Exercícios cap 3 Lathi e outros

Note Title 3/27/2010

Vamos primeiramente lembrar um dos exemplos dados no livro.

Exemplo 3.11 – página 258.

Resposta ao impulso de:

$$y[n] - 0{,}6y[n-1] - 0{,}16y[n-2] = 5x[n].$$

Solução: 2 passos.

1º passo: Verificar atraso máximo na saída. No caso atraso = 2 $\Rightarrow$ 2 condições iniciais

Fazendo $x[n] = \delta[n]$, temos:

$$y[n] - 0{,}6y[n-1] - 0{,}16y[n-2] = 5\delta[n]$$

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = h[n].$$

$$h[n] - 0{,}6h[n-1] - 0{,}16h[n-2] = 5\delta[n] \quad \text{(A)}$$

Note-se que é tb uma eq. recursiva.

. Vamos verificar causalidade.

Se $n=0 \Rightarrow h[0] - 0{,}6\,h[-1] - 0{,}16\,h[-2] =$
$= 5\,\delta[0]$. B

ou seja a resposta ao impulso só depende de valores passados dele mesmo e do valor atual de entrada.

$\Downarrow$

O mesmo vale para $\forall\, n \rightarrow$

Causalidade

$\Downarrow$ mas significa que $h[n] \neq 0$ p/ $n=0$

$\Downarrow$

$h[-1] = h[-2] = 0$

Usando isto em B, temos:

$h[0] = 5\,\delta[0] = 5$

e

$$h[1] - 0{,}6\,\underbrace{\cancel{h[0]}}_{5} - 0{,}16\,\underbrace{\cancel{h[-1]}}_{0} = 5\,\underbrace{\cancel{\delta[1]}}_{0}$$

$h[1] = 3$

Olhando a eq (4) podemos escrever

$$1 - \frac{0,6}{\lambda} - \frac{0,16}{\lambda^2} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\lambda^2 - 0,6\lambda - 0,16 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -0,2 \\ \lambda = 0,8 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$h[n] = A(-0,2)^n + B(0,8)^n$$

Usando as condições iniciais, temos

$h[0] = 5 = A + B.$

$h[1] = 3 = -0,2A + 0,8B$

$$\begin{cases} A + B = 5 \rightarrow 0,2A + 0,2B = 1 \\ -0,2A + 0,8B = 3 \rightarrow -0,2A + 0,8B = 3 \end{cases}$$

$$0 + B = 4$$

$$B = 4 \rightarrow A = 1$$

Logo:

$$h[n] = (-0,2)^n + 4(0,8)^n$$

Exercícios 2ATFi

3.1-4

a) $x[n] = (0,8)^n u[n]$

$$x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_p[n] = \frac{(0,8)^n u[n] + (0,8)^{-n} u[-n]}{2} =$$

$$x_I[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

$$= \frac{(0,8)^n u[n] - (0,8)^{-n} u[-n]}{2}$$

A energia é

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} (0,8)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0,64)^n =$$

$$= \frac{1}{1-0,64} = 2,78.$$

b) O problema de calcular a energia é garantir que todos os termos de expoentes são de x_p ou x_i são disjuntos.

i) Par

$$x_p[n] = \frac{1}{2}\left(0{,}8^{n}\, u[n] + 0{,}8^{-n}\, u[-n]\right)$$

Para $n=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + 1 \right) = 1$

$$\Downarrow$$

$$x_p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\, 0{,}8^{n}\, u[n-1] + \frac{1}{2}\, 0{,}8^{-n}\, u[-n-1]$$

$$E_{x_p[n]} = 1 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(0{,}64)^{n} + \frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{-\infty}(0{,}64)^{-n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(0{,}64)^{n} = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{0{,}64}{1-0{,}64}\right] =$$

$$= 1{,}89$$

ii) Impar

Fazendo a mesma coisa, temos:

$$x_I[n] = 0\,\delta[n] + \frac{1}{2}\, 0{,}8^{n}\, u[n-1] - \frac{1}{2}\, 0{,}8^{-n}\, u[-n-1]$$

$$E_{x_I[n]} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(0{,}64)^{n} + \sum_{n=-1}^{-\infty}(0{,}64)^{-n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(0{,}64)^{n} = 0{,}89$$

