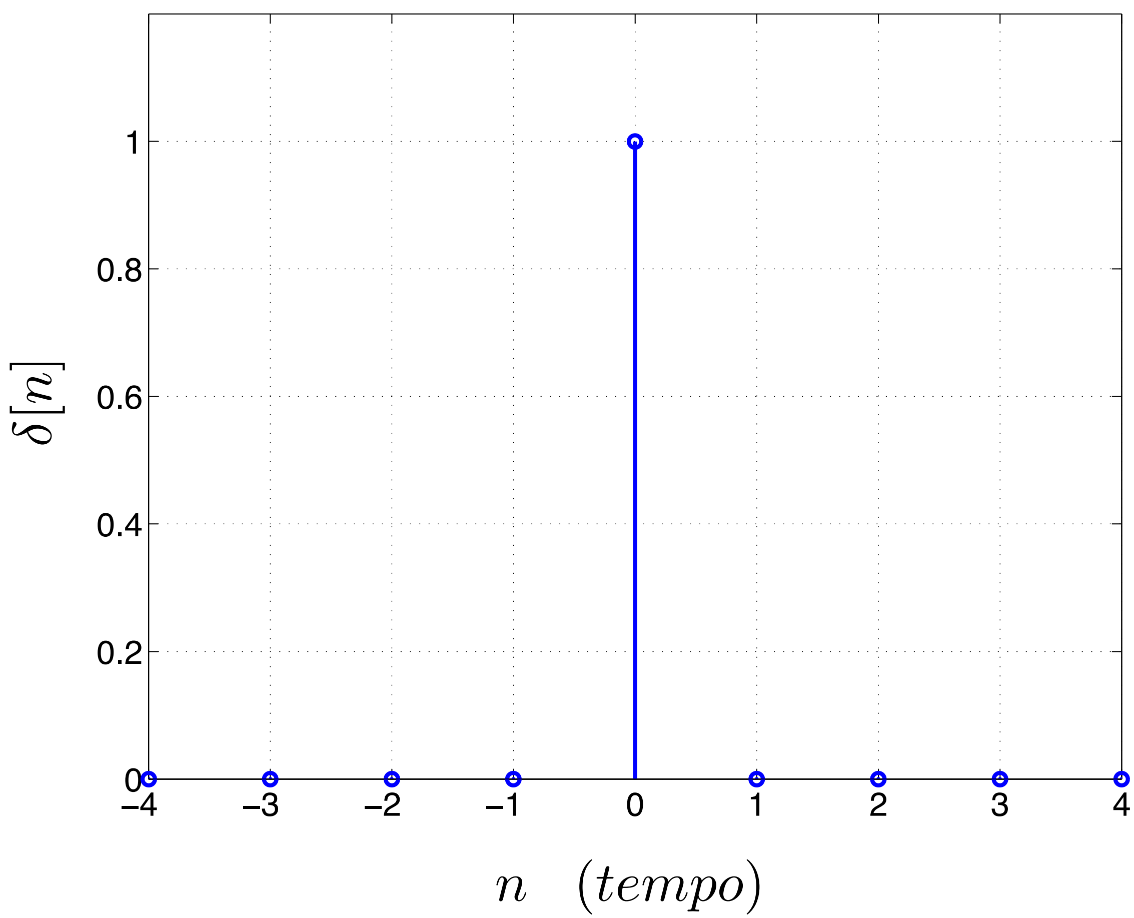
Representação no Domínio do tempo para Sistemas LIT

- Representação de sinais de tempo discreto em termos de impulsos
- Soma de Convolução

Impulso unitário no tempo discreto

- A funcão impulso no tempo discreto $\delta[n]$ é definida por

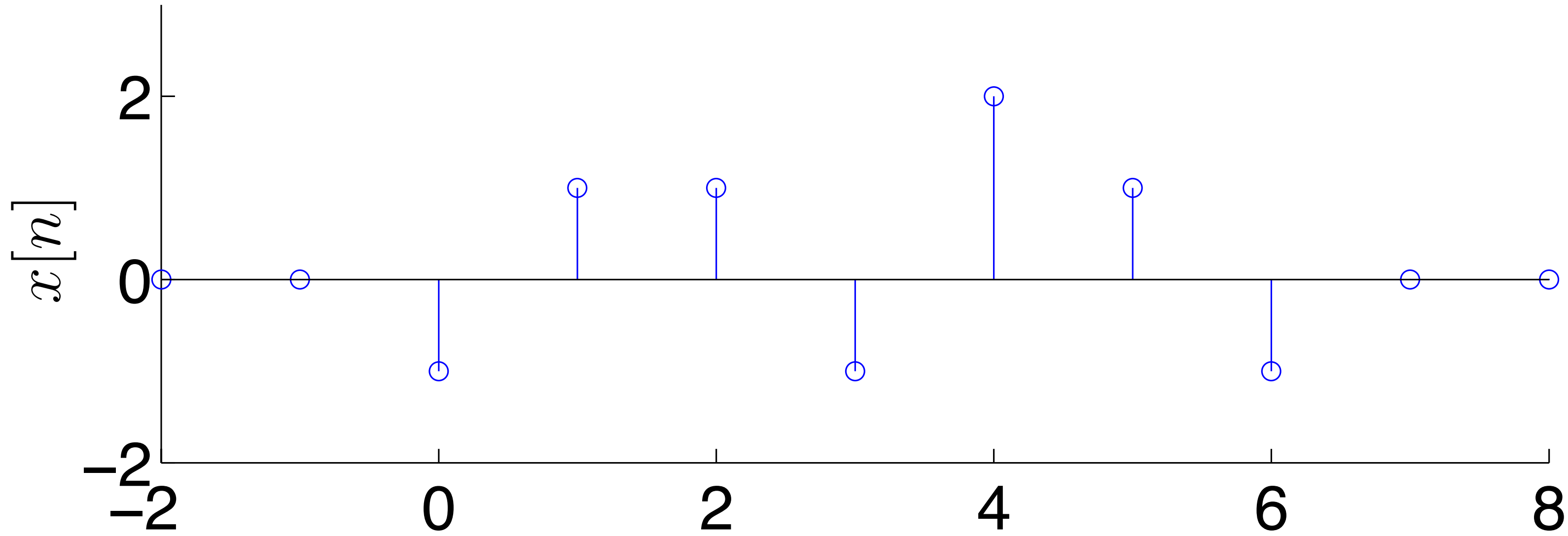
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

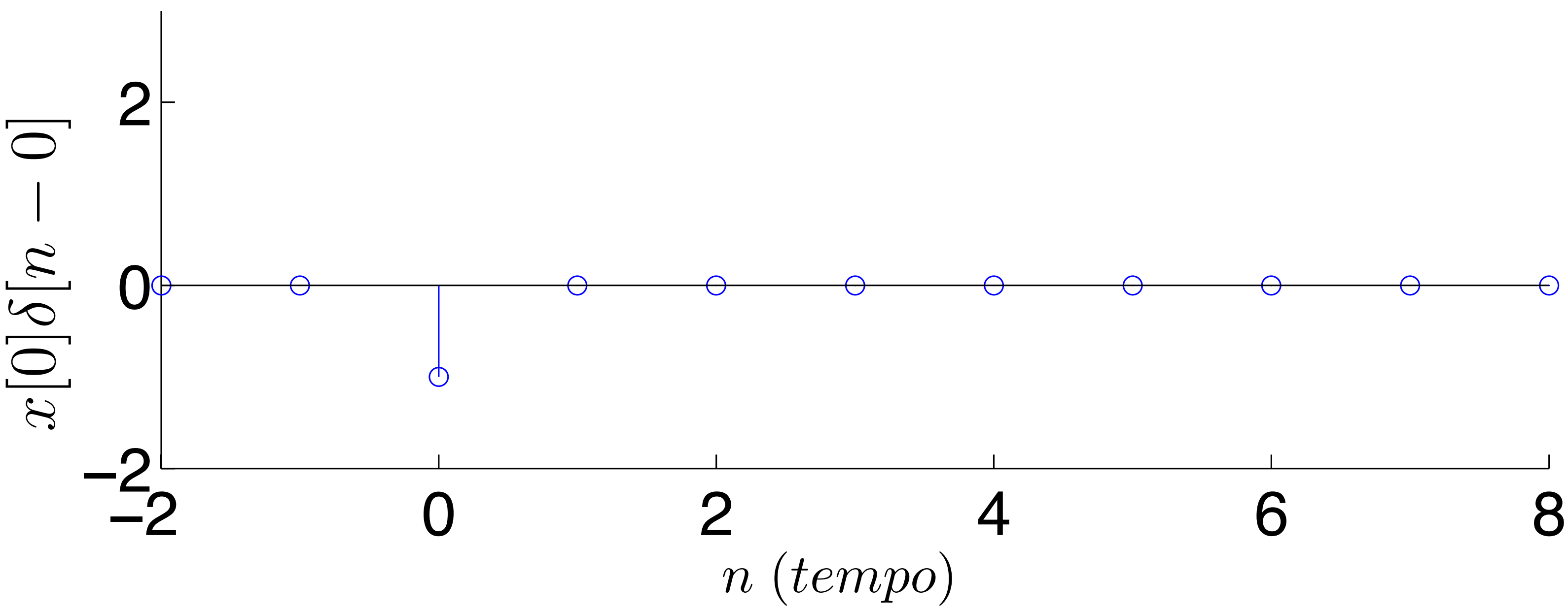


Amostrando um sinal usando o impulso

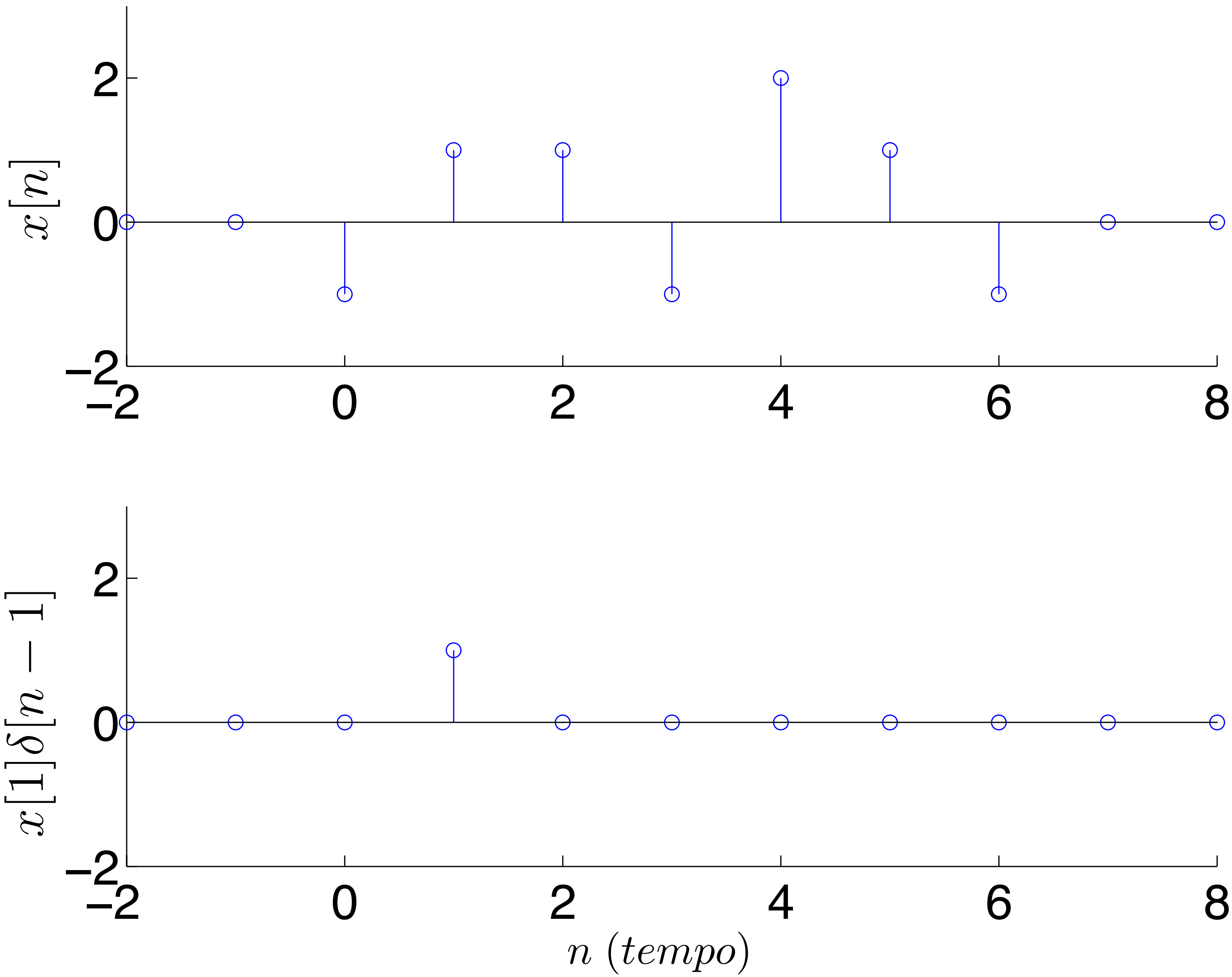
- Amostrando $x[k]\delta[n-k]$ de um sinal $x[n]$
  Para $k = 0$:
  $$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$
  Para $\forall\ k$:
  $$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$
  - n representa o índice do tempo, portanto $x[n]$ e $x[k]\delta[n-k]$ representam sinais;
  - $x[k]$ representa o valor de $x[n]$ no instante k.

$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$ *para* $k = 0$

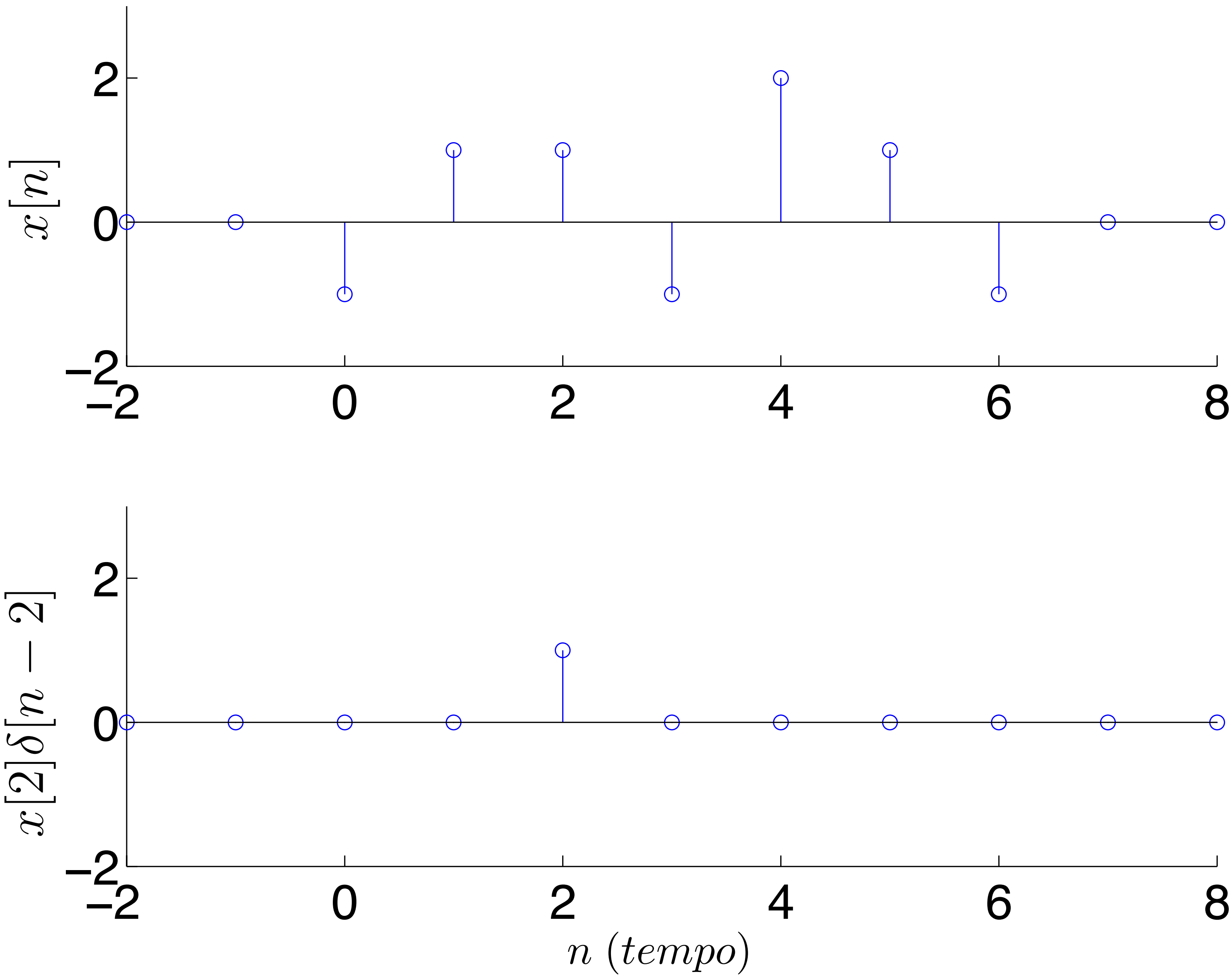




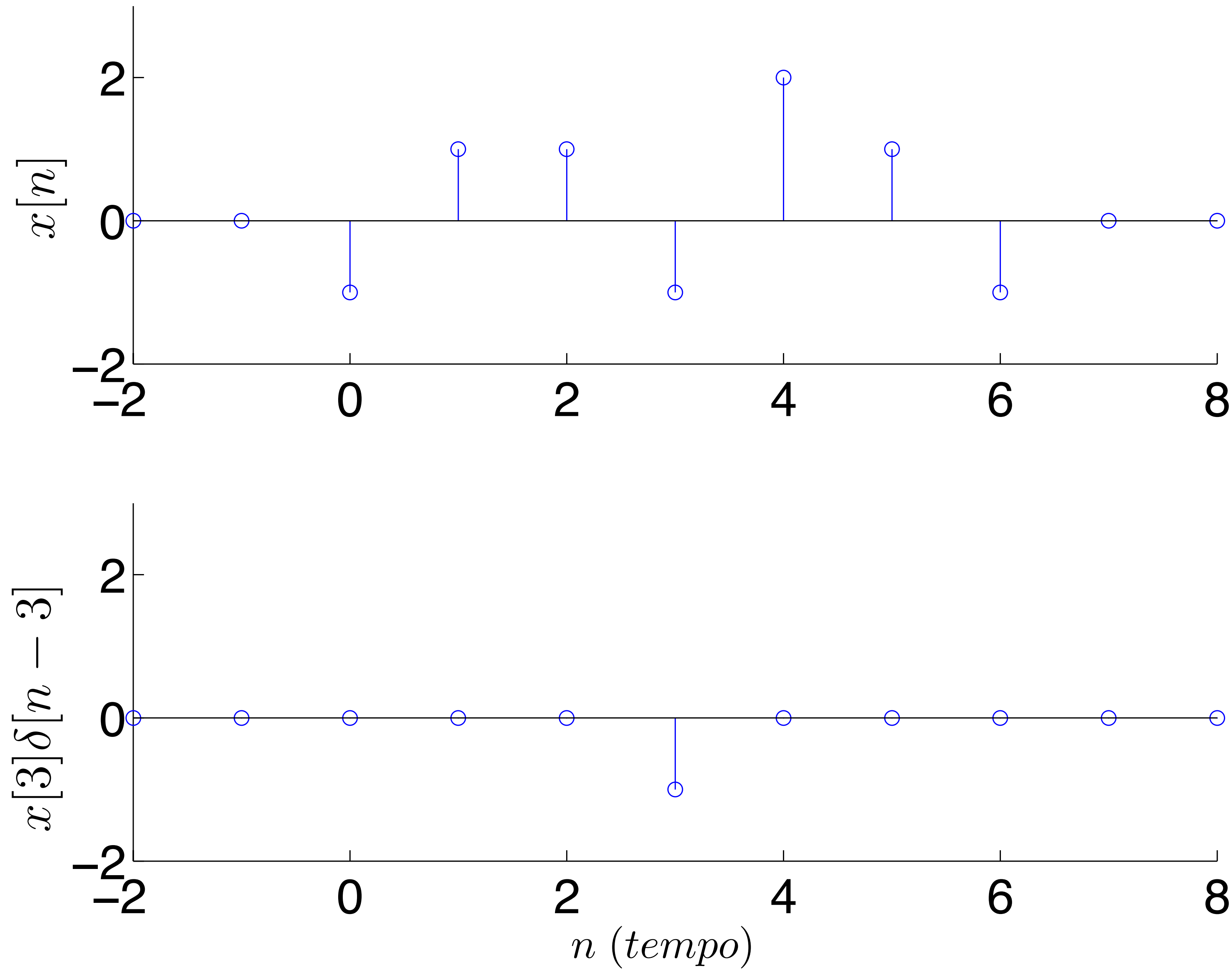
$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$ *para* $k = 1$



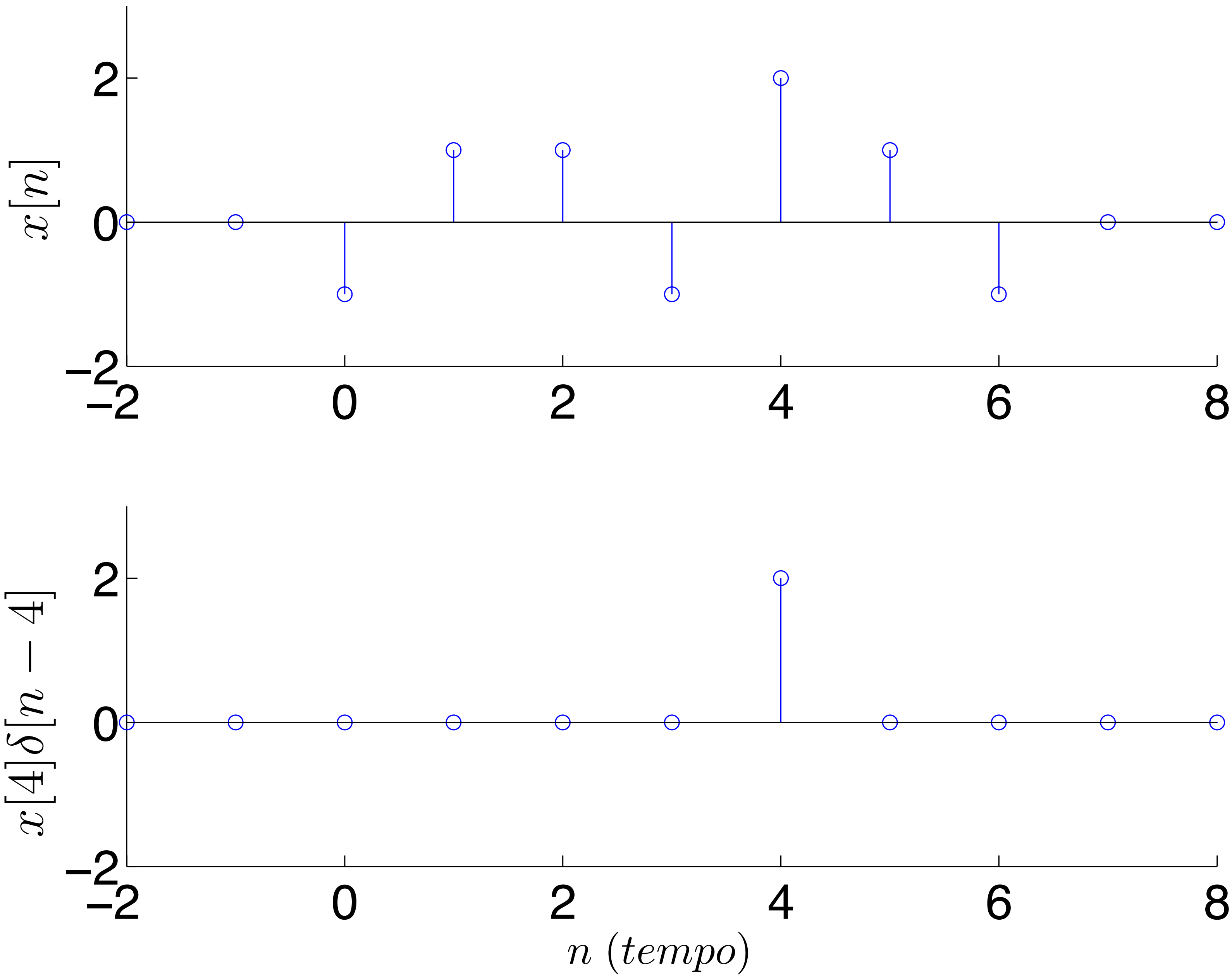
$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$ *para* $k = 2$



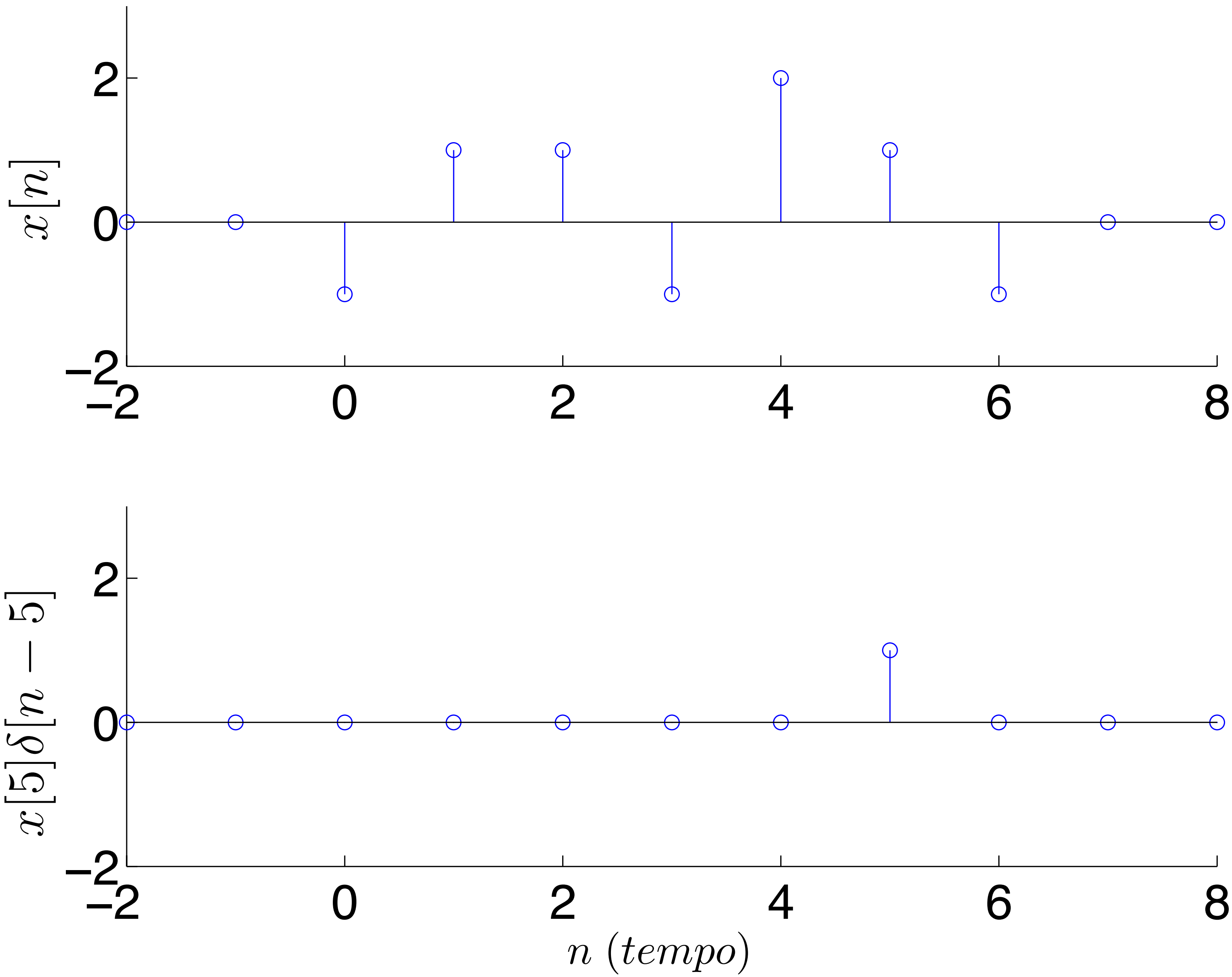
$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$ *para* $k=3$



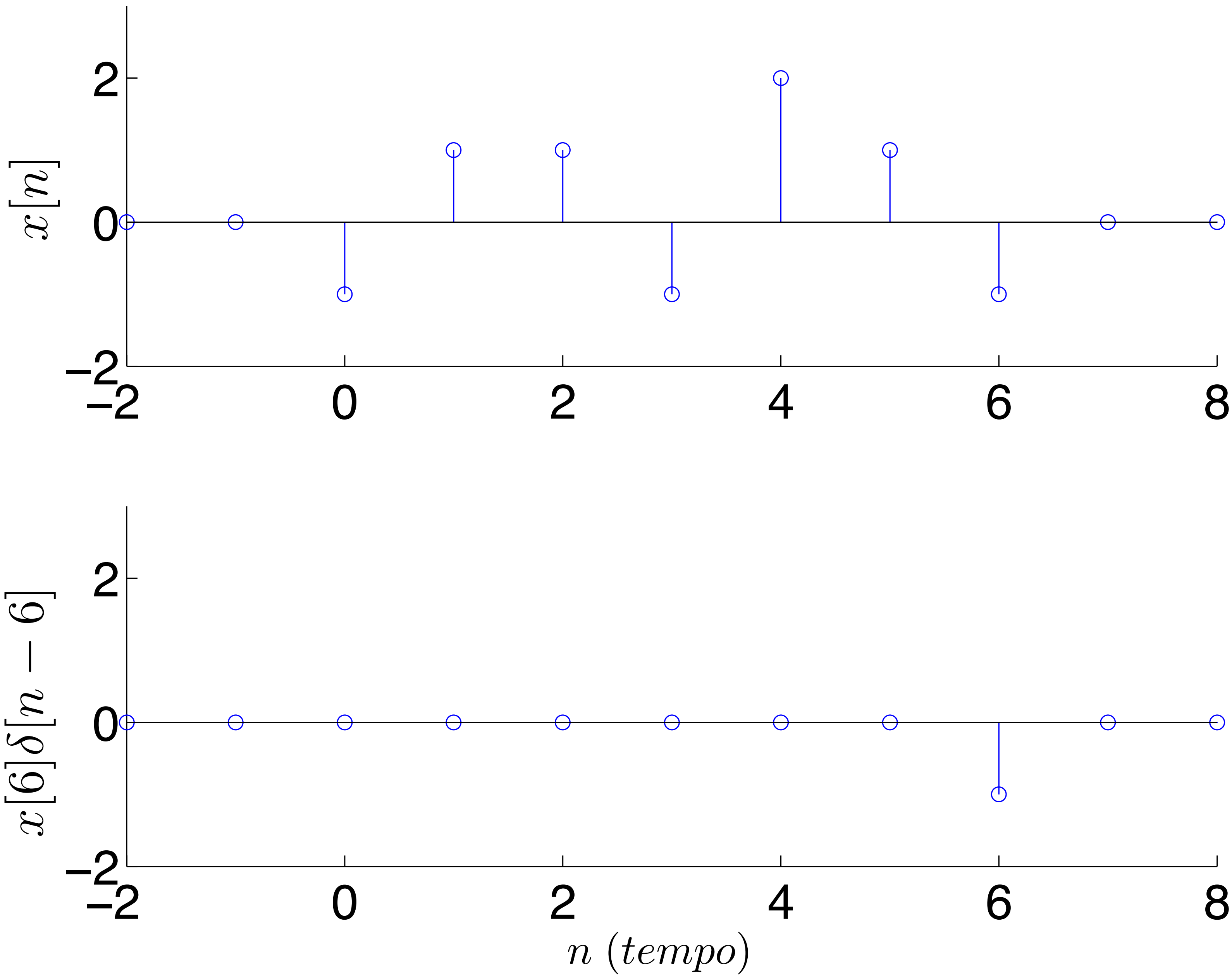
$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$ *para* $k = 4$



$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$ *para* $k = 5$



$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$ *para* $k = 6$



Reconstruindo um sinal usando amostras

Considere as amostras

$$x[k]\delta[n-k]$$

de um sinal $x[n]$.

- Reconstruindo um sinal usando todas as amostras deste sinal
  - Note que combinação de todas as amostras de um sinal é igual ao próprio sinal:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Exemplo: Usando o impulso

- Considere o seguinte sinal

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1 & n = 2 \\ 2 & n = 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

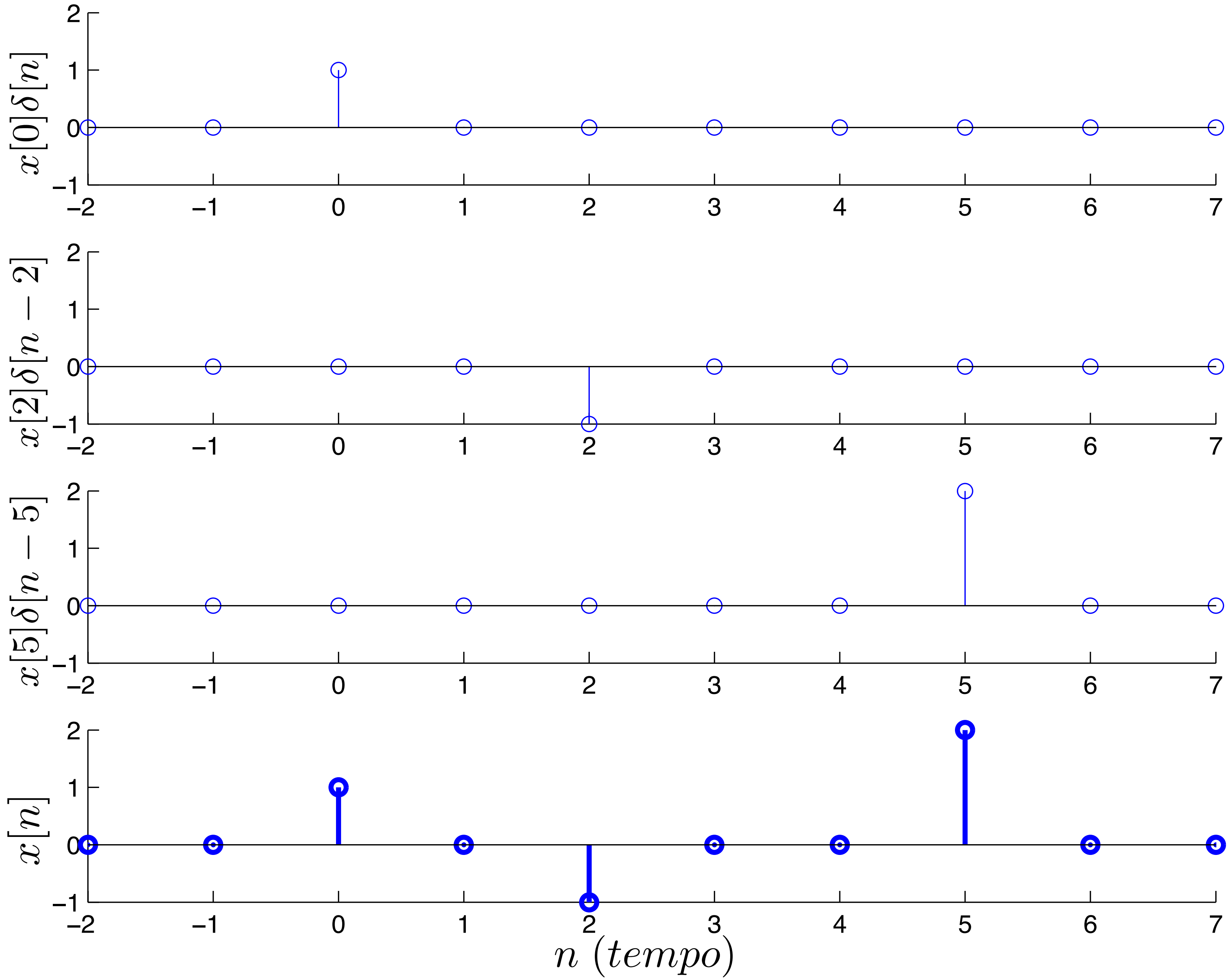
- Rescrevendo o sinal por uma soma de impulsos ponderados:

$$x[n] = 1\delta[n] - 1\delta[n-2] + 2\delta[n-5]$$

- Rescrevendo o sinal pela soma de todas as suas amostras:

$$\begin{aligned} x[n] &= \overbrace{x[0]}^{=1}\,\delta[n] + \overbrace{x[2]}^{=-1}\,\delta[n-2] + \overbrace{x[5]}^{=2}\,\delta[n-5] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \end{aligned}$$

$$x[n] = 1\delta[n] - 1\delta[n-2] + 2\delta[n-5]$$



Usando o impulso

- Amostrando um sinal usando o impulso unitário
  - Amostrando $x[k]\delta[n-k]$ de um sinal $x[n]$

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k] \ \ \forall\ k.$$

- Reconstruindo um sinal usando todas as amostras deste sinal
  - O somatório de todas as amostras de um sinal é igual ao próprio sinal:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Qualquer sinal discreto limitado $x[n]$ pode ser escrito na forma de uma soma ponderada de impulsos unitários deslocados no tempo, $\delta[n-k]$.

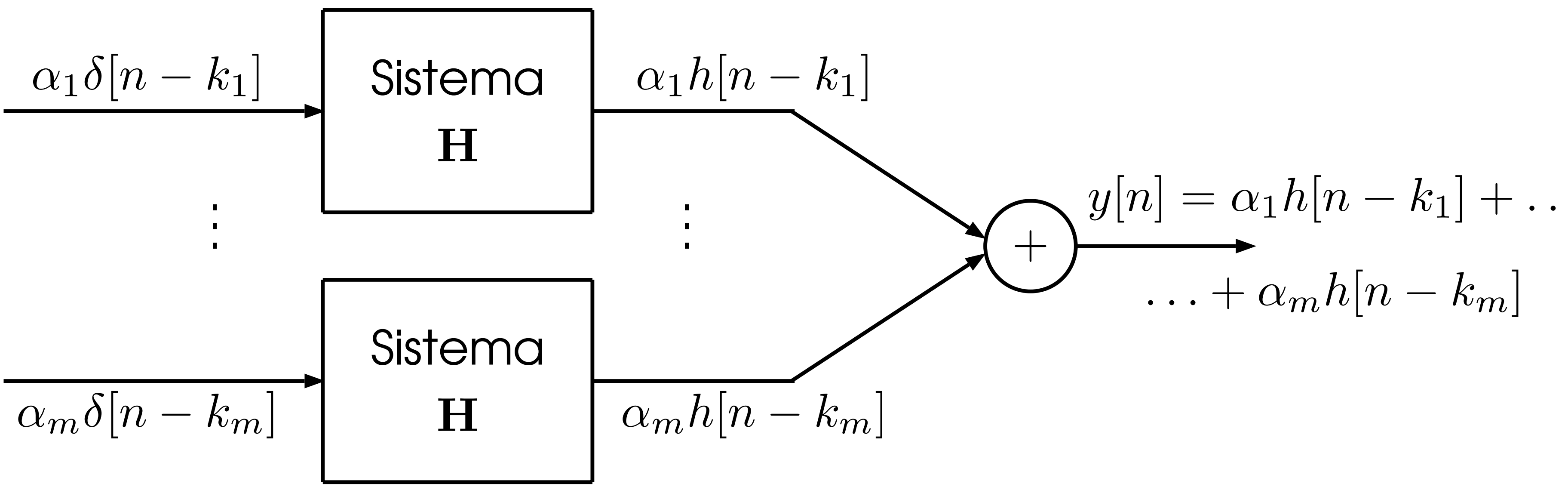
Fundamentos

- $h[n]$ é a resposta ao impulso do sistema de tempo discreto.
- $h(t)$ é a resposta ao impulso do sistema de tempo contínuo.
  - A resposta ao impulso caracteriza um Sistema Linear e Invariante no Tempo (LIT).
    - Consideraremos sistemas com uma única entrada e uma única saída (SISO), Lineares e Invariantes no Tempo.

Fundamentos

- Assumindo que $\mathbf{H}$ é um sistema linear e invariante no tempo.
  - Logo, para o caso do sistema de tempo discreto:

  - Para uma entrada: $x[n] = \alpha_1\delta[n-k_1] + \ldots + \alpha_m\delta[n-k_m]$



Soma de Convolução

- Se $x = \delta(t)$ ou $x = \delta[n]$, a saída do sistema, resposta ao impulso, será representada por $y = h(t)$ ou $y = h[n]$ para o caso do tempo contínuo e discreto, respectivamente.
- Devido o sistema $\mathbf{H}$ ser LIT:
  - Dada uma entrada $x[n]$, é possível usar $h[n]$ para encontrar $y[n]$.

Exemplo

- Obtenha a saída $y[n]$ de um sistema LIT $(\mathbf{H})$ resultante da entrada $x[n]$:

$$x[n] = 1\delta[n] - 1\delta[n-2] + 2\delta[n-5]$$

- Devido $(\mathbf{H})$ ser LIT, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\{\delta[n]\} &= h[n] \\ \mathbf{H}\{-\delta[n-2]\} &= -h[n-2] \\ \mathbf{H}\{2\delta[n-5]\} &= 2h[n-5] \end{aligned}$$

- Obtendo:

$$y[n] = h[n] - h[n-2] + 2h[n-5]$$

Fundamentos

- Aplicando uma entrada da forma:

$$x[n] = \alpha_1 \delta[n - k_1] + \ldots + \alpha_m \delta[n - k_m]$$

em um Sistema LIT ($\mathbf{H}$), temos que:

$$\begin{array}{ccc} \text{Entradas} & & \text{Saídas} \\ x_1[n] = \alpha_1 \delta[n - k_1] & \longrightarrow & y_1[n] = \alpha_1 h[n - k_1] \\ & \vdots & \\ x_m[n] = \alpha_m \delta[n - k_m] & \longrightarrow & y_m[n] = \alpha_m h[n - k_m] \end{array}$$

- Obtendo uma saída da forma:

$$y[n] = \alpha_1 h[n - k_1] + \ldots + \alpha_m h[n - k_m]$$

Exemplo

- Obtenha a saída $y[n]$ de um sistema LIT ($\mathbf{H}$) resultante da entrada:

$$x[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-5]$$

- Temos que:

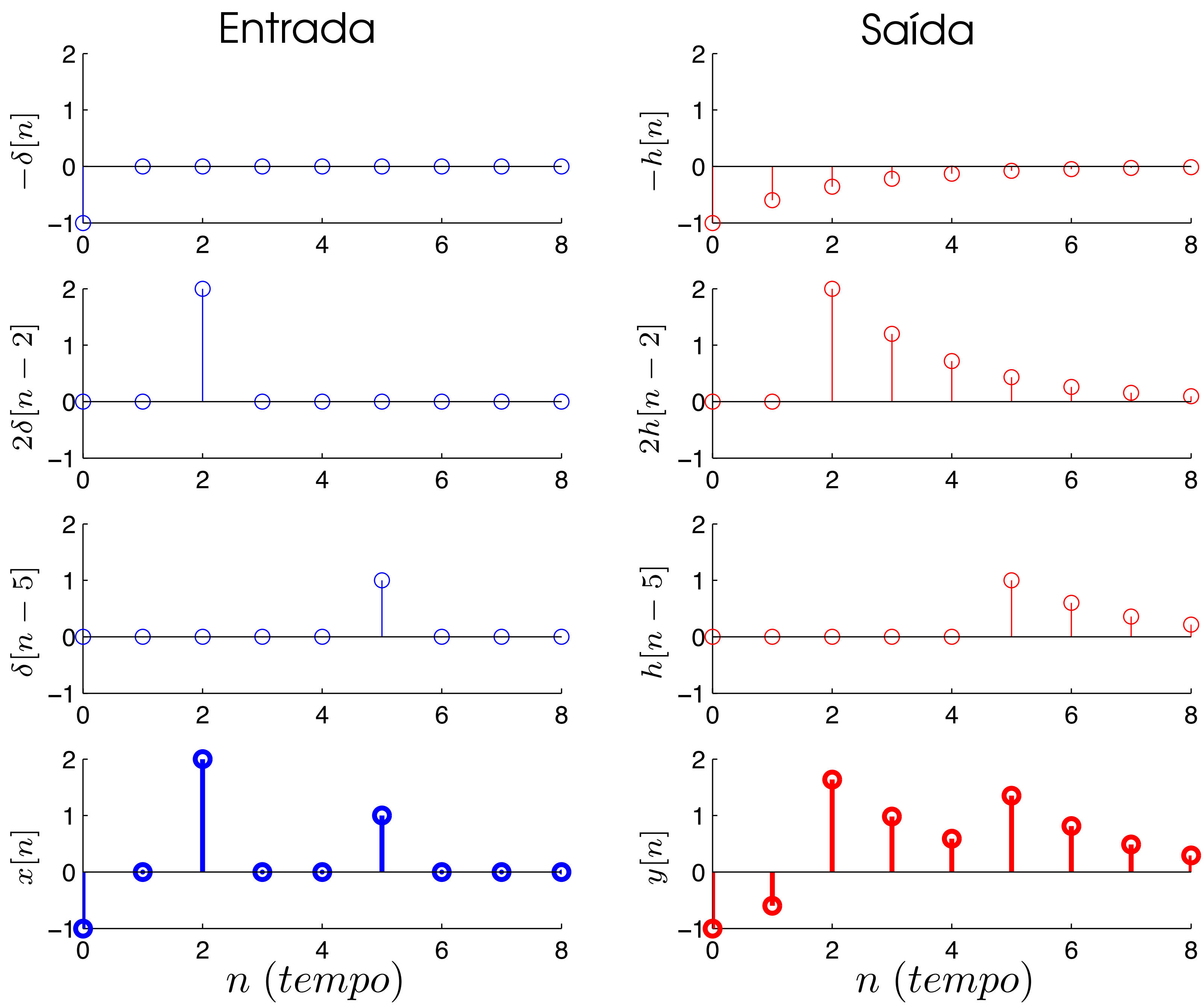
$$y[n] = -h[n] + 2h[n-2] + h[n-5]$$

sendo que, $h[n] = \mathbf{H}\{\delta[n]\}$.

- Considerando a saída $h[n]$ do sistema LIT como:

$$h[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}, \text{ com } a = 0{,}6$$

Exemplo: $h[n] = 0{,}6^n u[n]$ para $n \geq 0$



Sumário *(versão 1)*: *Obtenção da Soma de Convolução*

- Assuma que o sistema $\mathbf{H}$ é Linear e Invariante no Tempo

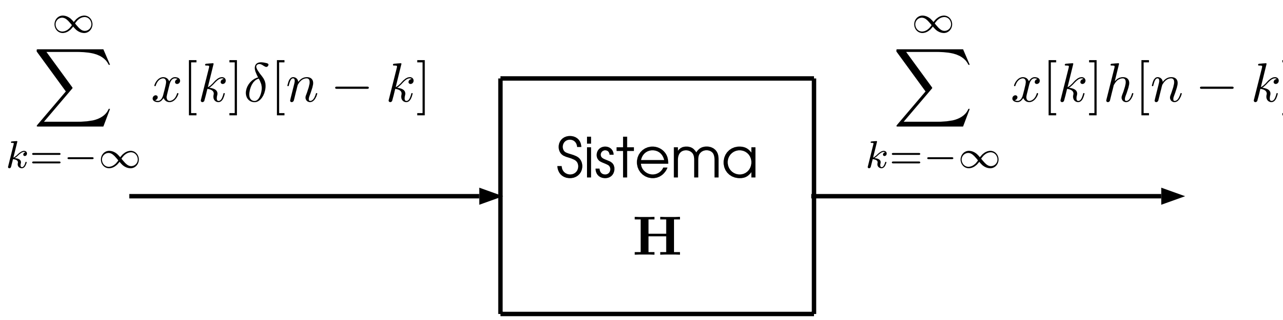
- Devido a propriedade de Invariância no Tempo, temos

Sumário *(versão 1)*: Obtenção da Soma de Convolução

- Devido a propriedade de Homogeneidade, temos

  - n representa o índice do tempo, consequentemente $x[n]$ representa um sinal;
  - $x[k]$ representa o valor de $x[n]$ no instante k.

- Devido a propriedade de Aditividade, temos



Sumário (versão 1): Obtenção da Soma de Convolução

- Devido todo o sinal discreto limitado $x[n]$ poder ser expresso na soma ponderada de impulsos unitários:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Então, temos que,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Se conhecemos $h[n]$, podemos calcular a saída $y[n]$ para qualquer entrada $x[n]$.

Sumário (versão 2): Obtenção da Soma de Convolução

- Assuma que o sistema $\mathbf{H}$ é Linear e Invariante no Tempo

$$y[n] = \mathbf{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

- Devido a propriedade de Aditividade

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}\left\{x[k]\delta[n-k]\right\}$$

- Devido a propriedade de Homogeneidade

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathbf{H}\left\{\delta[n-k]\right\}$$

- Devido a propriedade de Invariância no Tempo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Soma de Convolução

- Assumindo que o sistema $\mathbf{H}$ é Linear e Invariante no Tempo,

$$y[n] = \mathbf{H}\left\{x[n]\right\}$$

- Então, temos que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Portanto, se conhecemos $h[n]$, podemos calcular a saída $y[n]$ para qualquer entrada $x[n]$.
- Usamos $*$ para representar a soma de convolução

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Exemplo *(Livro Haykin, Ex. 2.1)*

Considere que o sistema LIT $\mathbf{H}$ tem a seguinte resposta ao impulso:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = \pm 1 \\ 2, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a saída deste sistema em resposta à entrada

$$x[n] = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ -2, & n = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo (solução 1)

$$x[n] = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ -2, & n = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1) Expressar $x[n]$ como uma soma ponderada de impulsos:

$$x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

2) Obter a saída $y[n]$ em função de $h[n]$

$$y[n] = 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]$$

3) Calcular $y[n]$ a partir de $h[n]$

Exemplo (solução 1)

Temos que:

$$y[n] = 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]$$

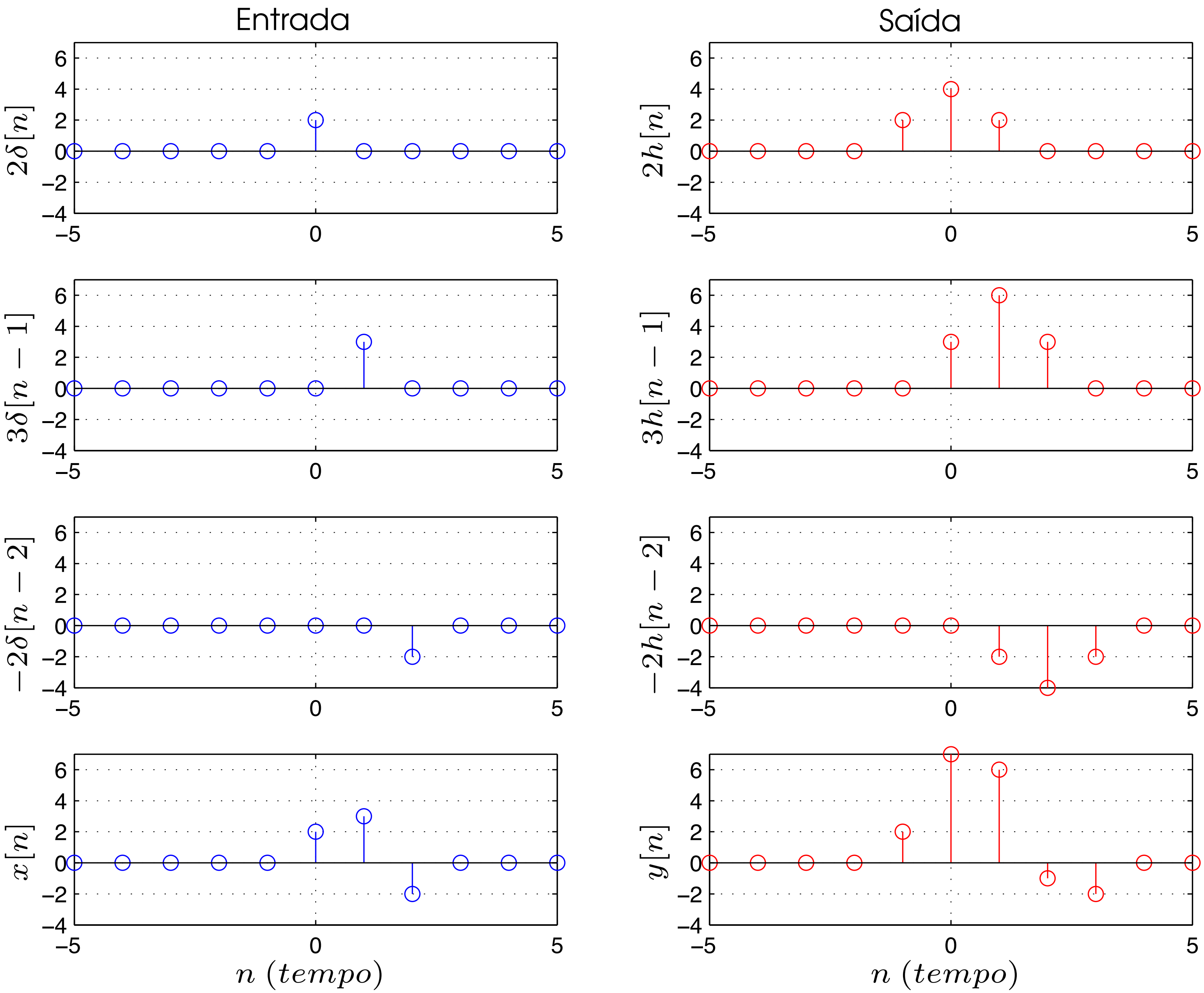
e

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = \pm 1 \\ 2, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

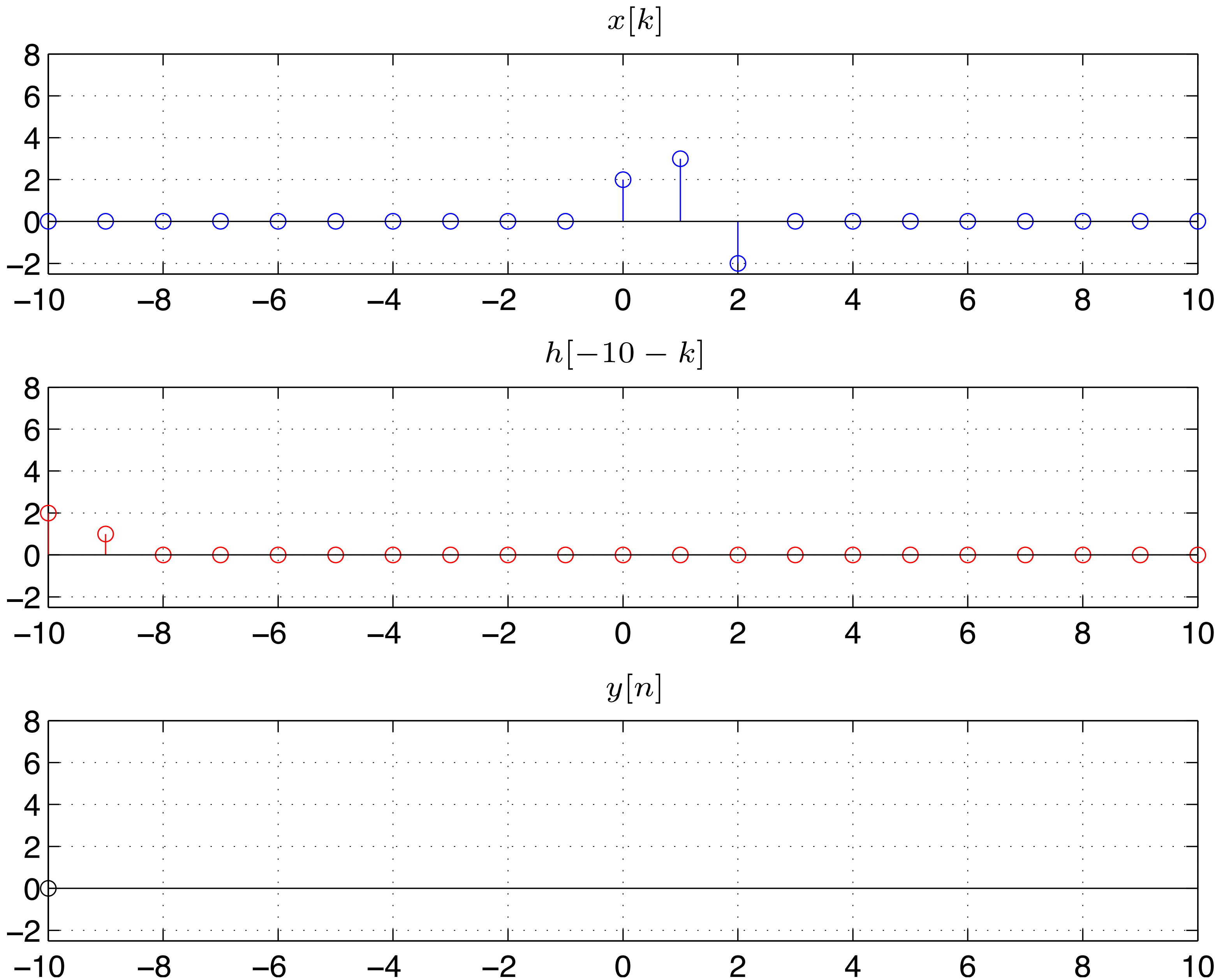
Então, calculando $y[n]$ a partir de $h[n]$, temos

$$y[n] = \begin{cases} 2, & n = -1 \\ 7, & n = 0 \\ 6, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ -2, & n = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

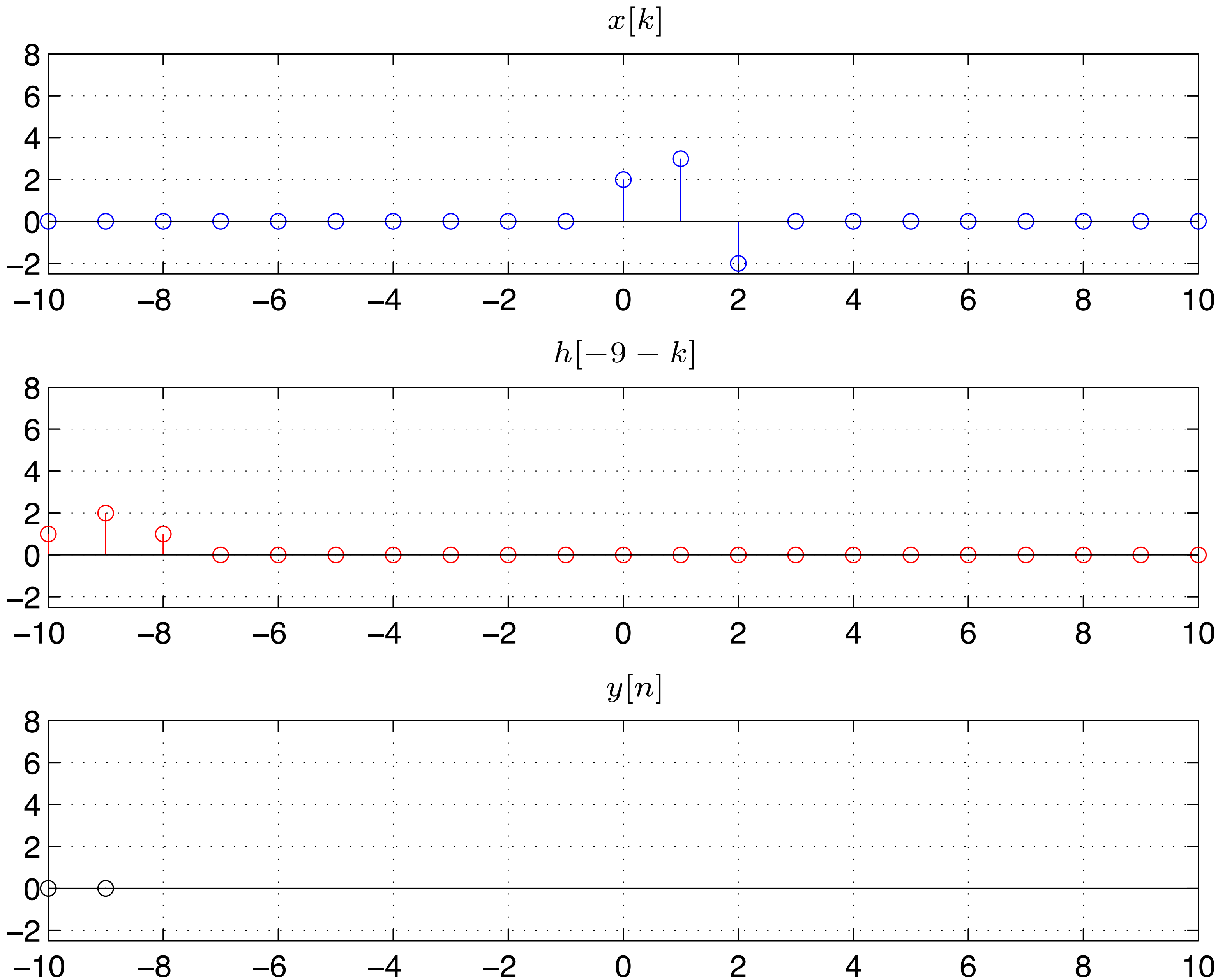
Exemplo (solução 2): $x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$



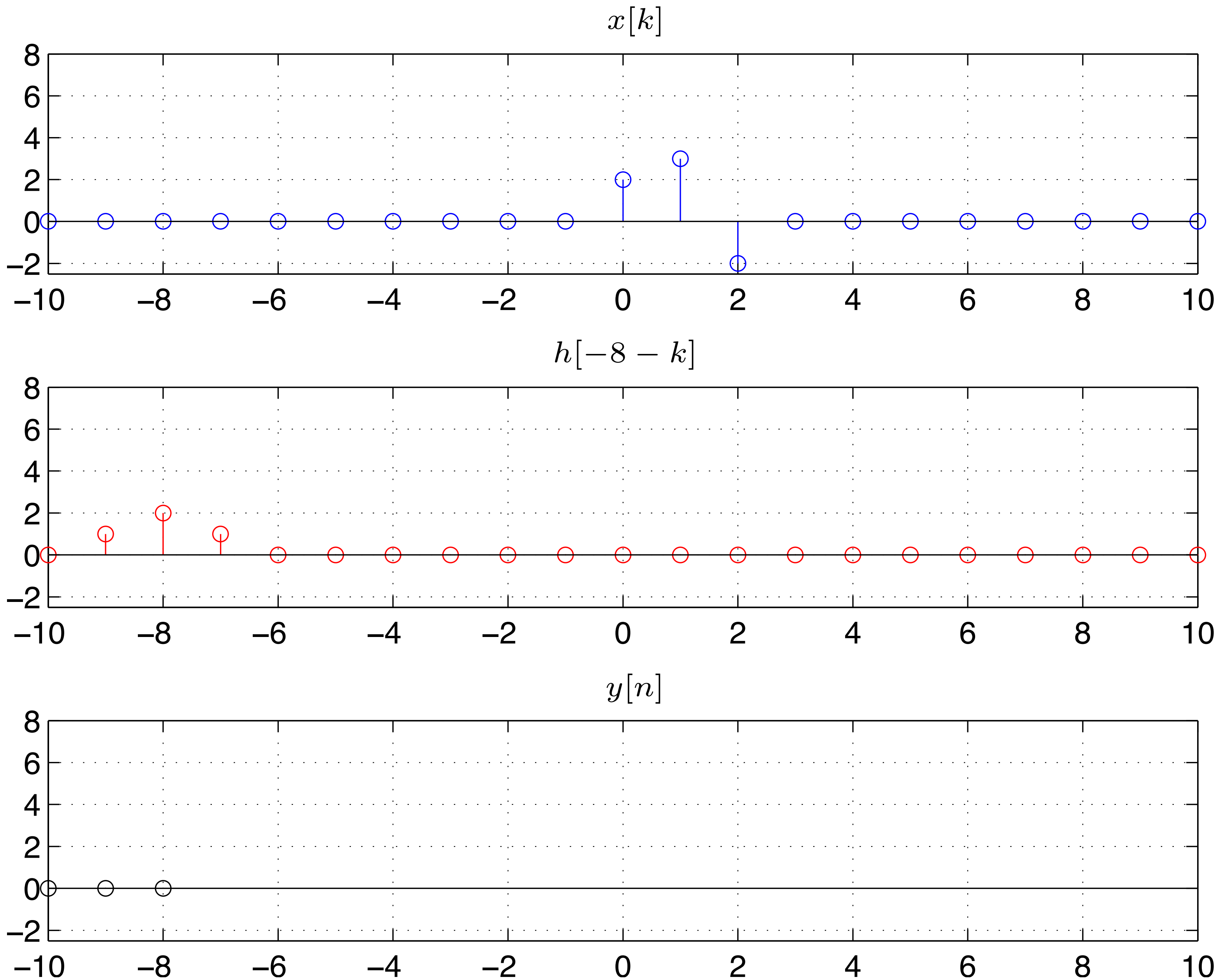
Exemplo solução 3: $y[-10] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-10-k]$



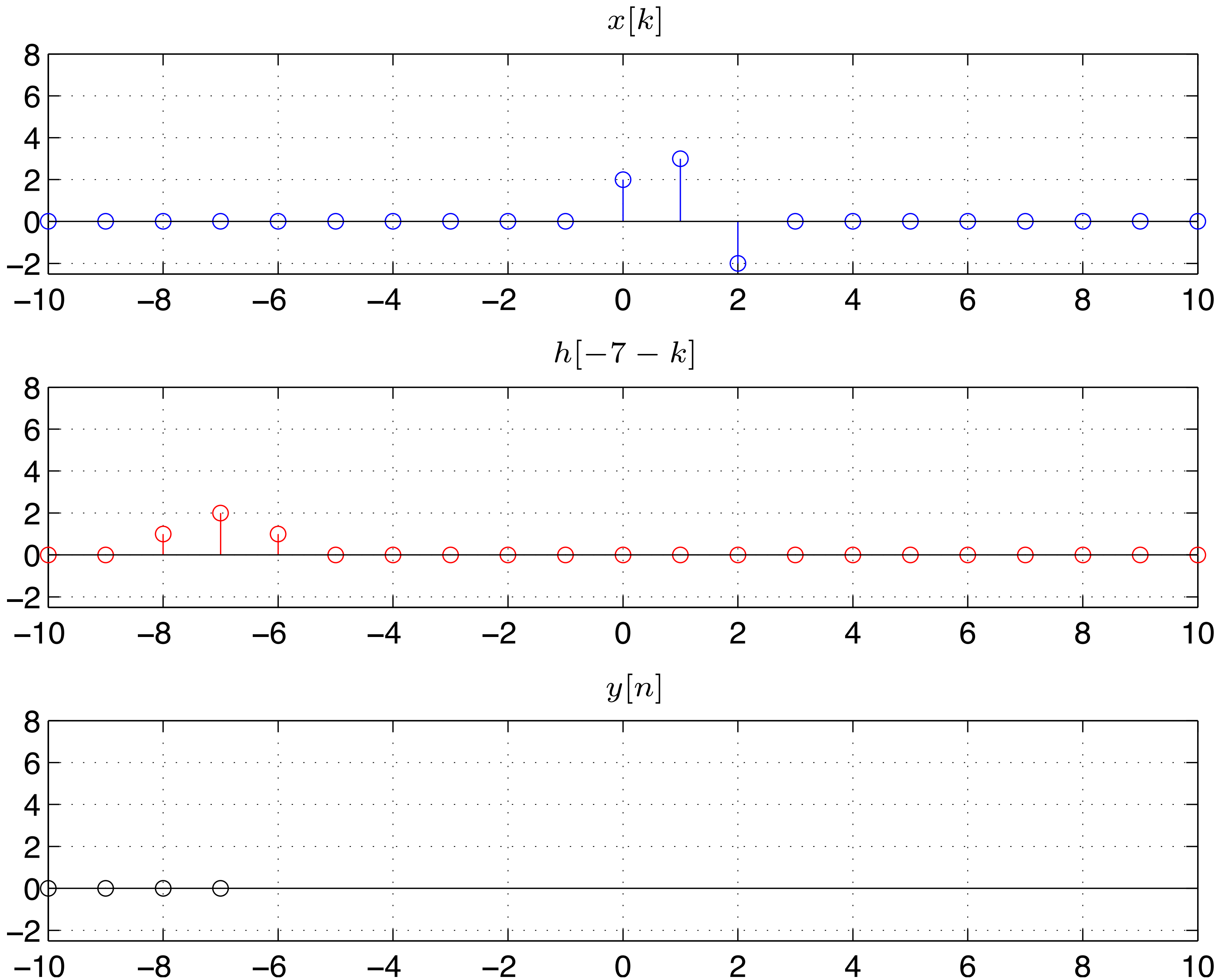
Exemplo solução 3: $y[-9] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-9-k]$



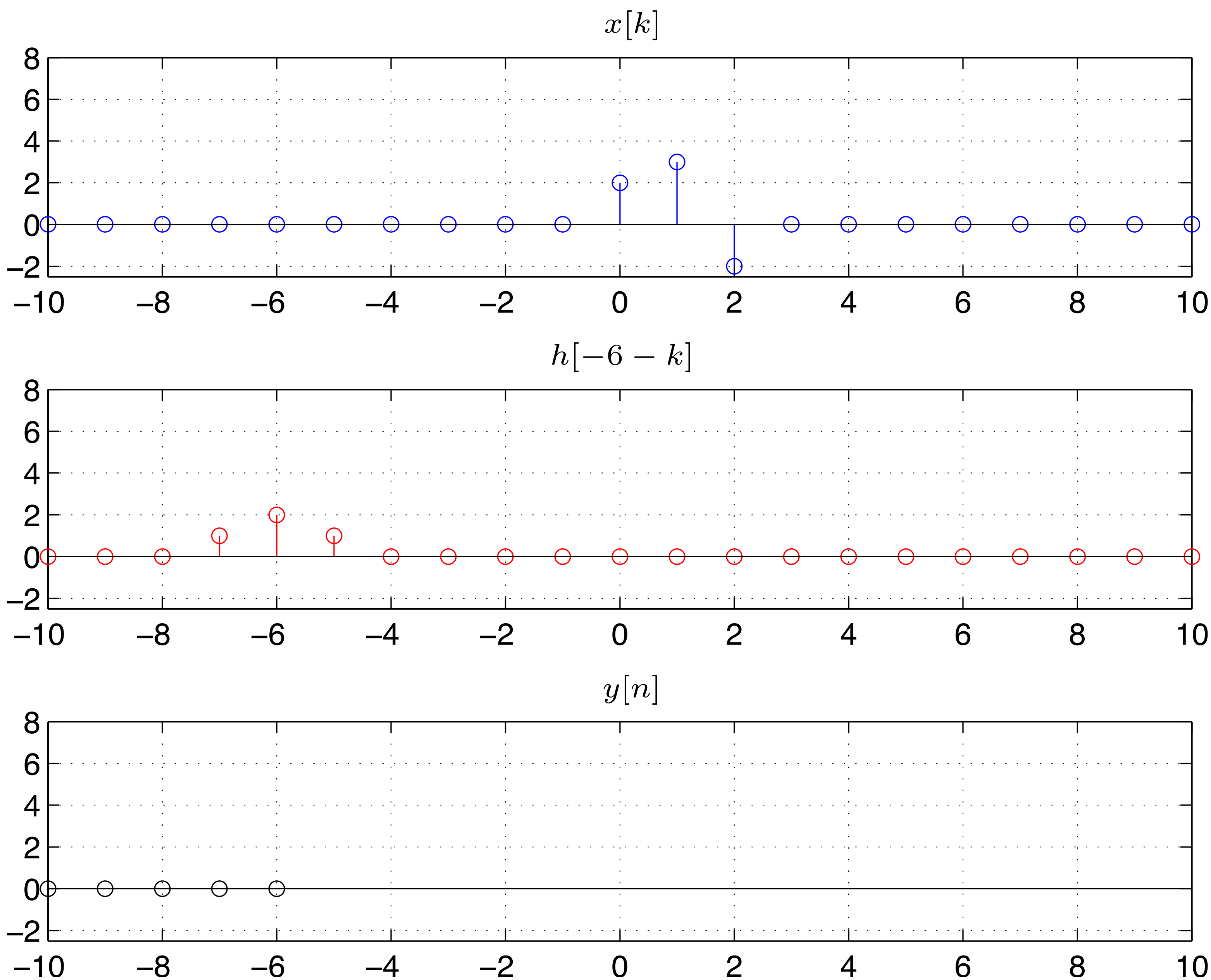
Exemplo solução 3: $y[-8] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-8-k]$



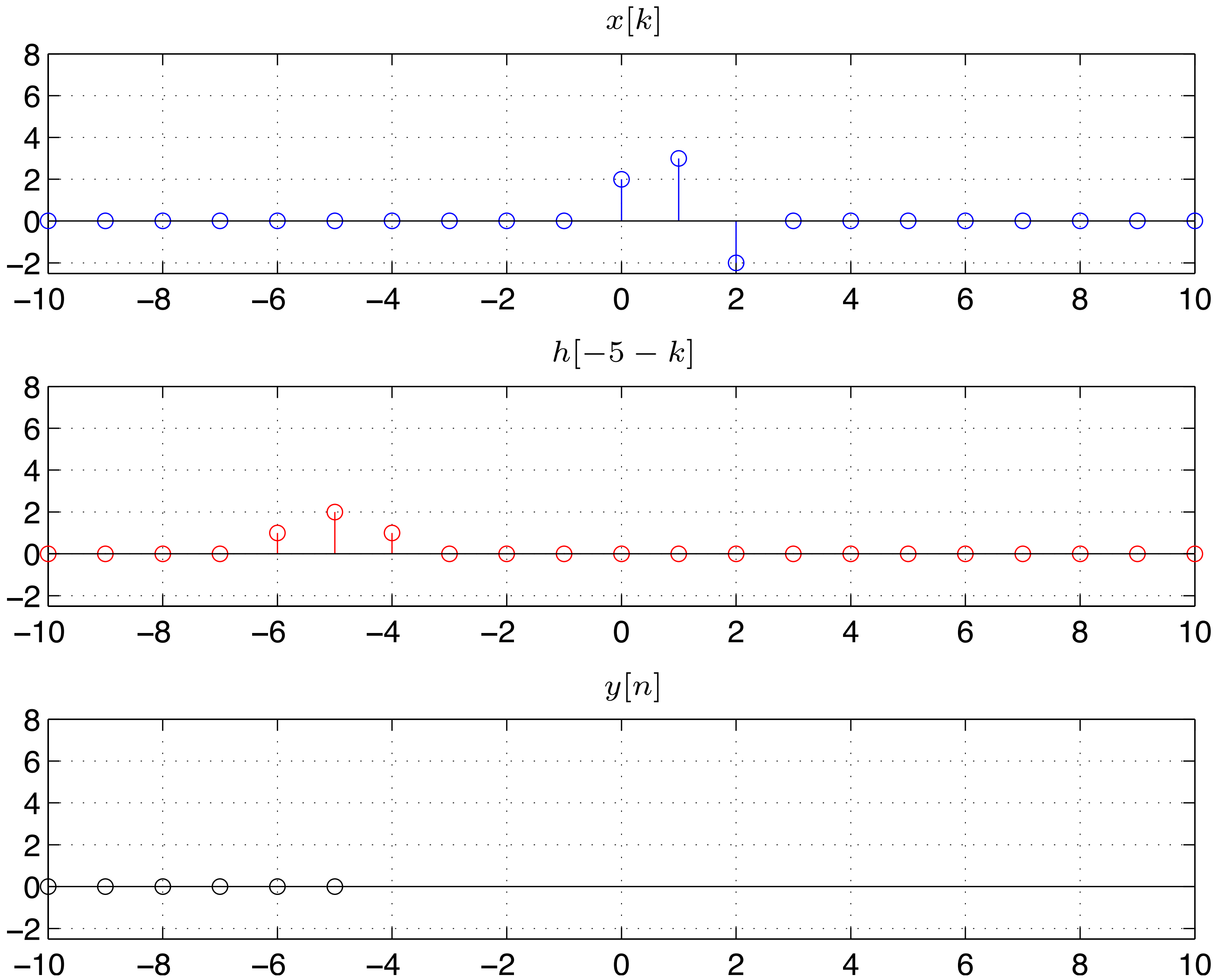
Exemplo solução 3: $y[-7] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-7-k]$



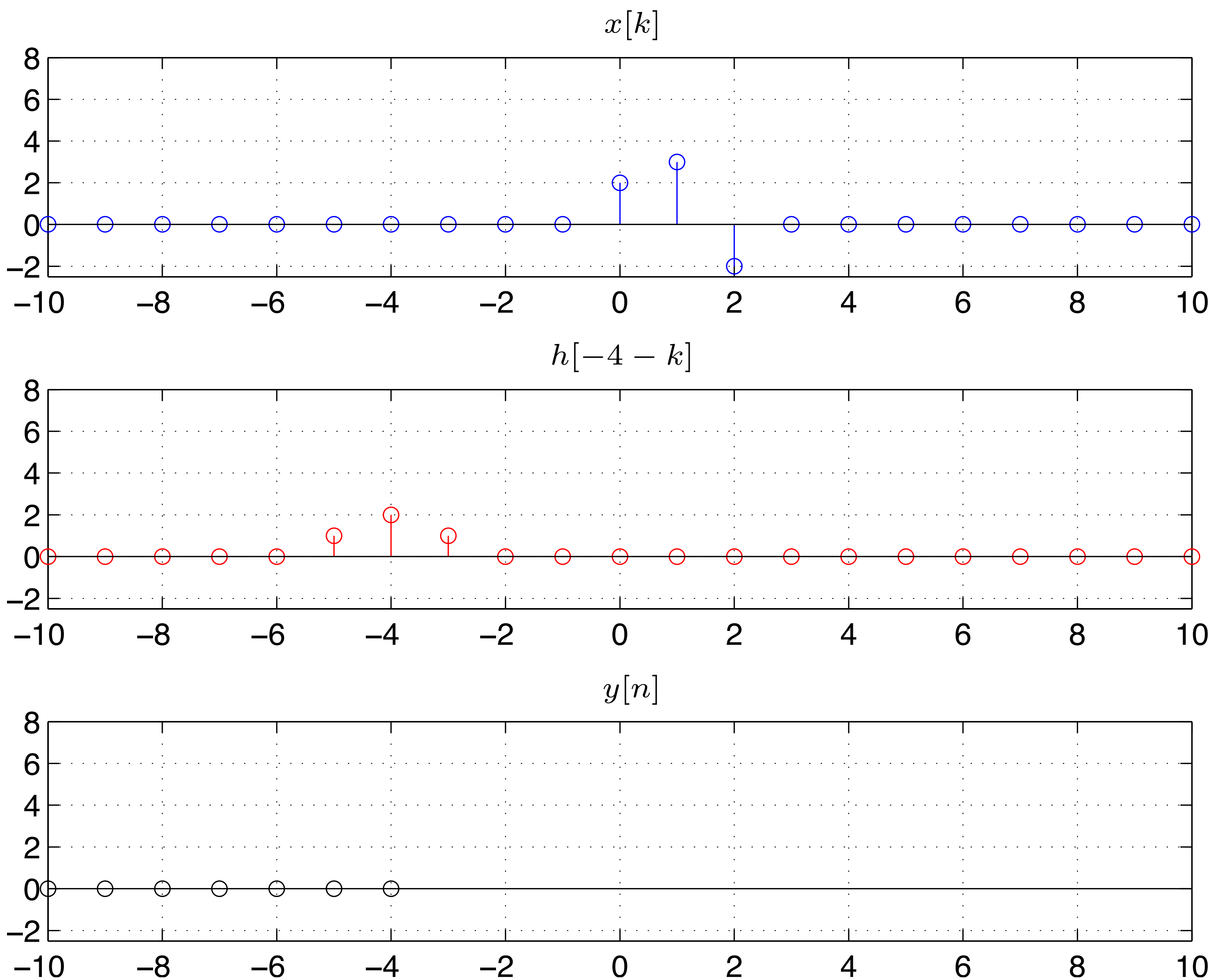
Exemplo solução 3: $y[-6] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-6-k]$



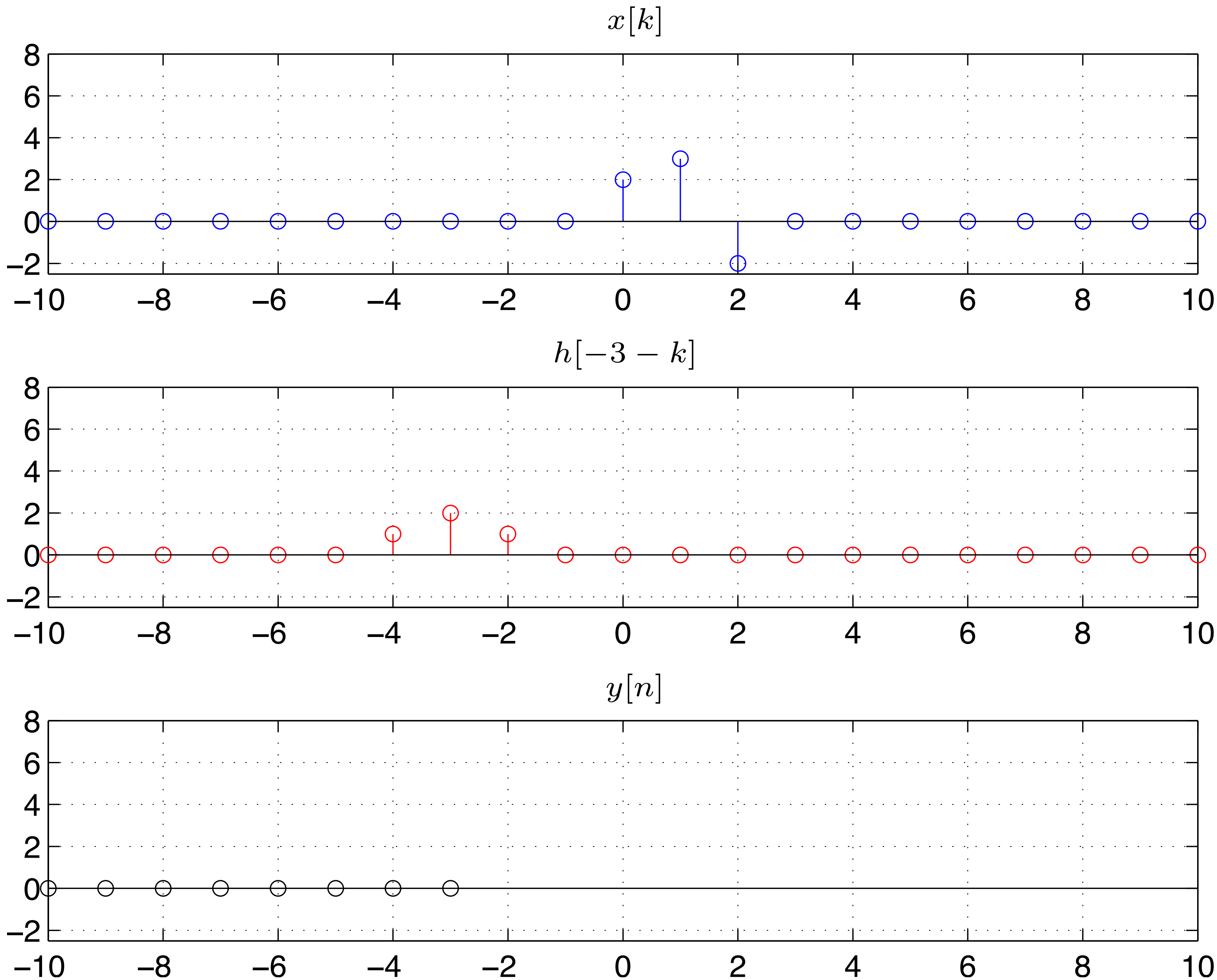
Exemplo solução 3: $y[-5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-5-k]$



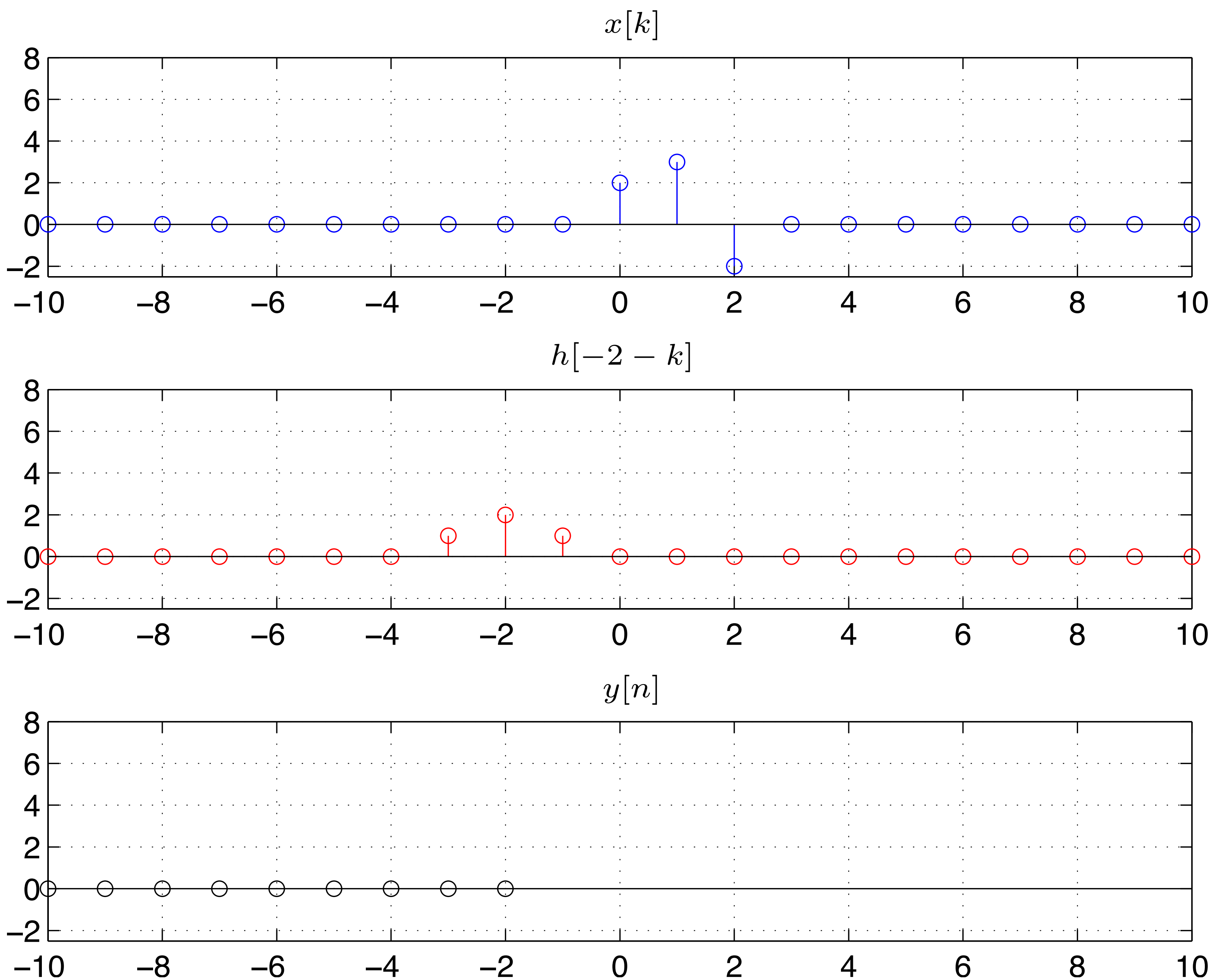
Exemplo solução 3: $y[-4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-4-k]$



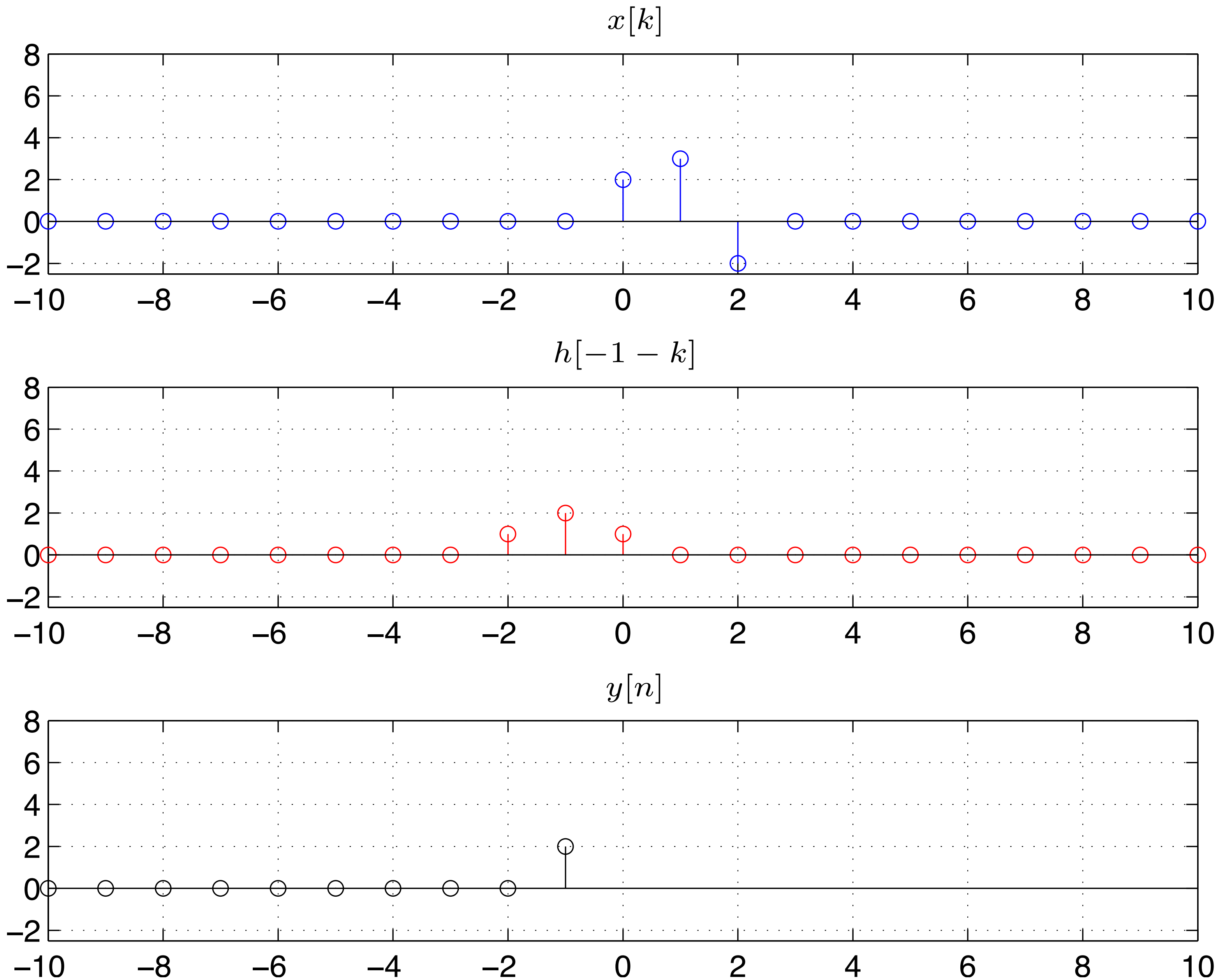
Exemplo solução 3: $y[-3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-3-k]$



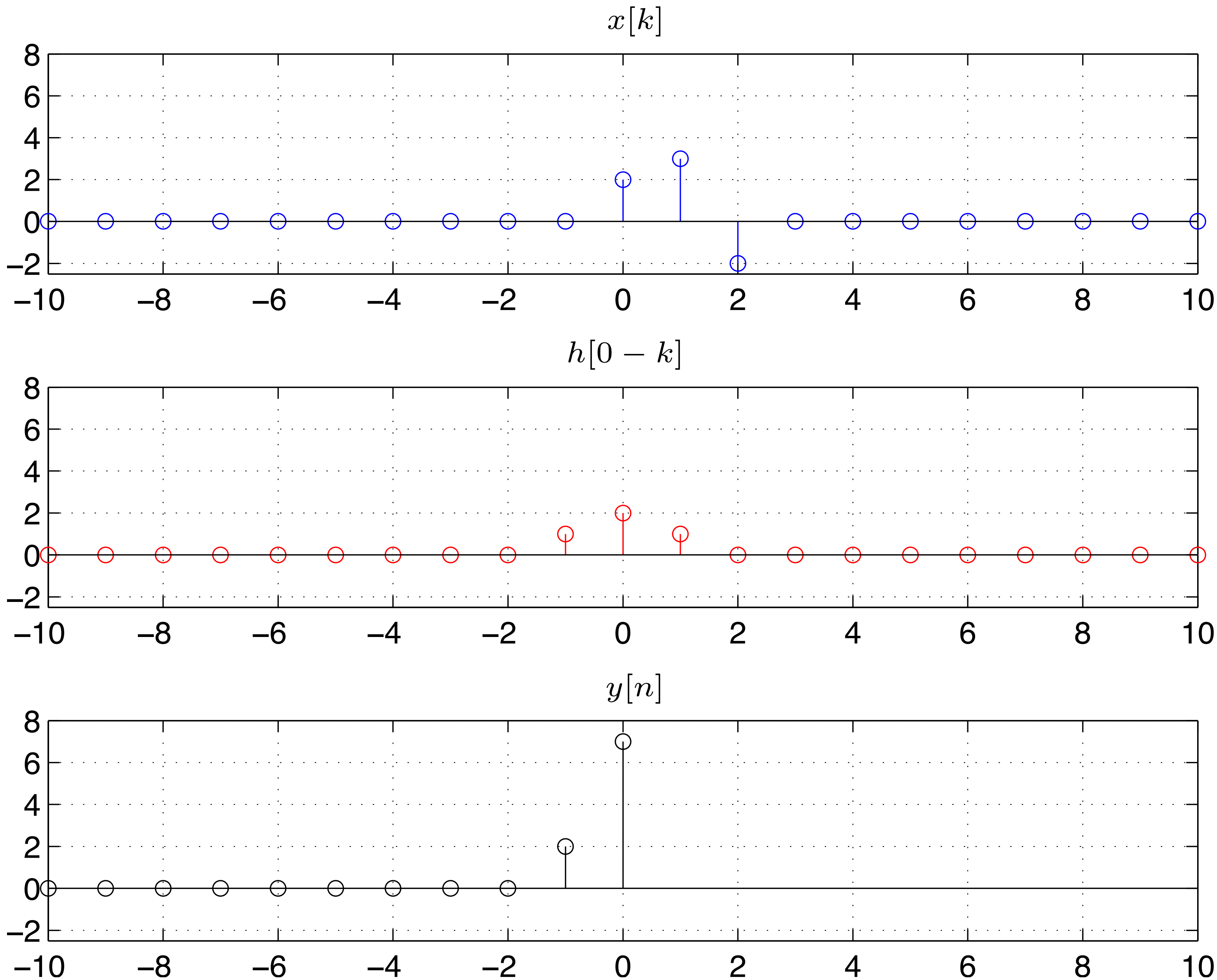
Exemplo solução 3: $y[-2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-2-k]$



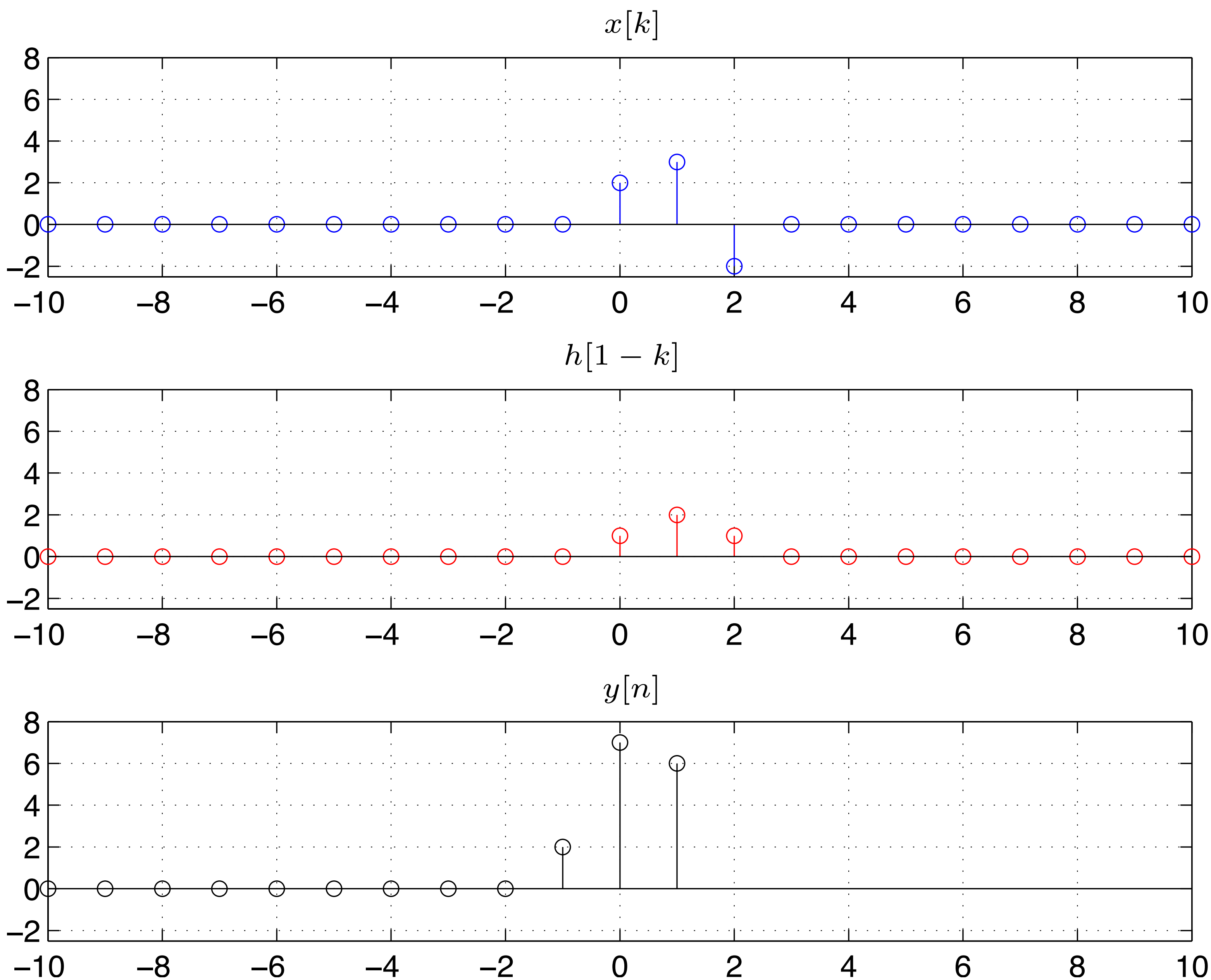
Exemplo solução 3: $y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-1-k]$



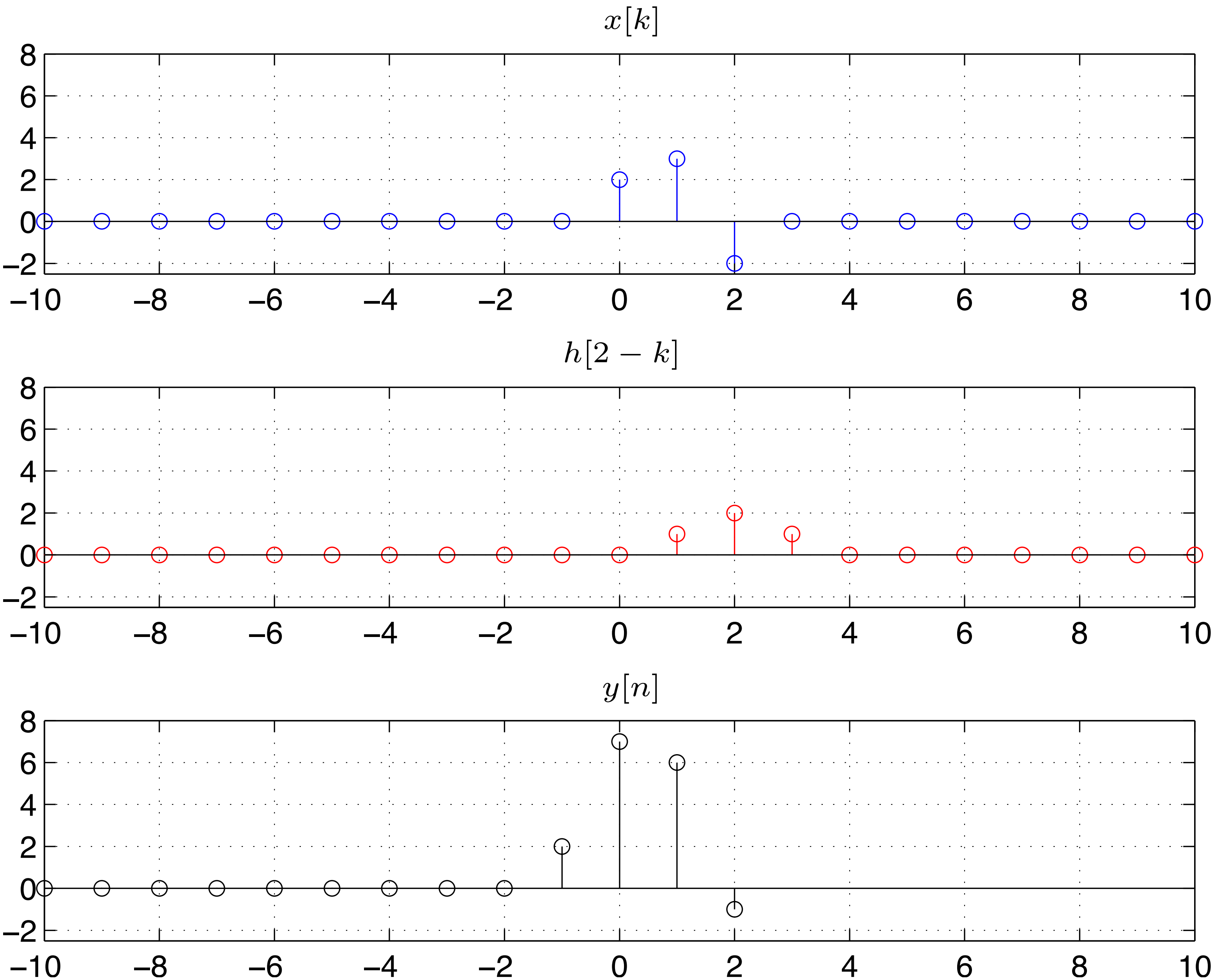
Exemplo solução 3: $y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$



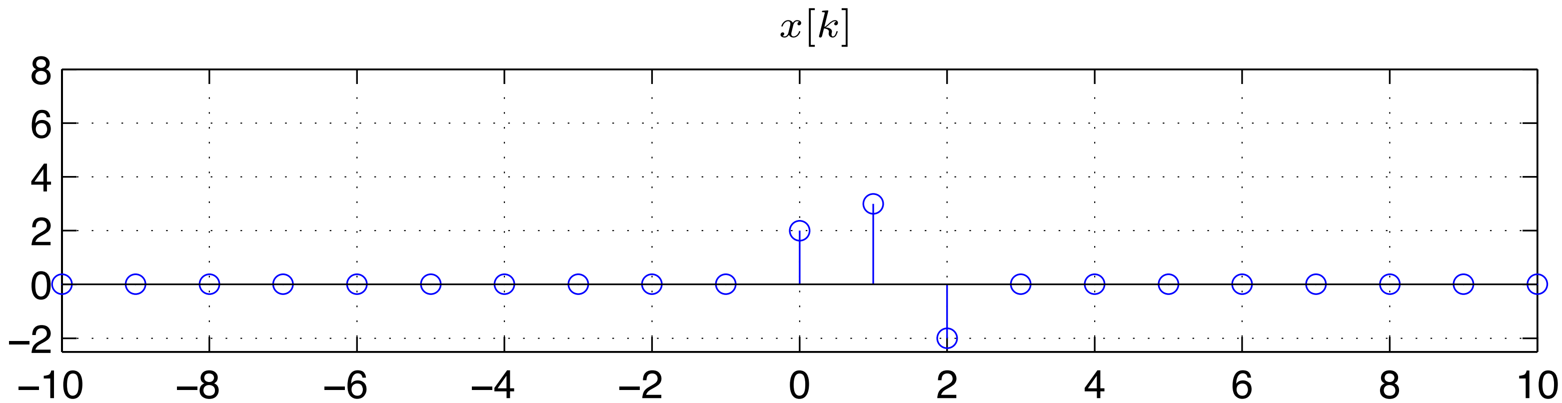
Exemplo solução 3: $y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]$

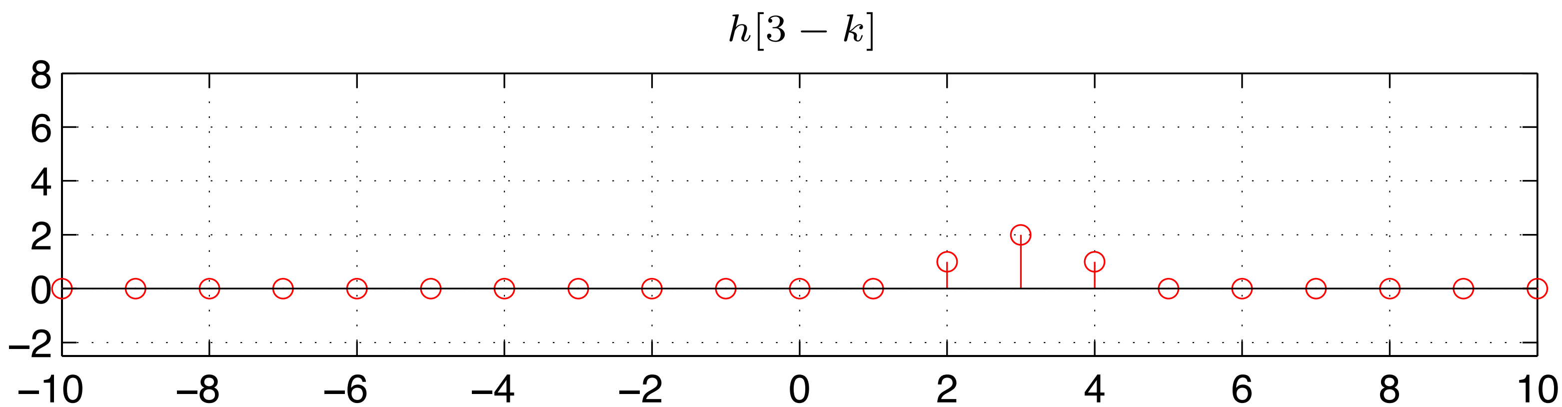


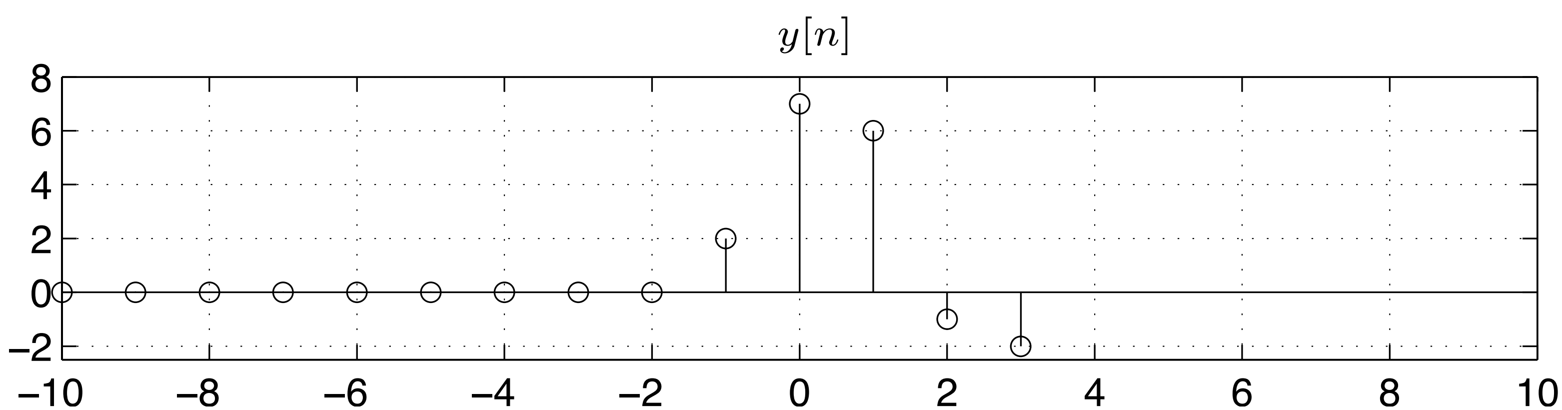
Exemplo solução 3: $y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k]$