Logo:

$$E_x = E_{x_p} + E_{x_I} = 1{,}89 + 0{,}89 = 2{,}78$$

c) Generalizando

Todo o sinal pode ser escrito de seguinte forma:

$$x[n] = \underbrace{x[0]\delta[n] + \frac{1}{2}\left(x[n]u[n-1] + x[-n]u[-n-1]\right)}_{\text{PAR}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left(x[n]u[n-1] - x[-n]u[-n-1]\right)}_{\text{IMPAR}}$$

a energia é:

$$E_{x_p} = x[0]^2 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}|x[n]|^2 + \frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{-\infty}|x[-n]|^2 =$$

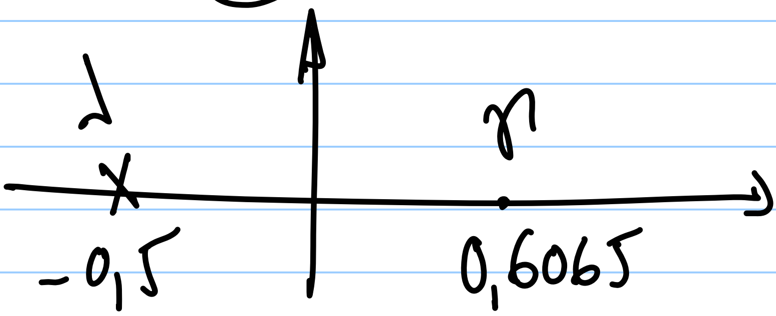
$$= x[0]^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|x[n]|^2$$

$$E_{x_I} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|x[n]|^2$$

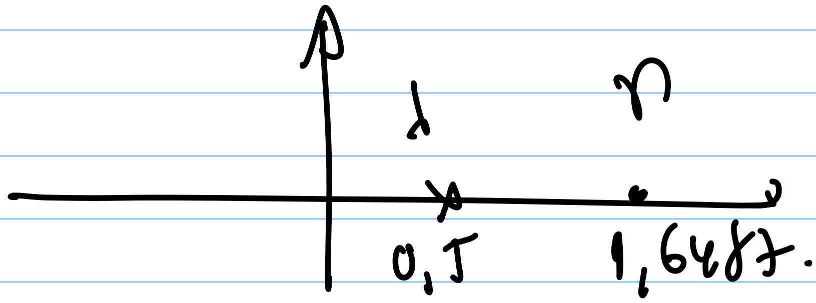
$$E_x = E_{xp} + E_{xI} = x^2[0] + \sum_{n=1}^{\infty}|x[n]|^2$$

3.3.5.