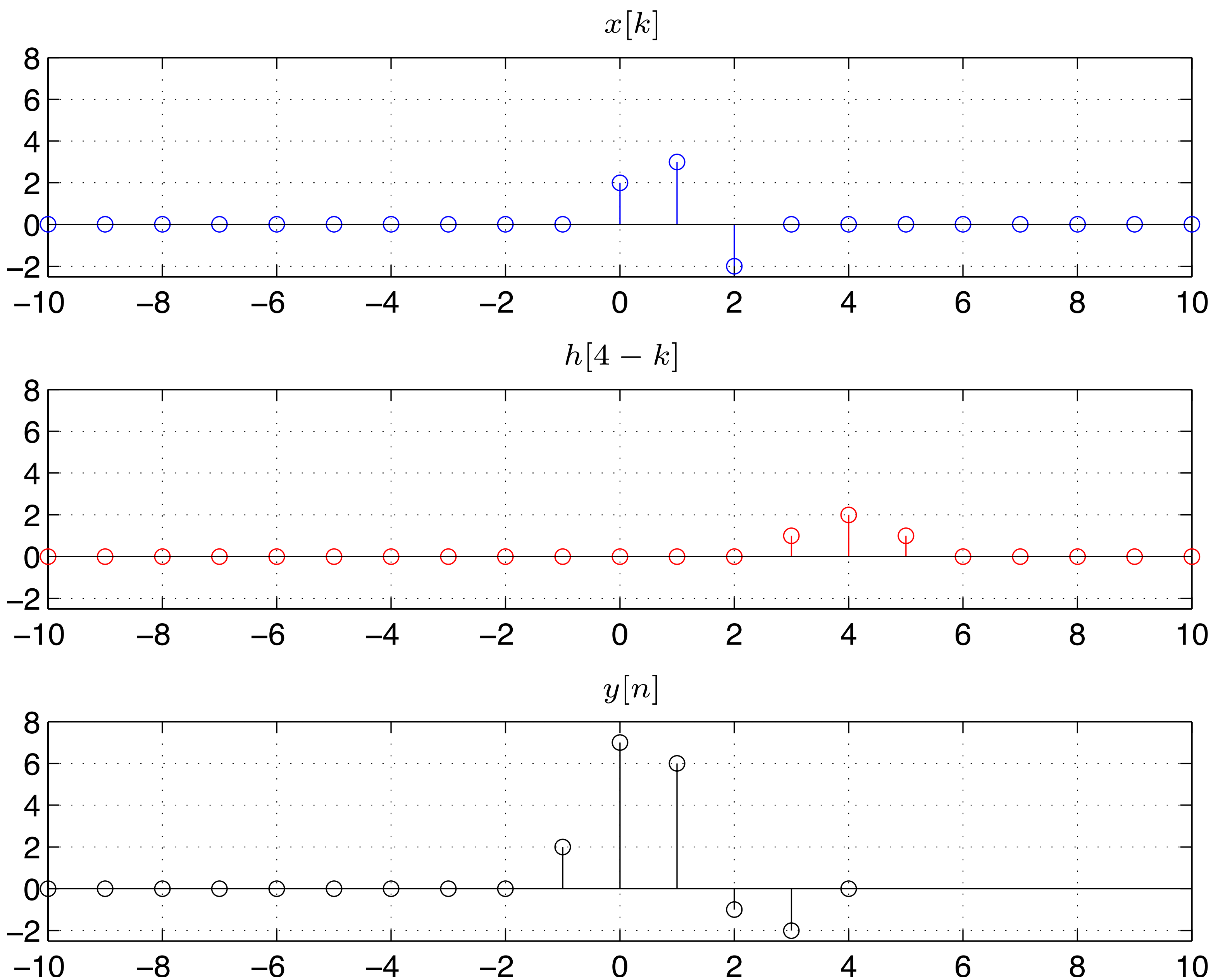
Exemplo solução 3: $y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k]$



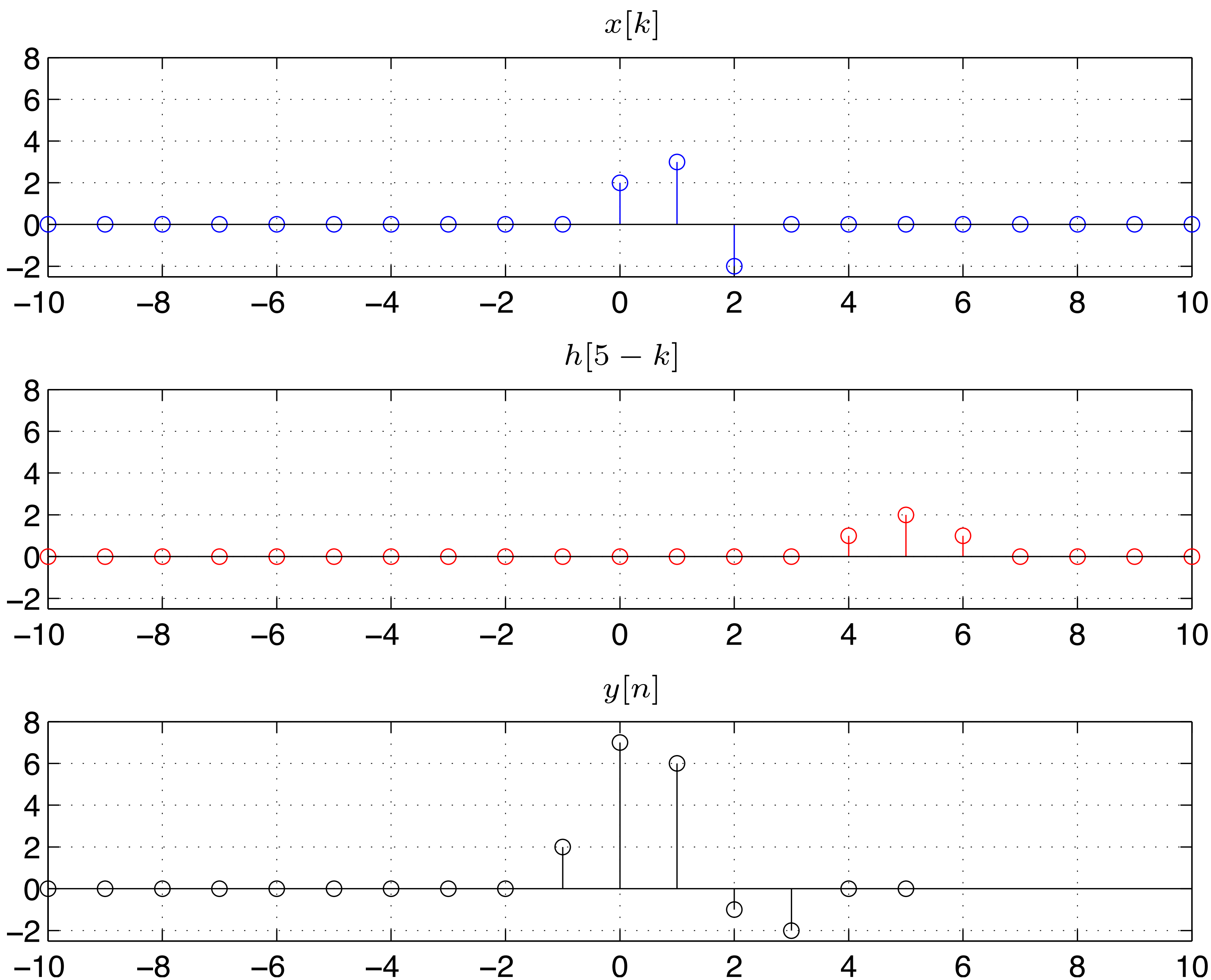




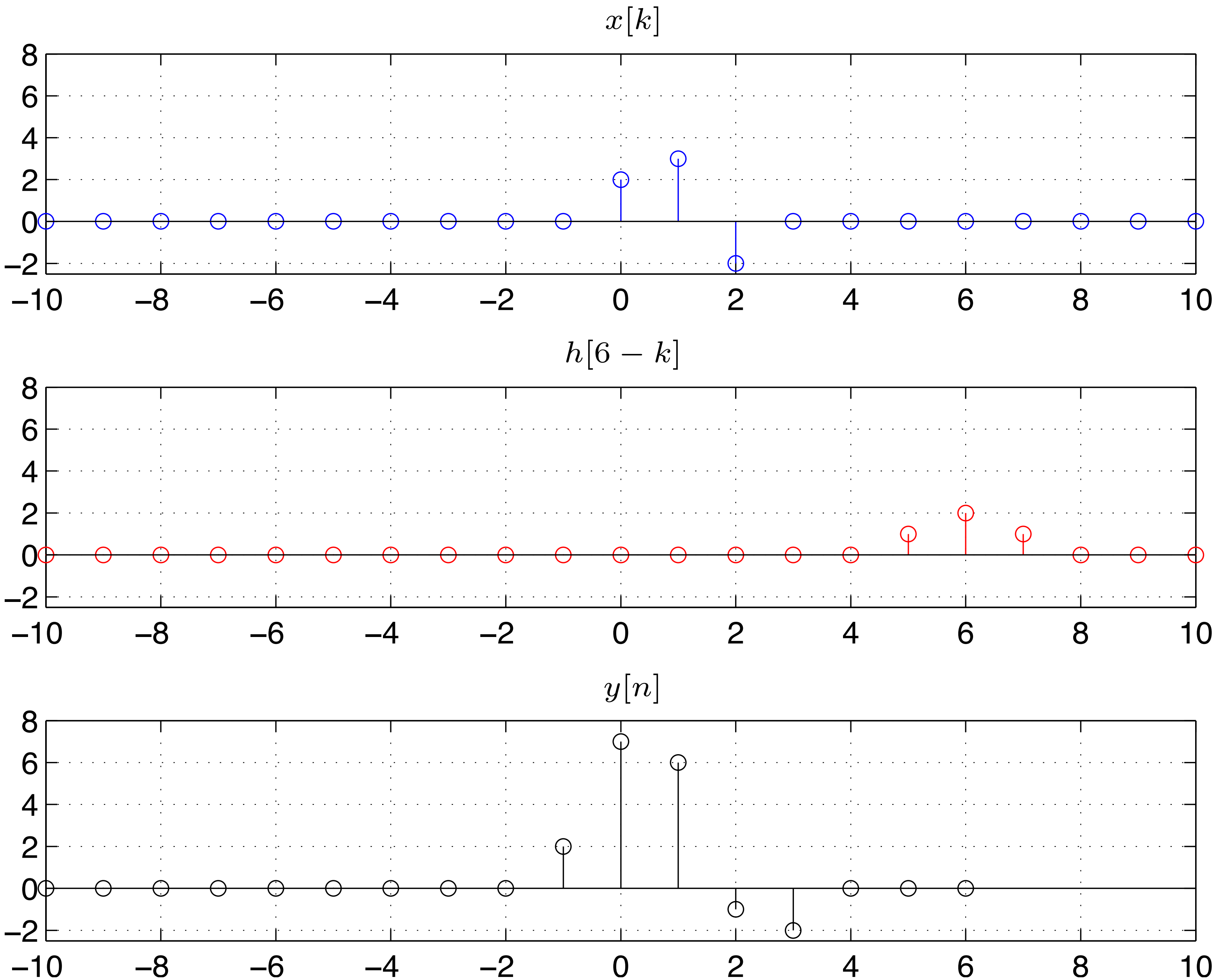
Exemplo solução 3: $y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[4-k]$



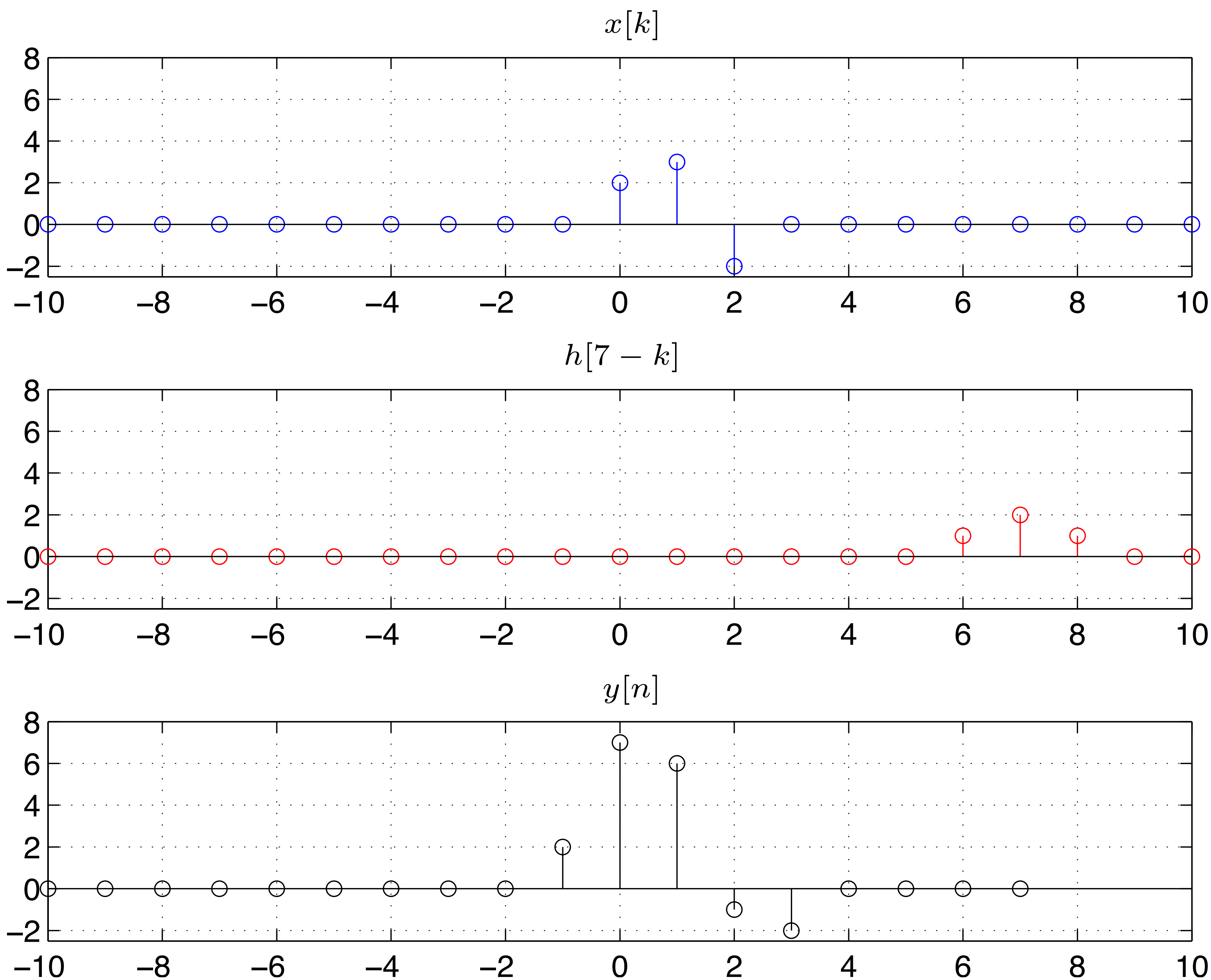
Exemplo solução 3: $y[5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[5-k]$



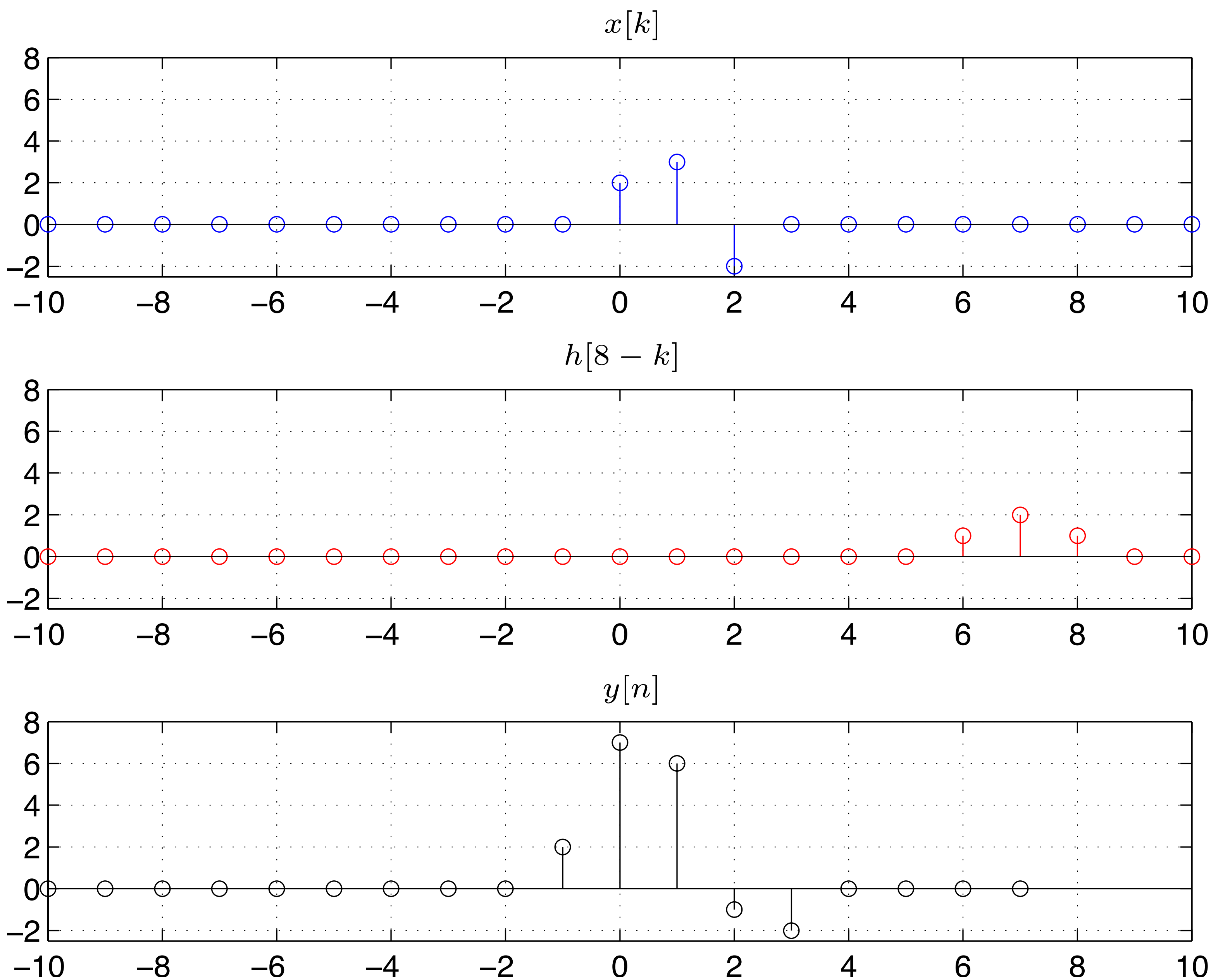
Exemplo solução 3: $y[6] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[6-k]$



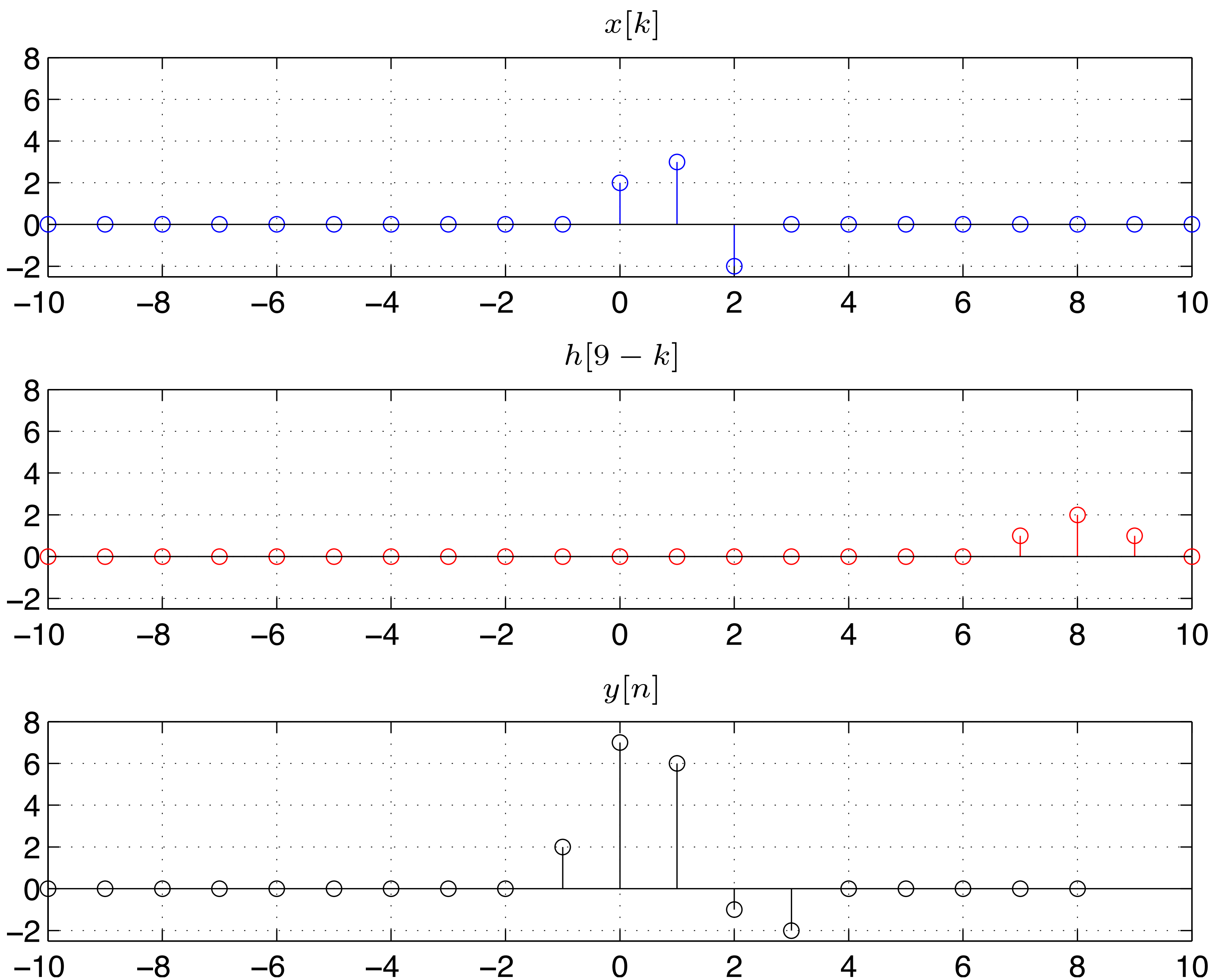
Exemplo solução 3: $y[7] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[7-k]$



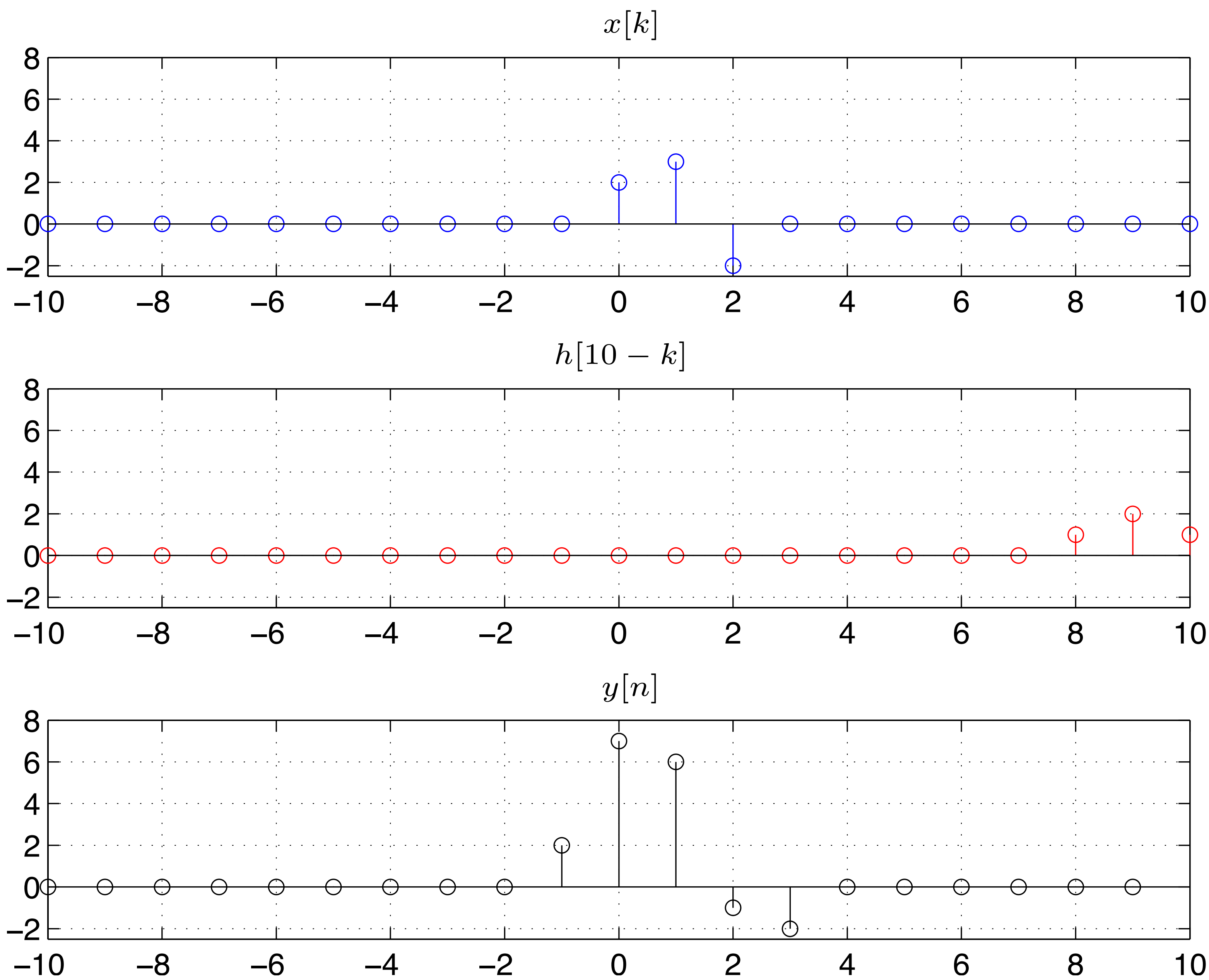
Exemplo solução 3: $y[8] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[8-k]$



Exemplo solução 3: $y[9] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[9-k]$



Exemplo solução 3: $y[10] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[10-k]$



MatLab

```
clear all; close all;
k=-10:10;
x = inline('2*(n==0)+3*(n==1)-2*(n==2)','n');
figure(1)
subplot(3,1,1)
stem(k,x(k),'b');
axis([min(k) max(k) -2.5 8]);  title('x[k]')
h = inline('1*(n==-1)+2*(n==0)+1*(n==1)','n');
for n = k
    subplot(3,1,2);
    stem(k,h(n-k),'r');
    axis([min(k) max(k) -2.5 8]);  title('h[n-k]');
    subplot(3,1,3);
    stem(n,sum(x(k).*h(n-k)),'k');
    hold on;
    axis([min(k) max(k) -2.5 8]); title('y[n]')
end
```

Exercício

Suponha que um sistema LIT $\mathbf{H}$ tem a seguinte resposta ao impulso:

$$h[n] = u[n] - u[n-5]$$

Determine a saída deste sistema em resposta à entrada

$$x[n] = \begin{cases} 3, & n = -2 \\ -5, & n = -1 \\ 2, & n = 0 \\ -1, & n = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício *(solução 1)*

$$x[n] = \begin{cases} 3, & n = -2 \\ -5, & n = -1 \\ 2, & n = 0 \\ -1, & n = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1) Expressar $x[n]$ como uma soma ponderada de impulsos:

$$x[n] = 3\delta[n+2] - 5\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-3]$$

2) Obter a saída $y[n]$ em função de $h[n]$

$$y[n] = 3h[n+2] - 5h[n+1] + 2h[n] - h[n-3]$$

3) Calcular $y[n]$ a partir de $h[n]$

Exercício *(solução 1)*

Temos que:

$$y[n] = 3h[n+2] - 5h[n+1] + 2h[n] - h[n-3]$$

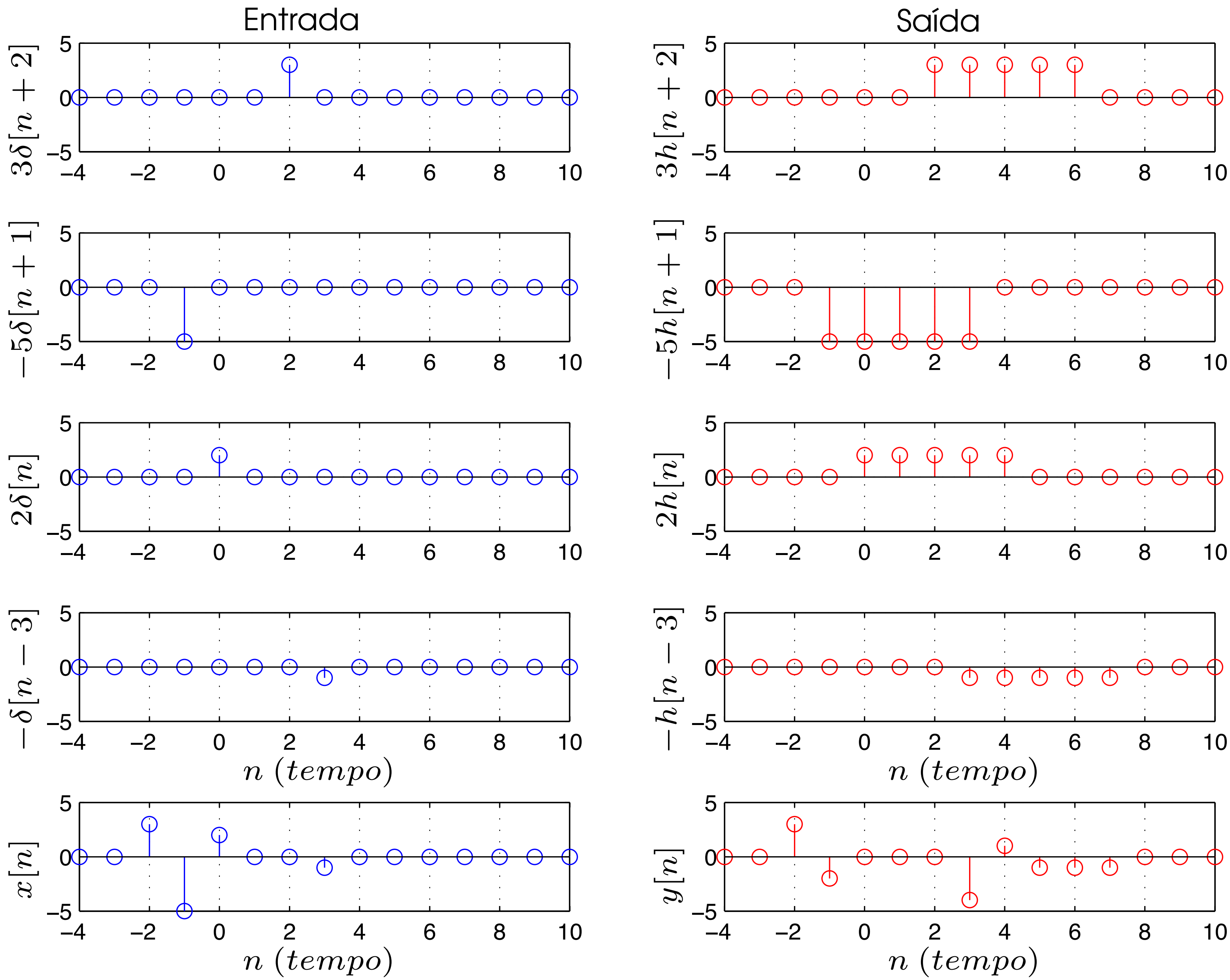
e

$$h[n] = u[n] - u[n-5] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

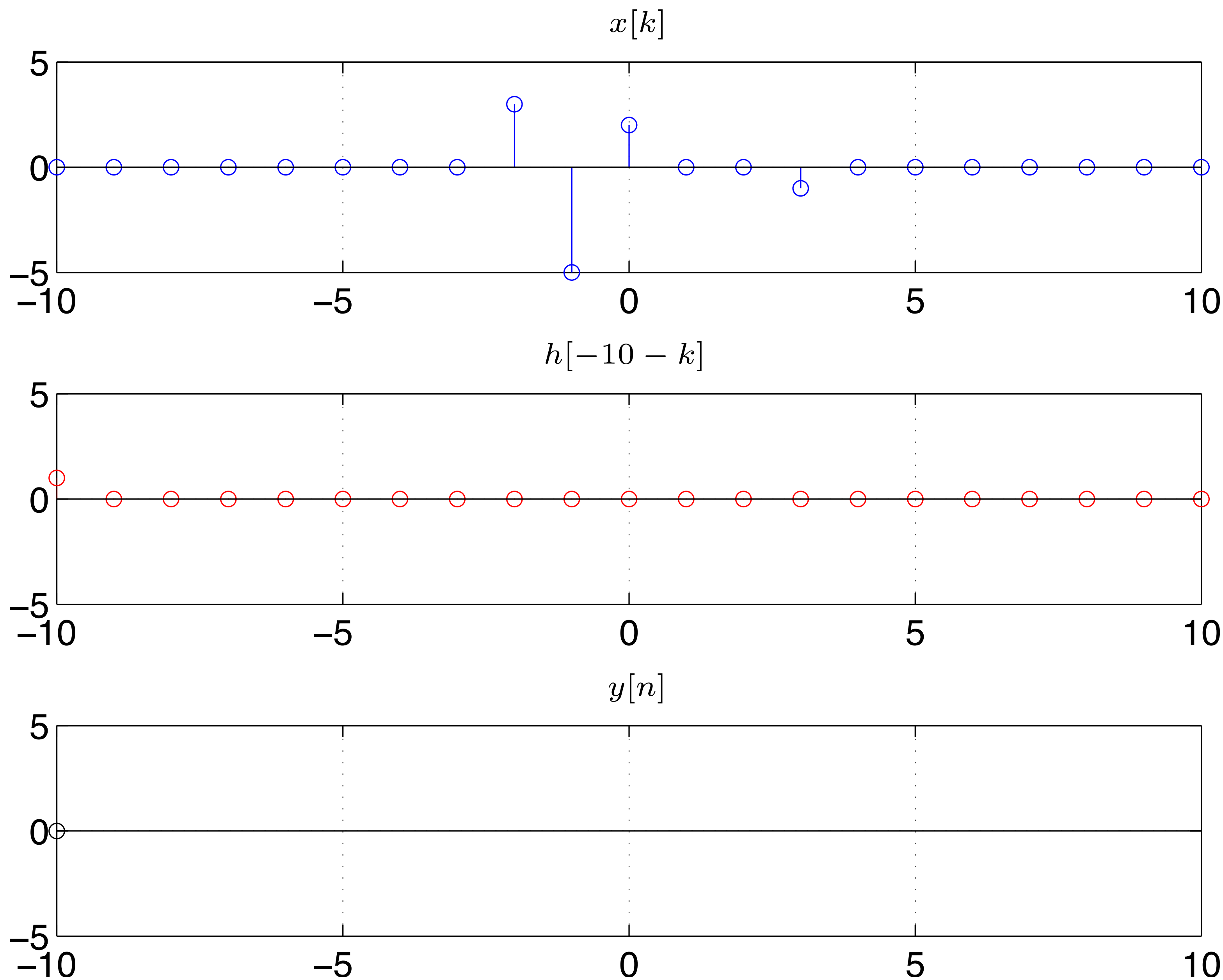
Então, calculando $y[n]$ a partir de $h[n]$, obtemos

$$y[n] = \begin{cases} 3, & n = -2 \\ -2, & n = -1 \\ -4, & n = 3 \\ 1, & n = 4 \\ -1, & 5 \leq n \leq 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

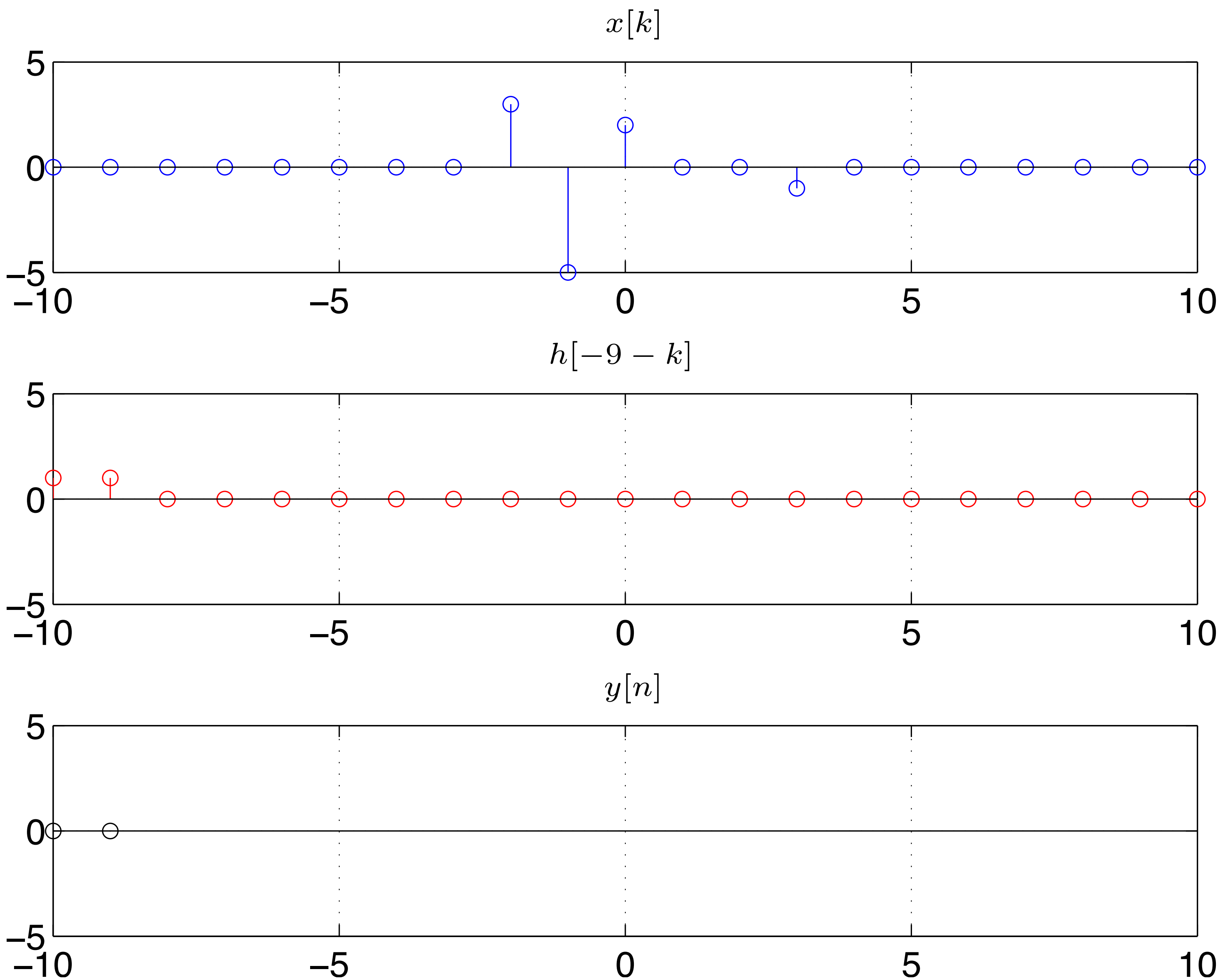
Exercício (solução 2 : $x[n] = 3\delta[n+2] - 5\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-3]$)



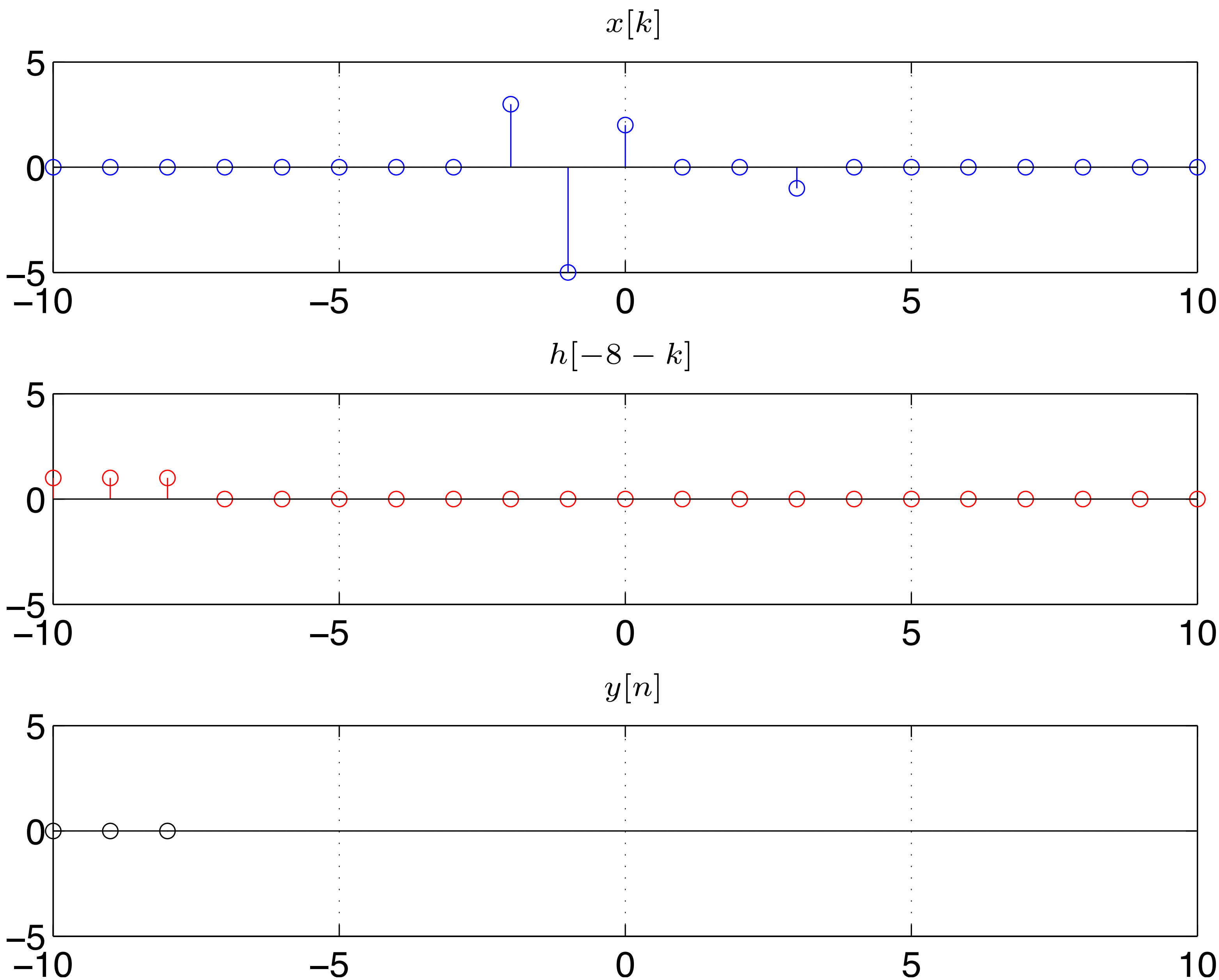
Exercício *solução gráfica/convolução:* $y[-10]$



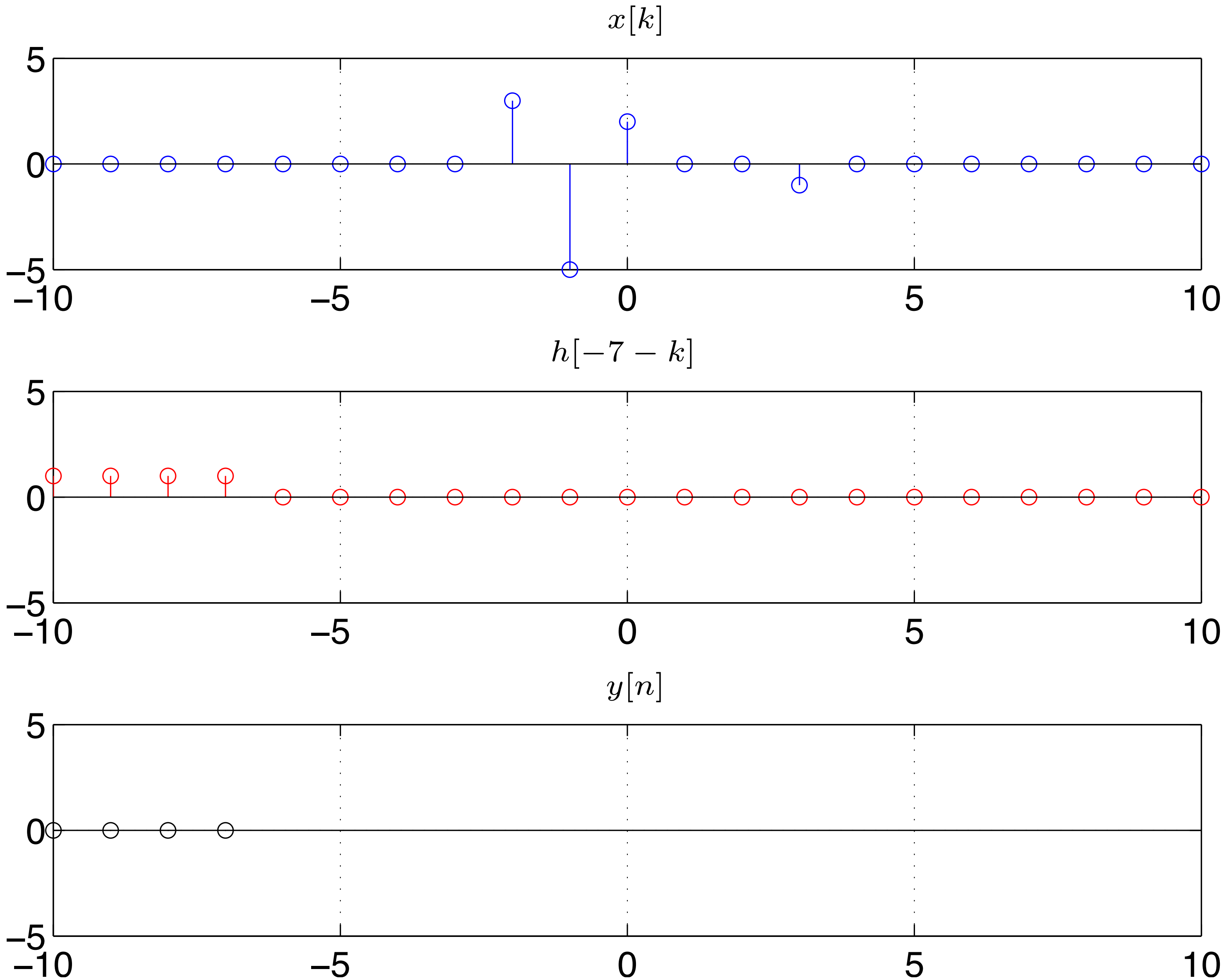
Exercício solução gráfica/convolução: $y[-9]$



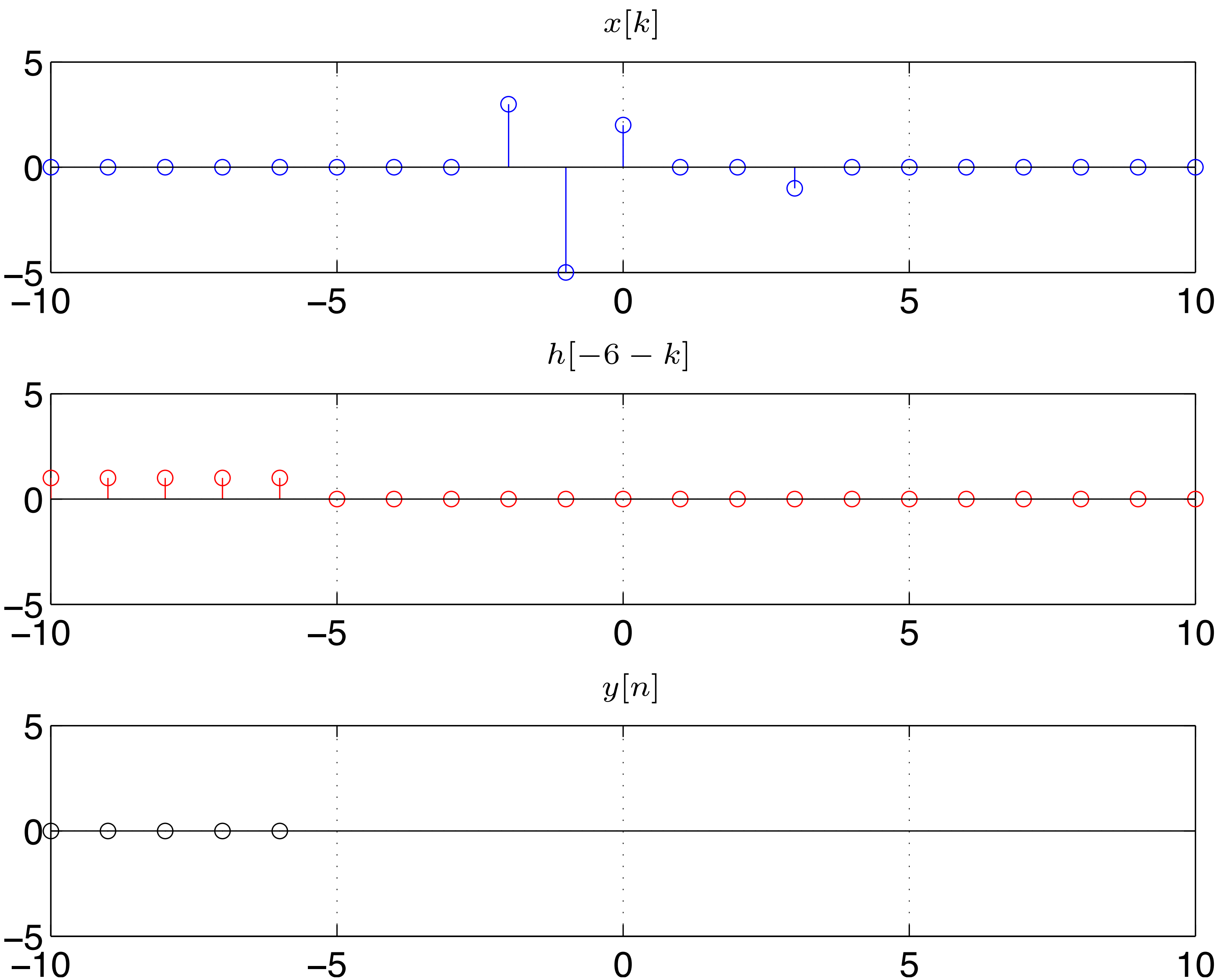
Exercício solução gráfica/convolução: $y[-8]$



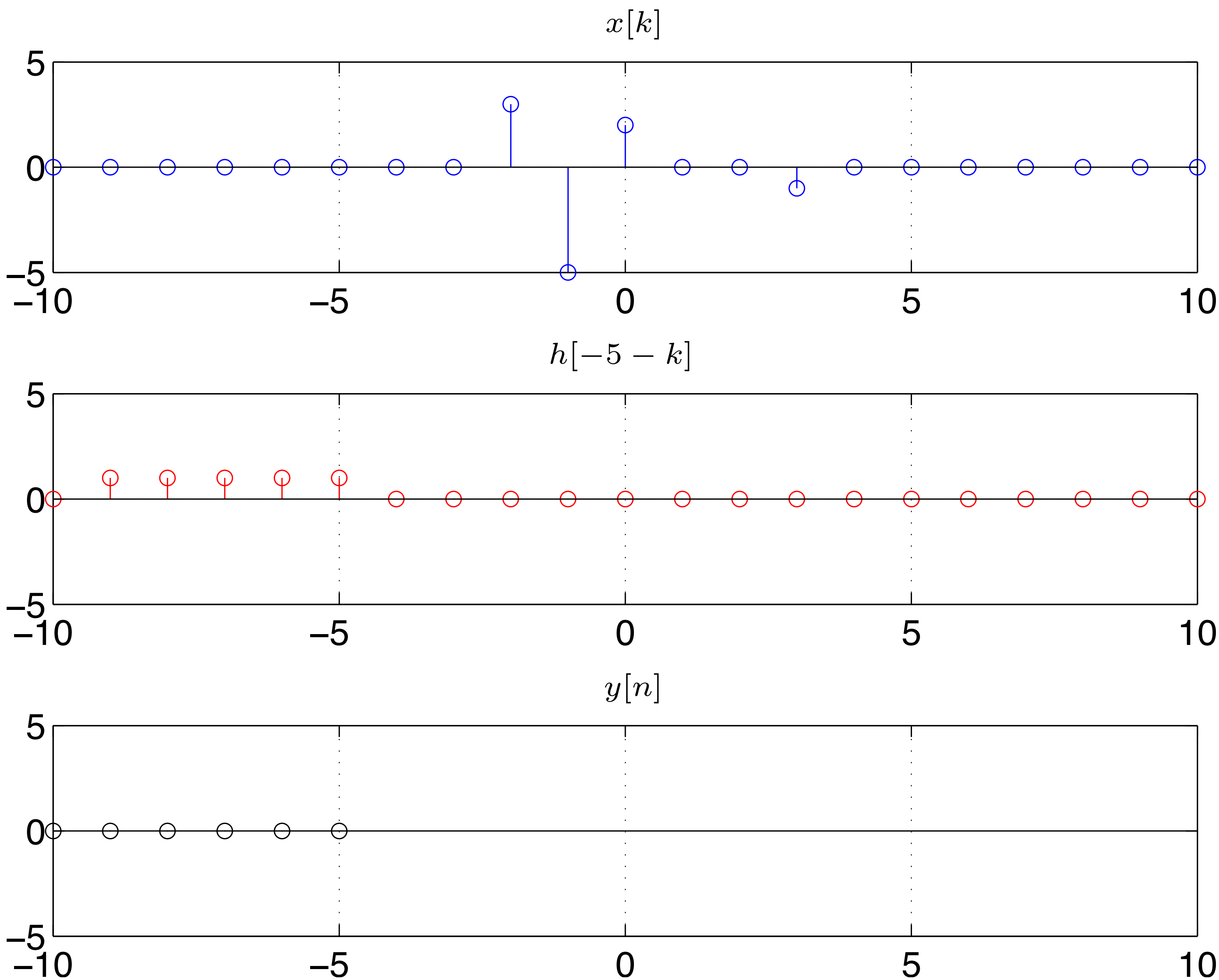
Exercício *solução gráfica/convolução:* $y[-7]$



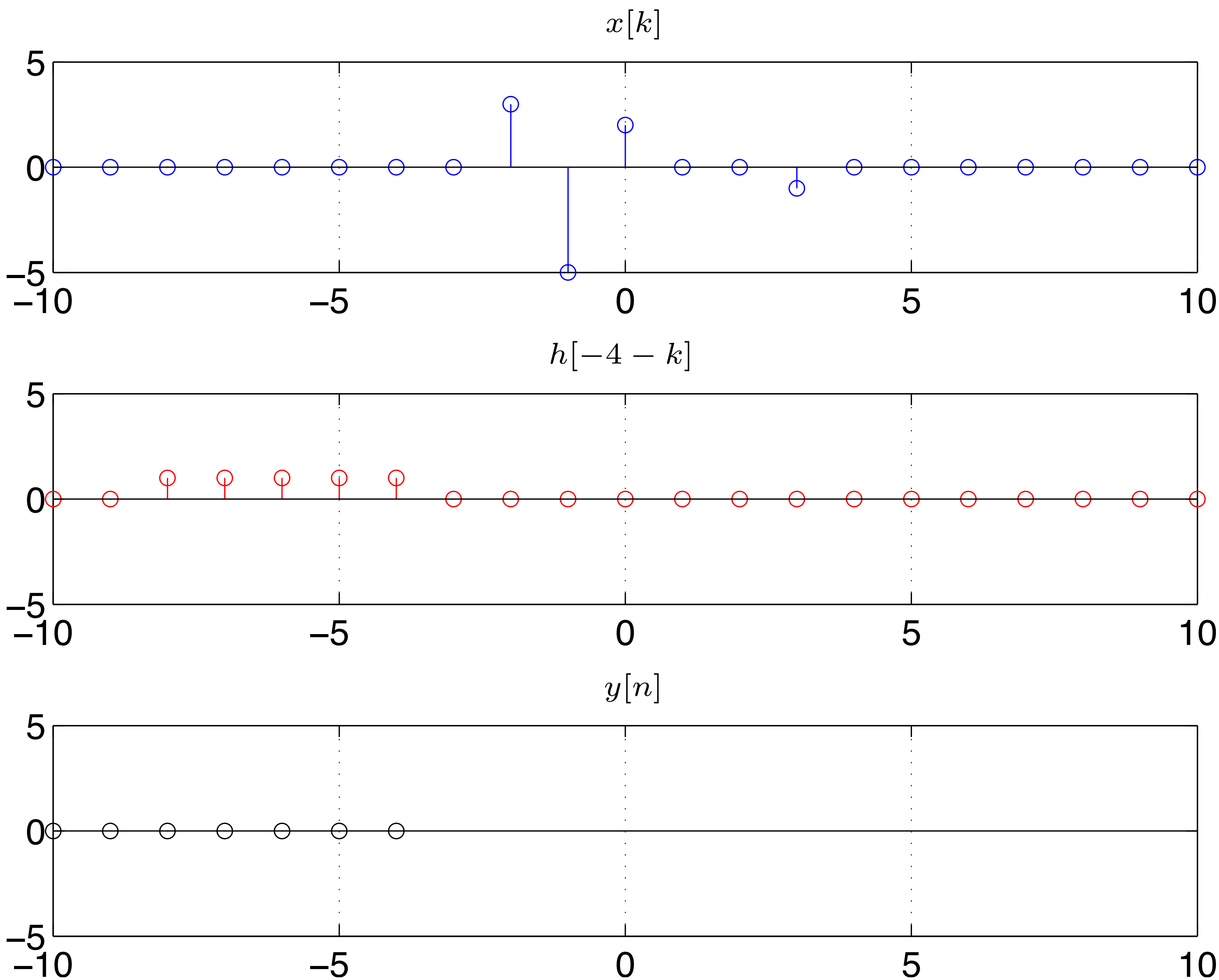
Exercício solução gráfica/convolução: $y[-6]$



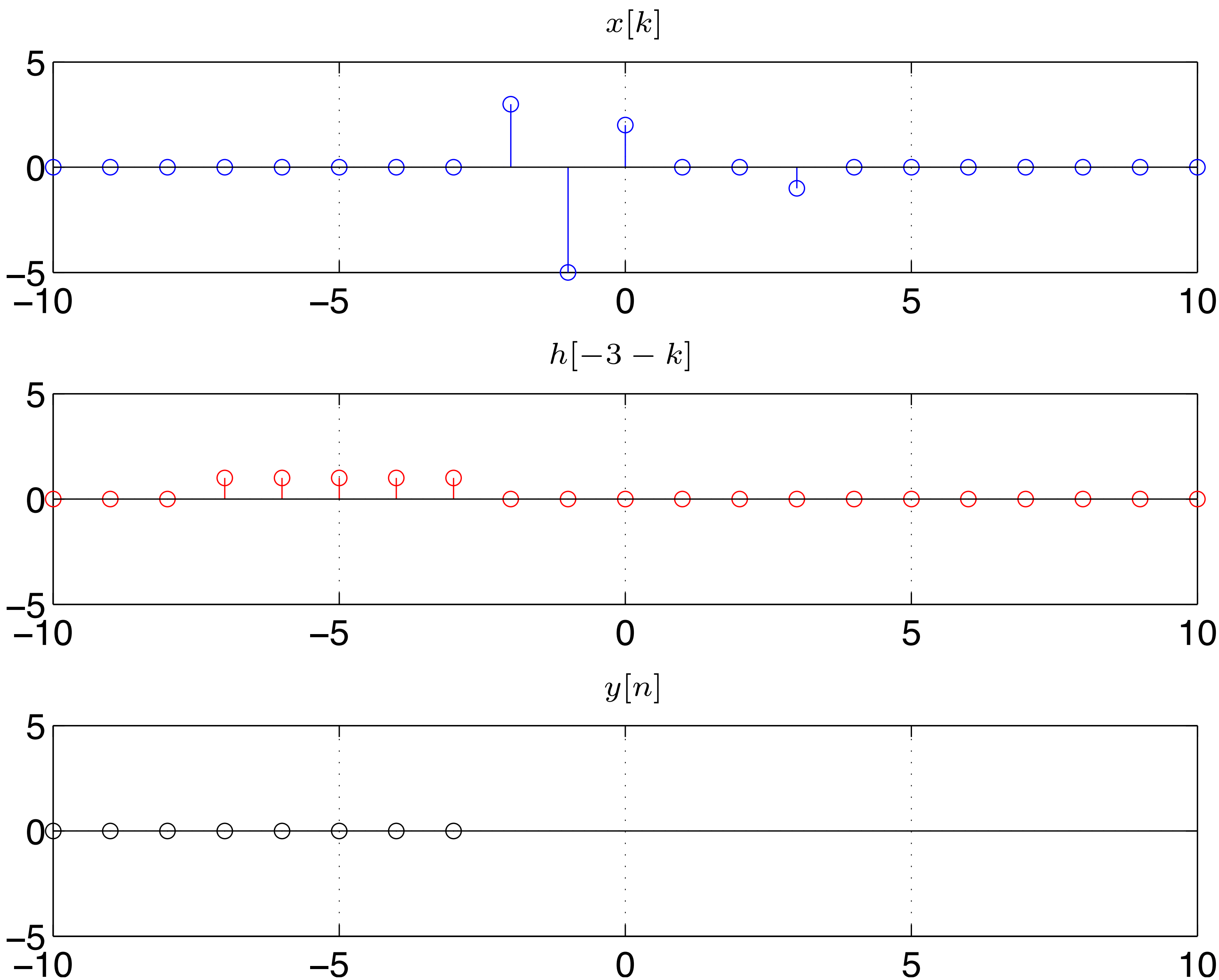
Exercício solução gráfica/convolução: $y[-5]$



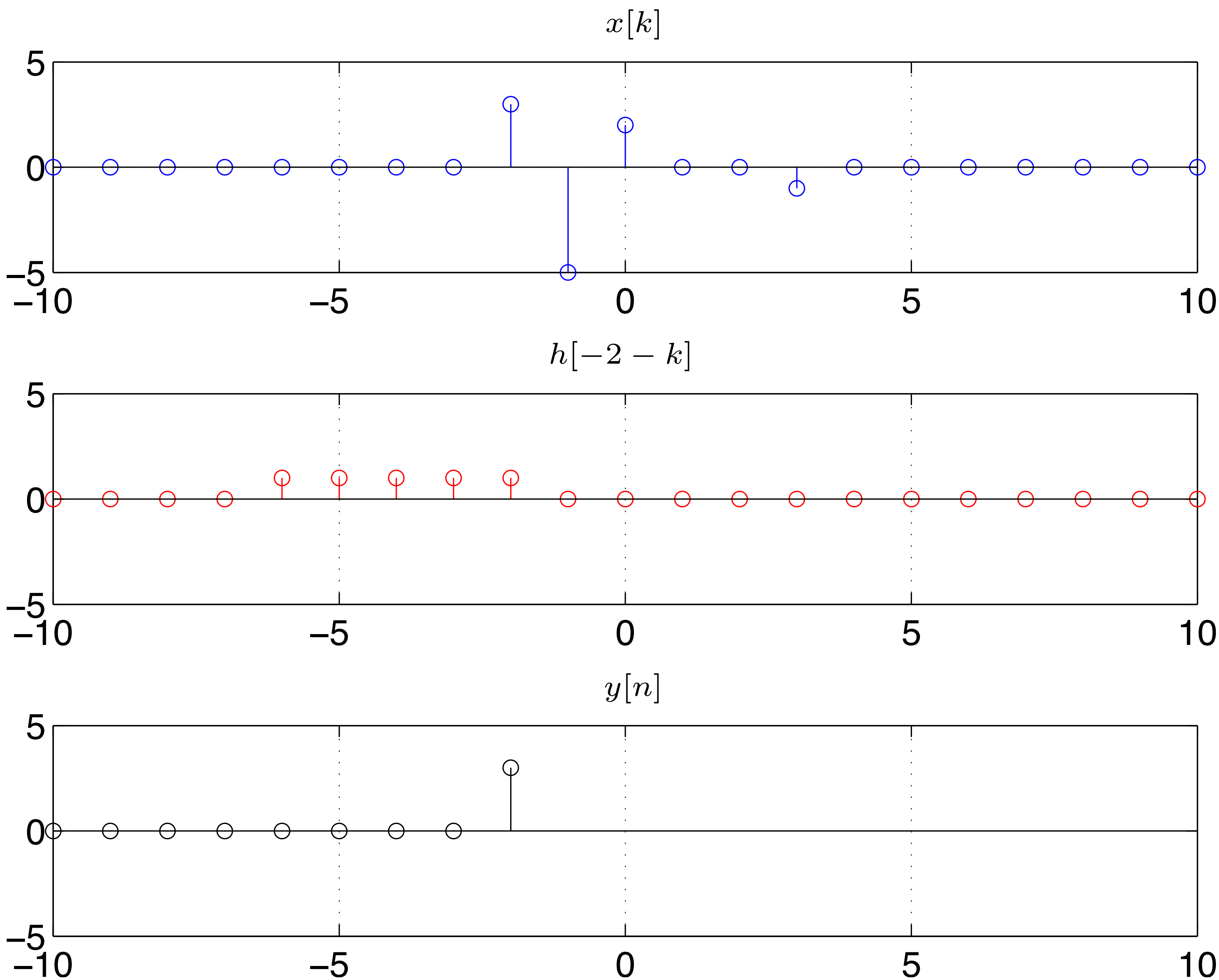
Exercício solução gráfica/convolução: $y[-4]$



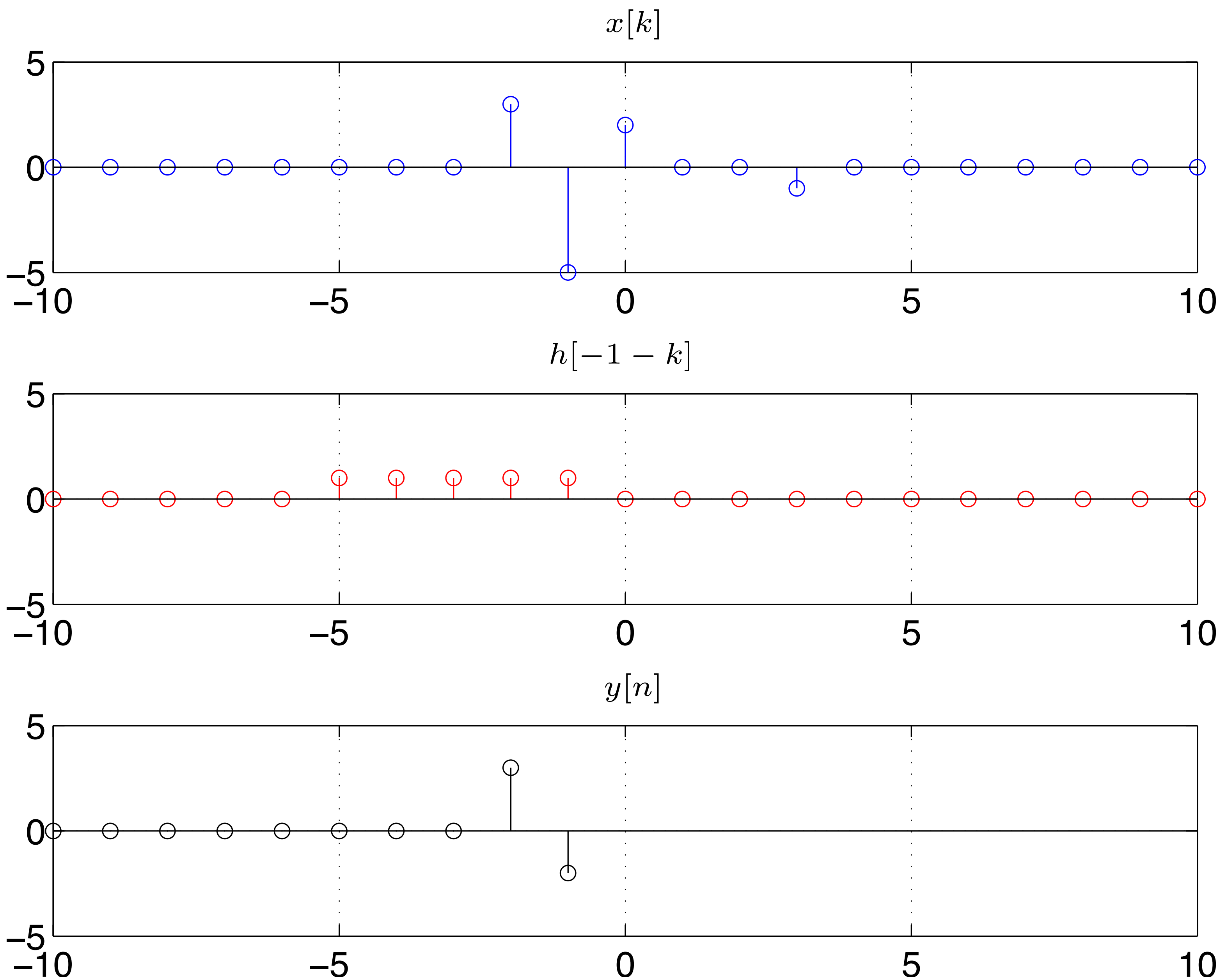
Exercício solução gráfica/convolução: $y[-3]$



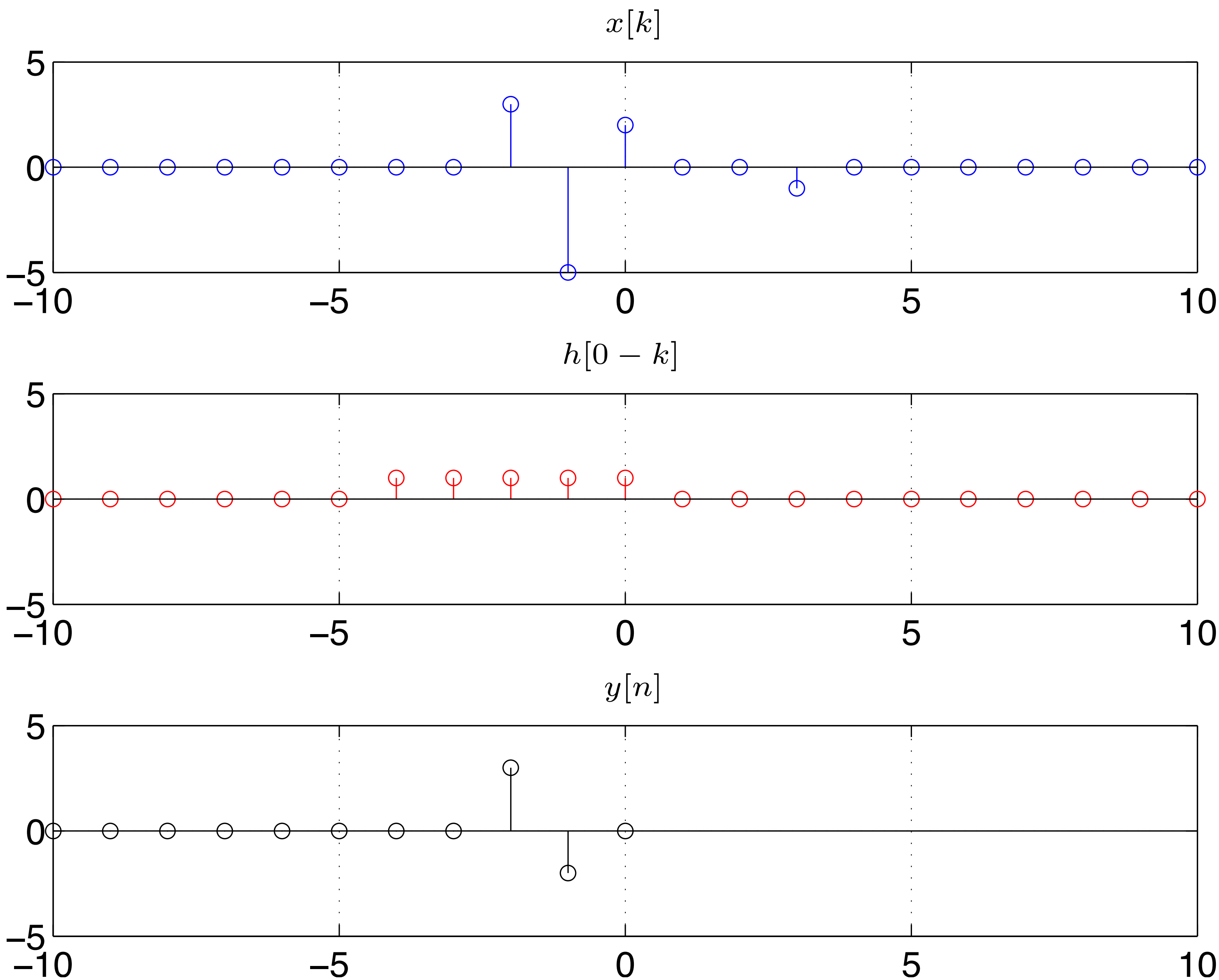
Exercício *solução gráfica/convolução:* $y[-2]$



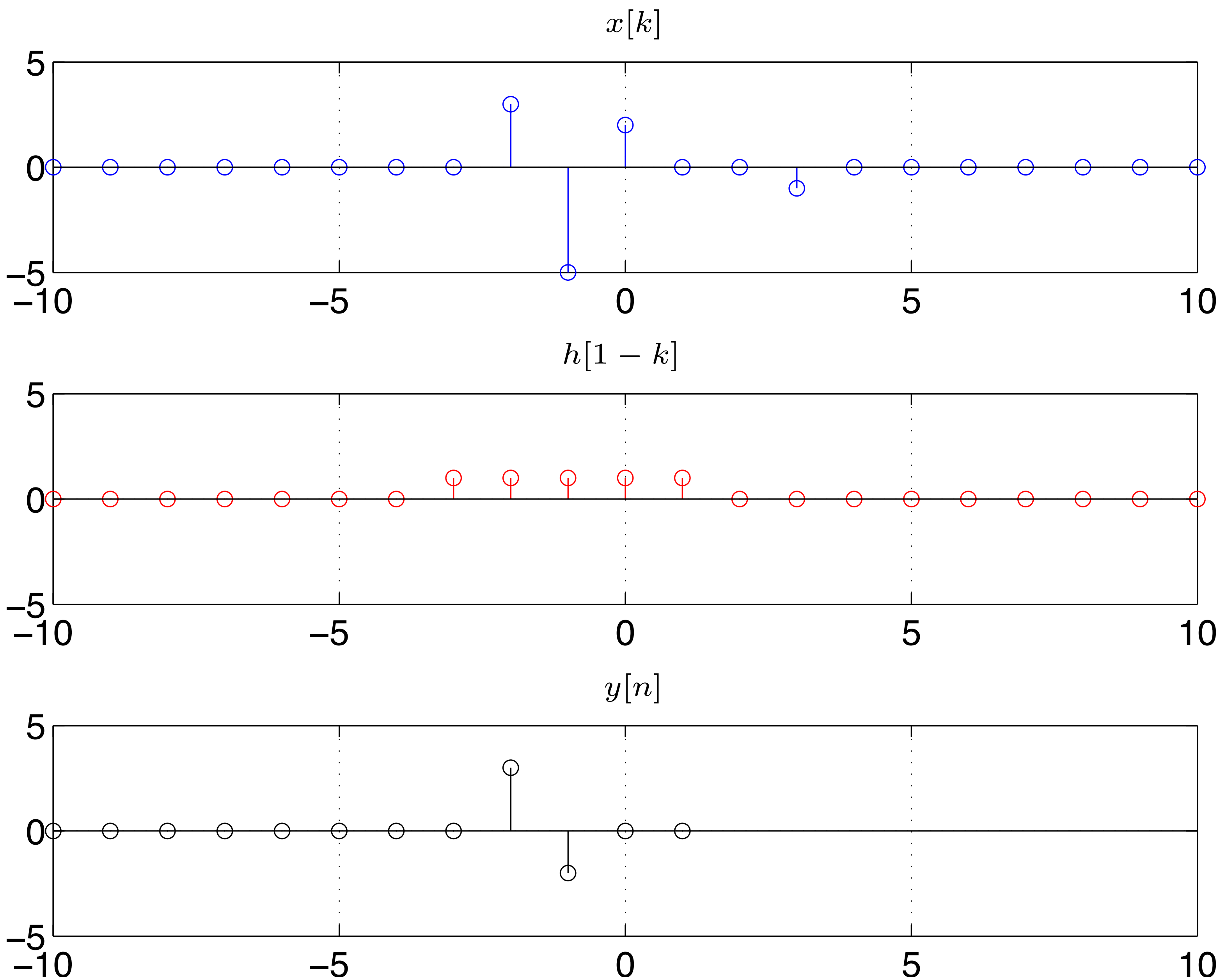
Exercício solução gráfica/convolução: $y[-1]$



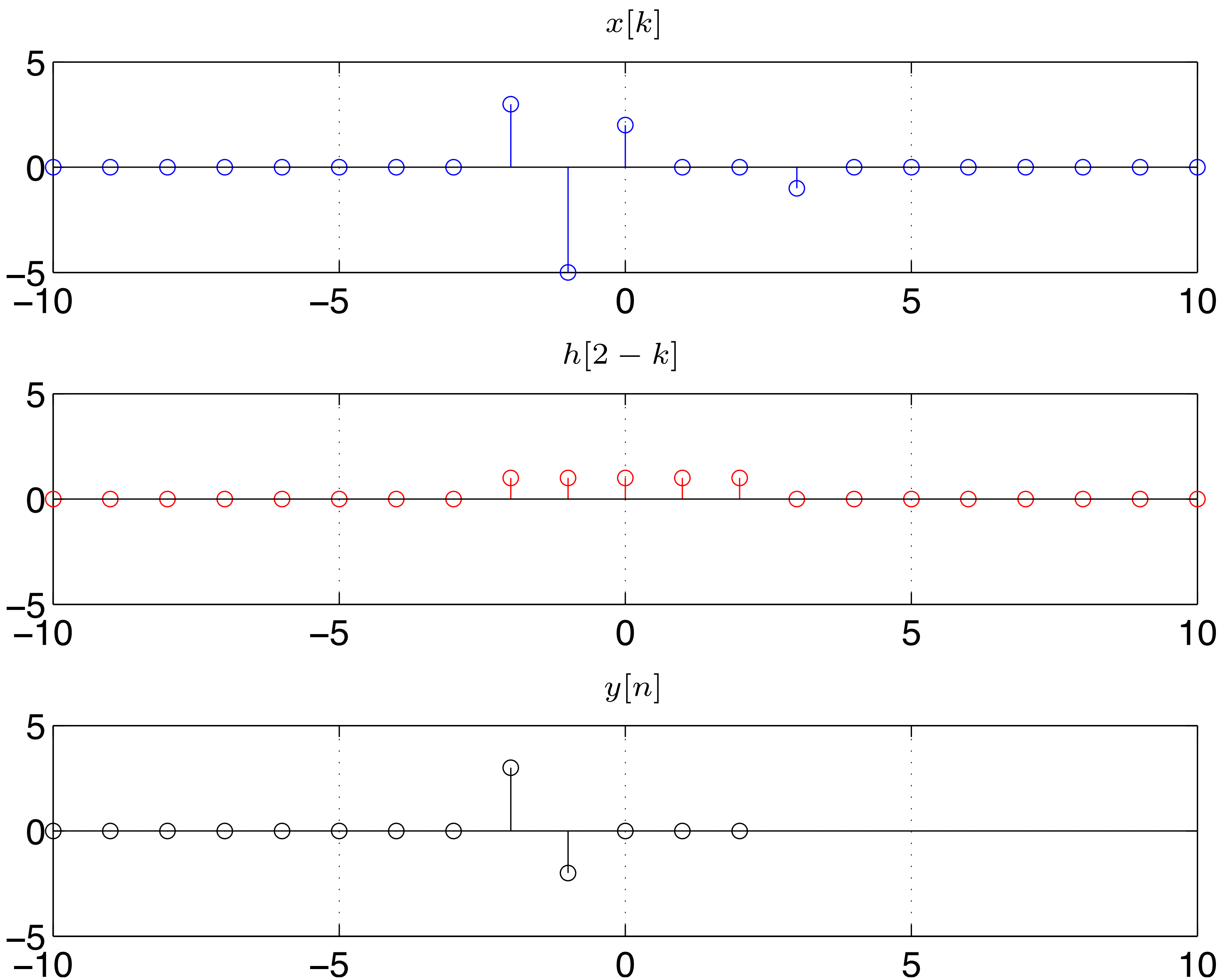
Exercício solução gráfica/convolução: $y[0]$



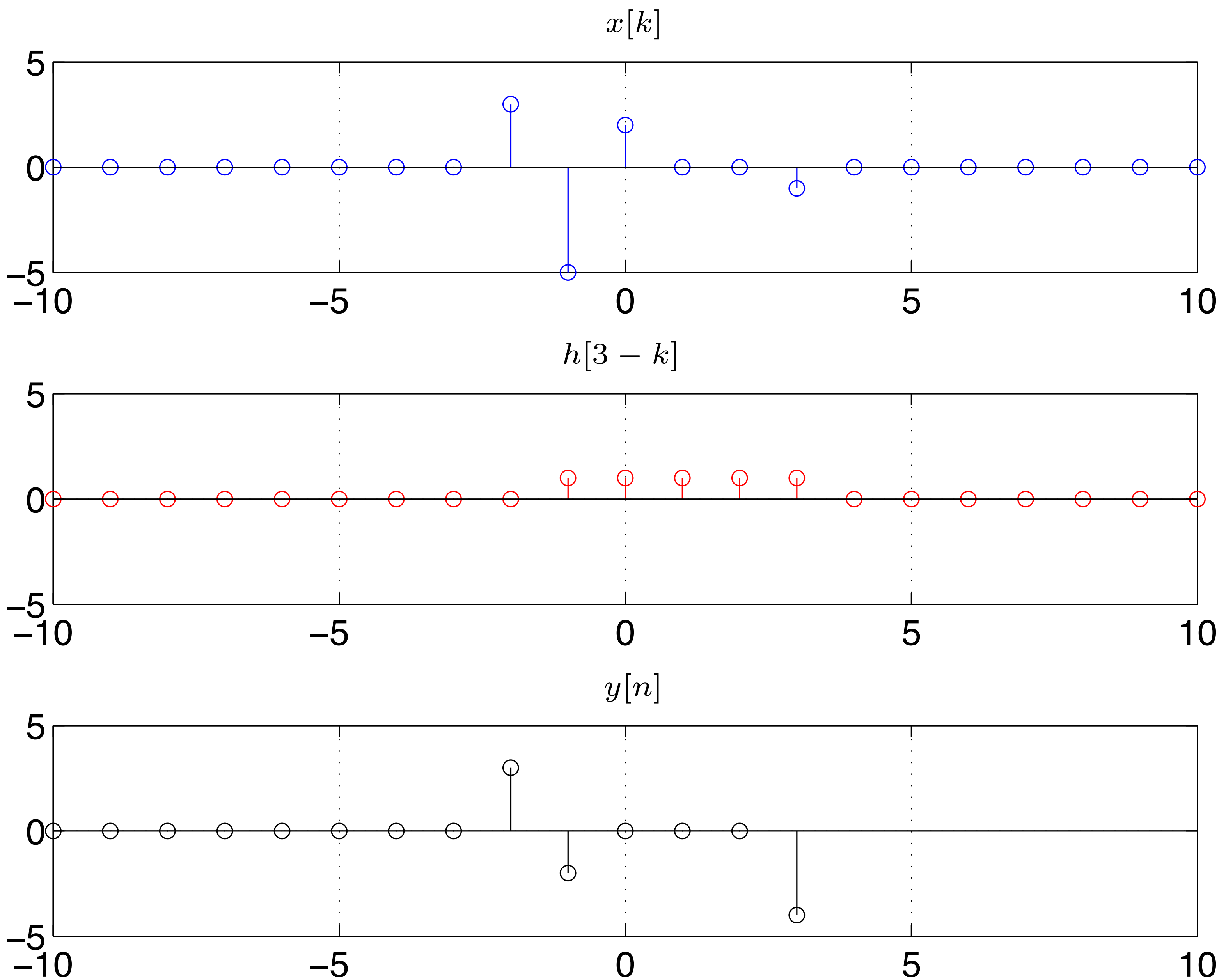
Exercício *solução gráfica/convolução:* $y[1]$



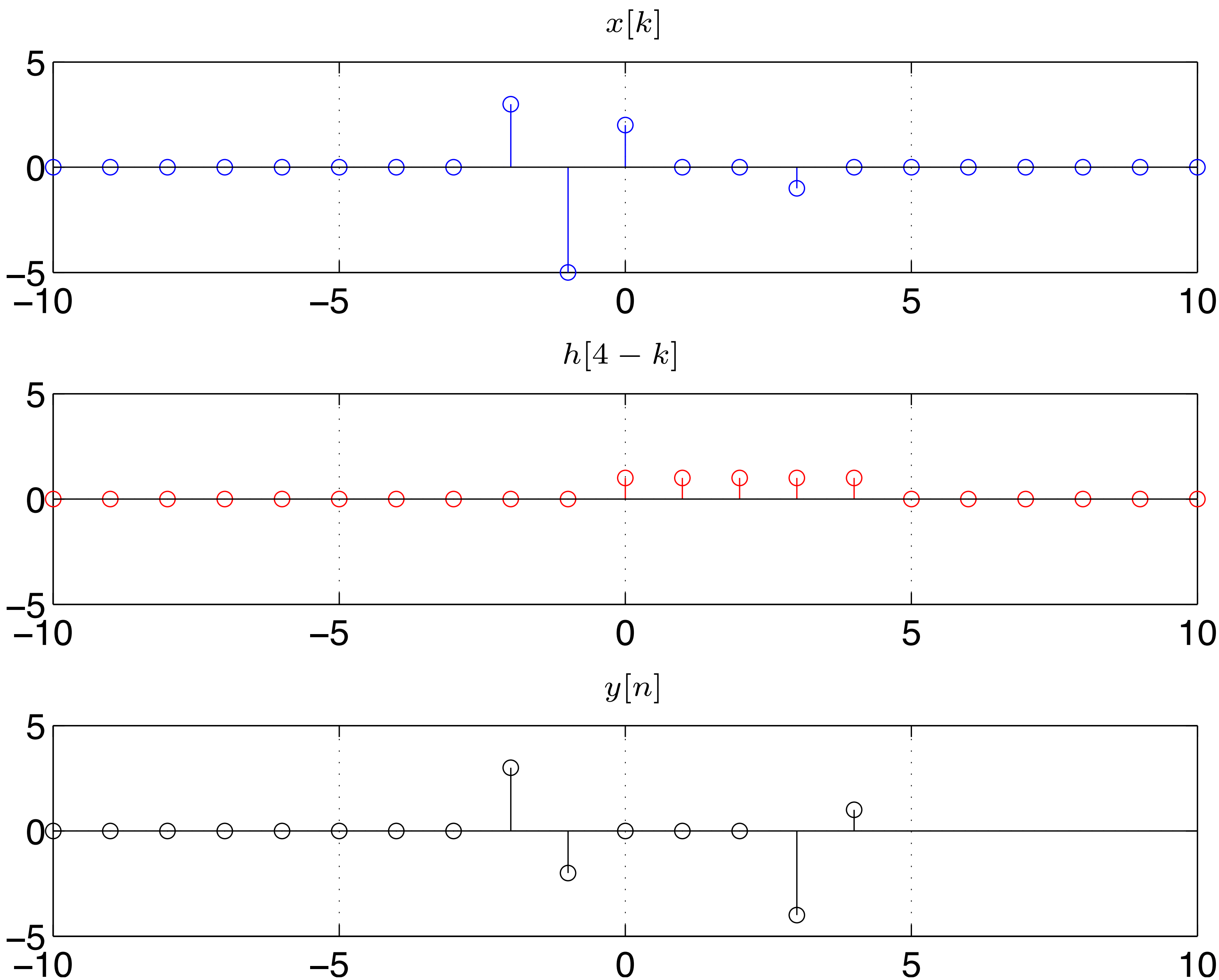
Exercício solução gráfica/convolução: $y[2]$



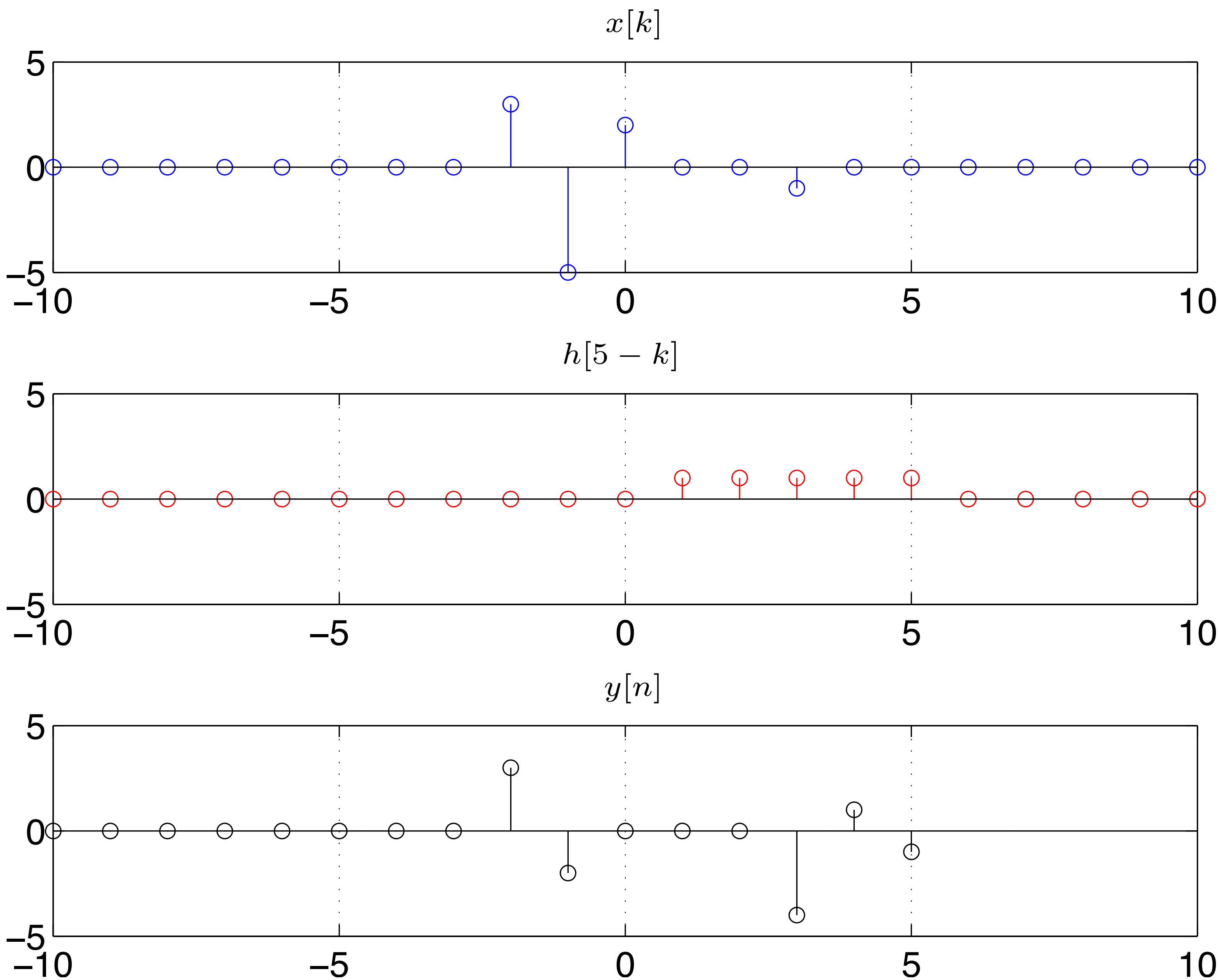
Exercício solução gráfica/convolução: $y[3]$



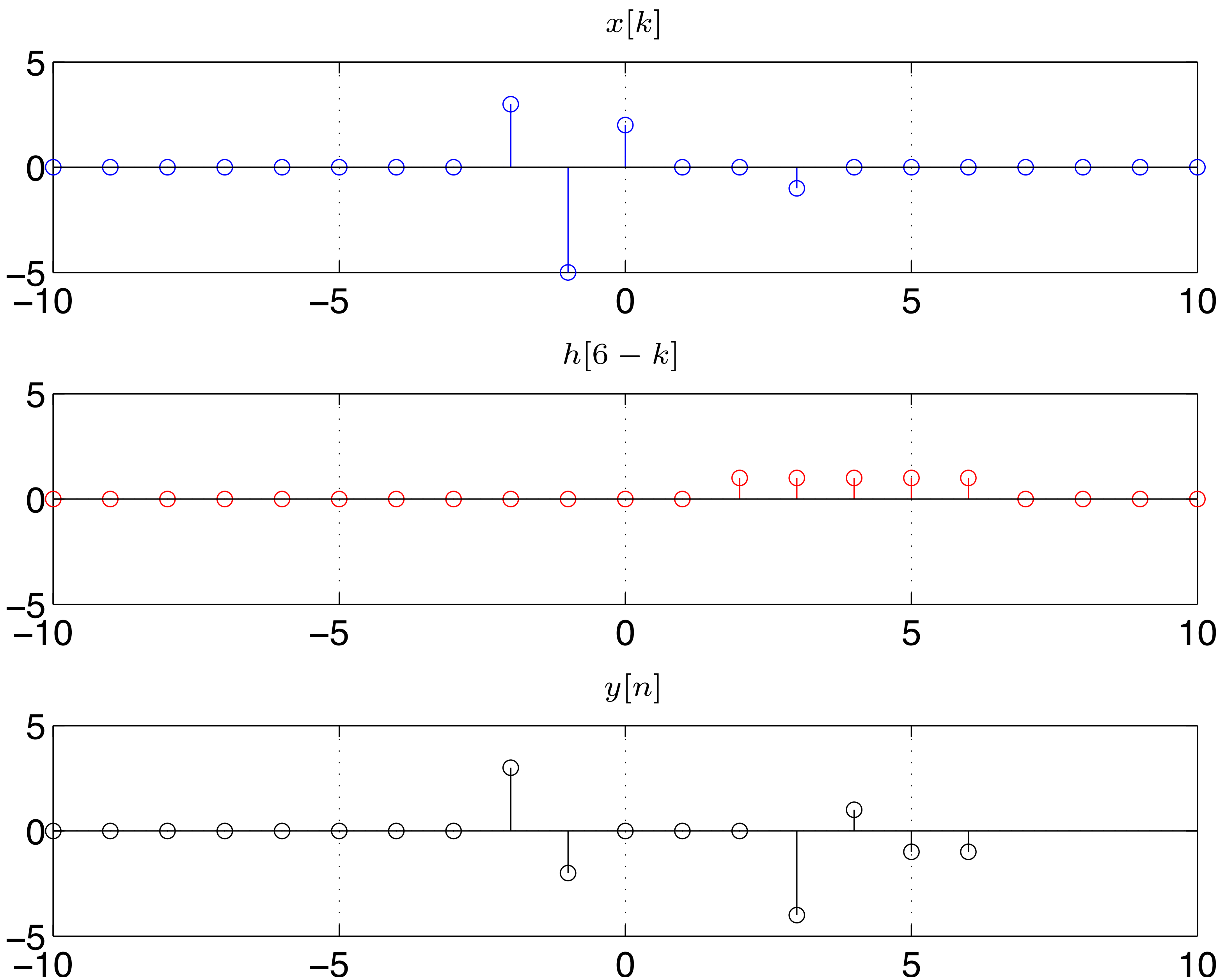
Exercício *solução gráfica/convolução: $y[4]$*



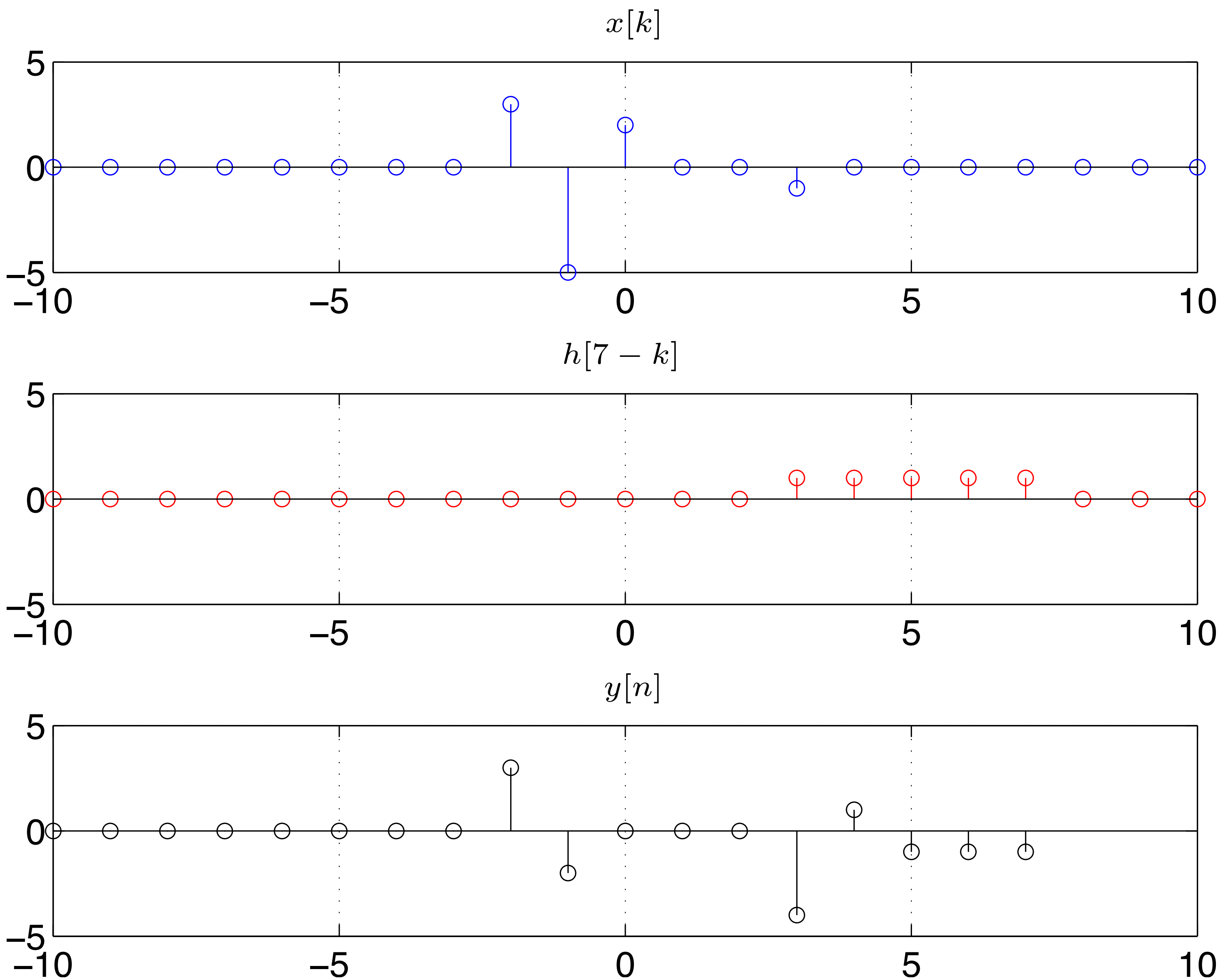
Exercício *solução gráfica/convolução: $y[5]$*



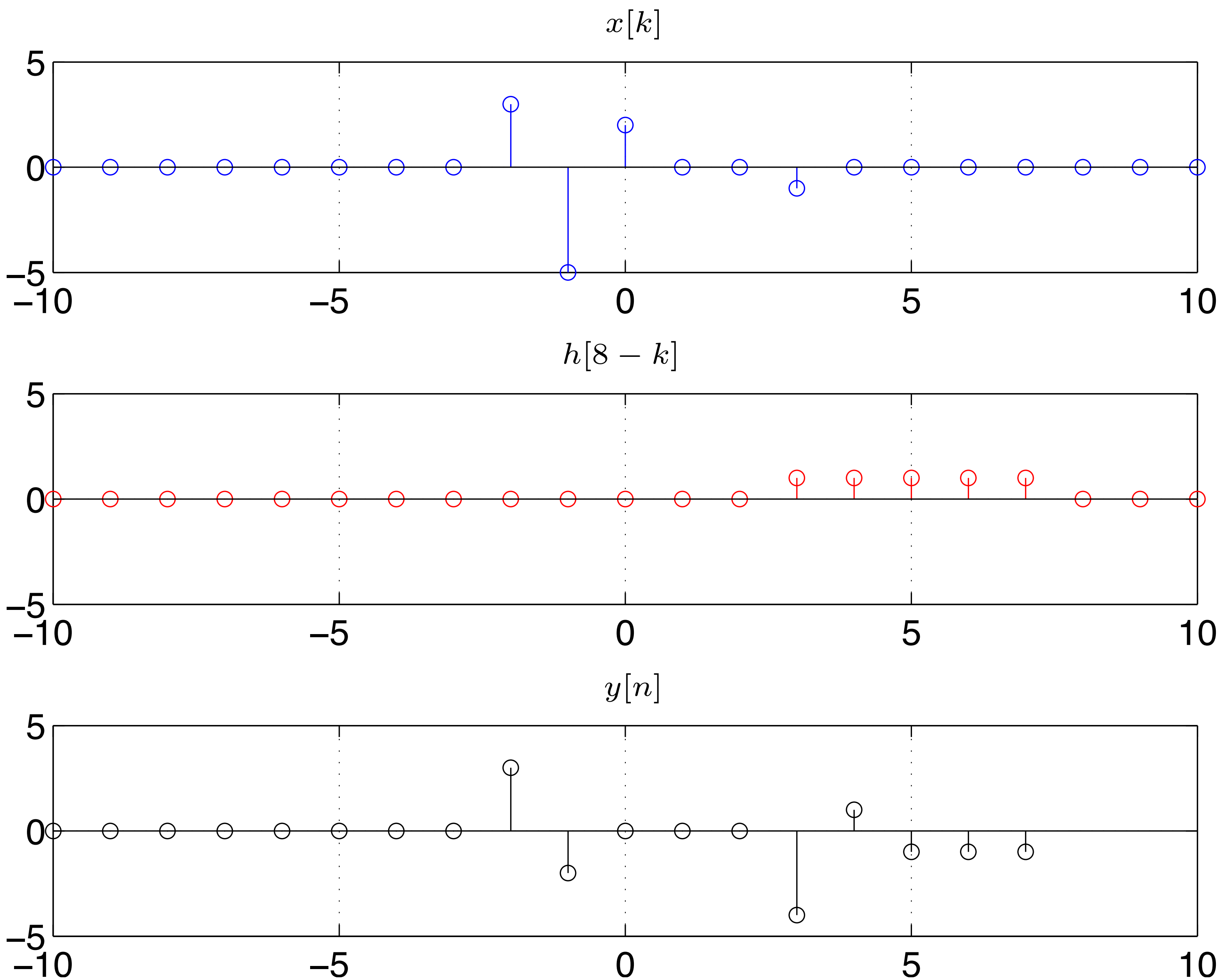
Exercício solução gráfica/convolução: $y[6]$



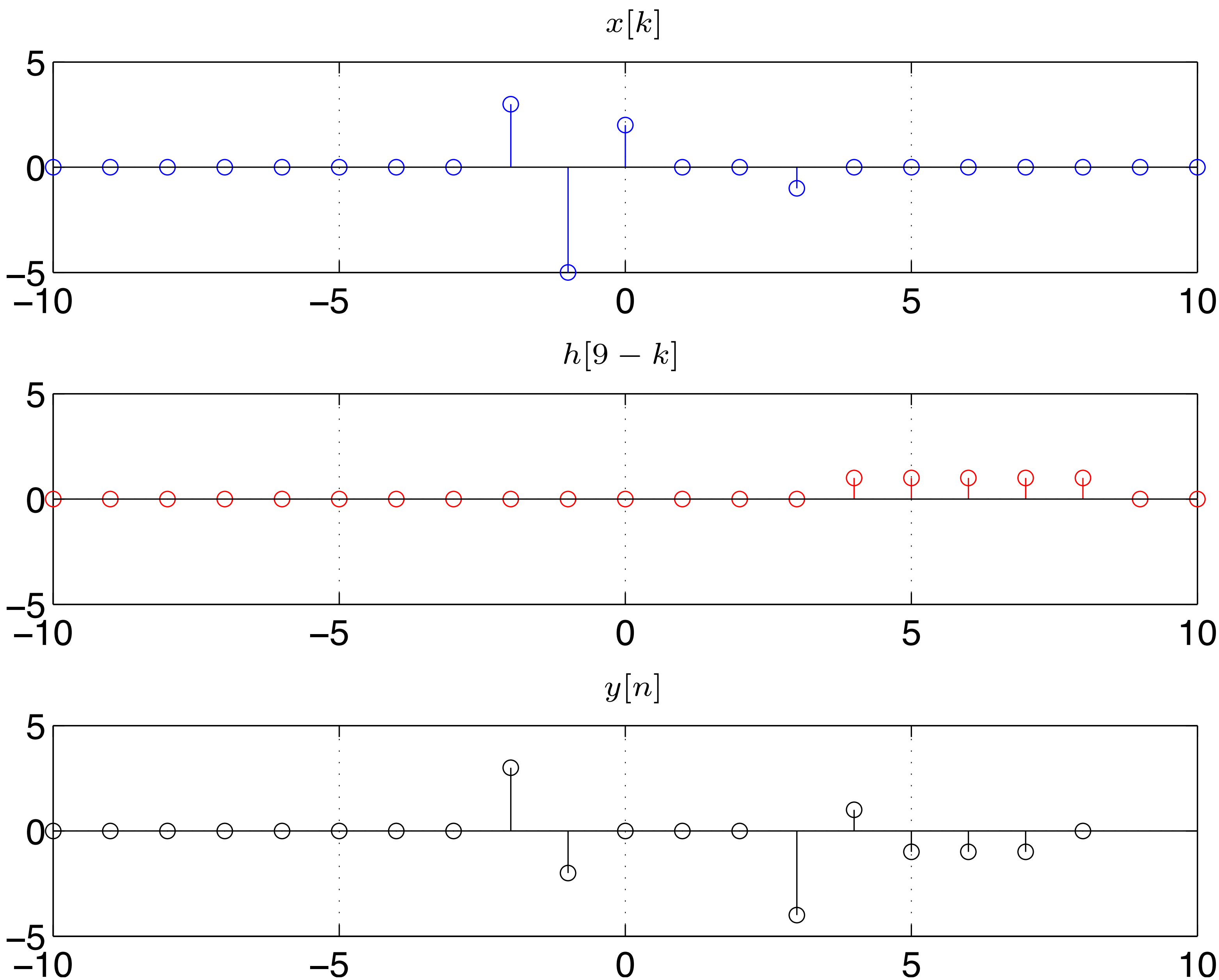
Exercício solução gráfica/convolução: $y[7]$