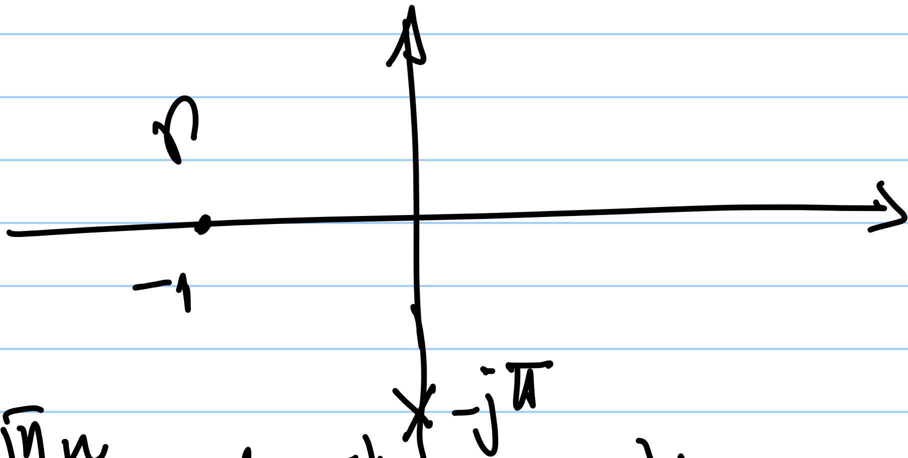
a) $e^{-0,5n} = (0,6065)^n$



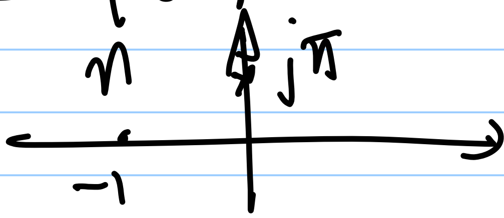
b) $e^{0,5n} = (1,6487)^n$



c) $e^{-j\pi n} = \left(e^{-j\pi}\right)^n = (-1)^n$

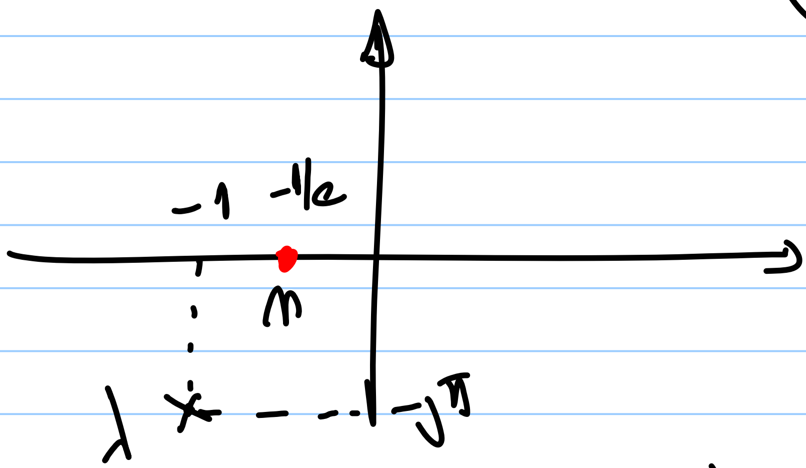


d) $e^{j\pi n} = \left(e^{j\pi}\right)^n = (-1)^n$

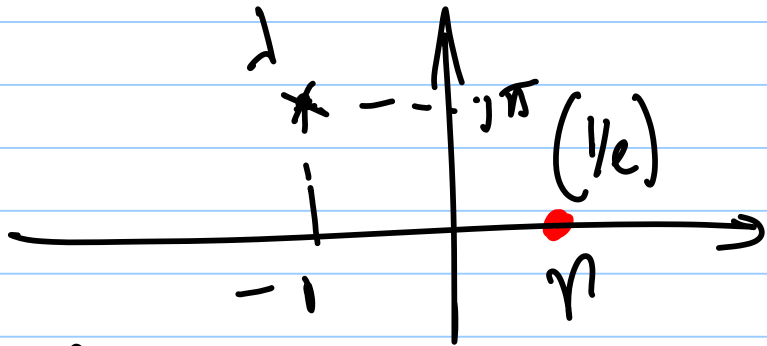


3.3.b

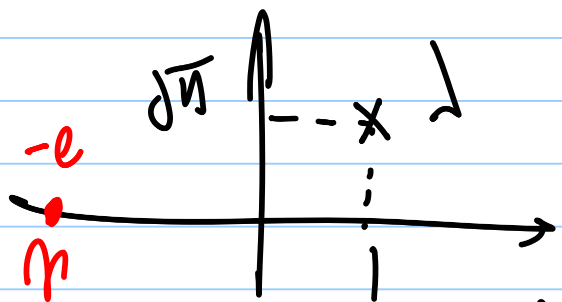
a) $e^{-(1+j\pi)n} = \left(e^{-1}\cdot e^{-j\pi}\right)^n = \left(-\frac{1}{e}\right)^n$



b) $e^{-(1-j\pi)n} = \left(e^{-1}\cdot e^{j\pi}\right)^n = \left(\frac{1}{e}\right)^n$



c) $e^{(1+j\pi)n} = \left(e\cdot e^{j\pi}\right)^n = (-e)^n$



d) $e^{(1-j\pi)n} = \left(e\cdot e^{-j\pi}\right)^n = (-e)^n$

e) $e^{-(1+j\pi/3)n} = \left(e^{-1} e^{-j\pi/3}\right)^n =$

$= \left(\frac{1}{e}\right)^n \cdot \left[\cos \pi/3\, n - j \sin \pi/3\, n\right]$

f) $e^{(1-j\pi/3)n} = \left(e \cdot e^{-j\pi/3}\right)^n$

$= e^n \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} n - j \sin \pi/3\, n\right).$

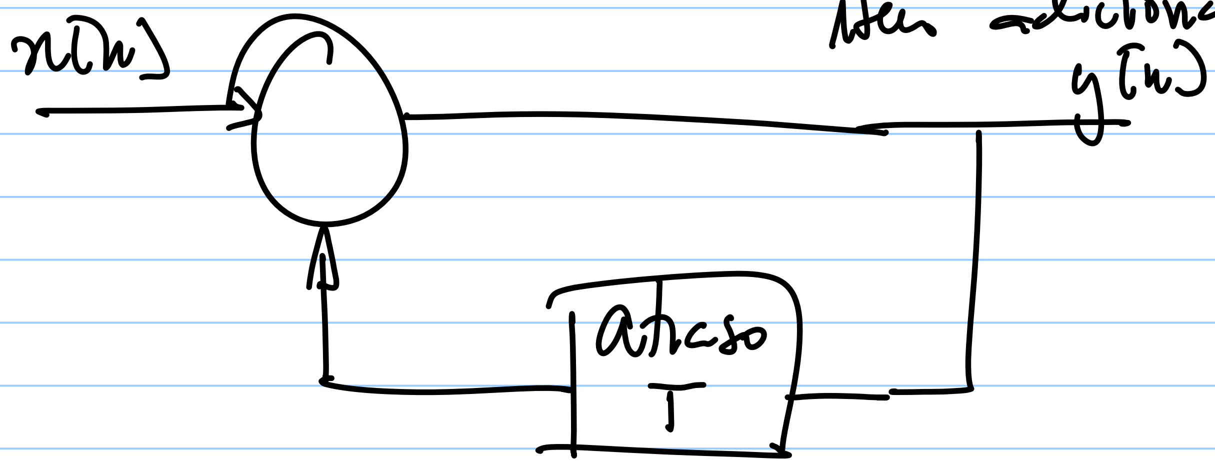
3.4.1.