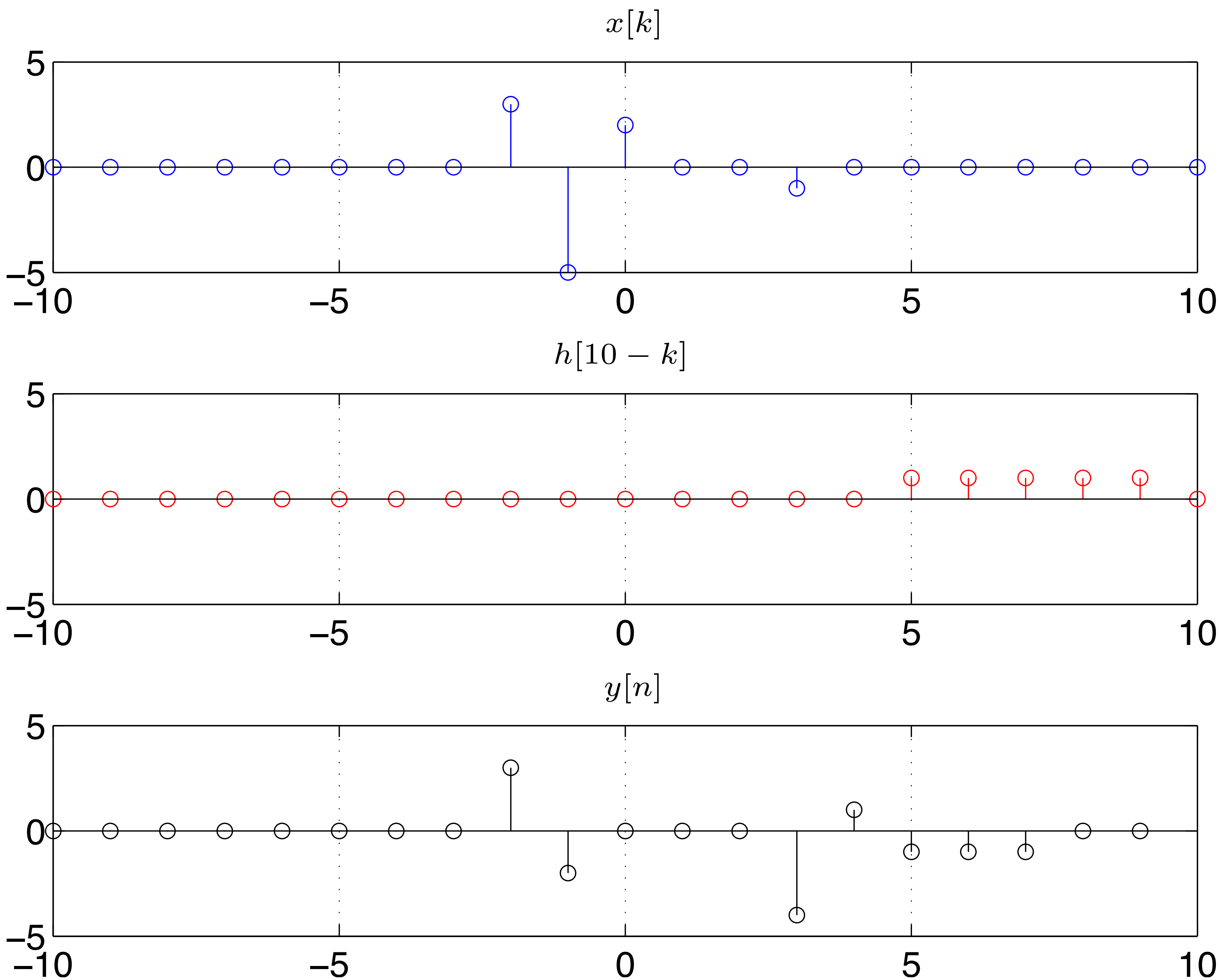
Exercício *solução gráfica/convolução:* $y[8]$



Exercício solução gráfica/convolução: $y[9]$



Exercício solução gráfica/convolução: $y[10]$



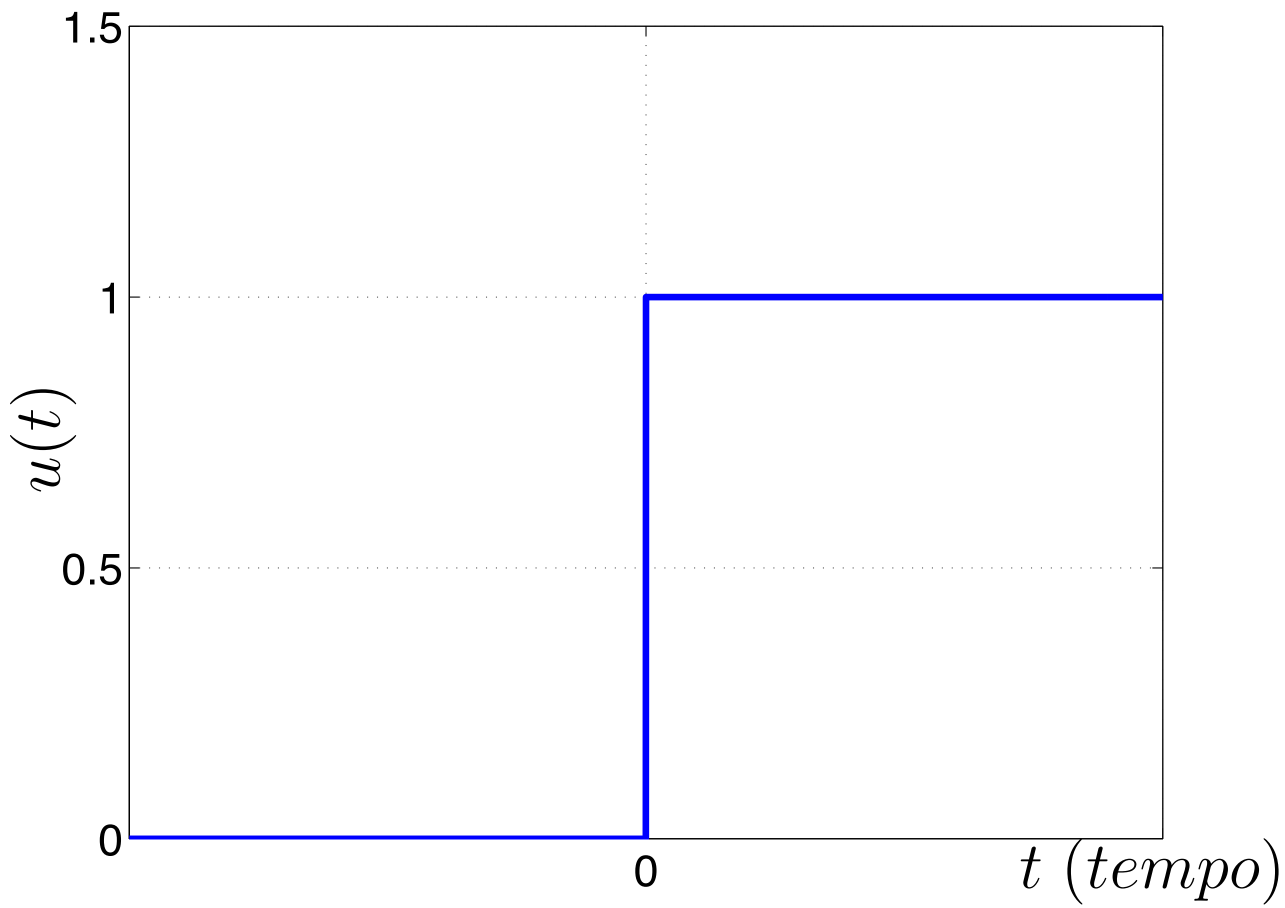
Representação no Domínio do tempo para Sistemas LIT

- Representação de sinais de tempo contínuo em termos de impulsos
- Integral de Convolução

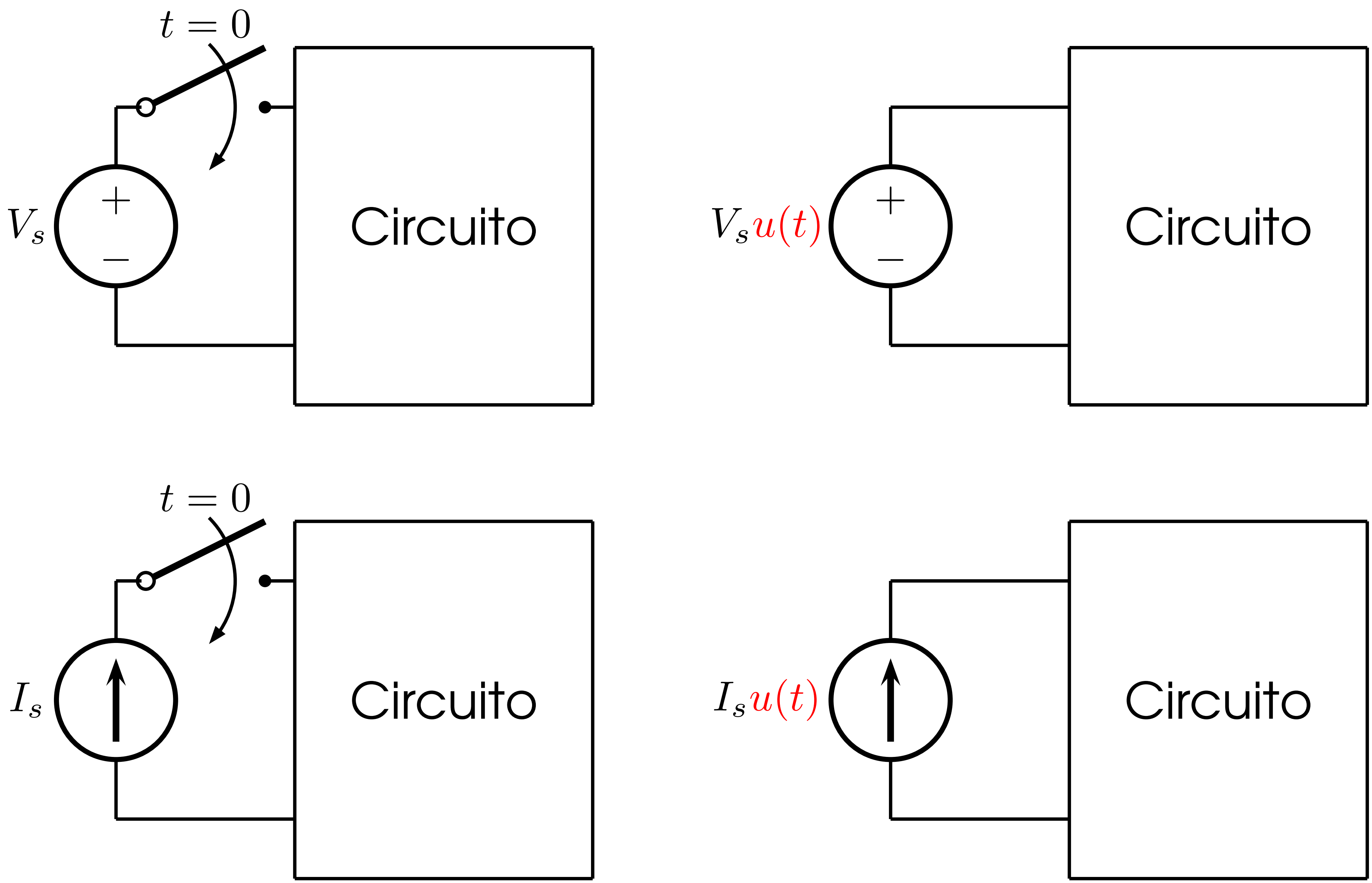
Degrau Unitário Contínuo

- Também chamado função de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



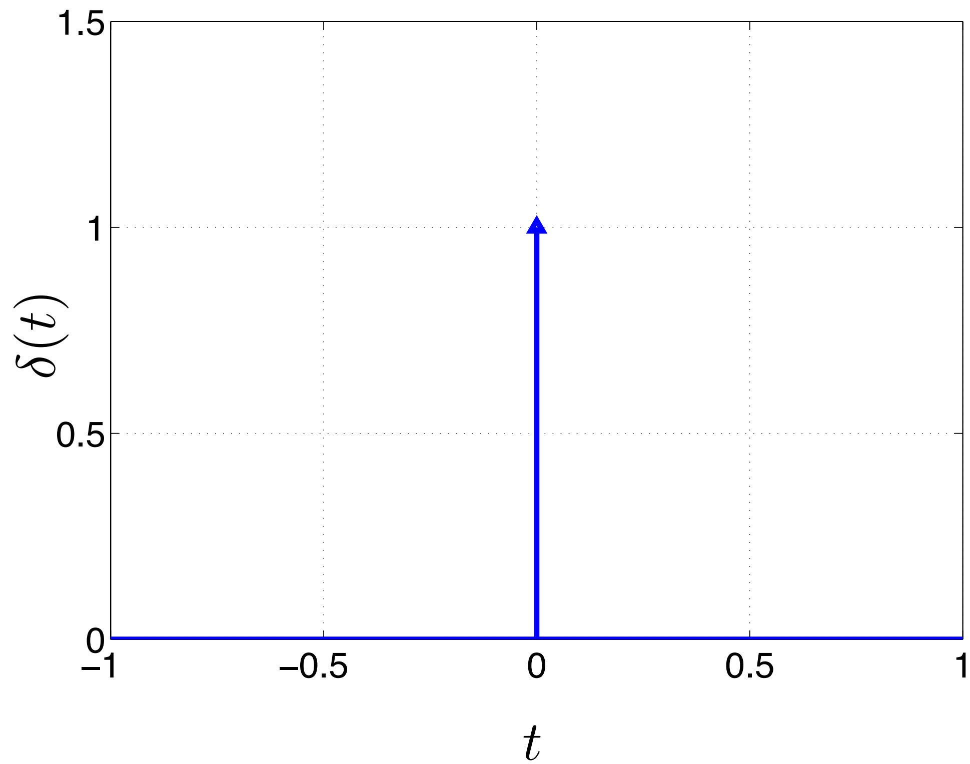
Degrau Unitário (Prática)



Impulso Unitário Contínuo

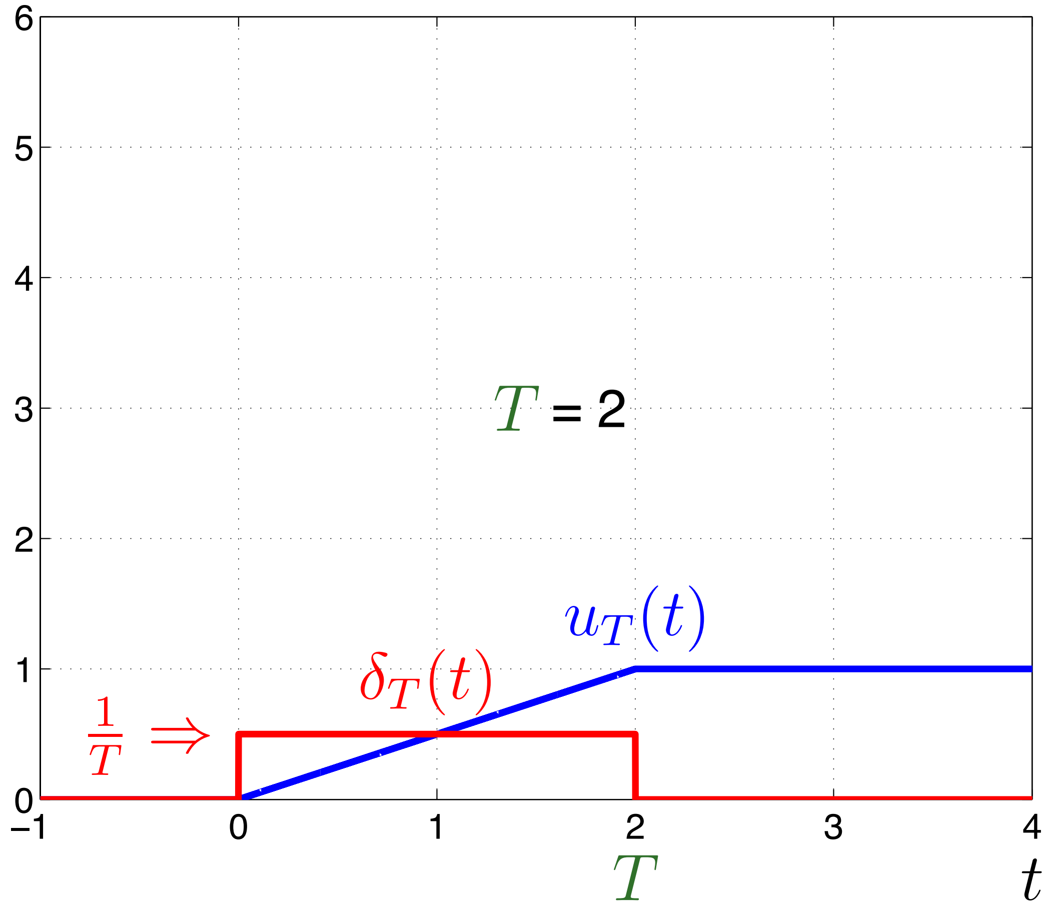
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \neq 0 \\ \infty, & \text{para } t = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

- Conhecido também por função delta de Dirac
- Esboçado como uma seta com altura unitária
  - $5\delta(t)$ é esbocado como uma seta de altura 5.



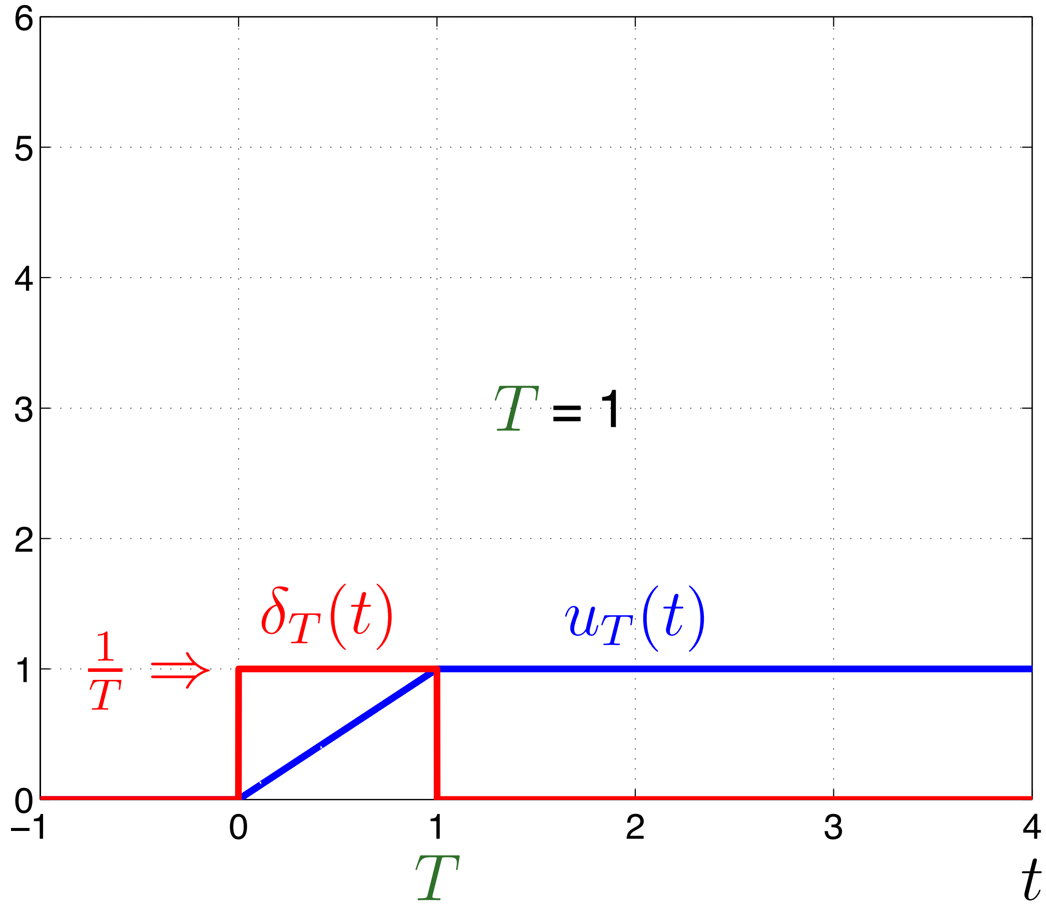
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t) dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



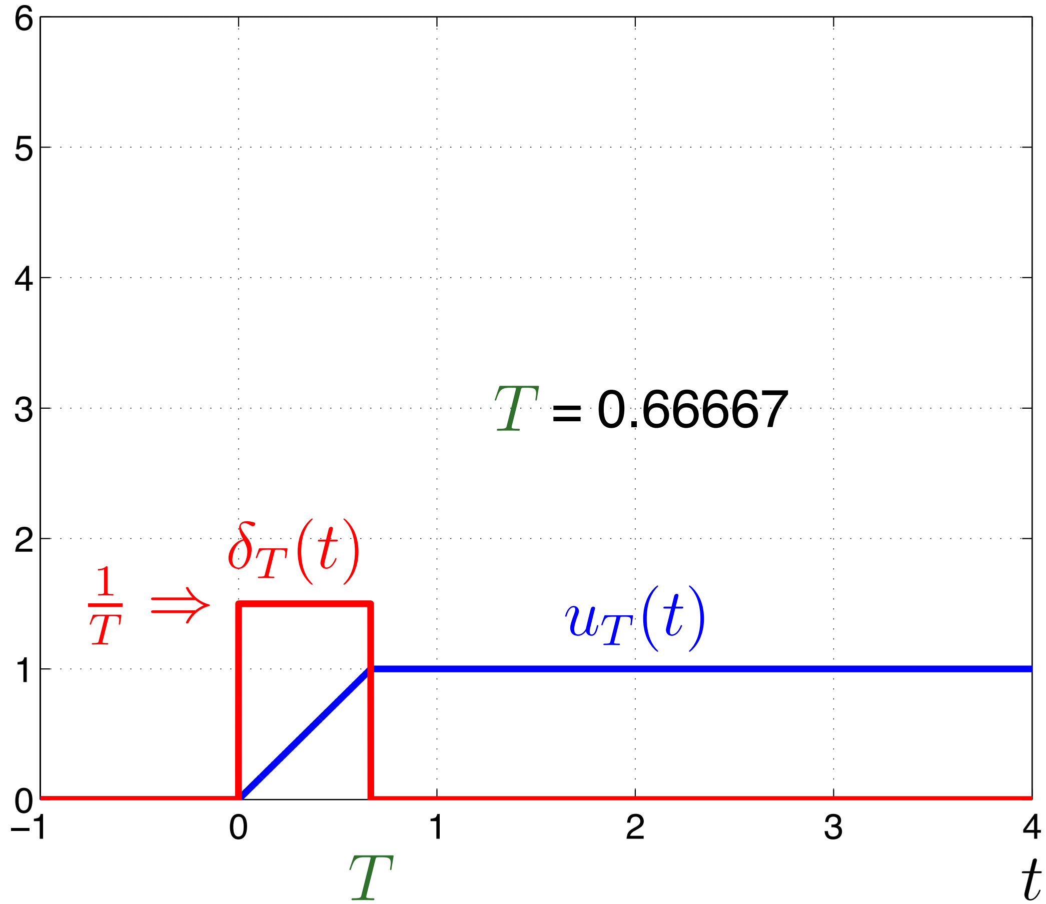
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt=1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



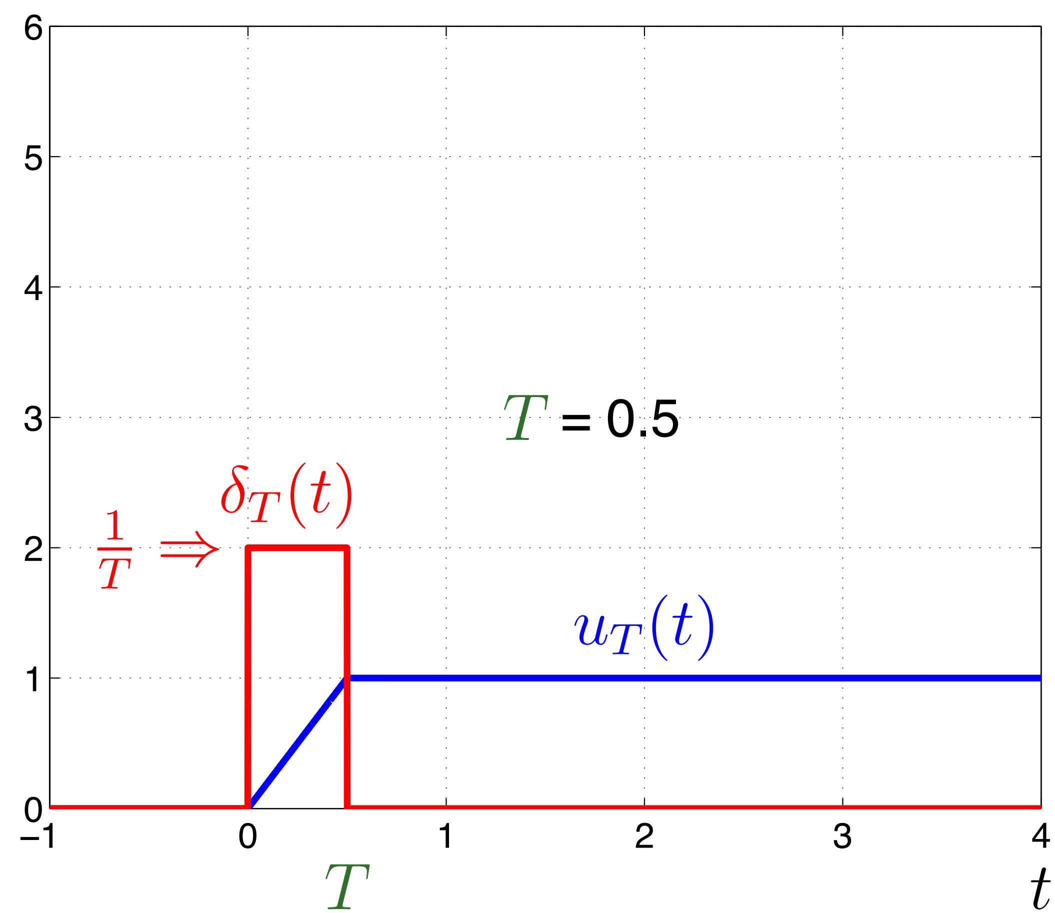
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



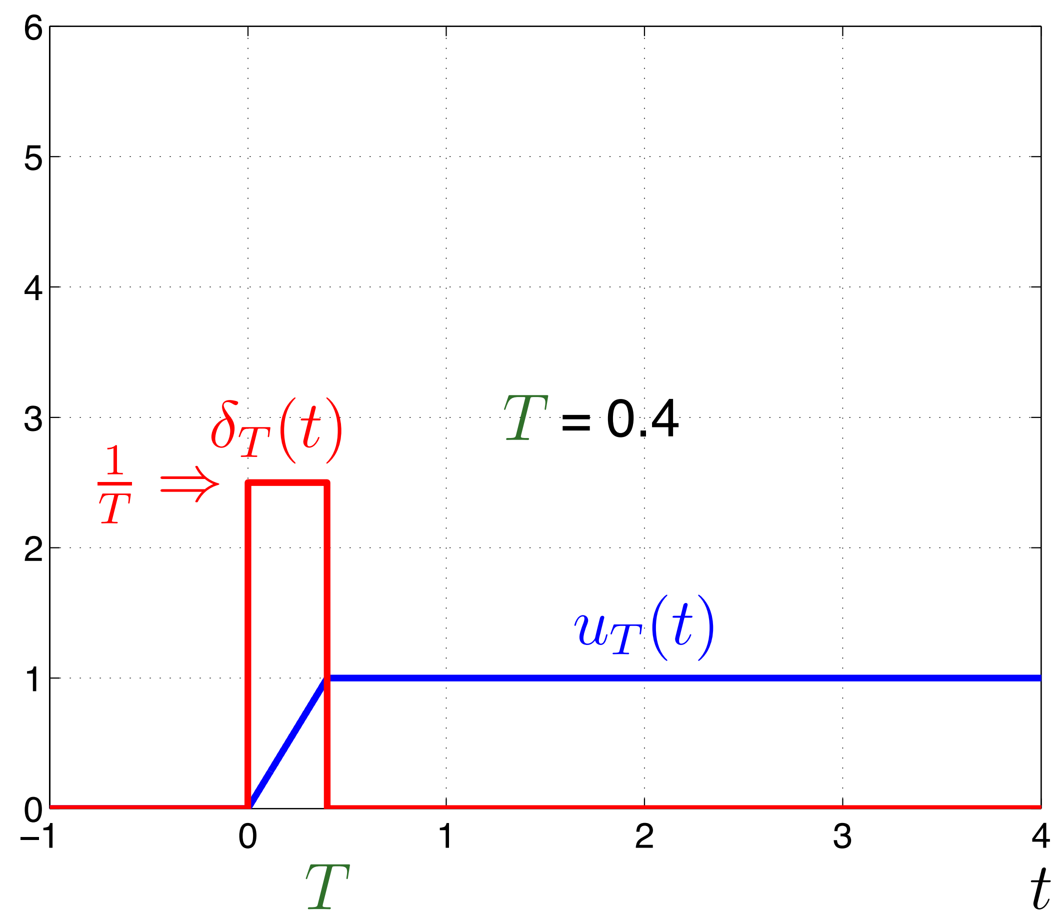
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



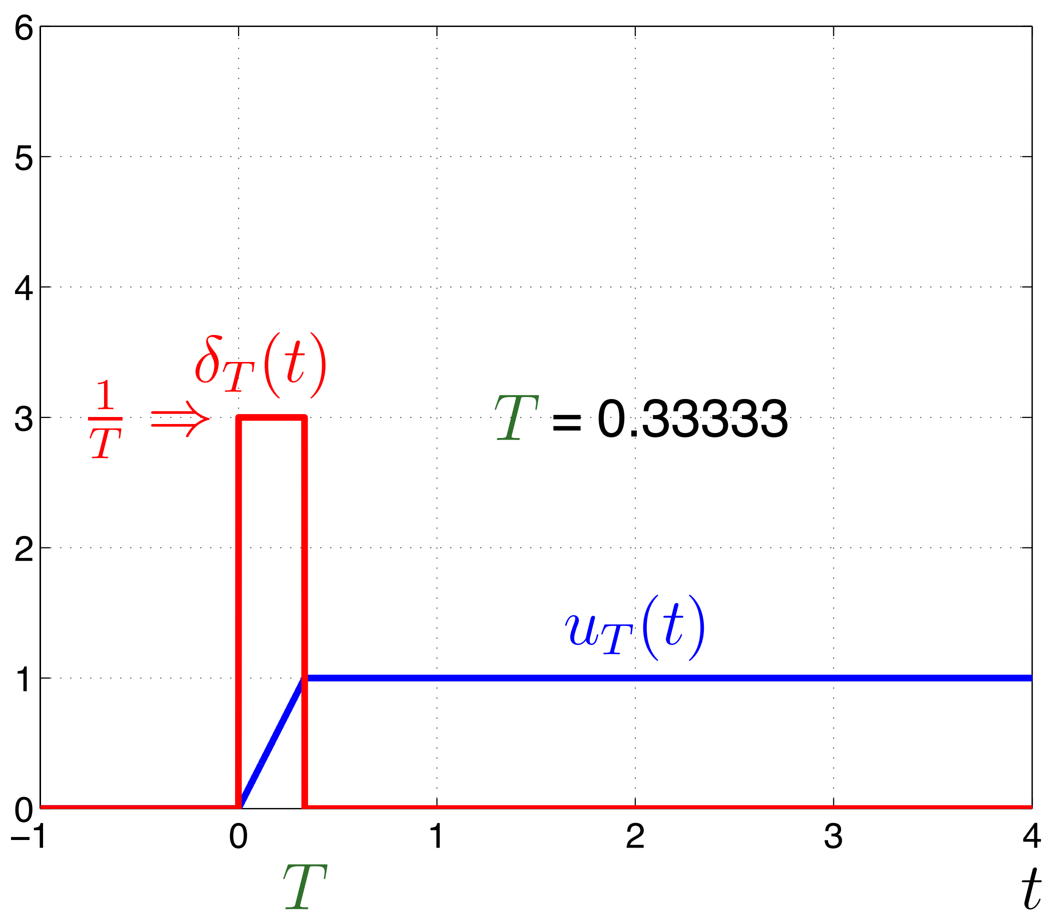
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



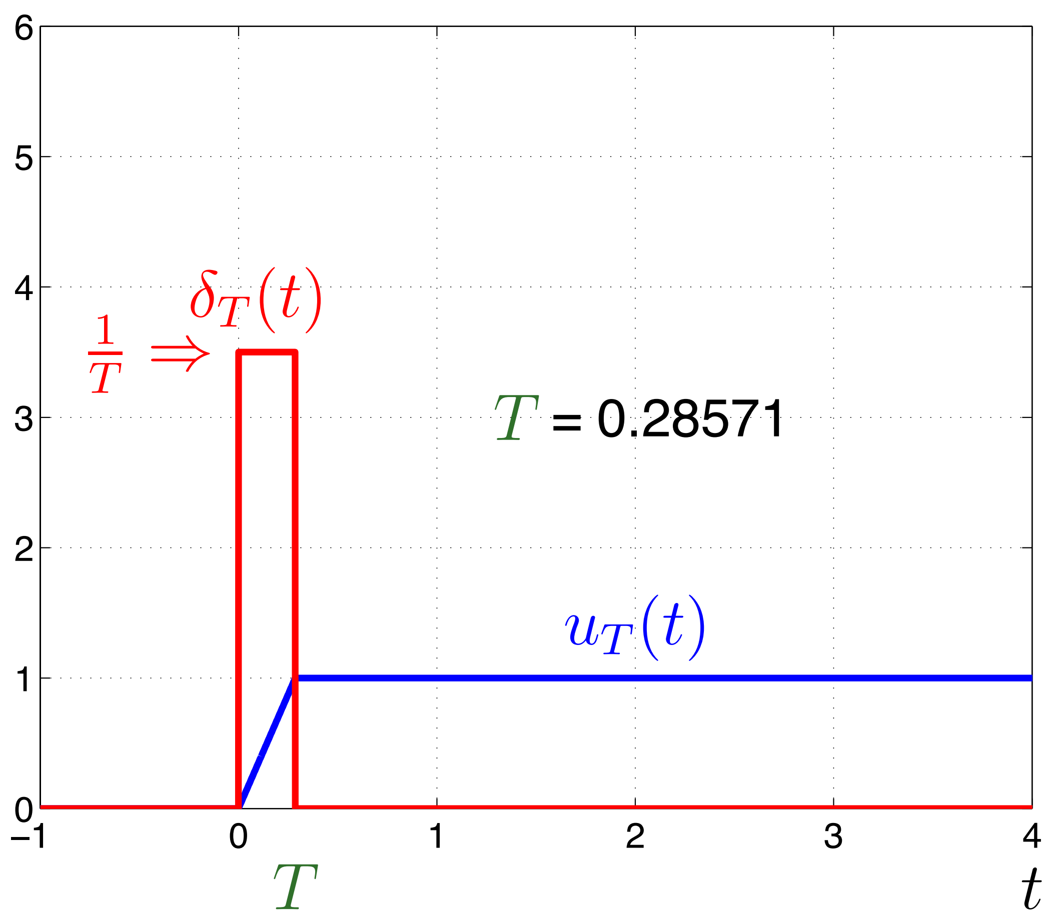
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



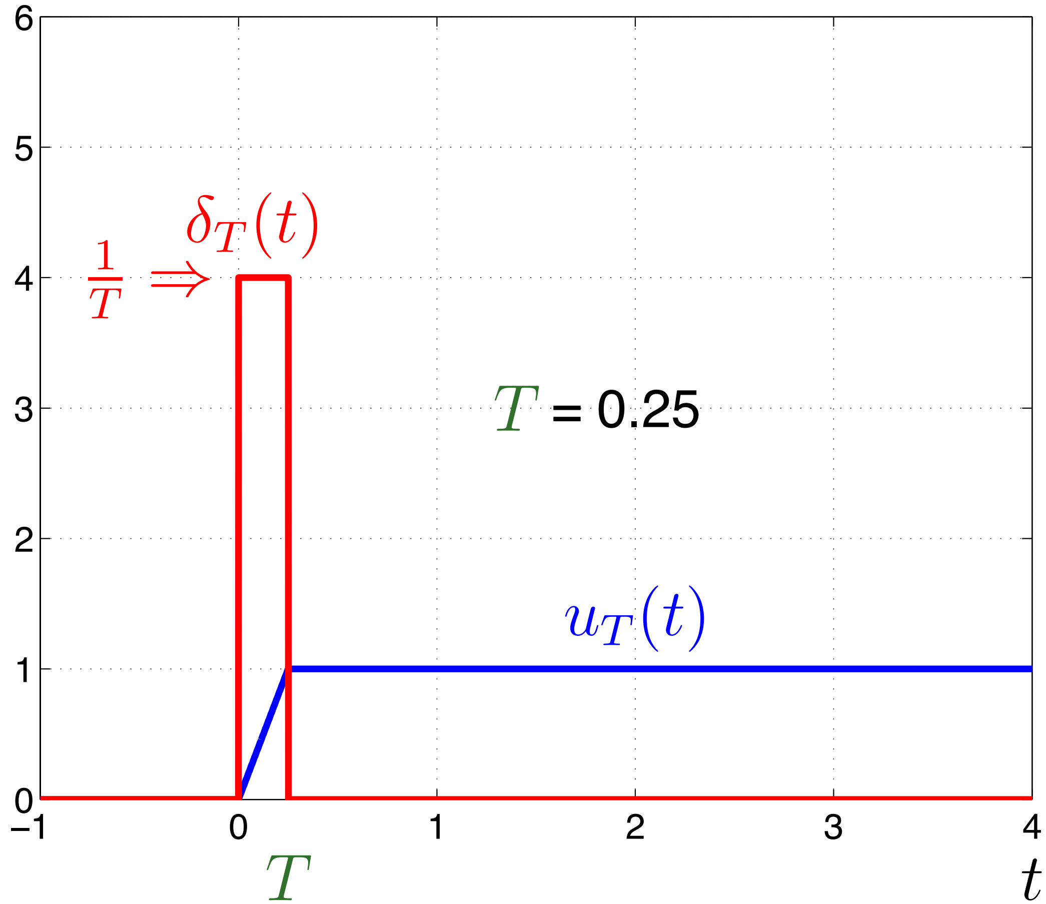
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



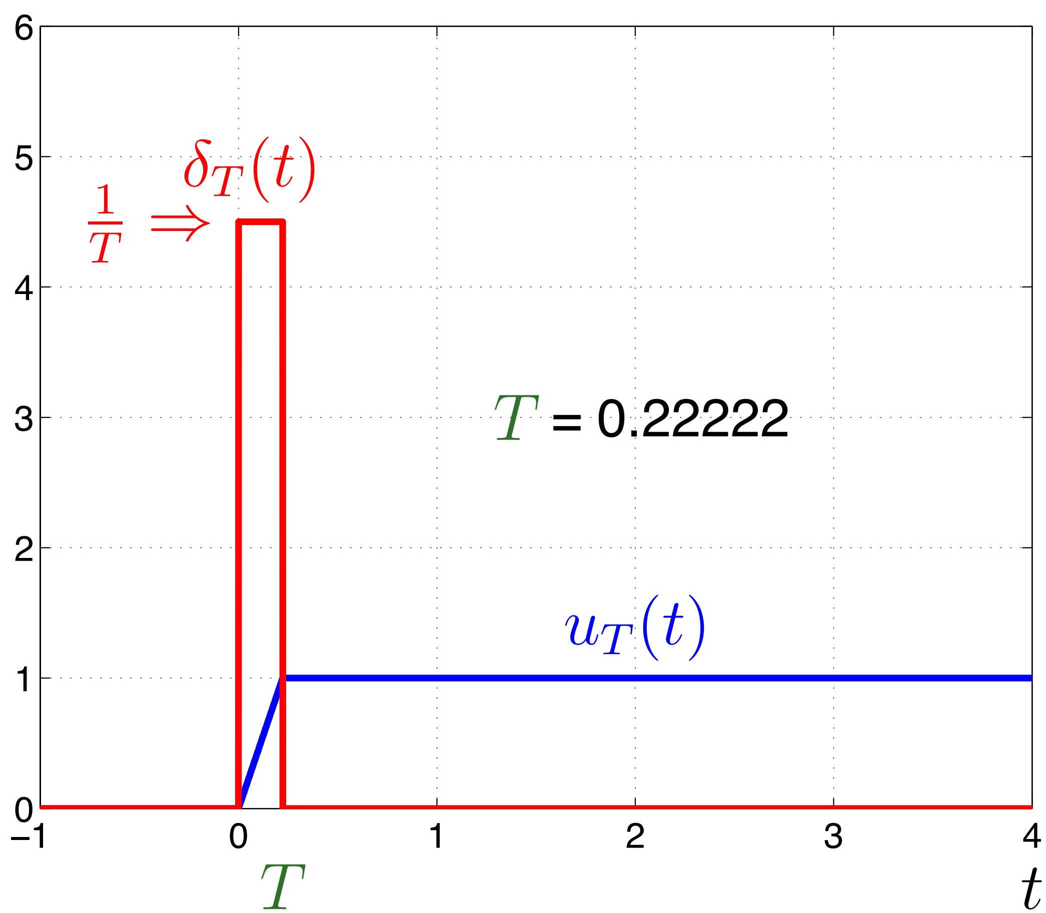
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



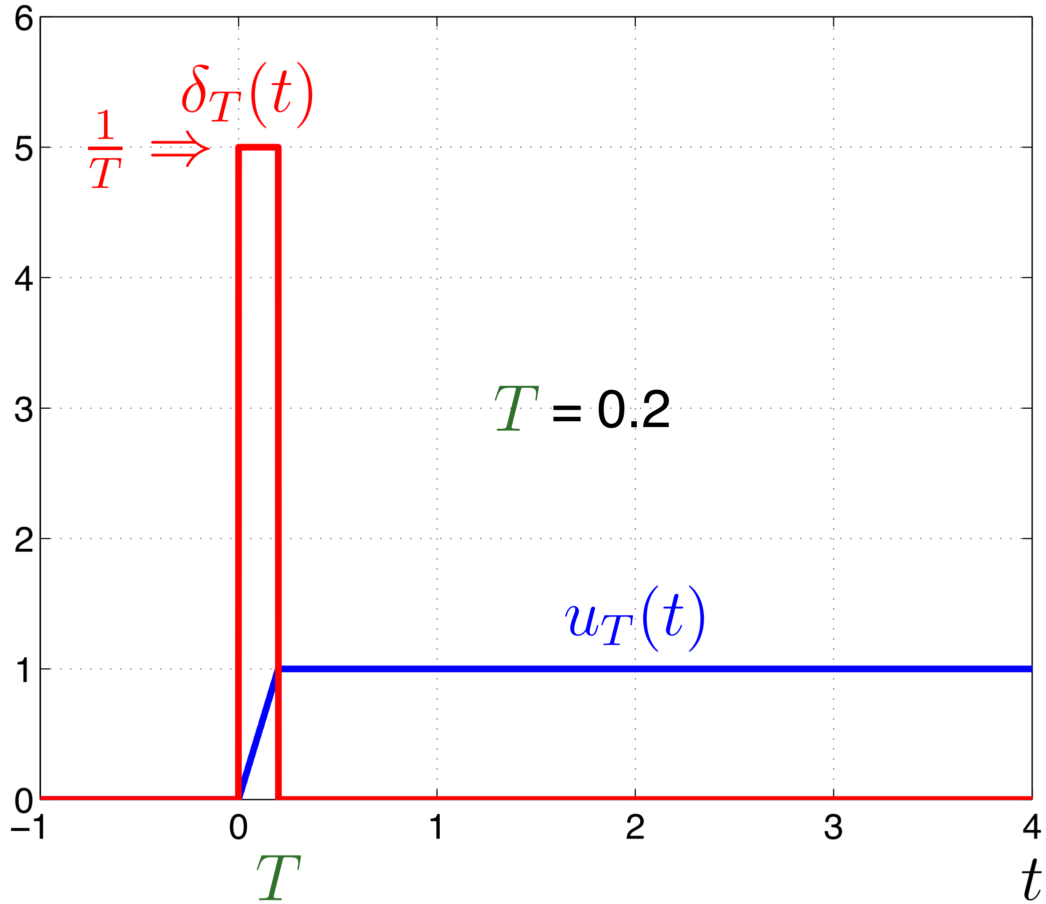
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$u_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \leq t \leq T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{\dot{u}_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & T < t \end{cases}$$

- $U(t) = \lim_{T \to 0} u_T(t)$
- $\delta(t) = \lim_{T \to 0} \delta_T(t)$

Aproximando amostras de $x(t)$ *com* $\delta_T(t)$

- Amostrando $x(kT)\delta_T(t-kT)T$ de um sinal $x(t)$

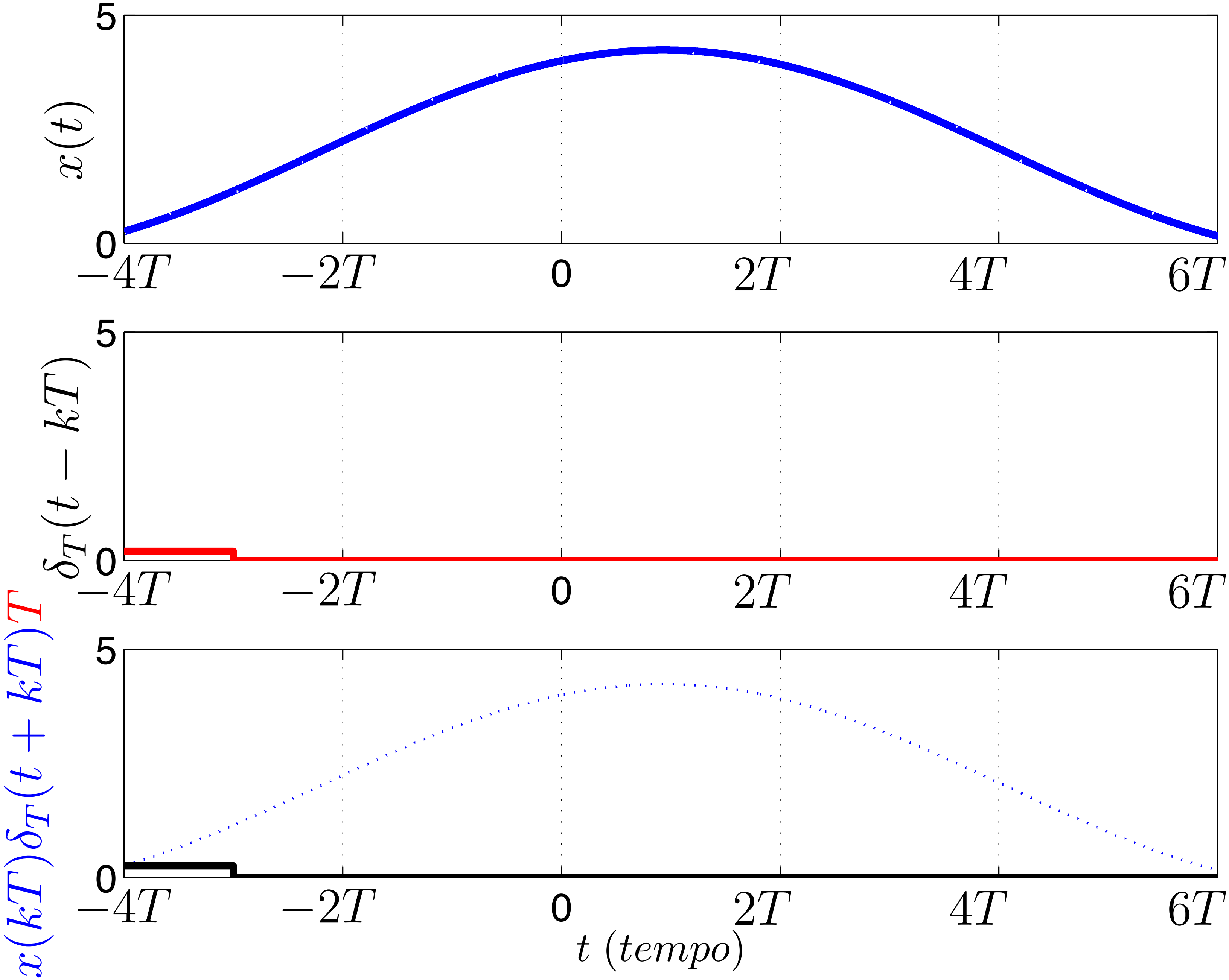
  Para $k=0$:

$$x(t)\delta_T(t-kT)T = x(0)\delta_T(t)T$$

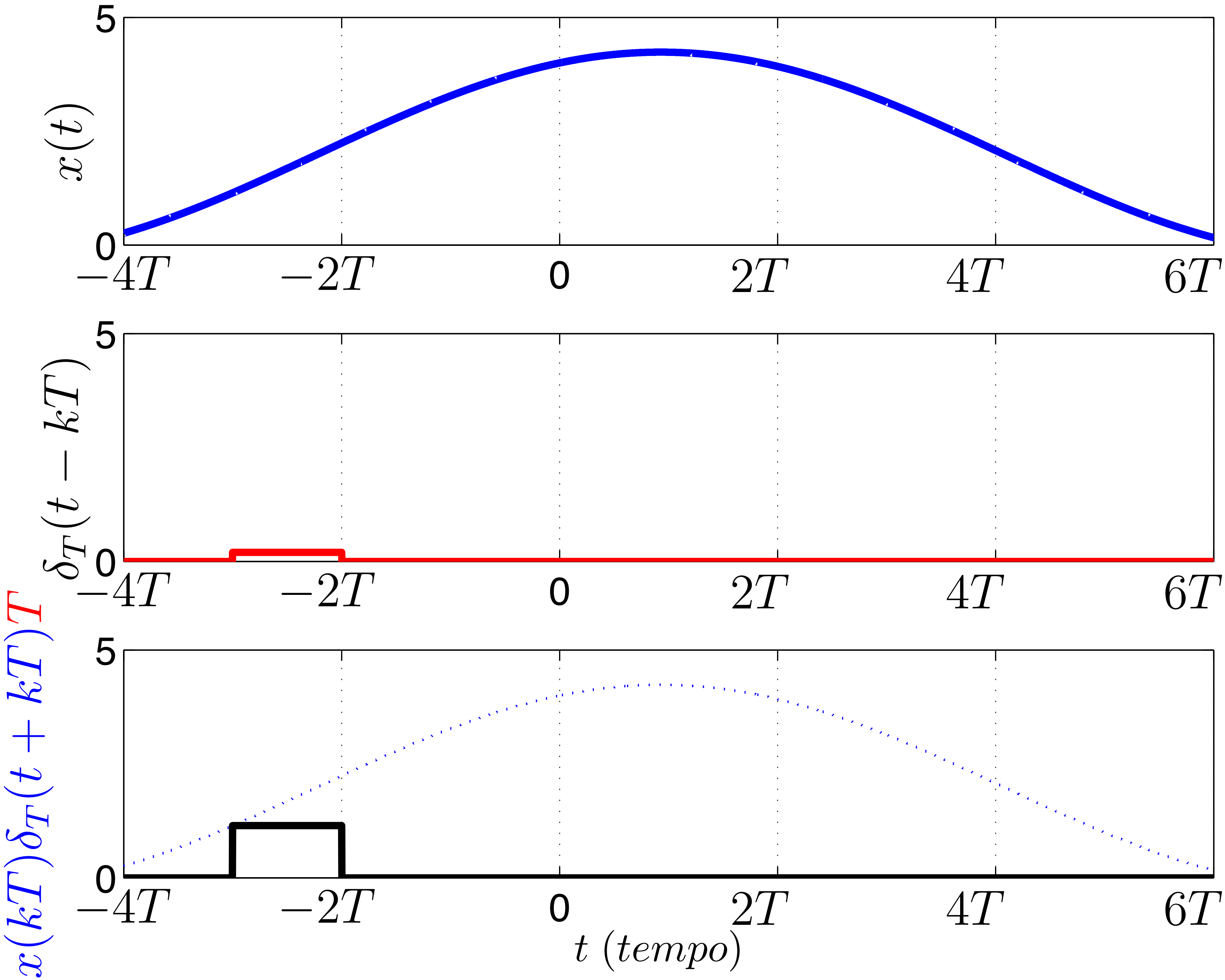
  Para $\forall\ k$:

$$x(t)\delta_T(t-kT)T = x(kT)\delta_T(t-kT)T$$

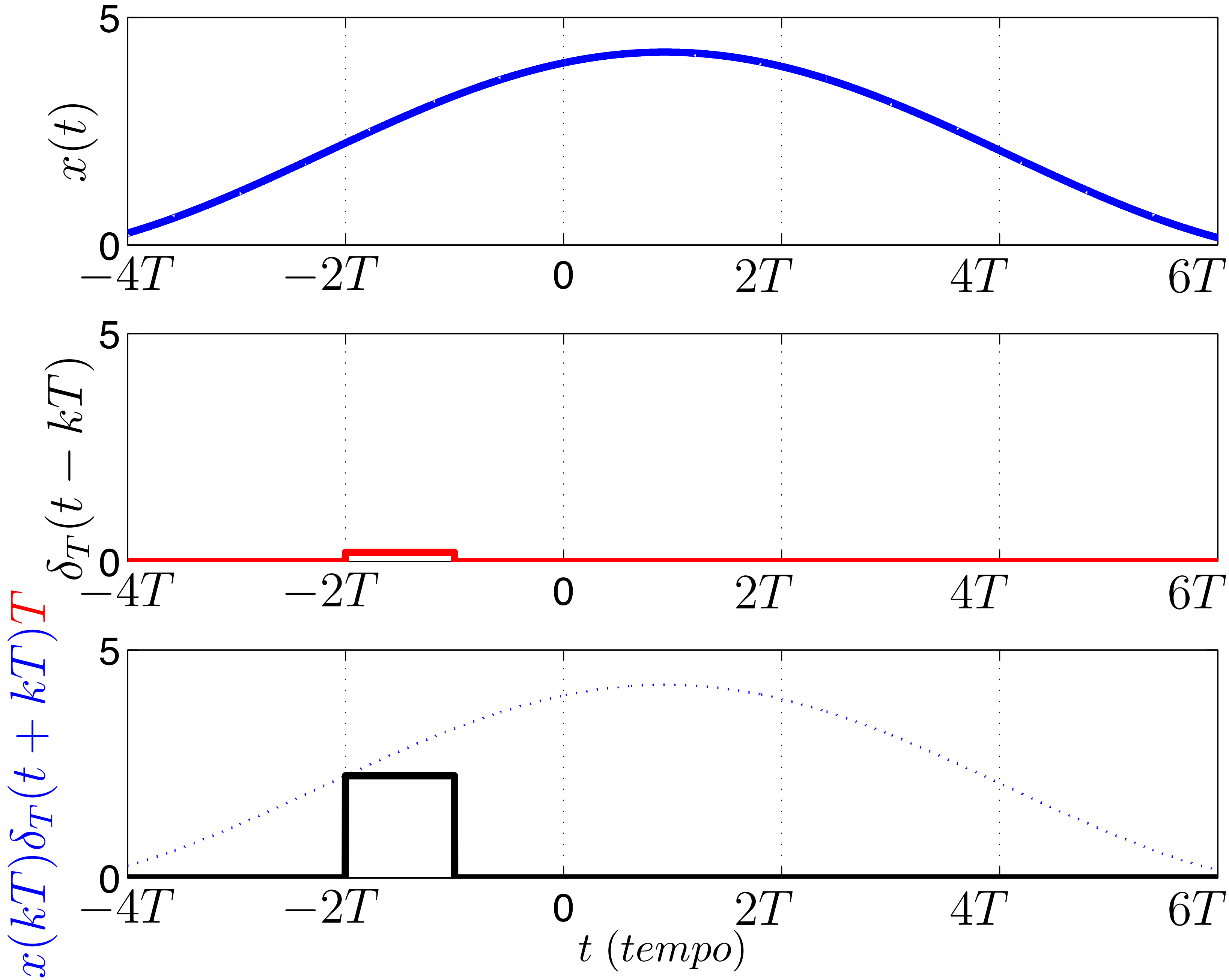
$x(t)\delta_T[t-kT]T = x(kT)\delta(t-kT)T,\, k=-4$