a) $y[n] = y[n-1] + x[n].$

custo agora

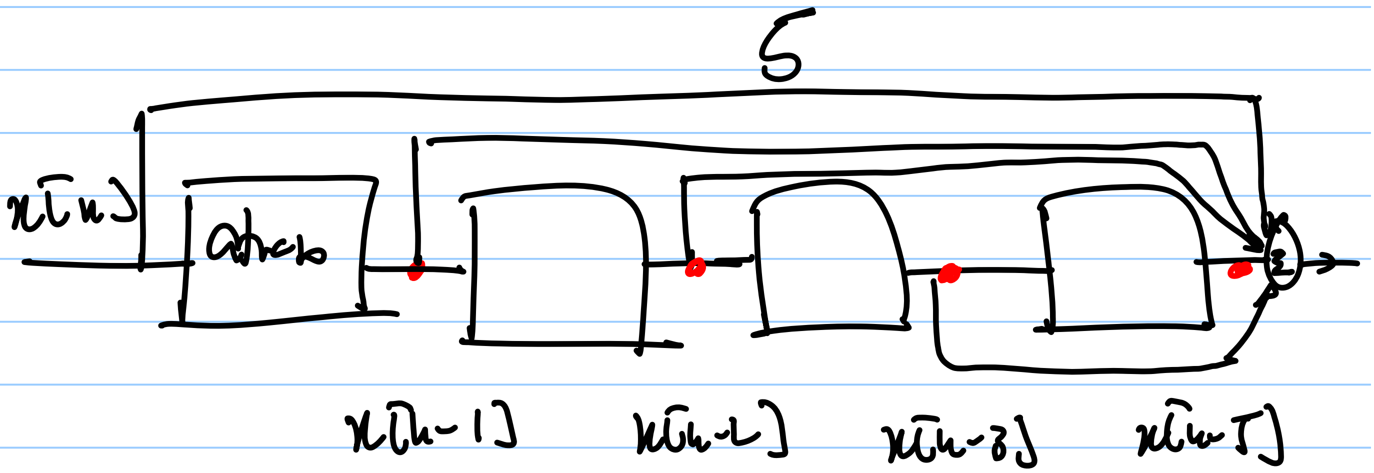
custo anterior

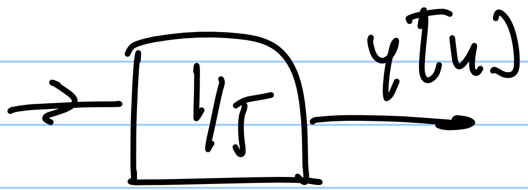
item adicionado



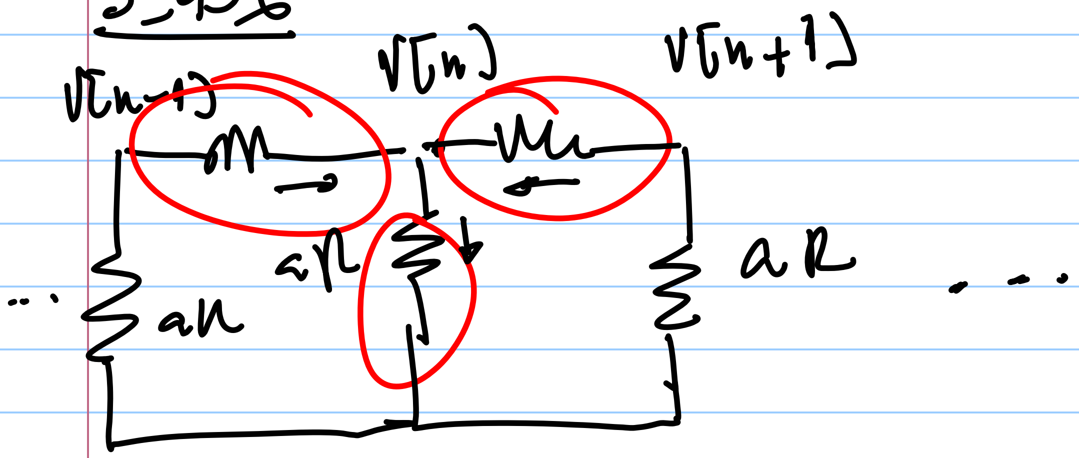
3.4.-3

$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4]$.