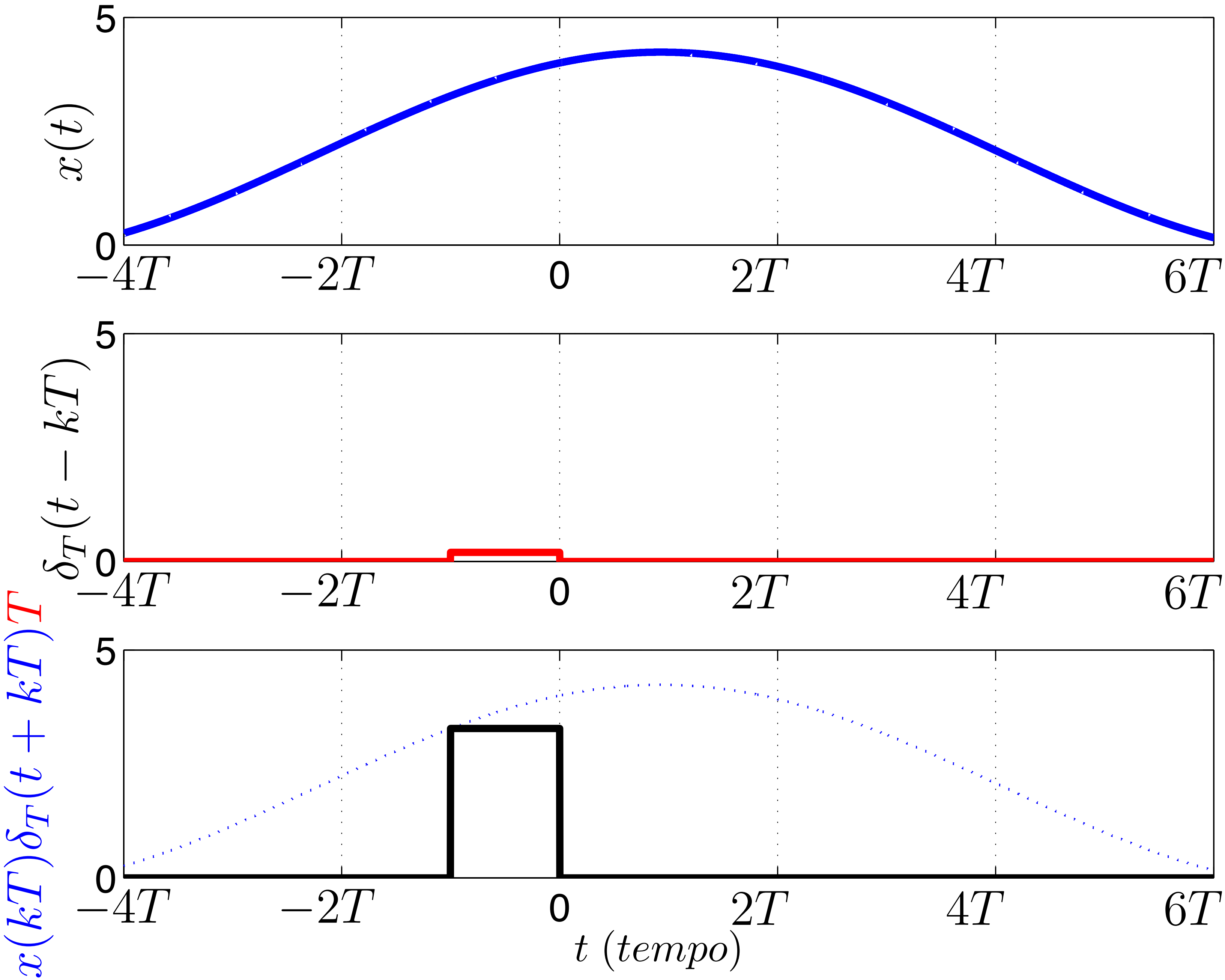
$x(t)\delta_T[t-kT]T = x(kT)\delta(t-kT)T\,,\, k=-3$



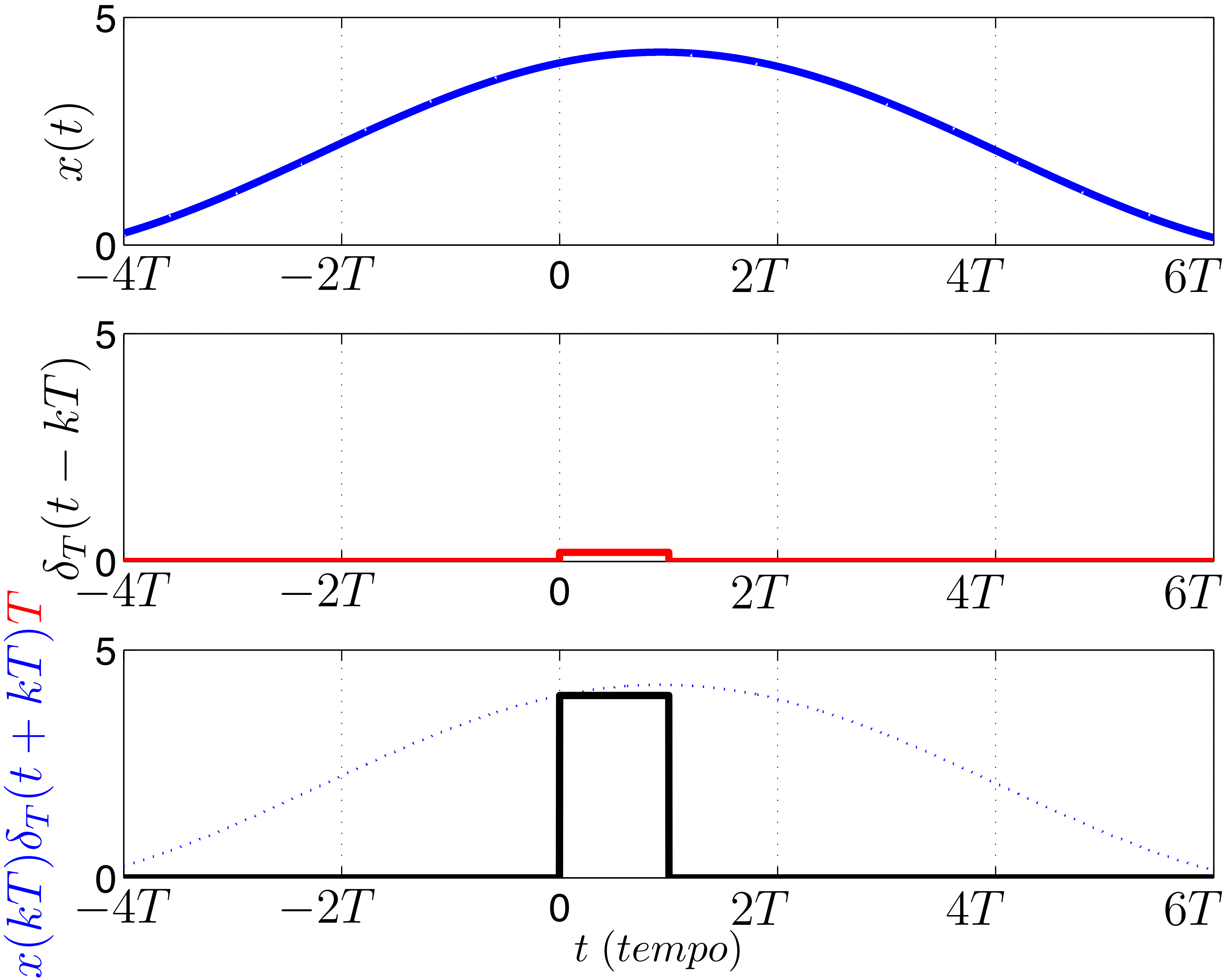
$x(t)\delta_T[t-kT]T = x(kT)\delta(t-kT)T\,,\, k=-2$



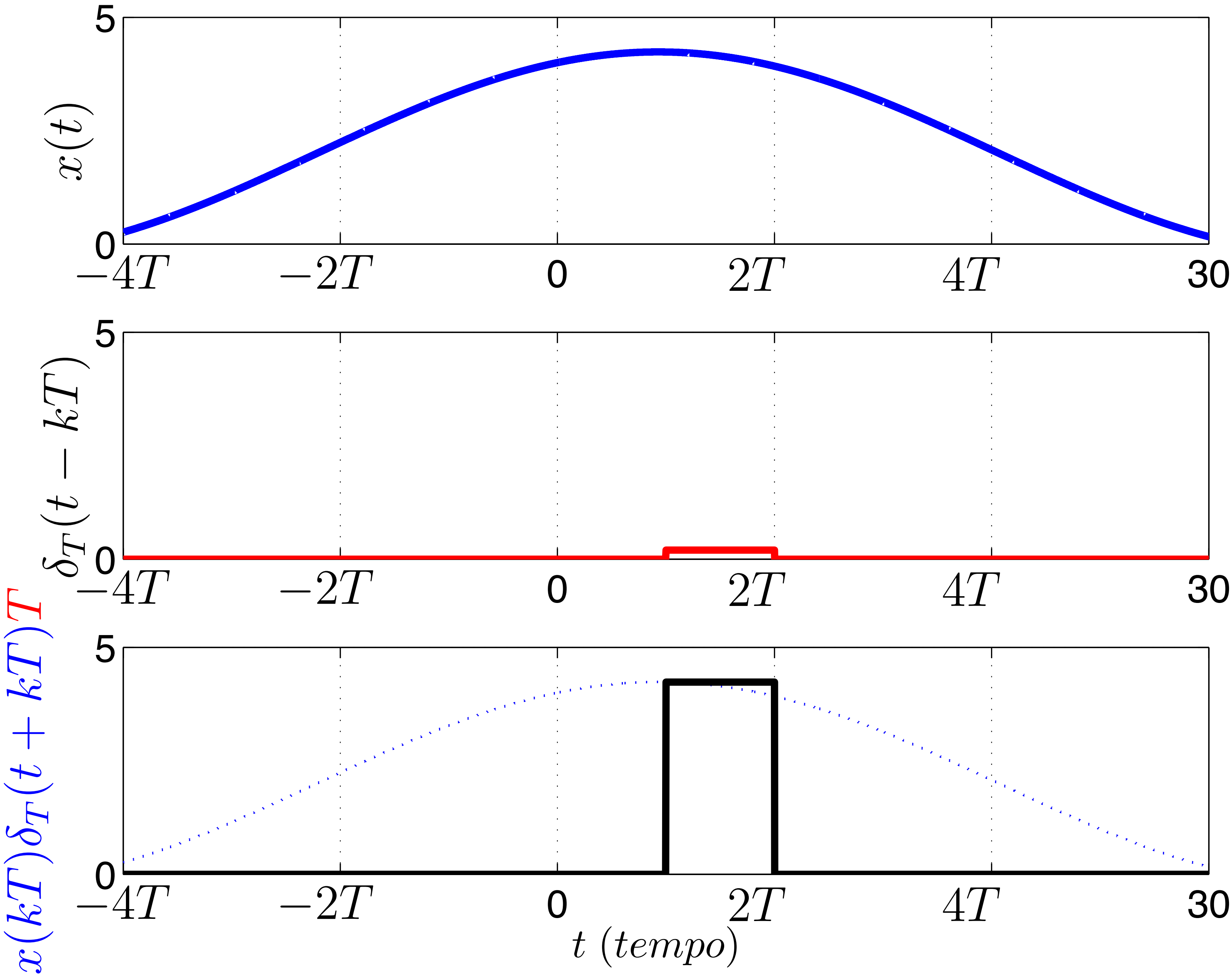
$x(t)\delta_T[t-kT]T = x(kT)\delta(t-kT)T\,, k=-1$



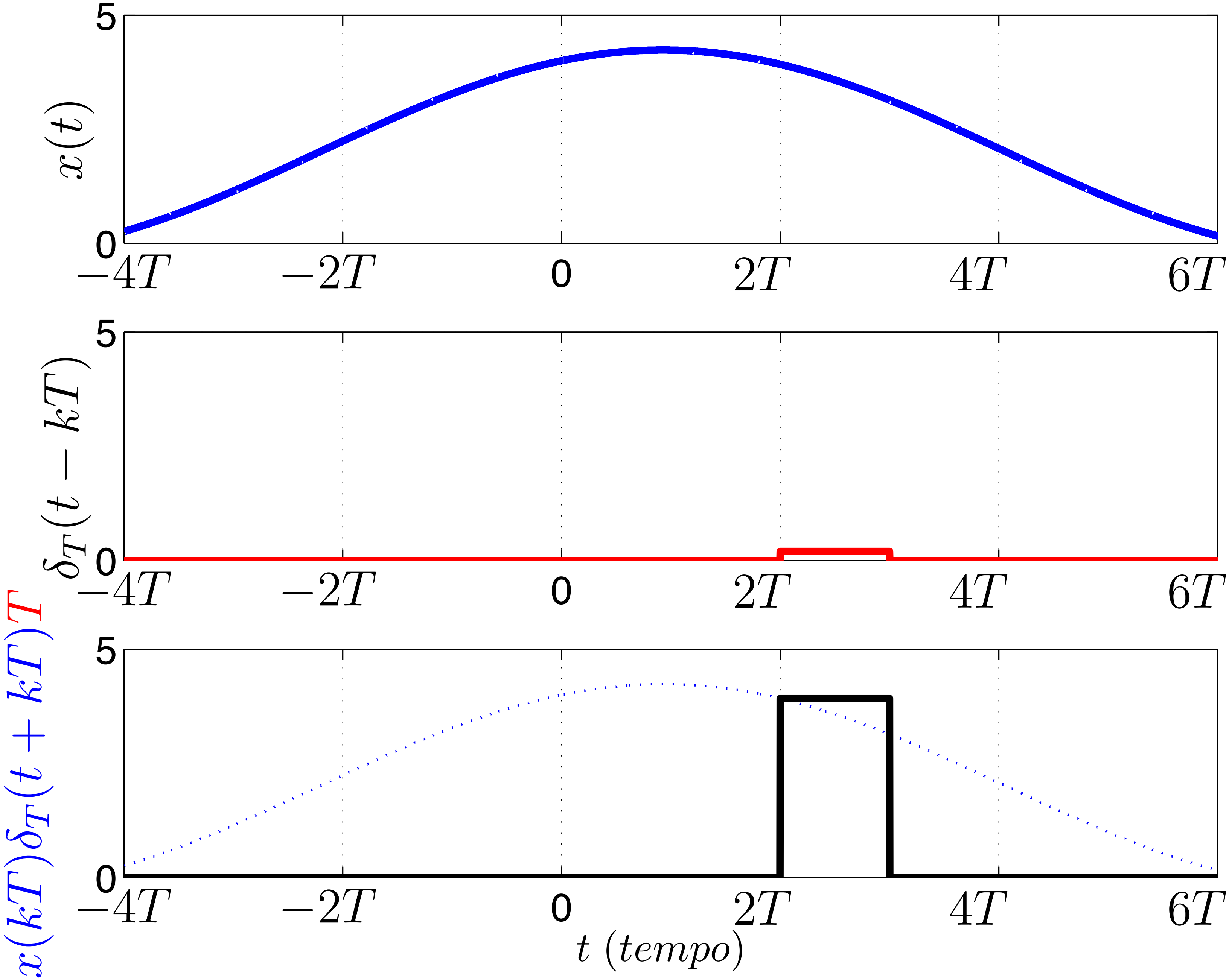
$x(t)\delta_T[t-kT]T = x(kT)\delta(t-kT)T\,,\, k=0$



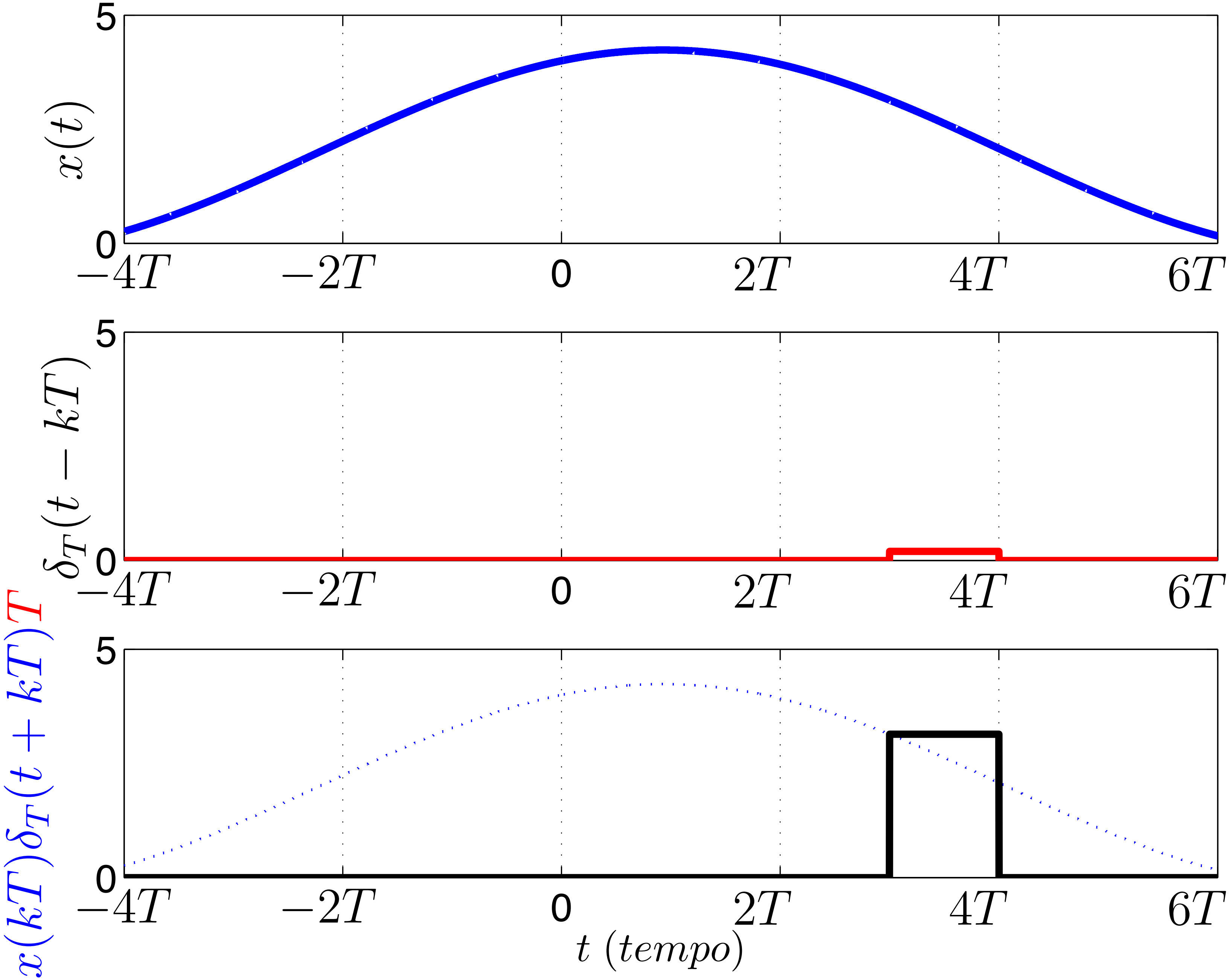
$x(t)\delta_T[t-kT]T = x(kT)\delta(t-kT)T \, , \, k=1$



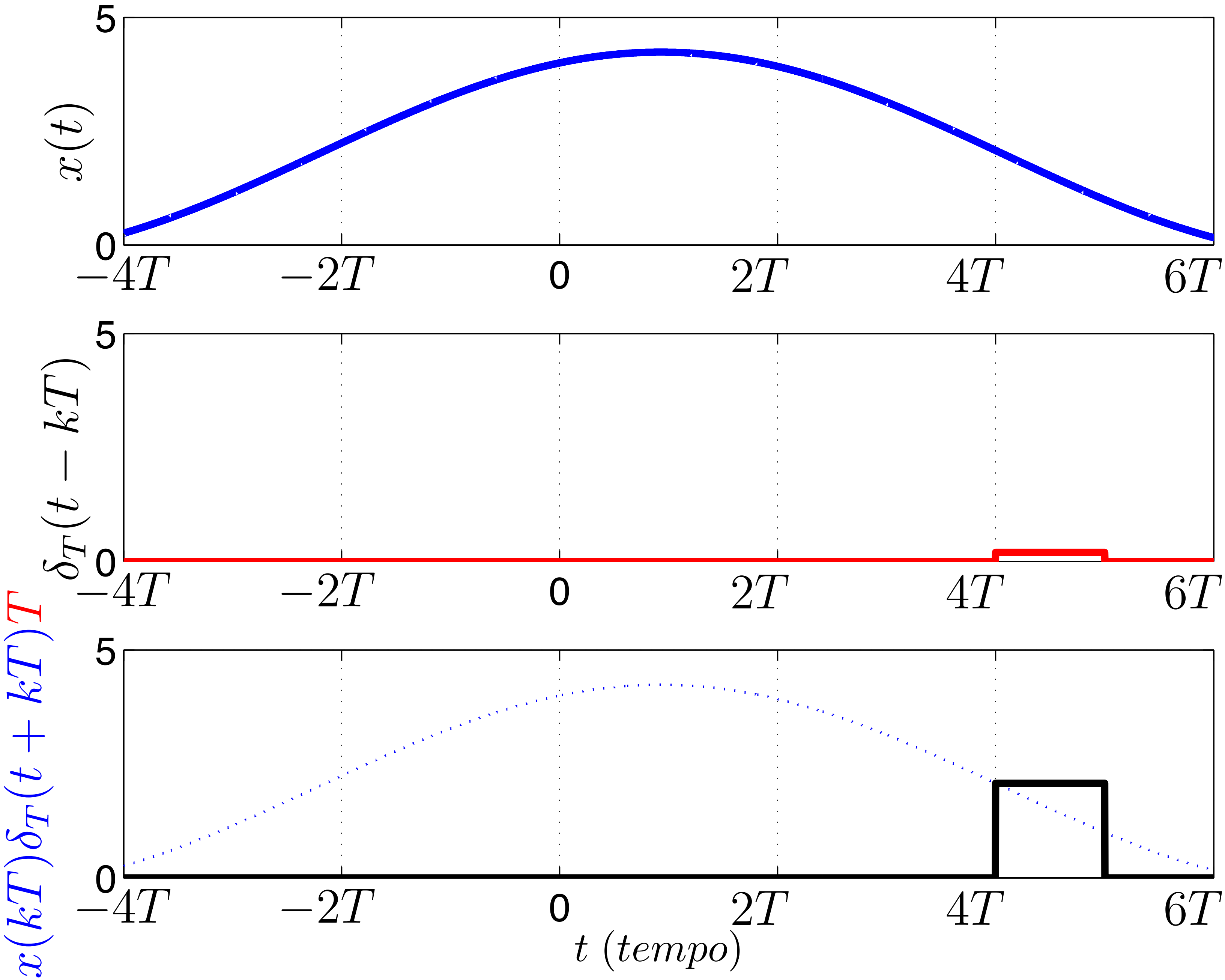
$x(t)\delta_T[t-kT]T = x(kT)\delta(t-kT)T\,, k=2$



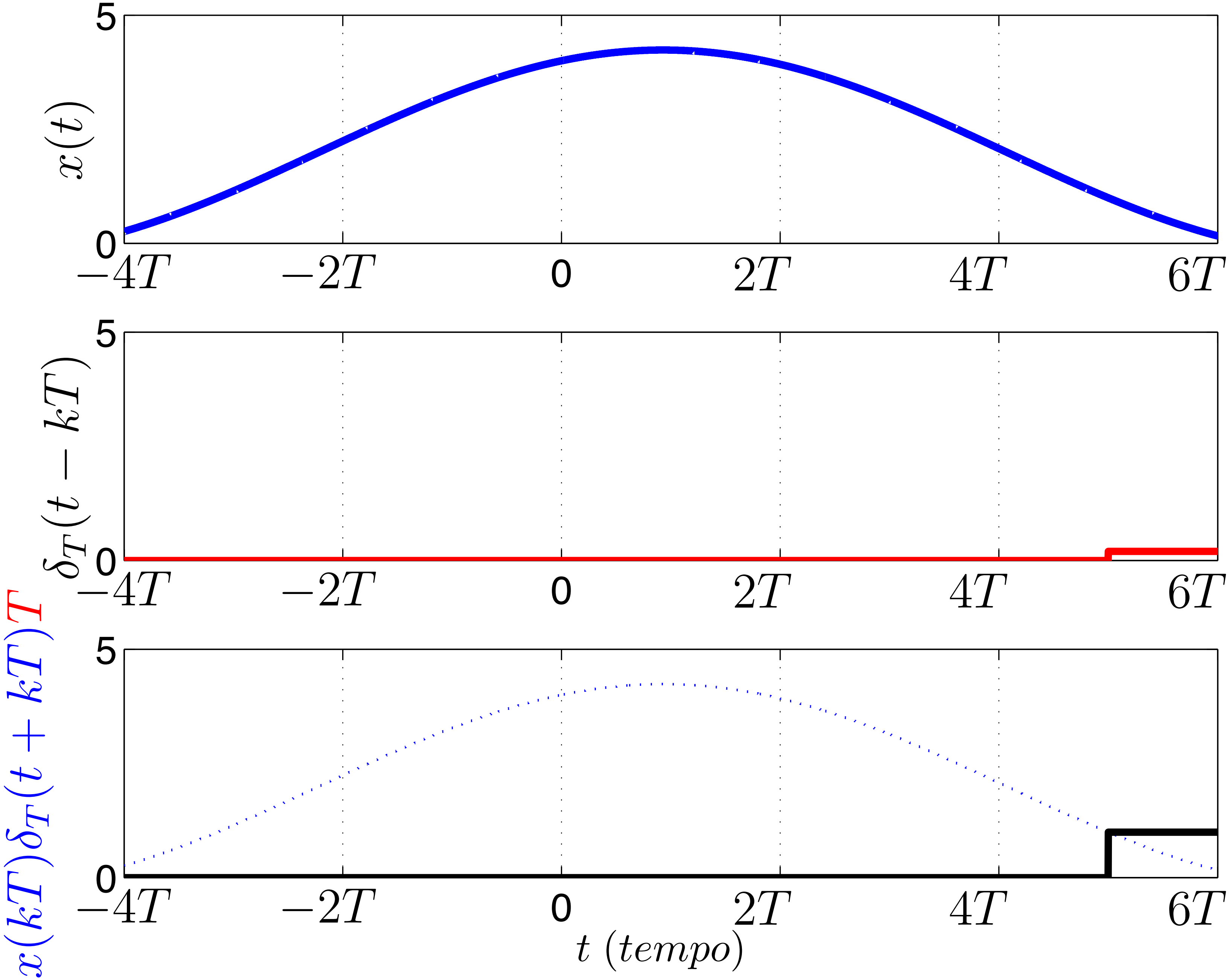
$x(t)\delta_T[t-kT]T = x(kT)\delta(t-kT)T, k=3$



$x(t)\delta_T[t-kT]T = x(kT)\delta(t-kT)T\,, k=4$



$x(t)\delta_T[t - kT]T = x(kT)\delta(t - kT)T, k = 5$



Sinal aproximado

Considere as amostras aproximadas

$$x(kT)\delta_T(t-kT)T$$

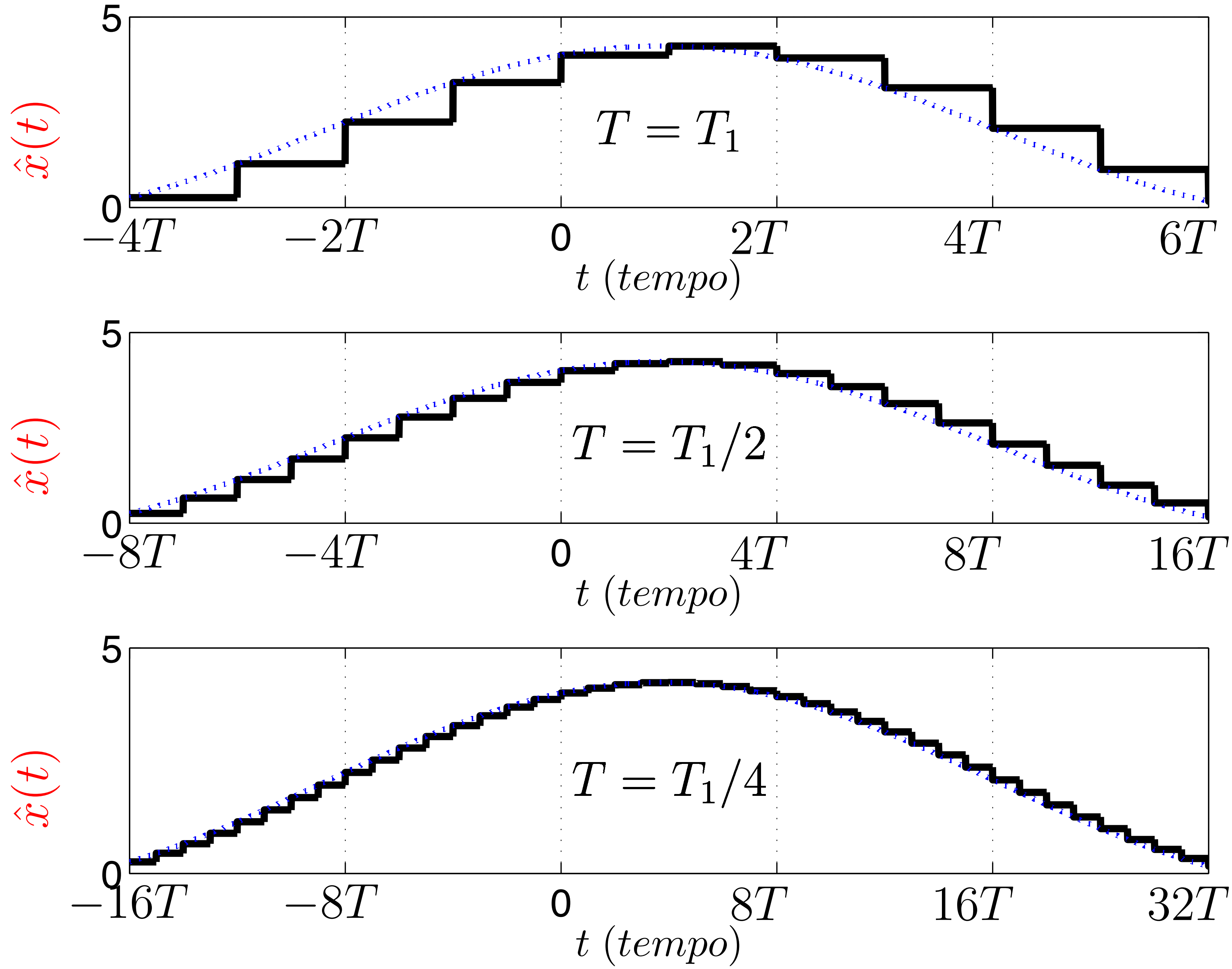
de um sinal $x(t)$.

- Construindo um sinal aproximado usando todas as amostras aproximadas

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta_T(t-kT)T$$

- $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ a medida que $T \rightarrow 0$?

$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta_T(t-kT)T$



Reescrevendo $x(t)$ (versão 1)

- Percebendo que:

$$x(t) = \lim_{T \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta_T(t - kT)T$$

  - Sabendo que:

$$\lim_{T \to 0} \delta_T(t) = \delta(t)$$

- Temos:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Reescrevendo $x(t)$ (versão 2)

- Propriedade seletiva do impulso

$$x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$$

- Portanto,

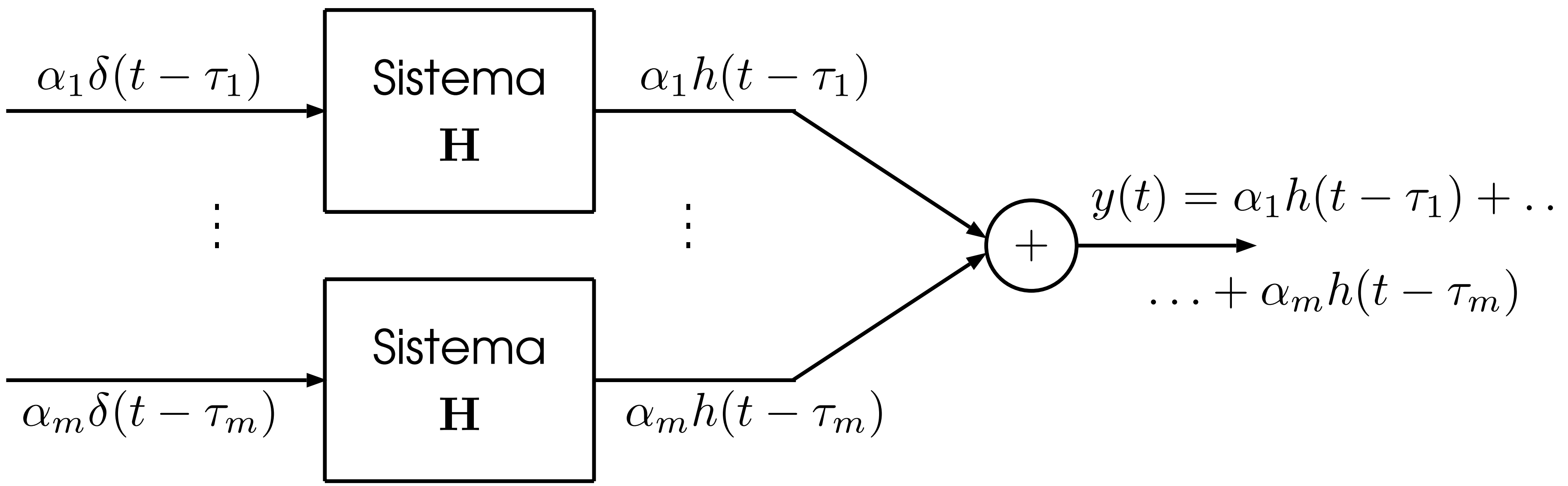
$$\begin{aligned} x(t) &= x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Integral de Convolução

- Se $x = \delta(t)$ ou $x = \delta[n]$, a saída do sistema, resposta ao impulso, será representada por $y = h(t)$ ou $y = h[n]$ para o caso do tempo contínuo e discreto, respectivamente.
- Devido o sistema $\mathbf{H}$ ser LIT:
  - Dada uma entrada $x(t)$, é possível usar $h(t)$ para encontrar $y(t)$.

- Assumindo que $\mathbf{H}$ é um sistema linear e invariante no tempo.
  - Logo, para o caso do sistema de tempo contínuo:

  - Para uma entrada: $x(t) = \alpha_1\delta(t-\tau_1) + \ldots + \alpha_m\delta(t-\tau_m)$



Integral de Convolução

- Se a entrada $x(t) = \delta(t)$ for aplicada, temos na saída $y(t) = h(t)$
- Para uma entrada qualquer $x(t)$, temos, como no caso discreto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

Sumário (versão 1): Obtenção da Integral de Convolução

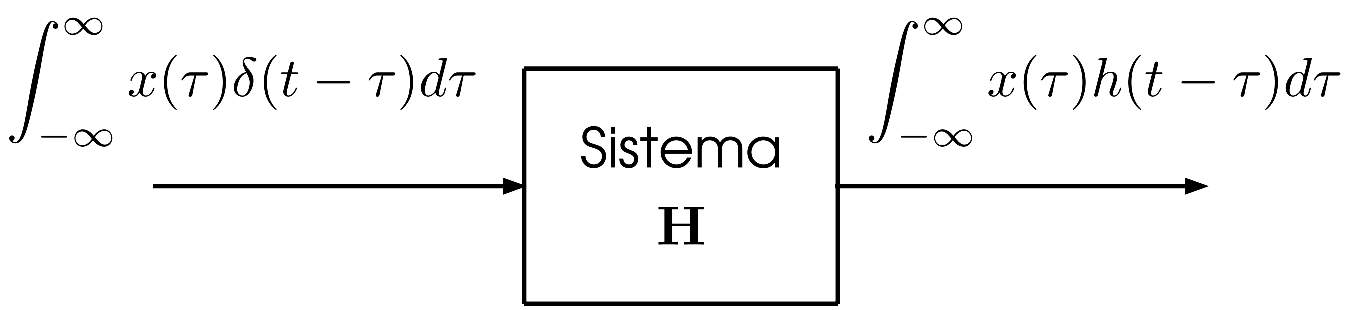
- Assuma que o sistema $\mathbf{H}$ é Linear e Invariante no Tempo

- Devido a propriedade de Invariância no Tempo, temos

Sumário (versão 1): Obtenção da Integral de Convolução

- Devido a propriedade de Homogeneidade, temos

  - t representa o índice do tempo, consequentemente $x(t)$ representa um sinal;
  - $x(\tau)$ representa o valor de $x(t)$ no instante τ.
- Devido a propriedade de Aditividade, temos



Obtenção da Integral de Convolução

- Devido todo o sinal contínuo limitado $x(t)$ poder ser expresso por meio de impulsos unitários:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Então, temos que,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Se conhecemos $h(t)$, podemos calcular a saída $y(t)$ para qualquer entrada $x(t)$.

Sumário (versão 2): Obtenção da Integral de Convolução

- Assuma que o sistema $\mathbf{H}$ é Linear e Invariante no Tempo

$$y(t) = \mathbf{H}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

- Devido a propriedade de Aditividade

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}\left\{x(\tau)\delta(t-\tau)\right\} d\tau$$

- Devido a propriedade de Homogeneidade

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{H}\left\{\delta(t-\tau)\right\} d\tau$$

- Devido a propriedade de Invariância no Tempo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Integral de Convolução

- Assumindo que o sistema $\mathbf{H}$ é Linear e Invariante no Tempo,

$$y(t) = \mathbf{H}\left\{x(t)\right\}$$

- Então, temos que

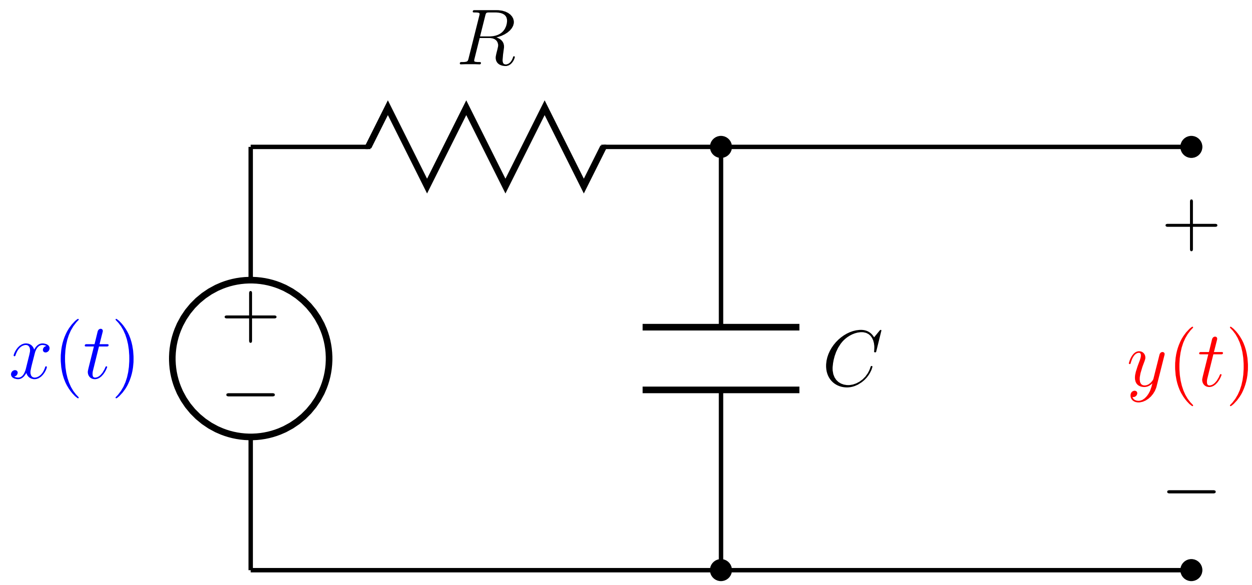
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Portanto, se conhecemos $h(t)$, podemos calcular a saída $y(t)$ para qualquer entrada $x(t)$.
- Usamos $*$ para representar a integral de convolução

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Exemplo 1 - Circuito RC

Considere novamente o Circuito RC



Suponha que o seguinte sinal de entrada $x(t)$ é aplicado no circuito:

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

Exemplo 1 - (Solução 1)

Integral de convolução

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Sendo

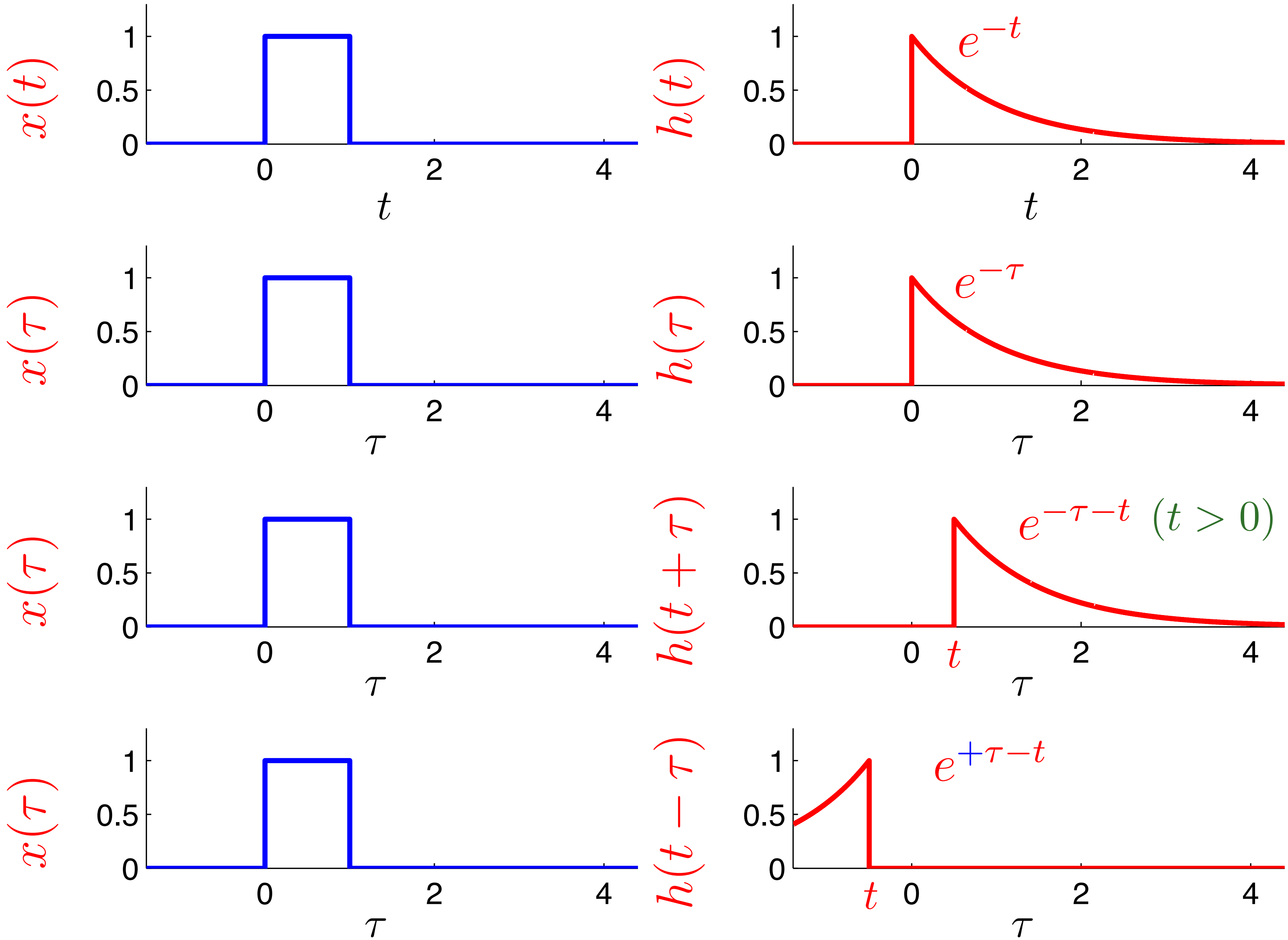
$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$$

com $RC = 1$ e

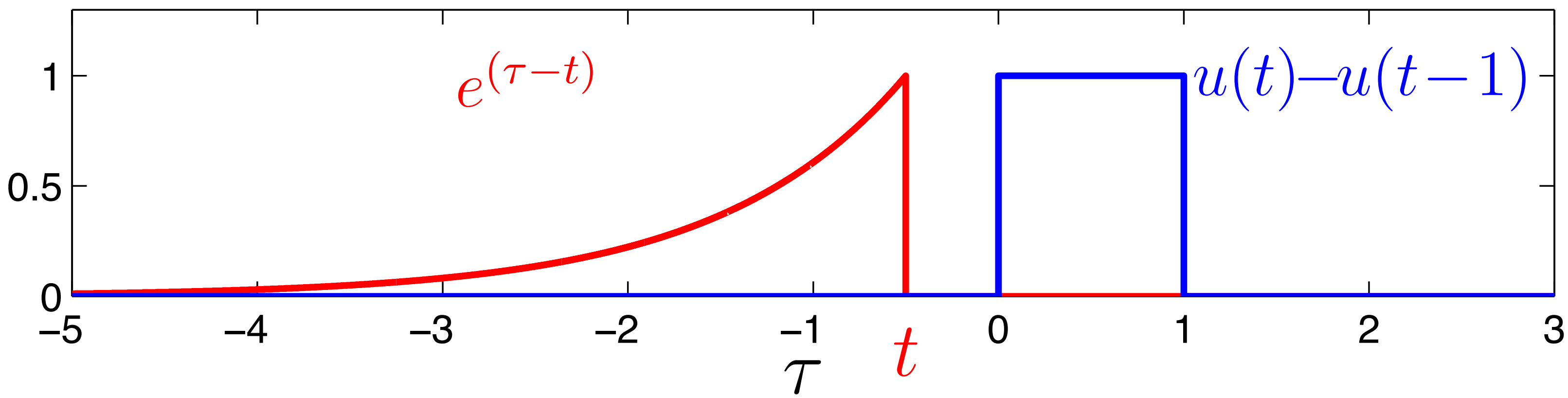
$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

- Determinar intervalos de integração.

Exemplo 1 - (Solução 1)



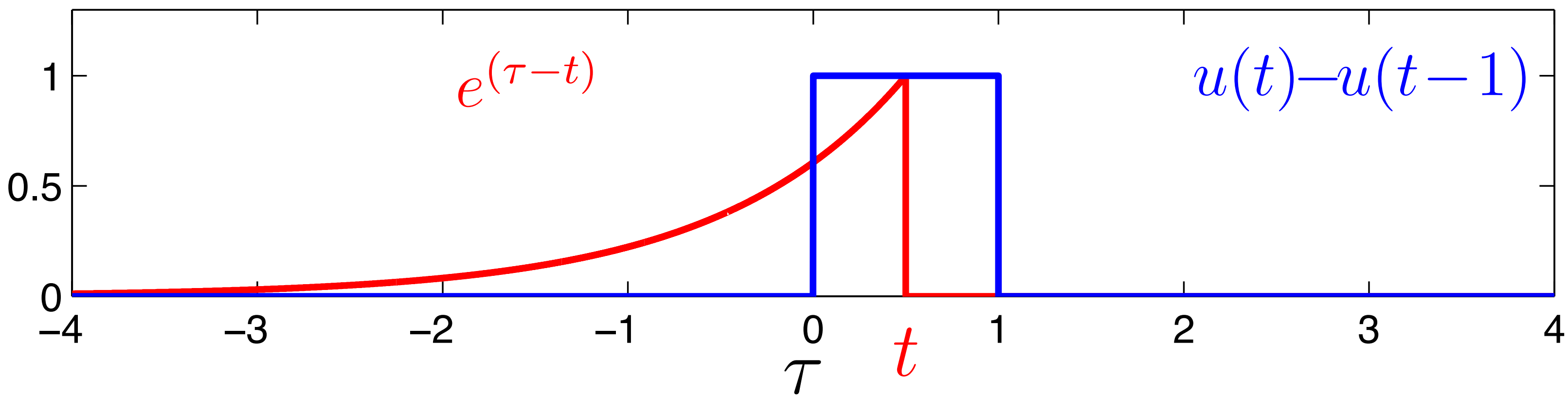
Exemplo 1 - *(Primeiro Intervalo)*



- Note que para $t < 0$ não existe sobreposição entre as curvas.
- Portanto,

$$\text{Se } t < 0, \text{ então, } y(t) = 0, \forall \tau$$

Exemplo 1 - *(Segundo Intervalo)*



- Note que $\forall\ 0 \leq t \leq 1$ o domínio de sobreposição entre as curvas aumenta a medida que t também aumenta .
- Portanto,

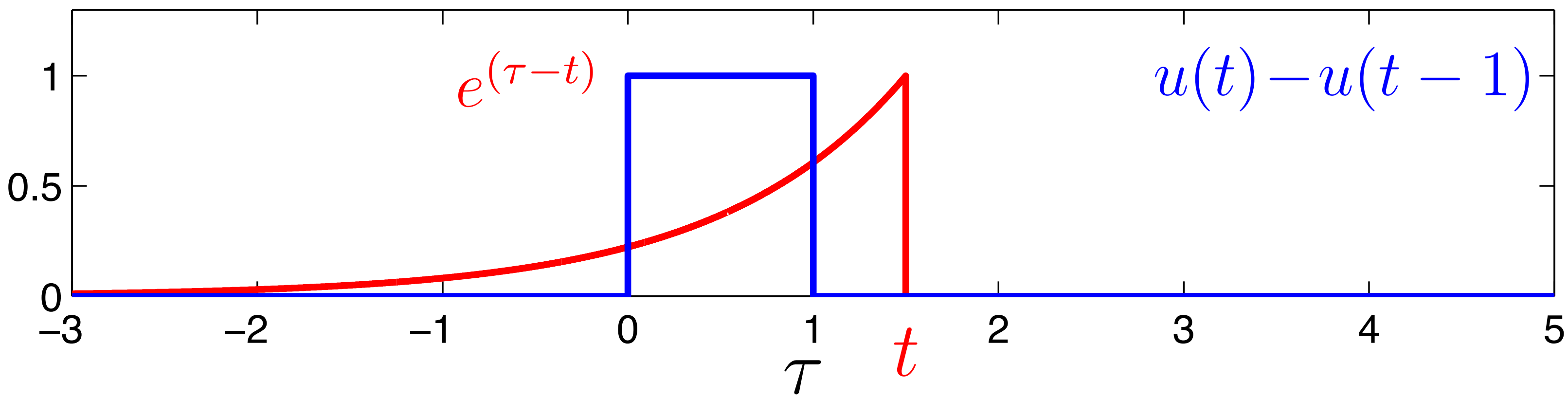
Se $0 \leq t \leq 1$, então, $y(t) \neq 0$, para $0 \leq \tau \leq t$

Exemplo 1 - (Segundo Intervalo)

- Para todo $0 \leq t \leq 1$.
- O intervalo de integração é $0 \leq \tau \leq t$.
- A integral de Convolução é calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t 1.e^{\tau - t} d\tau \\ &= e^{-t} \int_0^t 1.e^{\tau} d\tau \\ &= e^{-t}(e^{\tau}|_0^t) = e^{-t}(e^t - 1) \\ &= 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

Exemplo 1 - *(Terceiro Intervalo)*



- Note que para todo $t > 1$ o domínio de sobreposição entre as curvas permanece inalterado, sendo este $0 \leq \tau \leq 1$
- Portanto,

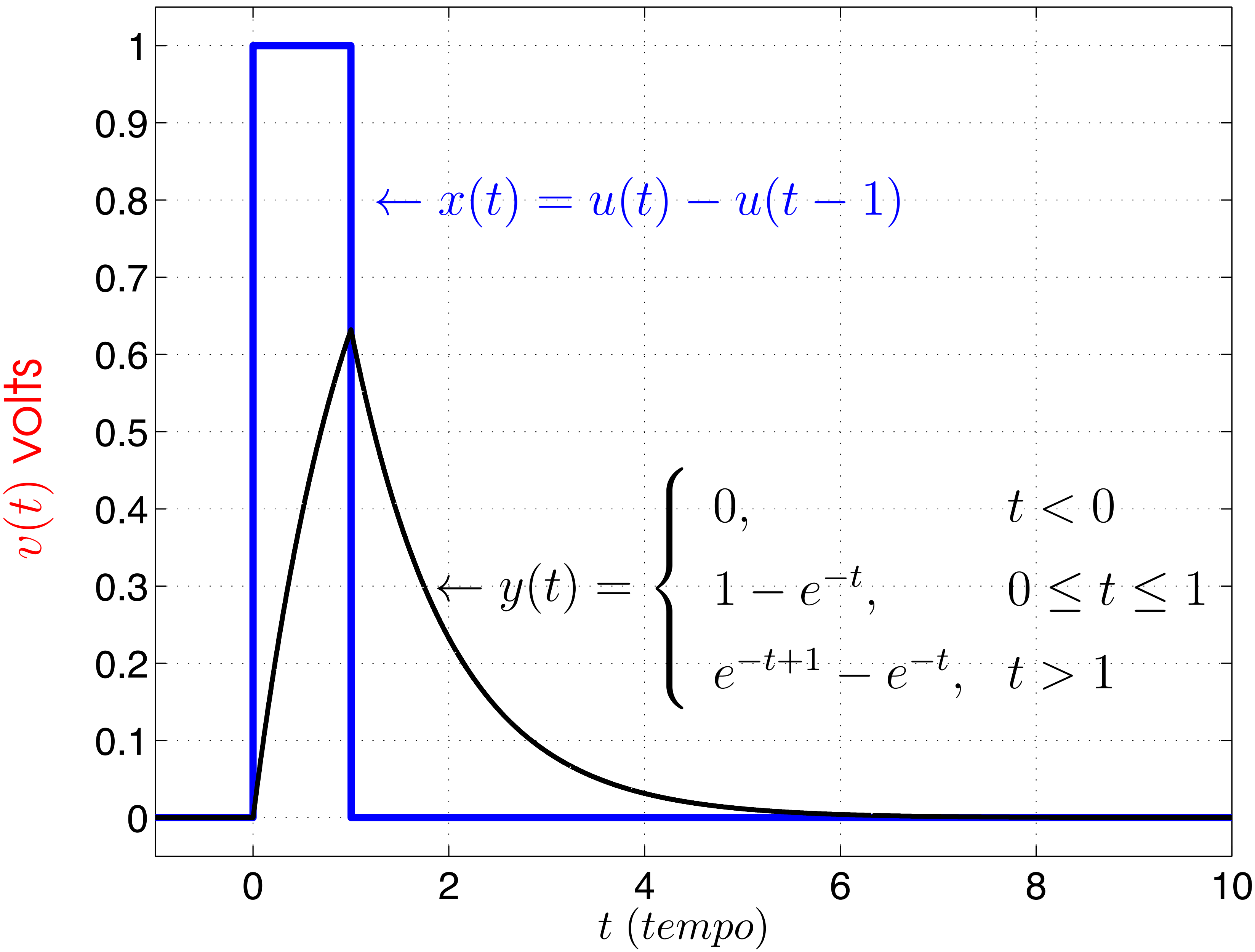
Se $t > 1$, então, $y(t) \neq 0$, para $0 \leq \tau \leq 1$

Exemplo 1 - *(Terceiro Intervalo)*

- Para todo $t > 1$.
- O intervalo de integração é $0 \leq \tau \leq 1$.
- A integral de Convolução é calculada da seguinte maneira:

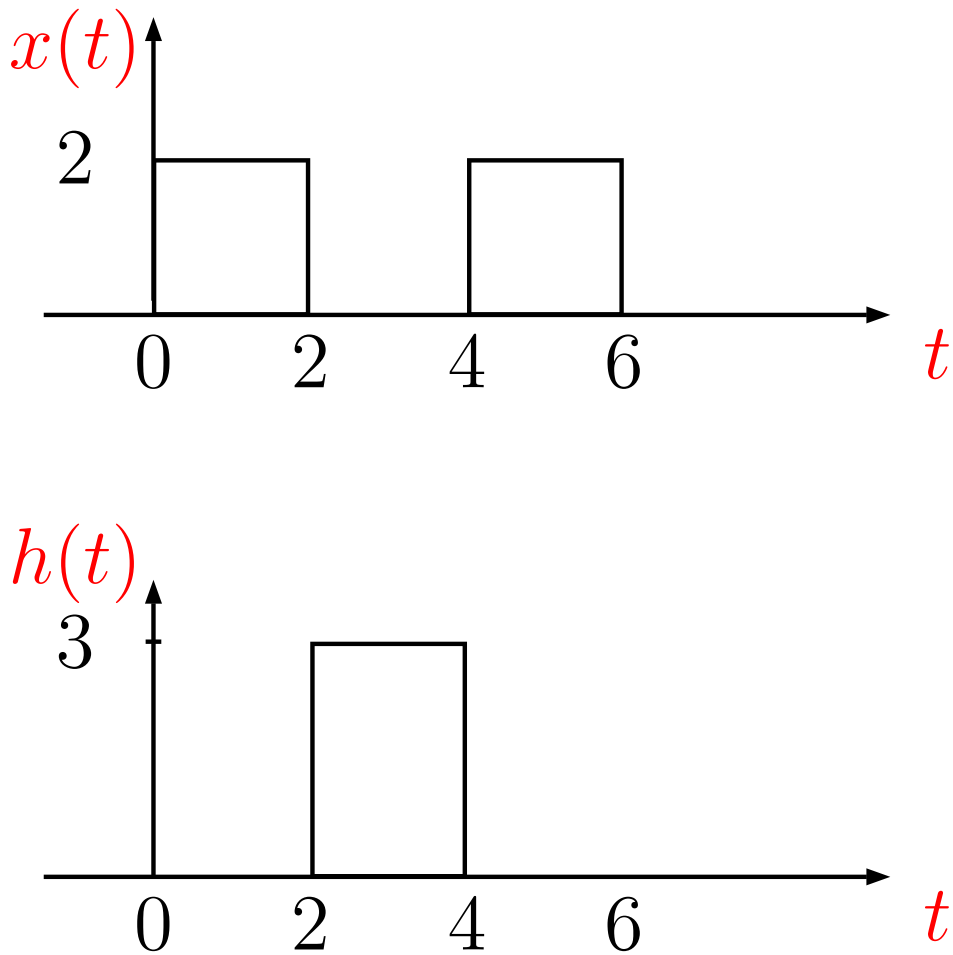
$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^1 1.e^{\tau - t} d\tau \\
&= e^{-t} \int_0^1 1.e^{\tau} d\tau \\
&= e^{-t}(e^{\tau}|_0^1) = e^{-t}(e^1 - 1) \\
&= e^{-t+1} - e^{-t}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 - Circuito RC -Solução



Exercício

Encontre a saída $y(t)$ de um sistema LIT com



Sistemas LIT

- Propriedades dos sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LIT)
  - Propriedades da Convolução
  - Memória, Causalidade, Invertibilidade, Estabilidade
  - Resposta ao degrau e resposta senoidal
- Sistemas LIT causais descritos por equações diferenciais e de diferenças
  - Diagramas de blocos

Propriedade Comutativa

- Em tempo discreto

$$
\begin{aligned}
x[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
&= \sum_{r=\infty}^{-\infty} x[n-r]h[r] \\
&= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]x[n-r] \\
&= h[n] * x[n]
\end{aligned}
$$

- Portanto,

$$
x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]
$$

Propriedade Comutativa

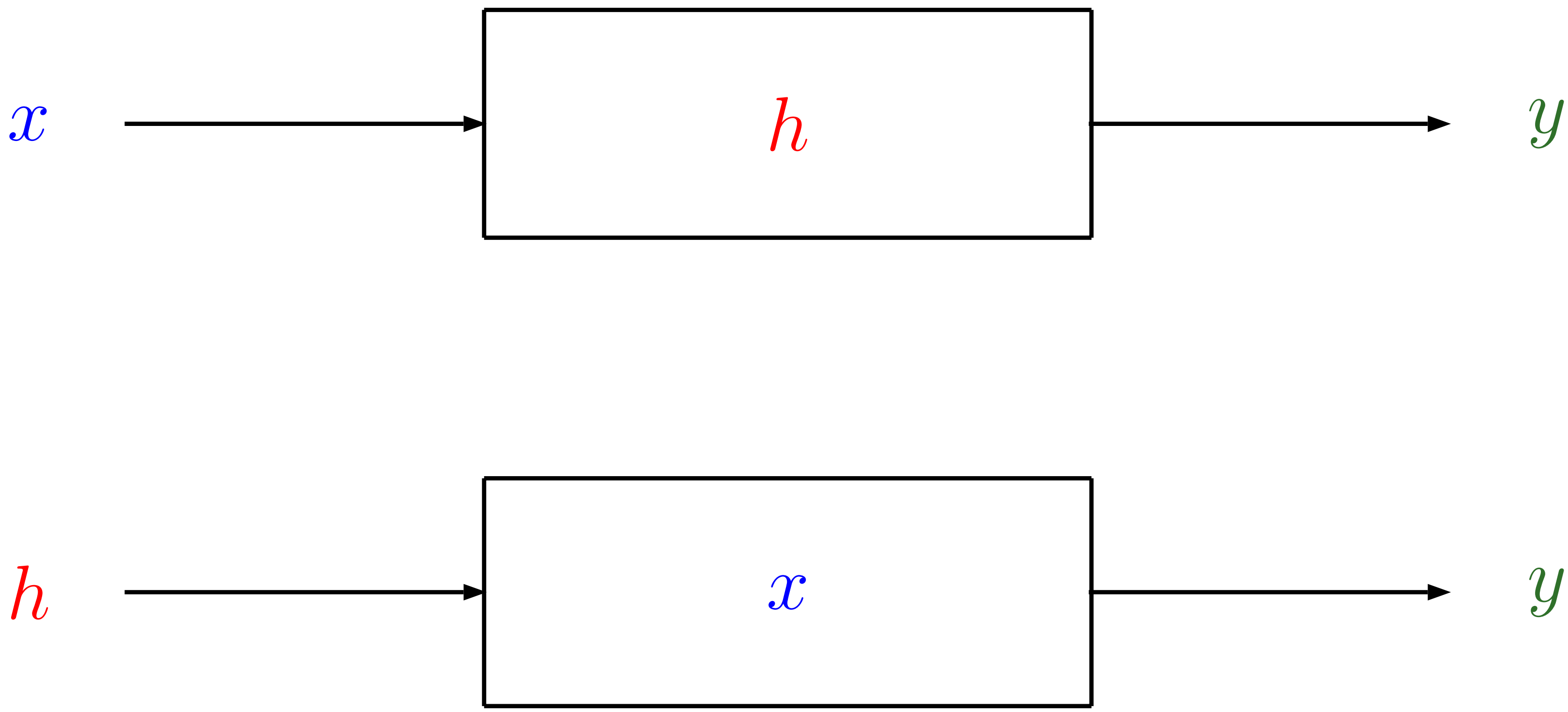
- Em tempo contínuo

$$\begin{aligned}
x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\nu)h(\nu)d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)x(t-\nu)d\nu \\
&= h(t) * x(t)
\end{aligned}$$

- Portanto,

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

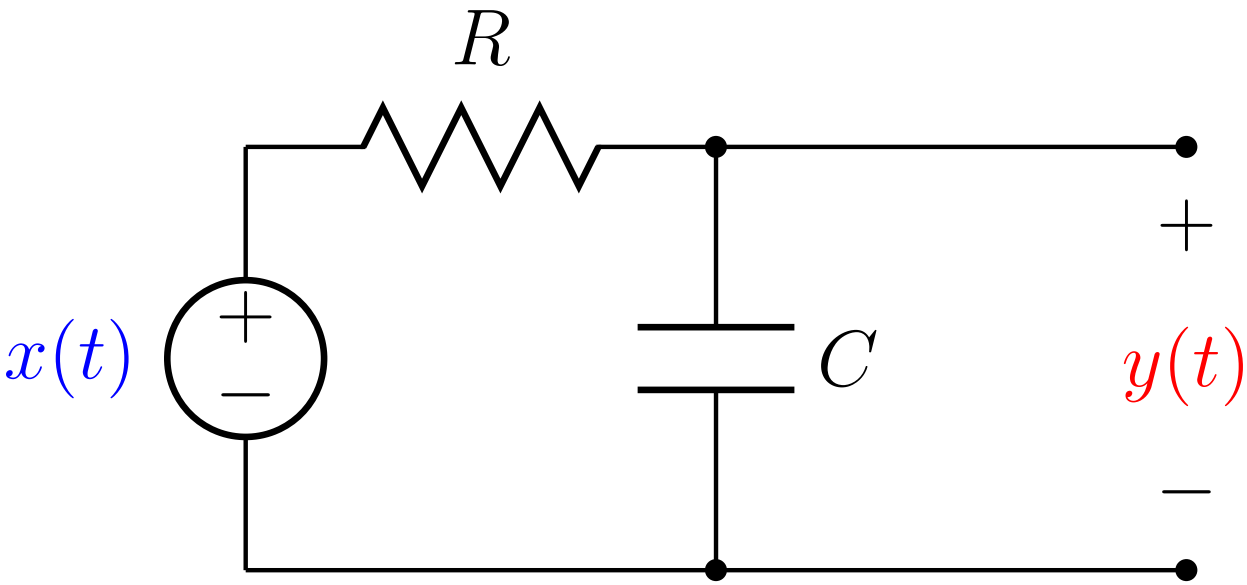
Propriedade Comutativa *(Diagrama de Blocos)*



- $x|y|h_i$ representa tanto $x(t)|y(t)|h_i(t)$ quanto $x[n]|y(t)|h_i(t)$

Exemplo 1 - Circuito RC

Considere novamente o Circuito RC



Suponha que o seguinte sinal de entrada $x(t)$ é aplicado no circuito:

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

Exemplo 1 - (Solução 2)

Integral de convolução

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu - t)h(\nu)d\nu$$

Sendo

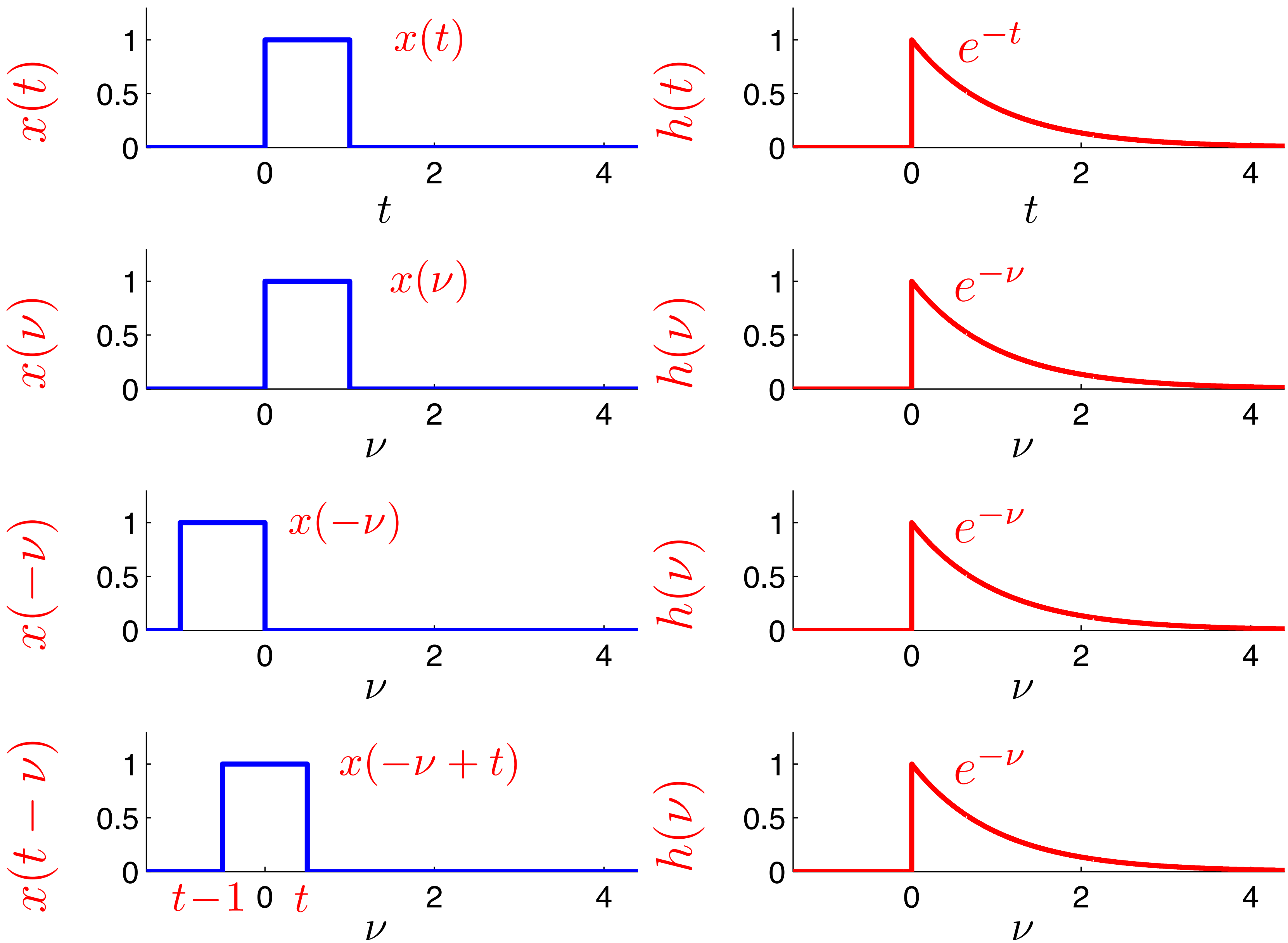
$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$$

com $RC = 1$ e

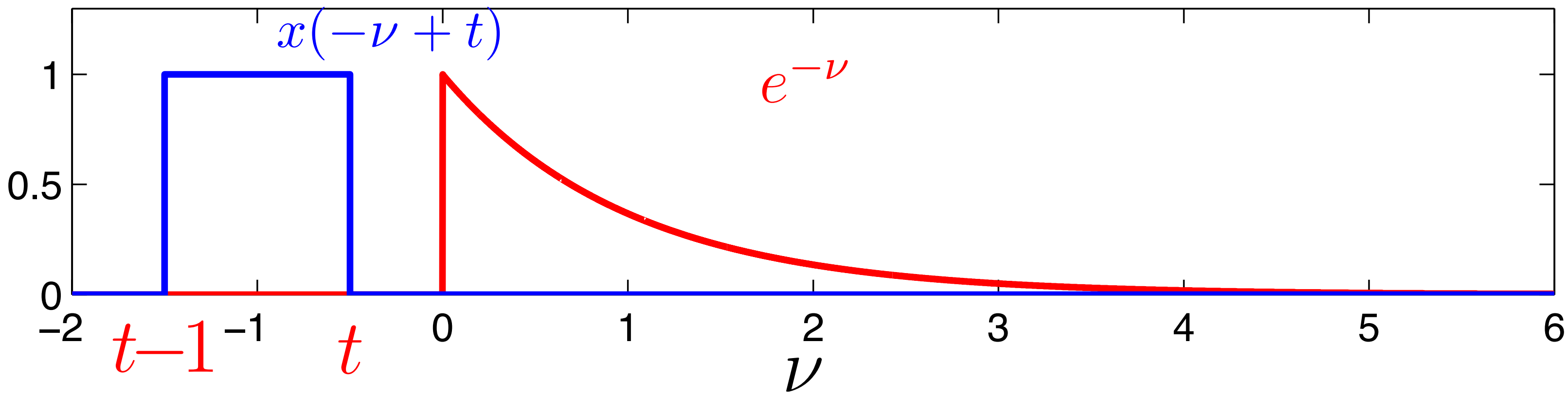
$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

- Determinar intervalos de integração.

Exemplo 1 - (Solução 2)



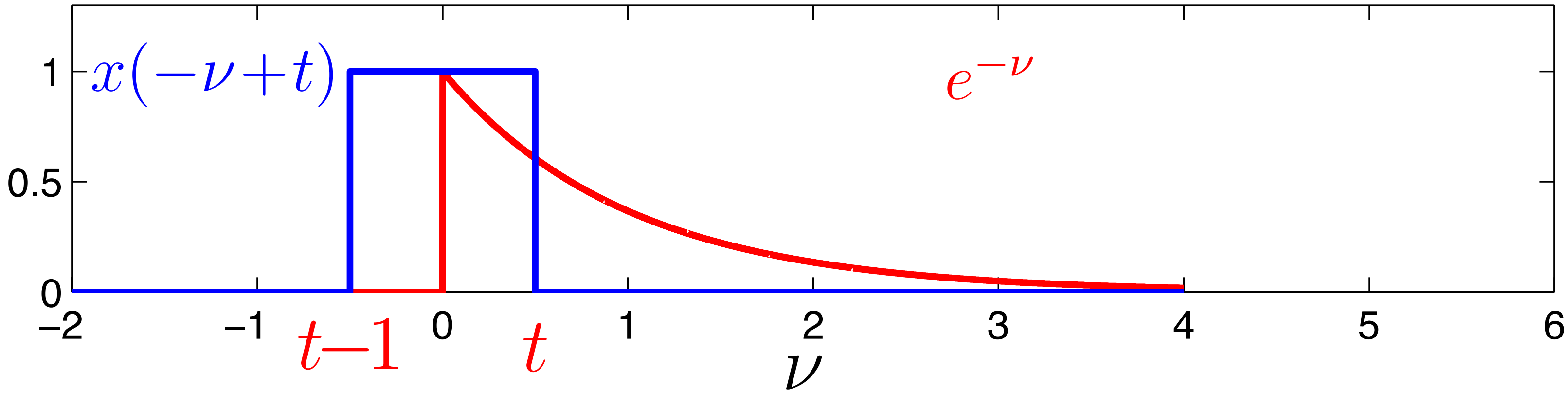
Exemplo 1 - (Primeiro Intervalo)



- Note que para todo $t < 0$ não existe sobreposição entre as curvas.
- Portanto,

$$\text{Se } t < 0, \text{ então, } y(t) = 0, \forall \nu$$

Exemplo 1 - (Segundo Intervalo)



- Note que $\forall\ 0 \leq t \leq 1$ o domínio de sobreposição entre as curvas aumenta a medida que t também aumenta.
- Portanto,

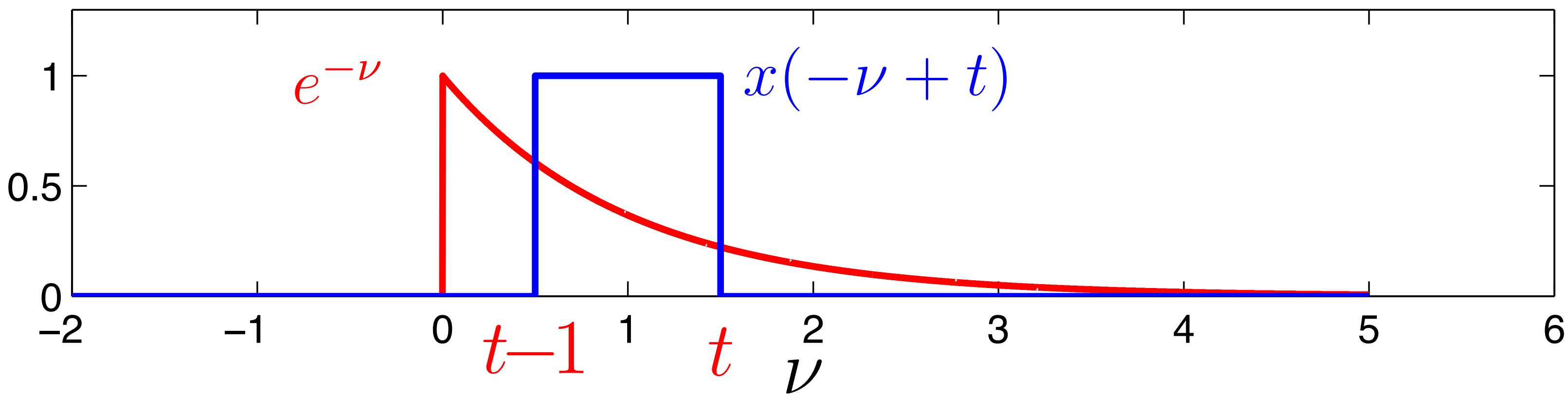
Se $0 \leq t \leq 1$, então, $y(t) \neq 0$, para $0 \leq \nu \leq t$

Exemplo 1 - *(Segundo Intervalo)*

- Para todo $0 \leq t \leq 1$.
- O intervalo de integração é $0 \leq \nu \leq t$.
- A integral de Convolução é calculada da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t 1.e^{-\nu} d\nu \\
&= (e^{-\nu}|_0^t) = -e^{-t} + 1 \\
&= 1 - e^{-t}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 - *(Terceiro Intervalo)*



- Note que para todo $t > 1$ o domínio de sobreposição entre as curvas permanece inalterado, sendo este $t-1 \leq \nu \leq t$
- Portanto,

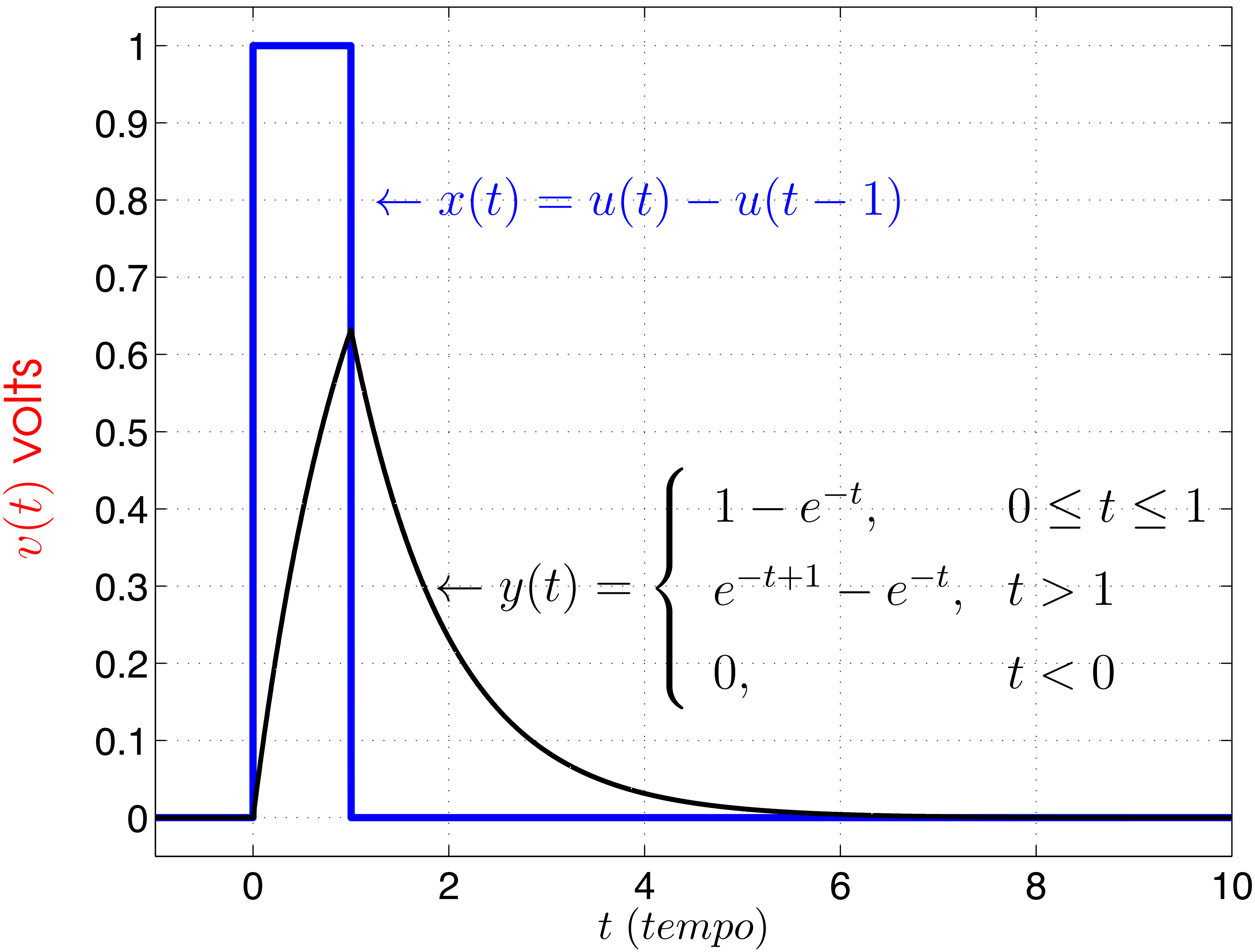
Se $t > 1$, então, $y(t) \neq 0$, para $t-1 \leq \nu \leq t$

Exemplo 1 - (Terceiro Intervalo)

- Para todo $t > 1$.
- O intervalo de integração é $t - 1 \leq \nu \leq t$.
- A integral de Convolução é calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-1}^{t} 1.e^{-\nu} d\nu \\ &= -(e^{-\nu}|_{t-1}^{t}) = -(e^{-t} - e^{-t+1}) \\ &= e^{-t+1} - e^{-t} \end{aligned}$$

Exemplo 1 - Circuito RC -Solução



Exercício

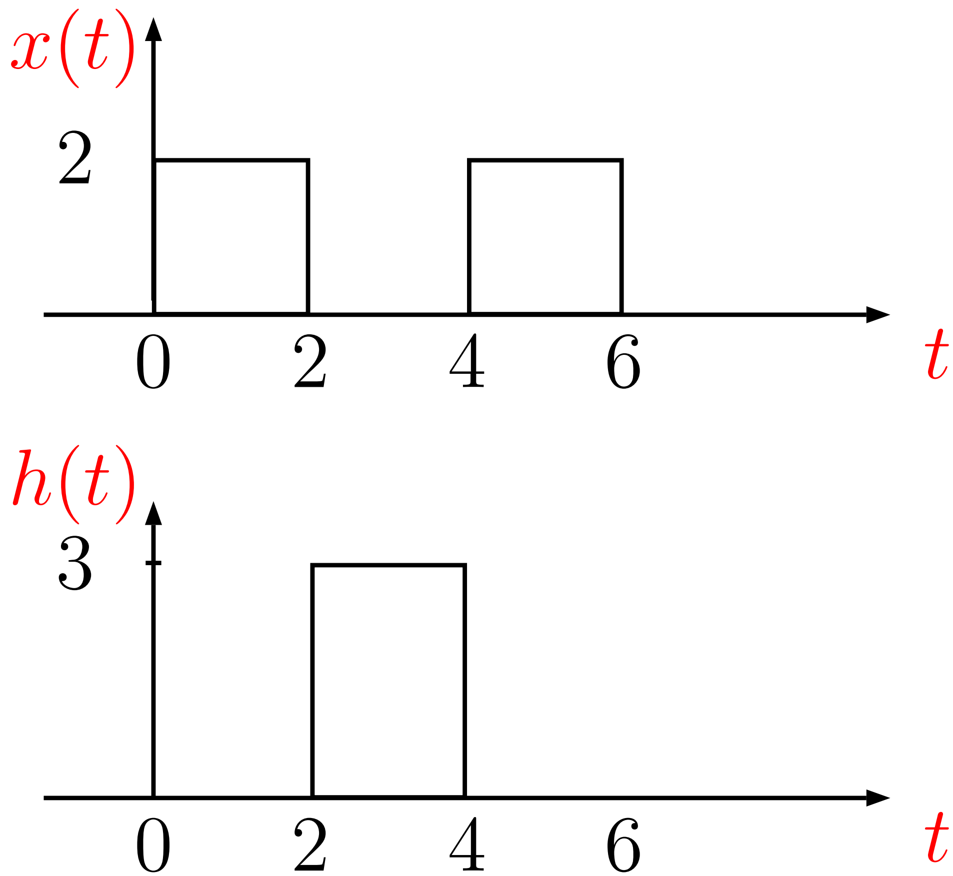
Encontre a saída $y(t)$ de um sistema LIT com

$$x(t) = u(t) - u(t-2) \quad \text{e} \quad h(t) = u(t) - u(t-3)$$

Utilize: $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Exercício

Encontre a saída $y(t)$ de um sistema LIT com



Utilize: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$

Propriedade Distributiva

- Em tempo discreto:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

- Em tempo contínuo

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Propriedade Distributiva (Tempo Discreto)

- Sabemos que: $y[n] = y_1[n] + y_2[n]$, temos:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_2[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](h_1[n-k] + h_2[n-k]) \\
&= x[n] * (h_1[n] + h_2[n])
\end{aligned}
$$

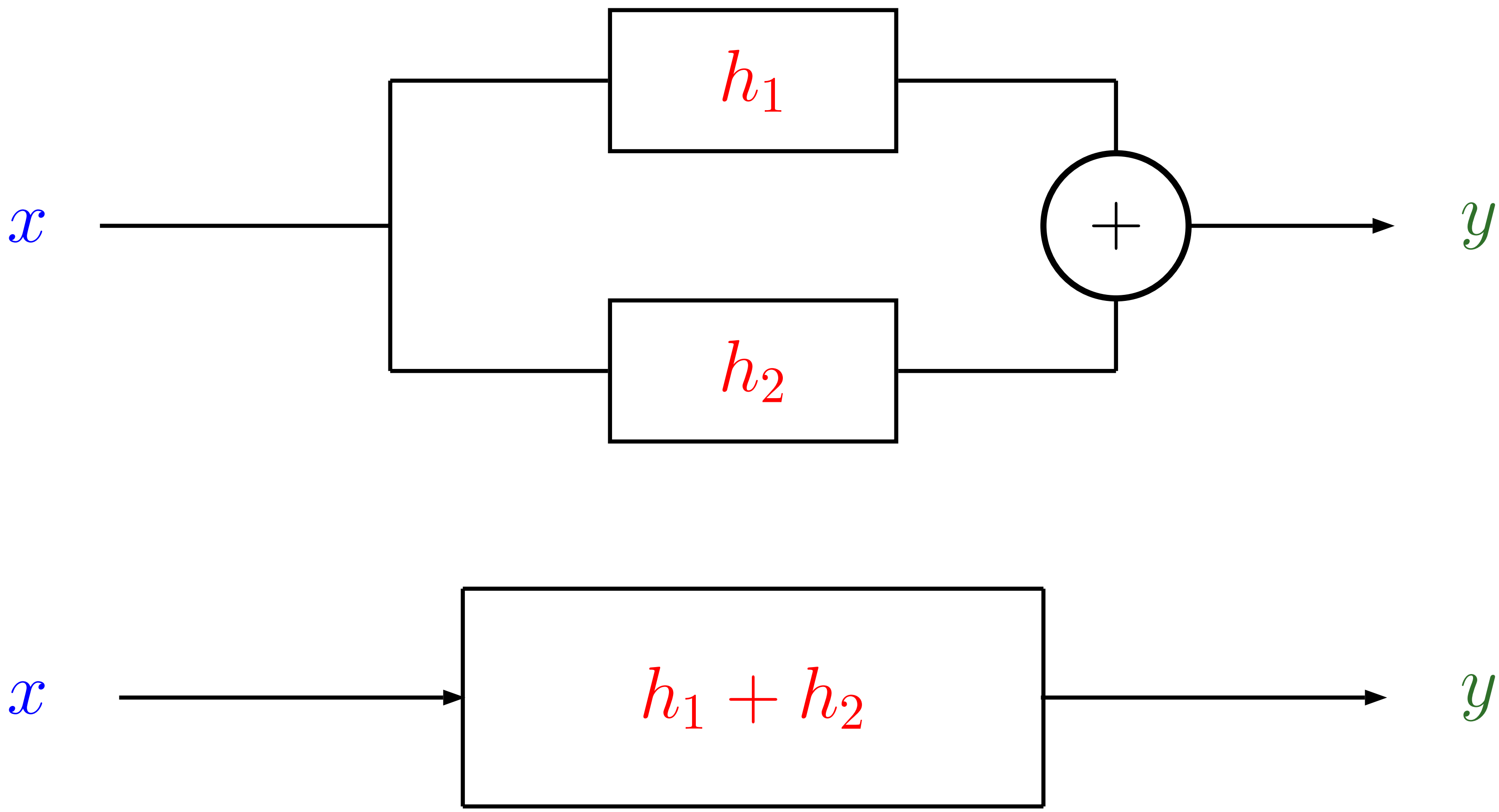
Propriedade Distributiva (Tempo Contínuo)

- Sabemos que: $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, temos:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_2(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)(h_1(t-\tau) + h_2(t-\tau))d\tau \\
&= x(t) * (h_1(t) + h_2(t))
\end{aligned}
$$

Propriedade Distributiva (Diagrama de Blocos)

Conexão Paralela de Sistemas



- $x|y|h_i$ representa tanto $x(t)|y(t)|h_i(t)$ quanto $x[n]|y(t)|h_i(t)$

Propriedade Associativa

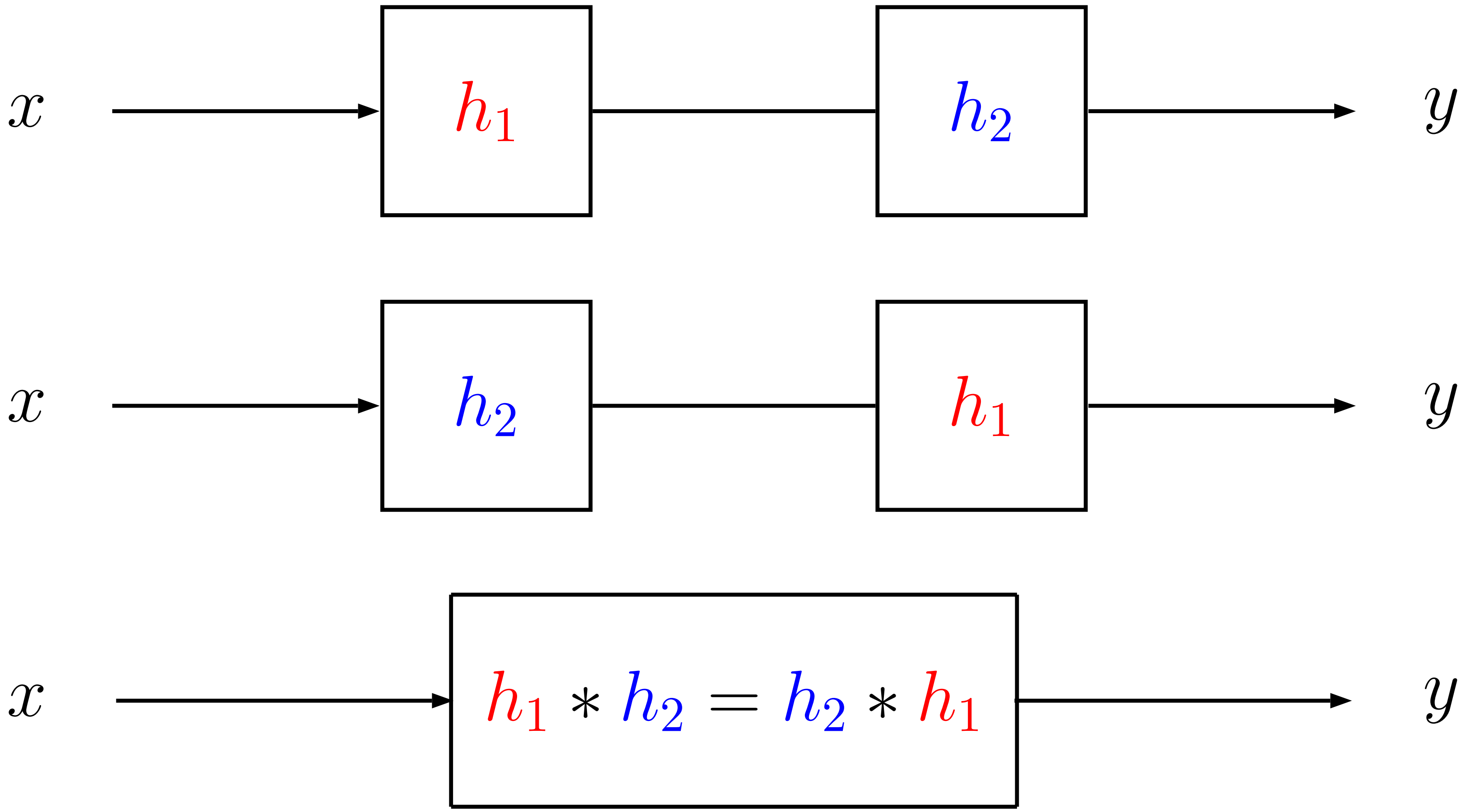
- Em tempo discreto:

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

- Em tempo contínuo

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

Propriedade Associativa (Diagrama de Blocos)



- $x|y|h_i$ representa tanto $x(t)|y(t)|h_i(t)$ quanto $x[n]||y(t)|h_i(t)$

Exercício: Propriedade Associativa

- Prove a igualdade

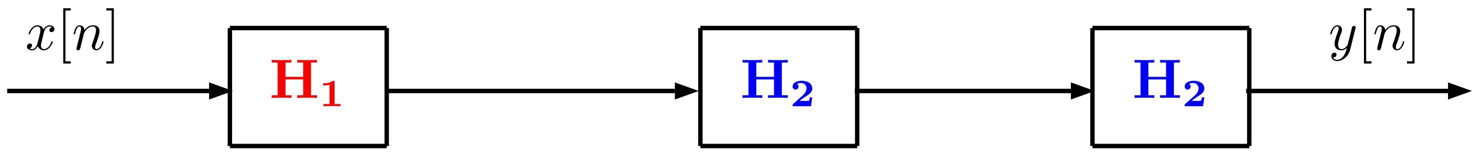
$$x(t) * (h(t) * g(t)) = (x(t) * h(t)) * g(t)$$

mostrando que os dois membros da equação acima são iguais a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau d\sigma$$

Exercício *Ex.: 2.24 do Oppenheim*

Considere a interconexão em cascata de três sistemas:



A resposta ao impulso de $\mathbf{H}_2$ é:

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$$

e a resposta ao impulso global é dada por:

$$\begin{aligned} h[n] = \quad & \delta[n] + 5\delta[n-1] + 10\delta[n-2] + 11\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + \ldots \\ & \ldots + 4\delta[n-5] + \delta[n-6] \end{aligned}$$

- Ache $h_1[n]$, a resposta ao impulso do sistema $\mathbf{H}_1$.

Sistemas sem Memória

- Um sistema é dito sem memória se a sua saída y em qualquer tempo é dependente somente da entrada x naquele instante de tempo.
  - Considerando o tempo contínuo, temos
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
  - Em um sistema sem memória $y(t)$ só depende de $x(t)$, logo $h(\tau)$ deve ser zero para todos os valores de τ diferentes de t. Portanto:
$$h(t) = c\delta(t), \;\; c \text{ constante}$$
- O mesmo vale para o discreto.

Sistemas Causais

- Um sistema é dito causal se a saída em qualquer tempo depende somente dos valores entrada/saída naquele tempo e do passado
- Considerando o tempo contínuo, temos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- para um sistema causal $y(t) = 0$ para todo $\tau < 0$,
- portanto, $h(\tau)$ deve ser zero para todo $\tau < 0$.

Sistemas Estáveis

- Um sistema é BIBO estável se, $|x| \leq M_x < \infty$, então $|y| \leq M_y < \infty$. Assim,

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \underbrace{|x(t-\tau)|}_{\leq M_x} d\tau \leq M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau
\end{aligned}
$$

- Então, $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$ (absolutamente integrável).

Sistemas Invertíveis e Deconvolução

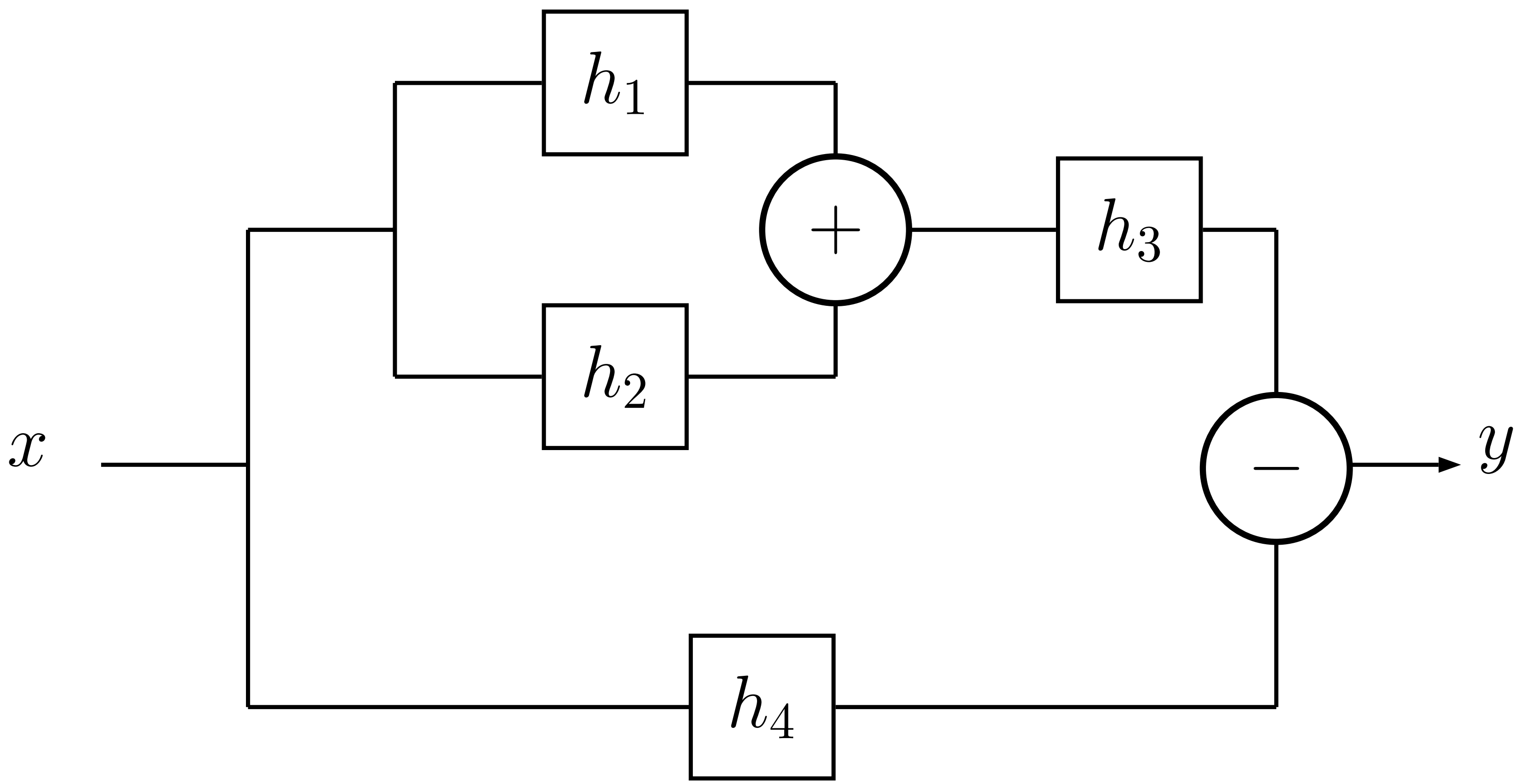
- Um sistema é invertível se a entrada pode ser recuperada da saída
- Em termos de sistemas, temos:

$$
\begin{aligned}
x(t) * \left(h(t) * h^{-1}(t)\right) &= x(t) \\
h(t) * h^{-1}(t) &= \delta(t)
\end{aligned}
$$

- O processo para recuperar $x(t)$ de $y(t) = h(t) * x(t)$ é chamado Deconvolução

Exercício *(Diagrama de Blocos)*

1) Encontre a resposta ao impulso global, h, do sistema.

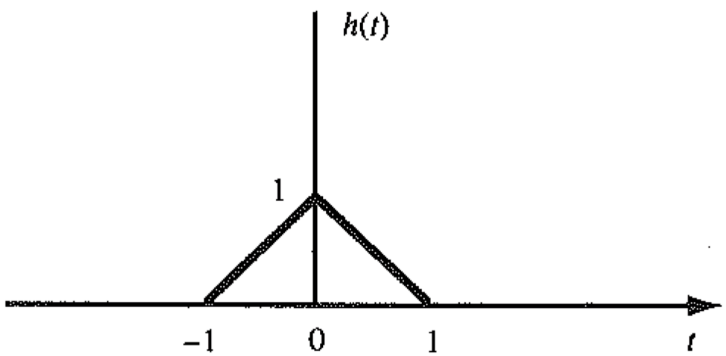


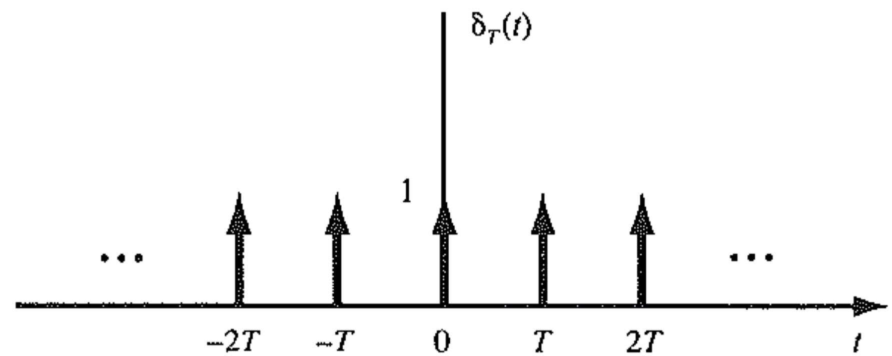
Exercício

Seja $h(t)$ um pulso triangular e

$$x(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

mostrados abaixo:





Calcule, $y(t) = h(t) * x(t)$ para $T = 3,\ 2,\ 3/2$.

Resposta ao Degrau

- A resposta ao degrau pode ser expressa em termos da resposta ao impulso

$$
\begin{aligned}
y_u(t) &= \left. \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right|_{x(t)=u(t)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau, \text{ pois para } \tau > t \quad u(t-\tau) = 0
\end{aligned}
$$

- Para se obter a resposta ao degrau basta integrar a resposta ao impulso
- Da mesma forma, $h(t) = \dfrac{dy_u(t)}{dt}$

Resposta ao Degrau (Discreto)

- A resposta ao degrau de um sistema discreto a partir da resposta ao impulso,

$$y_u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

- A resposta ao impulso em termos da resposta ao degrau é:

$$h[n] = y_u[n] - y_u[n-1]$$

Resposta Senoidal (Contínuo)

Considere $x(t) = e^{j\omega t}$, logo

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= e^{j\omega t} H(j\omega) \end{aligned}$$

- $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg\{H(j\omega)\}}$
- $H(j\omega)$ resposta em frequência

Resposta Senoidal (Contínuo)

$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg\{H(j\omega)\}}$, logo

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{j\omega t}H(j\omega) \\ &= e^{j\omega t}|H(j\omega)|e^{j\arg\{H(j\omega)\}} \\ &= |H(j\omega)|e^{j(\omega t+\arg\{H(j\omega)\})} \end{aligned}$$

- $H(j\omega)$ resposta em frequência
- $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg\{H(j\omega)\}}$
  - $|H(j\omega)|$ resposta em módulo ou magnitude
  - $\arg\{H(j\omega)\}$ resposta em fase

Resposta Senoidal (Discreto)

Considere:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k], \text{ com } x[n] = e^{j\omega n}$$

então,

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \\ &= e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

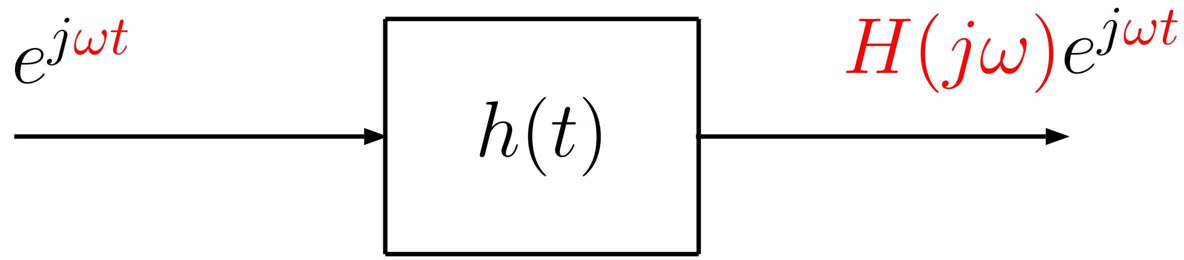
Resposta em Frequência

- $$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$
  - $H(e^{j\omega})$ é chamado de *Resposta em Frequência* do sistema discreto.
- $$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
  - $H(j\omega)$ é chamado de *Resposta em Frequência* do sistema contínuo.

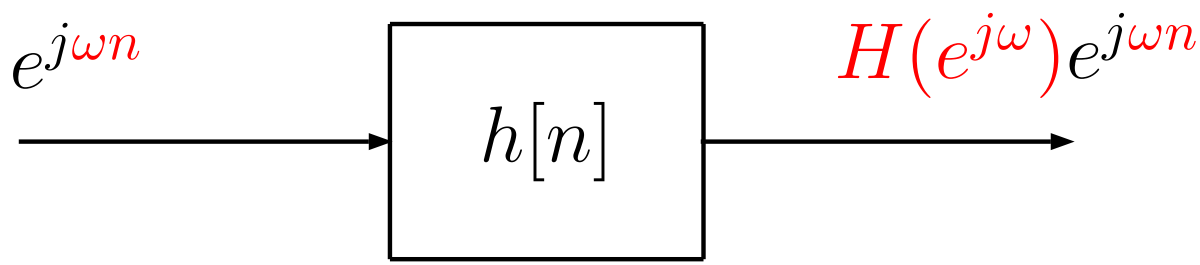
Resposta Senoidal *(Diagramas de Blocos)*

Em termos de diagrama de blocos,

- Tempo contínuo

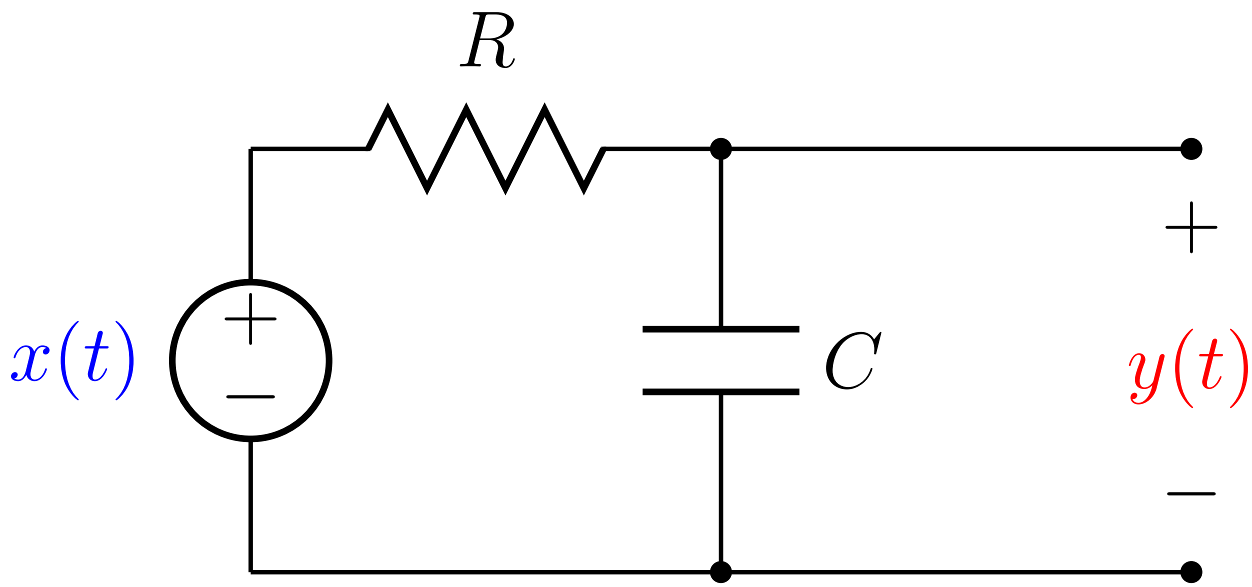


- Tempo discreto



Exemplo: resposta em frequência

Considere o seguinte circuito-RC



Sendo

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Exemplo: resposta em frequência

- Calculando $H(j\omega)$,

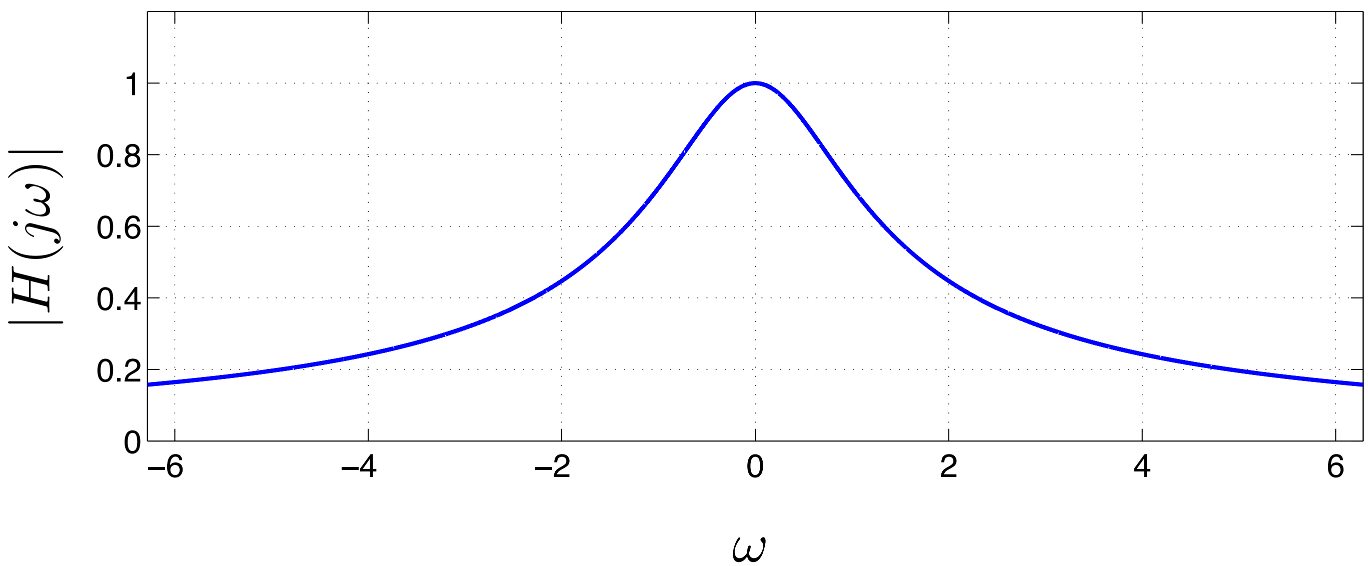
$$
\begin{aligned}
H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{RC} e^{-\frac{\tau}{RC}} u(\tau) \right)}_{h(t)} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(j\omega + \frac{1}{RC})\tau} u(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{RC} \frac{-1}{j\omega + \frac{1}{RC}} e^{-(j\omega + \frac{1}{RC})\tau} \Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}
\end{aligned}
$$

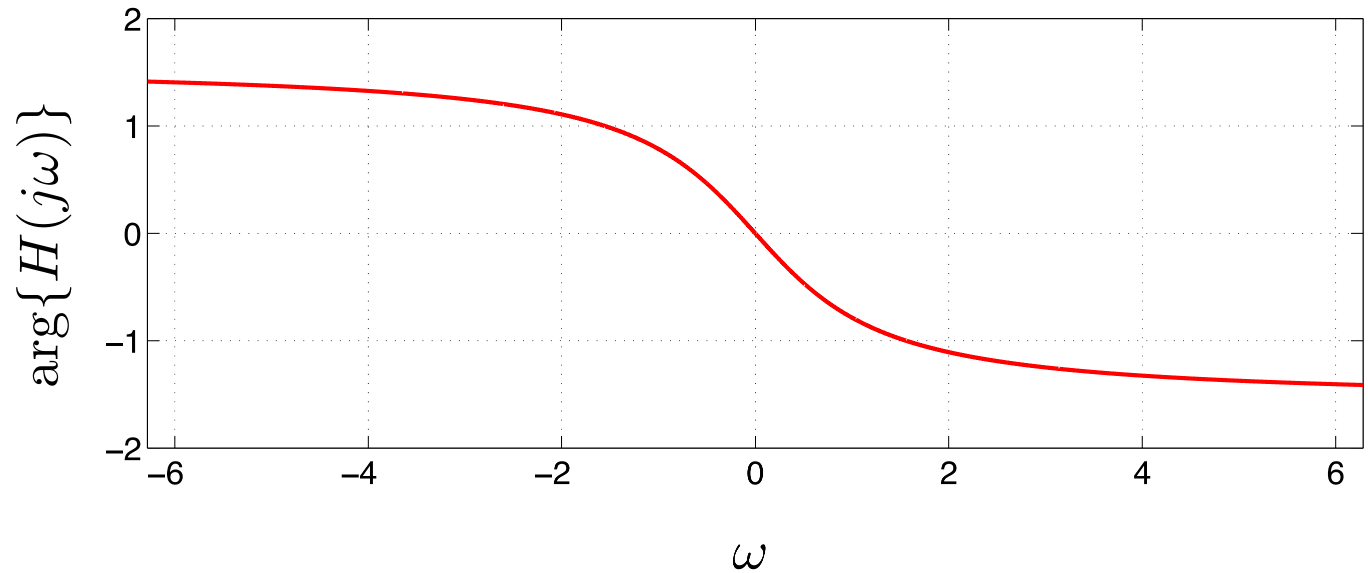
Exemplo: resposta em frequência

- Normalmente a resposta em frequência é dada em módulo e fase:

$$
\begin{aligned}
|H(j\omega)| &= \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \\
\arg(H(j\omega)) &= -\mathrm{atan}(\omega RC)
\end{aligned}
$$

Exemplo: resposta em frequência





- Sistemas LIT causais descritos por equações com coeficientes constantes
  - Equações diferenciais lineares
  - Equações de diferenças lineares
- Representações em diagrama de blocos de equações diferenciais e de diferenças

Equações diferenciais lineares (EDL)

- Problemas estáticos: ex. encontrar o número x, tal que

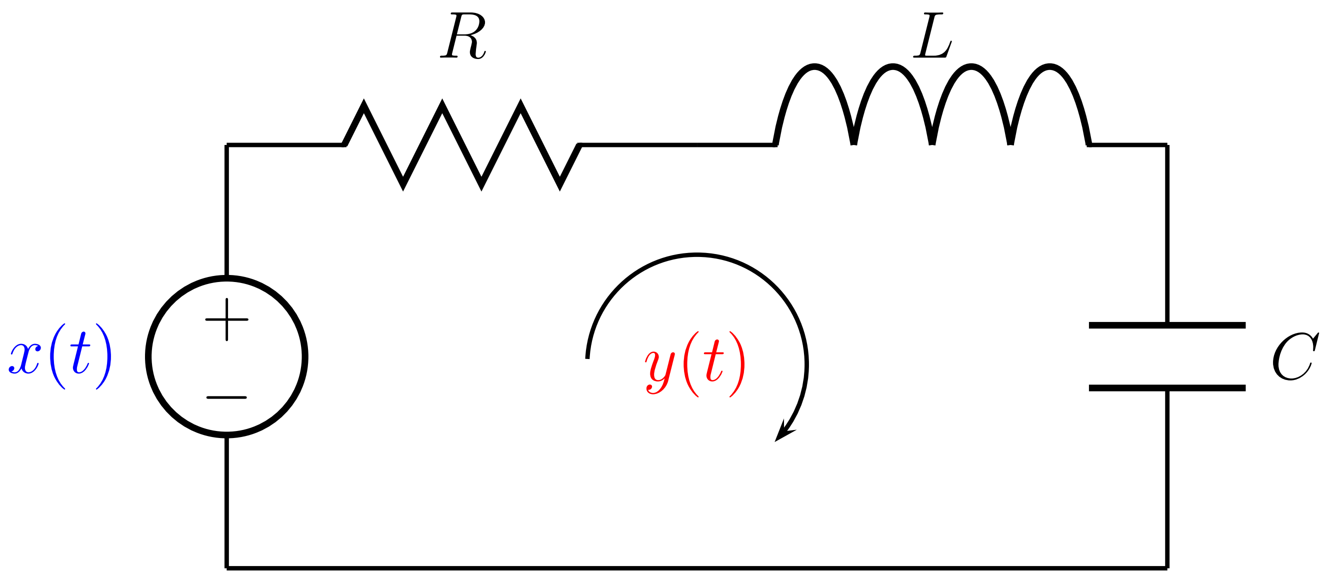
$$7x^2 - 11x + 41 = 0$$

- Problemas dinâmicos: ex. encontrar a função $y(t)$, tal que

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

equação diferencial

Sistemas LIT causais: Sistema RLC



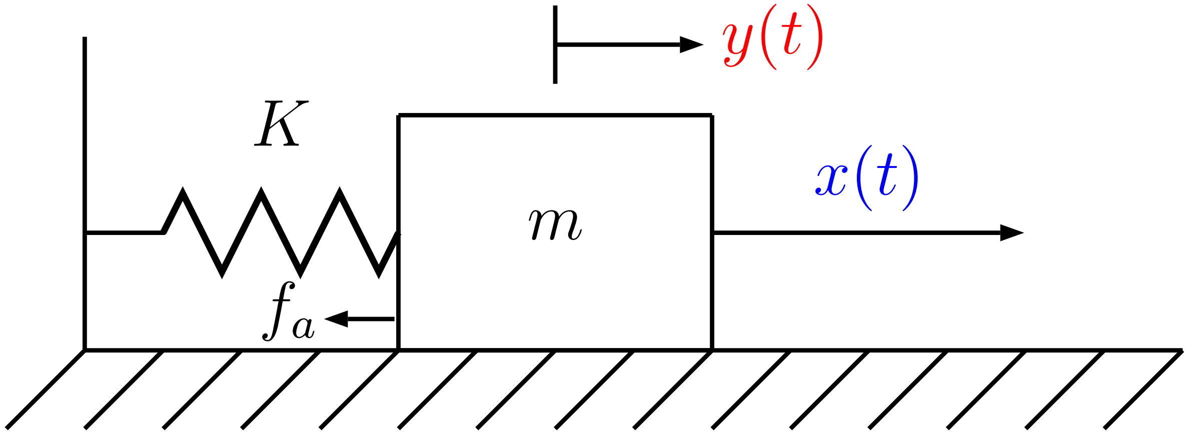
Somando as quedas de tensão

$$Ry(t) + L\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = x(t)$$

Logo,

$$\frac{1}{C}y(t) + R\frac{dy(t)}{dt} + L\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt}$$

Sistemas LIT causais: Sistema massa e mola



Balanço de forças:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - ky(t) - f_a\frac{dy(t)}{dt}$$

ou,

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + ky(t) + f_a\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Equações diferenciais lineares (EDL)

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t)$$
$$= \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_1 \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{M-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_M x(t)$$

fazendo $D = d/dt$,

$$\overbrace{\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N\right)}^{Q(D)} y(t)$$
$$= \underbrace{\left(D^M + b_1 D^{M-1} + \ldots + b_{M-1} D + b_M\right)}_{P(D)} x(t)$$

logo,

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

Eq. diferenciais lineares (EDL): (Solução)

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

- $y_n(t)$ solução para entrada nula, i.e, $x(t) = 0$

$$Q(D)y_n(t) = 0$$

- $y_p(t)$ solução para entrada não nula, i.e, $x(t) \neq 0$

$$Q(D)y_p(t) = P(D)x(t)$$

Portanto,

$$Q(D) \underbrace{[y_n(t) + y_p(t)]}_{\text{Solução Geral}} = P(D)x(t)$$

Eq. diferenciais lineares (EDL): (Solução)

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

Solução completa:

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

- $y_n(t)$: Resposta natural é a resposta do sistema quando a entrada é nula, i.e. $x(t) = 0$;
- $y_p(t)$: Resposta Forçada é a resposta do sistema quando a entrada não é nula, i.e. $x(t) \neq 0$;

EDL: Resposta Natural

$$a_1 \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} + a_2 \frac{d y_n(t)}{dt} + a_3 y_n(t) = 0$$

- $y_n(t) = ?$
- $\frac{d^k}{dt^k}(ce^{\lambda t}) = \lambda^k ce^{\lambda t}$

logo,

$$\begin{aligned} c(a_1\lambda^2 e^{\lambda t} + a_2\lambda e^{\lambda t} + a_3 e^{\lambda t}) &= 0 \\ c\,\underbrace{\left(a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3\right)}_{\text{Eq. característica}} e^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

EDL: Resposta Natural

$$Q(D)y_n(t) = 0$$

ou,

$$\frac{d^N y_n(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y_n(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy_n(t)}{dt} + a_N y_n(t) = 0$$

- $y_n(t) = ce^{\lambda t}$, logo $\dfrac{d^k}{dt^k}(ce^{\lambda t}) = \lambda^k ce^{\lambda t}$
- Equação característica:

$$\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N = 0$$

EDL: Resposta Natural

Eq. característica: $\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N = 0$

- Raízes reais:

$$y_n(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- Raízes repetidas:

$$y_n(t) = (c_1 + c_2 t + \ldots + c_N t^{N-1}) e^{\lambda t}$$

- Raízes complexas ($\lambda = \alpha \pm j\beta$):

$y_n(t) \;=\; c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t}$ (forma complexa)

com: $c_1 = ce^{j\theta}/2$ e $c_2 = ce^{-j\theta}/2$

$y_n(t) \;=\; ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$ (forma real)

EDL: Exercício *(Resposta Natural)*

Encontre a solução natural de

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) - 8y(t) = 0$$

EDL: Exercício *(Resposta Natural)*

Encontre a solução natural de

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$$

EDL: Exercício (Resposta Natural)

Encontre a solução natural de

$$\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 0$$

EDL: Exercício *(Resposta Natural)*

Encontre a solução natural de

$$\ddot{y}(t) + b^2 y(t) = 0, \;\; (b > 0)$$

EDL: Resposta Forçada

- Problema, encontrar $y_p(t)$, tal que

$$\frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + 2\frac{dy_p(t)}{dt} + y_p(t) = f(x)$$

  - A combinação de $y_p(t)$ com suas derivadas deve ser igual a $f(x)$;
  - Escolha: $y_p(t)$ com a mesma "forma" que $f(x)$;

EDL: Exemplo *(Resposta Forçada)*

Encontre a solução forçada de

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 3t + 2$$

- Logo, um palpite é $y_p(t) = \alpha t + \beta$, logo

$$(0) + 3(\alpha) + 4(\alpha t + \beta) = 3t + 2$$

Comparando os termos,

$$4\alpha = 3 \ \text{ e } \ 3\alpha + 4\beta = 2$$

Obtendo, $\alpha = 3/4$ e $\beta = -1/16$, então

$$y_p(t) = \frac{3}{4}t - \frac{1}{16},$$

EDL: Exercício *(Resposta Forçada)*

Encontre a solução forçada de

$$\ddot{y}(t) - 4y(t) = 2e^{3t}$$

EDL: Exercício *(Resposta Forçada)*

Encontre a solução forçada de

$$3\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = 2\cos(t)$$

Equações diferenciais lineares (EDL)

Sistematização para obtenção da solução:

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

1) Obtenha a resposta natural, $y_n(t)$
2) Obtenha a resposta forçada, $y_p(t)$
3) Com as condições iniciais, obtenha o valor dos coeficientes constantes

EDL: Exemplo (Resposta Completa)

Encontre a solução de

$$5\dot{y}(t) + y(t) = t + 10, \text{ com } y(0) = -10$$

A eq. característica é:

$$5\lambda + 1 = 0, \quad \lambda = -0{,}2$$

- A resposta natural é

$$y_n(t) = ke^{-0{,}2t}$$

EDL: Exemplo *(Resposta Completa)*

- Um palpite para solução forçada é:

$$y_p(t) = c_1 t + c_0$$

então,

$$\begin{aligned} 5\dot{y}(t) + y(t) &= t + 10 \\ +5c_1 + (c_1 t + c_0) &= t + 10 \end{aligned}$$

logo $c_1 = 1$, e ,$c_0 = 5$, portanto

$$y_p(t) = t + 5$$

- Então a solução é:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_n(t) + y_p(t) \\
&= ke^{-0,2t} + t + 5
\end{aligned}
$$

- Considerando $y(0) = -10$, temos

$$
\begin{aligned}
y(0) &= ke^{0} + 0 + 5 \\
&= k + 5 = -10 \quad \longrightarrow k = -15
\end{aligned}
$$

- Portanto: $y(t) = -15e^{-0,2t} + t + 5$

EDL: Exercício *(Resposta Completa)*

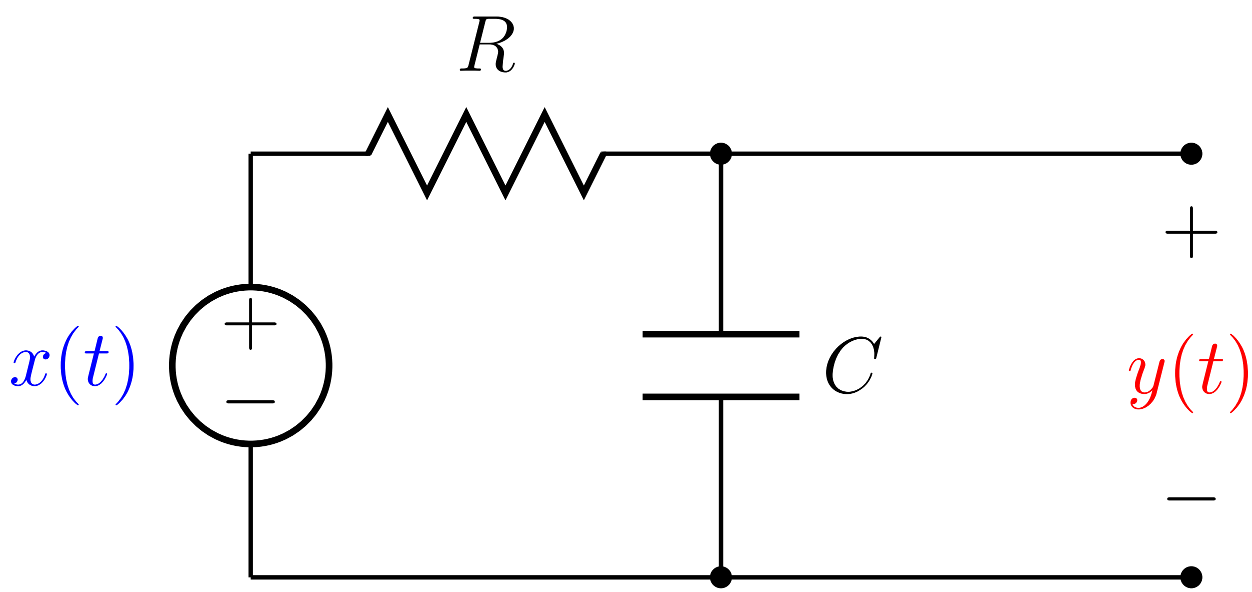
Encontre a solução de

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) - 8y(t) = 0$$

para $y(0) = 5$ e $\dot{y}(0) = -2$

EDL: Exercício *(Resposta Completa)*

Encontre a resposta ao degrau unitário do sistema



assuma condições iniciais nulas.

Resposta ao Impulso

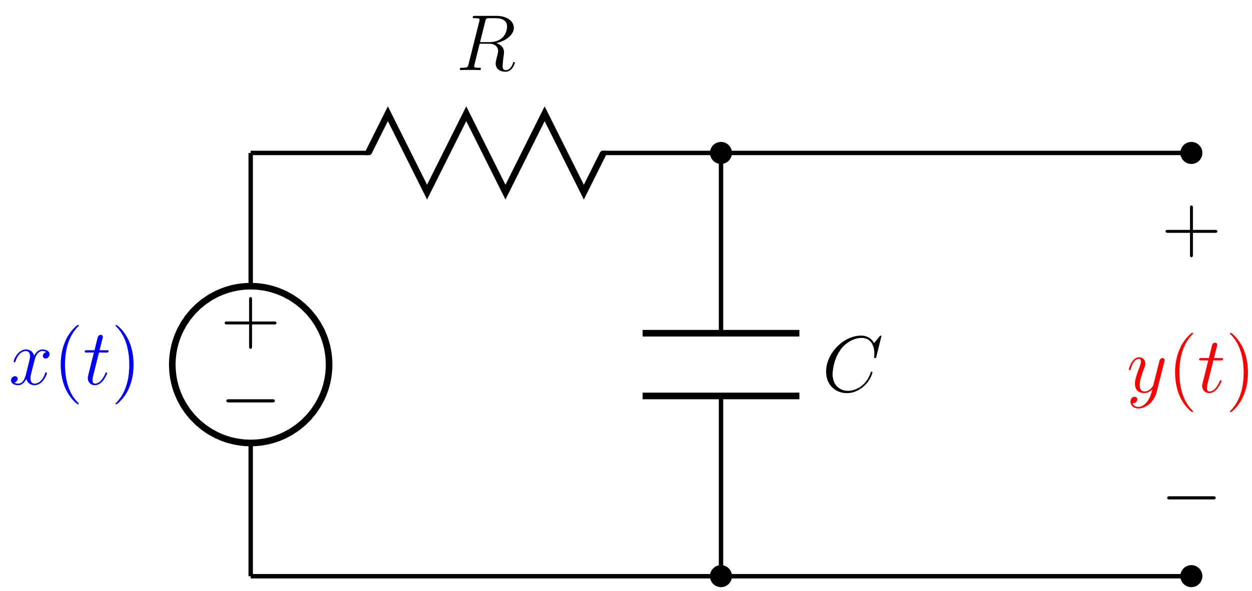
- A resposta ao impulso resume-se a resposta natural do sistema com condições iniciais apropriadas
  - é aplicada instantaneamente e depois desaparece;
  - modifica as condições iniciais do sistema.

Resposta ao Impulso: Exemplo

Obtenha a resposta ao impulso do sistema:

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

assuma condições iniciais nulas



Resposta ao Impulso: Exemplo (Solução 1)

- Portanto, a resposta ao impulso deve satisfazer:

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}\delta(t)$$

- Portanto, temos

$$\begin{aligned}\int_{0^-}^{0^+} \dot{y}(\tau)d\tau + \frac{1}{RC}\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau &= \frac{1}{RC}\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau \\ y(0^+) - y(0^-) + \frac{1}{RC}\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau &= \frac{1}{RC}\end{aligned}$$

- A integral é zero e $y(0^-) = 0$, logo:

$$y(0^+) = \frac{1}{RC}$$

Resposta ao Impulso: Exemplo (Solução 1)

- Resposta natural:

$$y_n(t) = c_0 e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

- Usando a condição inicial ($y(0) = \frac{1}{RC}$):

$$y_n(0) = \frac{1}{RC} = c_0$$

- Portanto, a resposta ao impulso é:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Resposta ao Impulso: Exemplo *(Solução 2)*

- Outro método para encontrar c_0.

A Resposta natural é: $y_n(t) = c_0 e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$

- Portanto, a solução acima deve satisfazer:

$$\frac{d}{dt} y_n(t) + \frac{1}{RC} y_n(t) = \frac{1}{RC}\delta(t)$$

  - Qual é o valor de c_0?

- Outro método para encontrar c_0.

A Resposta natural é: $y_n(t) = c_0 e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$

- Portanto, a solução acima deve satisfazer:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_n(t) + \frac{1}{RC} y_n(t) &= \frac{1}{RC}\delta(t) \\ c_0 e^{-\frac{t}{RC}} \delta(t) &= \frac{1}{RC}\delta(t) \end{aligned}$$

lembrando que, $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$, temos

$$c_0 = \frac{1}{RC}$$

Resposta ao Impulso: Exemplo (Solução 3)

- A resposta ao impulso pode ser obtida a partir da resposta ao degrau:

$$h(t) = \frac{d}{dt} y_u(t) = \frac{d}{dt}[1 - e^{-\frac{t}{RC}}]u(t)$$

portanto, para $t \geq 0$, temos

$$h(t) \;=\; \frac{d}{dt}\{[1 - e^{-\frac{t}{RC}}]\}$$

- Determine $h(t)$.

Resposta ao Impulso: Exemplo (Solução 3)

- A resposta ao impulso pode ser obtida a partir da resposta ao degrau:

$$h(t) = \frac{d}{dt} y_u(t)$$

sendo $y_u(t)$ a resposta ao degrau, logo

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d}{dt} \overbrace{\{[1 - e^{-\frac{t}{RC}}]u(t)\}}^{y_u(t)} \\ &= (\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}})u(t) + \underbrace{[1 - e^{-\frac{t}{RC}}]\delta(t)}_{=0} \\ &= (\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}})u(t) \end{aligned}$$

Equações de Diferenças

- Equação de Diferença

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

  - Solução numérica: importância prática, facilmente implementado em um computador digital;
  - Solução Analítica: método muito semelhante ao método de solução de uma equação diferencial.

Solução numérica

- Considere a equação de diferença linear:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Reescrita na forma recursiva:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

- Portanto, a solução numérica pode ser calculada facilmente conhecendo:

$$y[n-1],\ y[n-2],\ \ldots,\ y[n-N]$$

$$x[n],\ x[n-1],\ x[n-2],\ \ldots,\ x[n-M]$$

Forma Recursiva e Não-Recursiva

- Considere a equação de diferença linear:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Reescrita na forma recursiva:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

- Forma não-recursiva se $a_k = 0\ \forall k \neq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

Resposta ao Impulso (Tempo discreto)

- Reescrita na forma recursiva:

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k h[n-k]\right\}$$

- Caso particular, forma não-recursiva se $a_k = 0 \ \forall k \neq 0$ ou $N = 0$,

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\delta[n-k] = \begin{cases} b_n/a_0, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sistemas FIR e IIR

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k h[n-k]\right\}$$

- Se $N = 0$ a resposta ao impulso tem duração finita, neste caso o sistema é chamado sistema de resposta ao impulso finita ou FIR (finite impulse response system).
- Se $N \geq 1$, a resposta ao impulso tem duração temporal infinita, neste caso o sistema é chamado sistema de resposta ao impulso infinita ou IIR (Infinite Impulse Response system).

Exemplo 1

Considere a seguinte equação diferença:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

Encontre a resposta ao impulso do sistema causal.

Portanto,

$$h[n] = \frac{1}{2}h[n-1] + \delta[n]$$

Solução: $h[n] = \frac{1}{2}h[n-1] + \delta[n]$

Como $h[n] = 0$ para $n < 0$, temos:

$$\begin{aligned} h[0] &= \delta[0] + \frac{1}{2}h[-1] = 1 \\ h[1] &= \delta[1] + \frac{1}{2}h[0] = \frac{1}{2} \\ h[2] &= \delta[2] + \frac{1}{2}h[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\vdots \\ h[n] &= x[n] + \frac{1}{2}h[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

Exercício

Encontre a resposta ao impulso do sistema:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$$

Equações de diferença lineares: Solução

$$Q(D)y[n] = P(D)x[n]$$

Solução completa:

$$y[n] = y_n[n] + y_p[n]$$

- $y_n[n]$: é a resposta do sistema quando a entrada é nula, i.e. $x[n] = 0$;
- $y_p[n]$: é a resposta do sistema quando a entrada não é nula, i.e. $x[n] \neq 0$;

$$a_1 y_n[n-2] + a_2 y_n[n-1] + a_3 y_n[n] = 0$$

- $y_n[n] = cr^n \quad \rightarrow \quad y_n[n+k] = cr^{n+k} = r^k \underbrace{cr^n}_{y_n[n]}$

logo: $\quad c(a_1 r^{-2} + a_2 r^{-1} + a_3) r^n = 0$

Eq. característica:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 r^{-2} + a_2 r^{-1} + a_3 \\ &= r^2 (a_1 r^{-2} + a_2 r^{-1} + a_3) \\ &= a_1 + a_2 r + a_3 r^2 \end{aligned}$$

EDL: Solução (Resposta Natural)

Eq. característica: $r^N + a_1 r^{(N-1)} + \ldots + a_{N-1} r + a_N = 0$

- Raízes reais:

$$y_n[n] = c_1 r^n + c_2 r^n + \ldots + c_N r^n$$

- Raízes repetidas:

$$y_n[n] = (c_1 + c_2 n + \ldots + c_N n^{N-1}) r^n$$

- Raízes complexas ($r = \alpha \pm j\beta$):

$$y_n[n] = c_1 e^{(\alpha + j\beta)n} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)n} \quad \text{(forma complexa)}$$

$$y_n[n] = c r^n \cos[\beta n + \theta] \quad \text{(forma real)}$$

Equações de Diferenças lineares (EDDL)

Sistematização para obtenção da solução:

$$y[n] = y_n[n] + y_p[n]$$

1) Obtenha a resposta natural, $y_n[n]$

2) Obtenha a resposta forçada, $y_p[n]$

3) Com as condições iniciais, obtenha o valor dos coeficientes constantes

Exemplo - Resposta completa

Determine a saída do sistema

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n],$$

sendo: $y[-1] = 3$ e $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Eq. característica: $r - \frac{1}{2} = 0, \quad r = \frac{1}{2}$

- Solução natural,

$$y_n[n] = c\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exemplo - Resposta completa

- Escolha: $y_p[n] = k\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

então

$$k\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}k\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

logo $k = 1$.

- Resposta forçada

$$y_p[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Exemplo - Resposta completa

- **Resposta:** $y[n] = c\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Condição inicial ($n \geq 0$):

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{2}y[n-1] + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 u[n] \\
y[0] &= \frac{1}{2}3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Constante: $y[0] = \left\{c\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^0\right\} u[0] = \frac{7}{2}, \rightarrow c = \frac{5}{2}$

- **Saída:**

$$y[n] = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

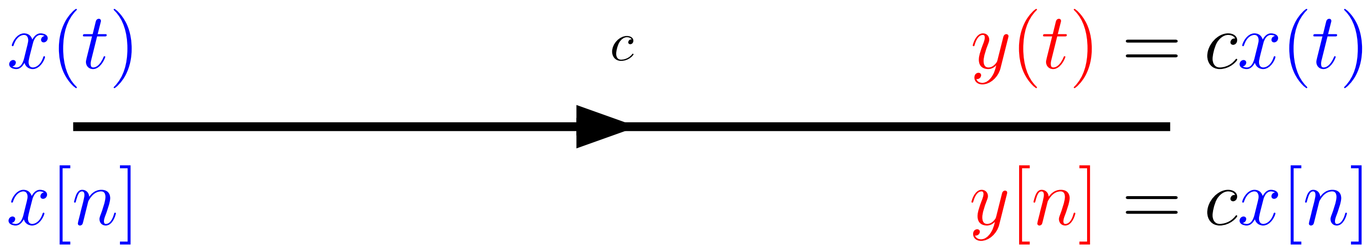
Exercício - Resposta completa

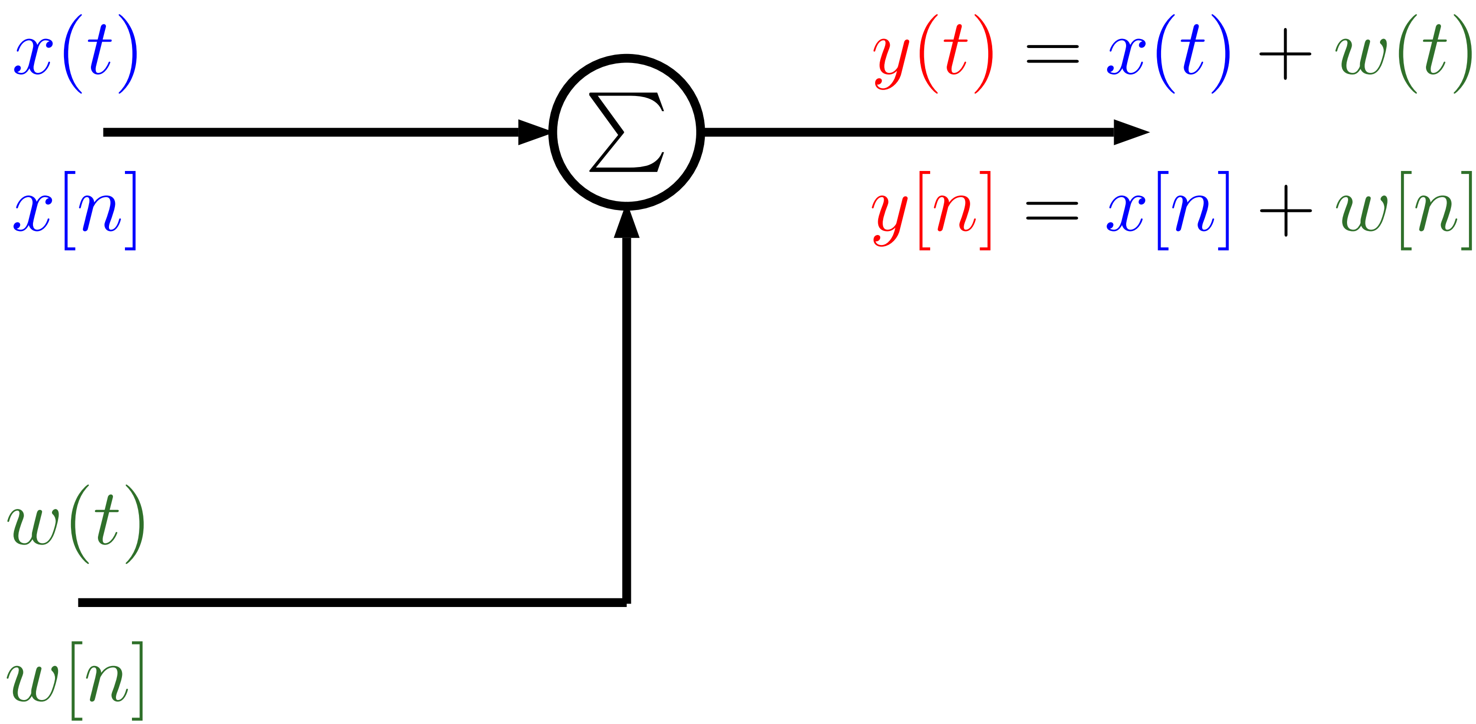
Determine a saída do sistema

$$y[n] - \frac{1}{9}y[n-2] = x[n-1],$$

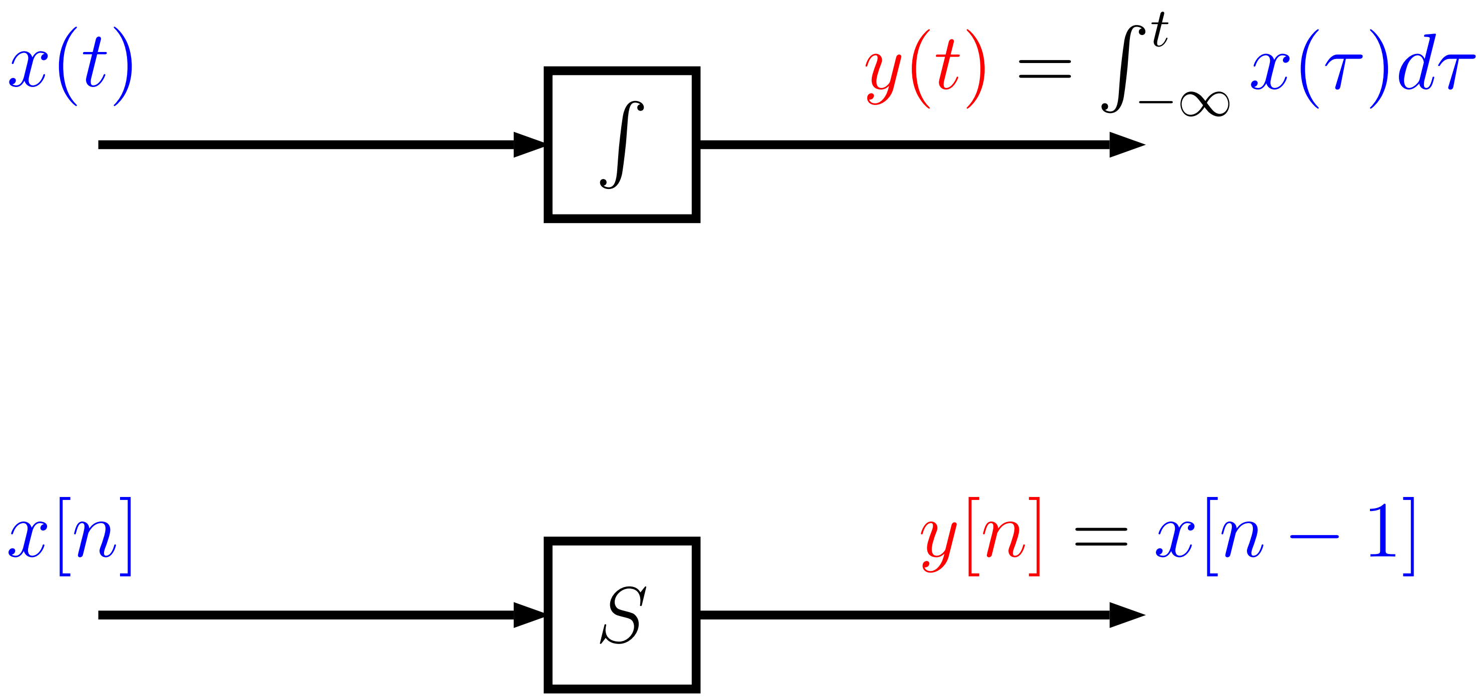
sendo: $y[-1] = 1,\ y[-2] = 0$ e $x[n] = u[n]$

Representação em Diagrama de Blocos





Representação em Diagrama de Blocos

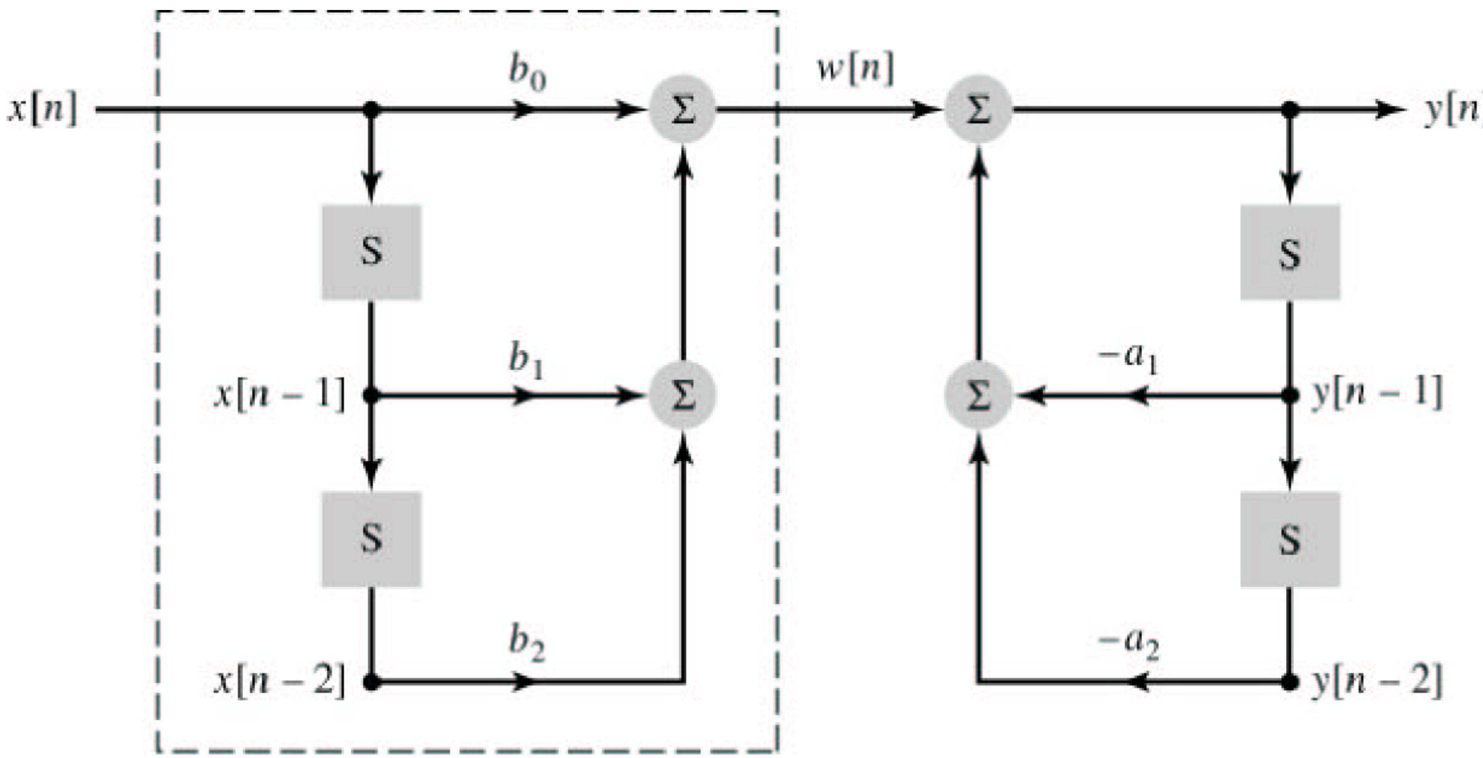


Forma Direta I

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2]$$

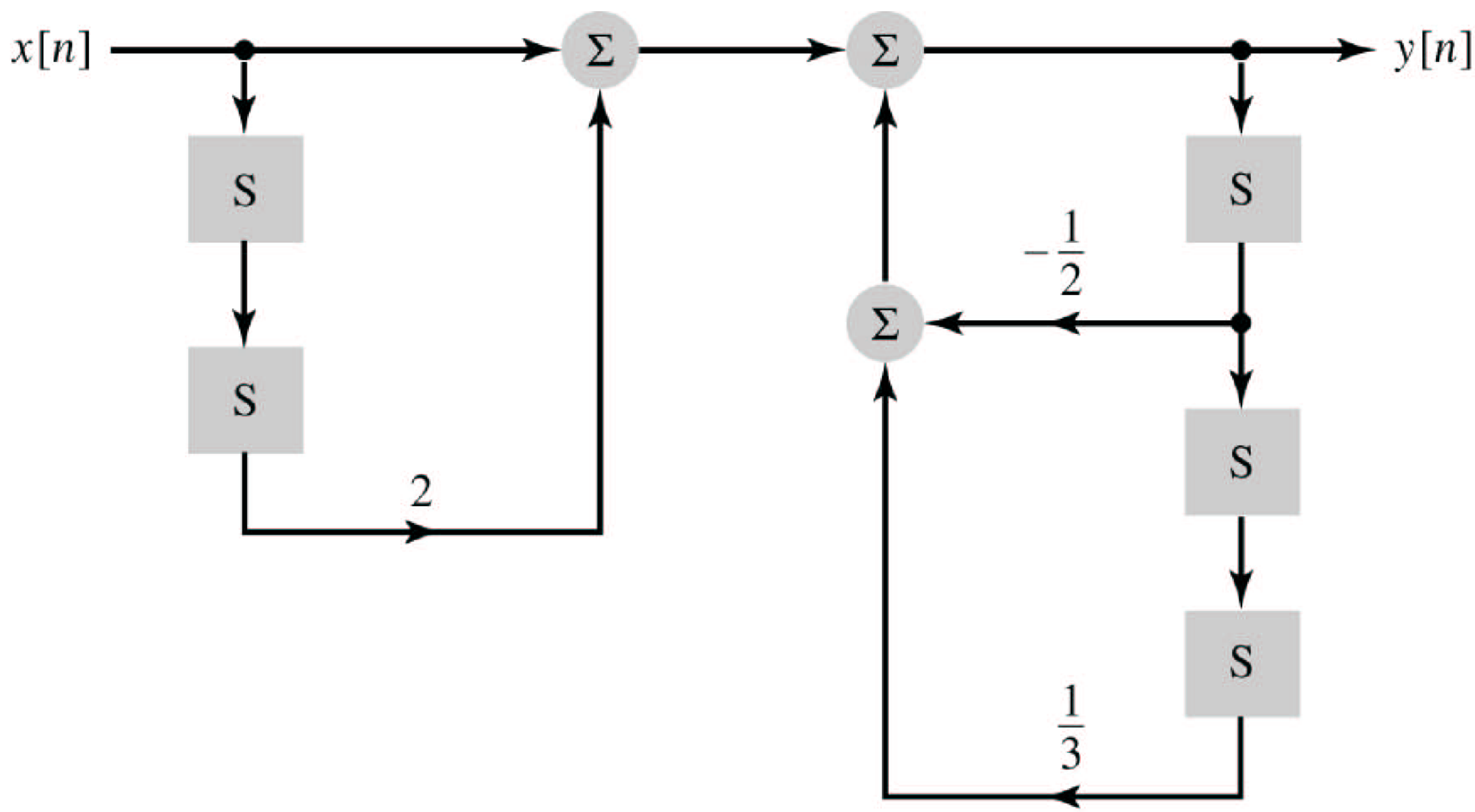
Faça: $w[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2]$, logo

$$y[n] = w[n] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2]$$



Exercício

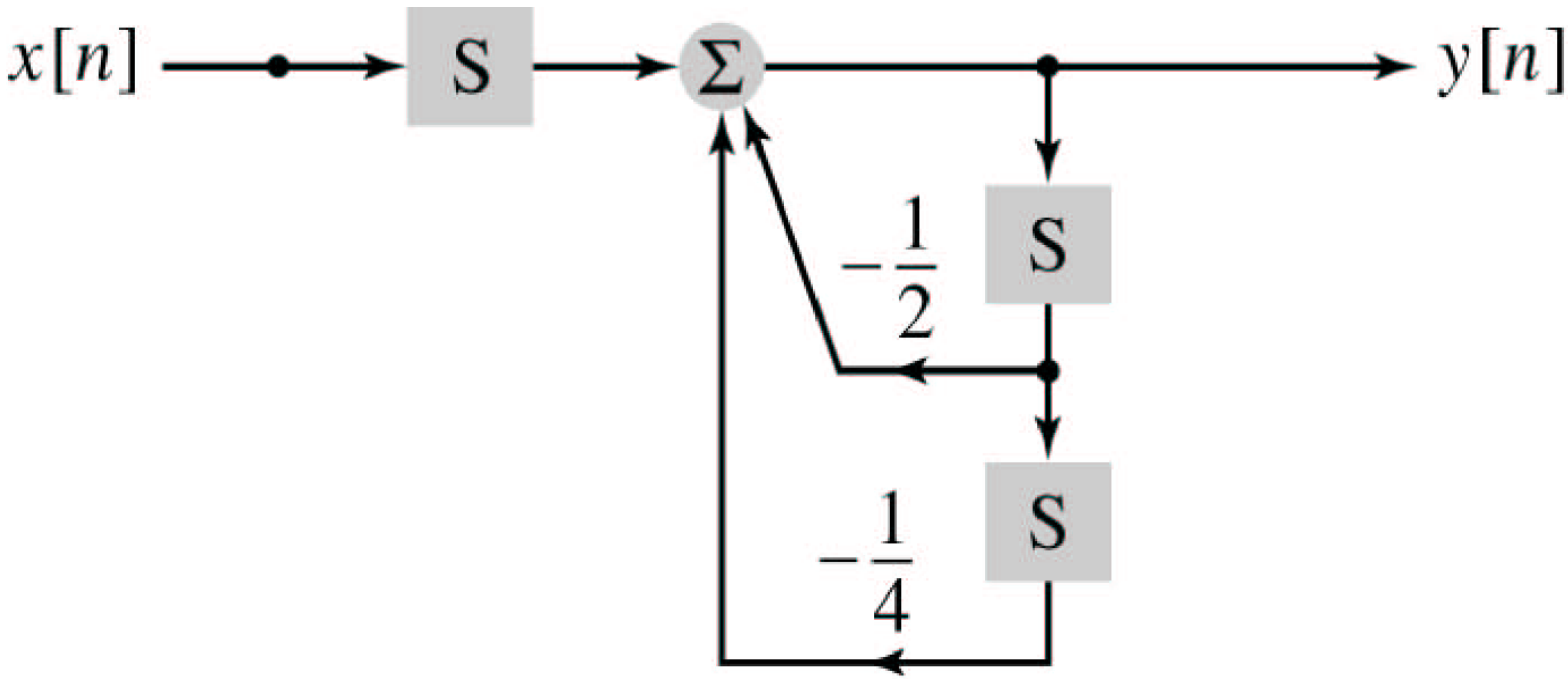
- Determine a equação diferença que gerou o diagrama.



(a)

Exercício

- Determine a equação diferença que gerou o diagrama.



(b)

Exercício

- Encontre a solução geral de

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y} + 5y = 0$$

em termos de seno e cosseno com $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 5$.