3.4.-6



$$\frac{v[n-1]-v[n]}{R} + \frac{v[n+1]-v[n]}{R} - \frac{v[n]}{aR} = 0$$

$$a\left(v[n-1]+v[n+1]-2v[n]\right) - v[n] = 0$$

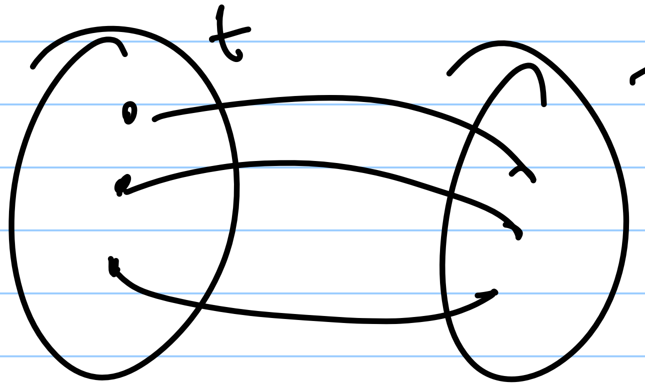
$$v[n-1] + v[n+1] - 2v[n] - \frac{1}{a} v[n] = 0.$$

$$v[n+1] - \left(2 + \frac{1}{a}\right) v[n] + v[n-1] = 0.$$

$$\boxed{v[n+2] - \left(2 + \frac{1}{a}\right) v[n+1] + v[n] = 0}$$

3_4_b)

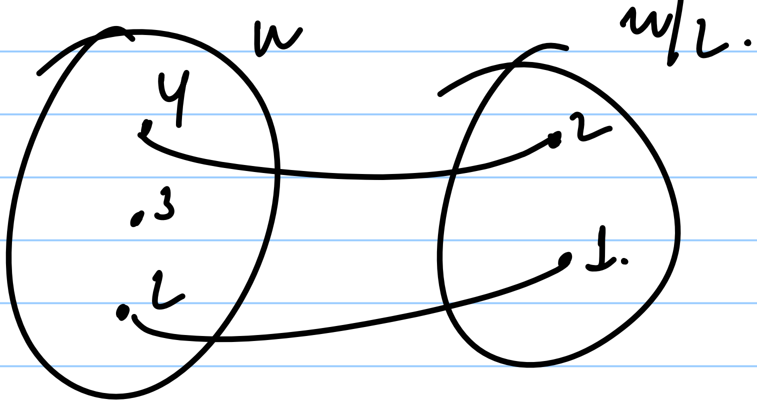
$y(t) = x(2t)$ ou $y(t/2) = x(t)$.



bijective.

$y[n] = x[2n]$ ou $y[n/2] = x[n]$

mas $\frac{n}{2}$ só pode ser inteiro



não é bijective.

3.5.2

$$y[n] - 0{,}6\,y[n-1] - 0{,}16\,y[n-2] = 0$$

$$y[-1] = -25 \,, \quad y[-2] = 0 .$$

Solução:

$$y[n] = 0{,}6\,y[n-1] + 0{,}16\,y[n-2]$$

1) $y[0] = 0{,}6 \times (-25) + 0 = -15$

2) $y[1] = 0{,}6\,y[0] + 0{,}16\,y[-1]$

$$= 0{,}6 \times (-15) + 0{,}16 \times (-25) = -13$$

3) $y[2] = 0{,}6\,y[1] + 0{,}16\,y[0]$

$$= 0{,}6\,(-13) + 0{,}16 \times (-15) = -10{,}2$$

3.5.4

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = x[n+2] + 3x[n+1] + 3x[n]$$

$x[n] = (3)^n u[n]$, $y[-1] = 3$, $y[-2] = 2$

Solução:

Trocando a variável n por n-2, temos:

$$y[n] = -3y[n-1] - 2y[n-2] + x[n] + 3x[n-1] + 3x[n-2]$$

Para n=0

$$y[0] = -3y[-1] - 2y[-2] + (3)^n u[n] + 3.3^{n-1} u[n-1] + 3.3^{n-2} u[n-2]$$

$$= -3(3) - 2(2) + 1 + 0 + 0 = -12$$

Para n=1.

$$y[1] = -3y[0] - 2y[-1] + 3 + 3(1) + 0 =$$
$$= -3(-12) - 2(3) + 3 + 3 = 36$$

Para n=2

$$y[2] = -3y[1] - 2y[0] + 9 + 3(3) + 3(1) =$$
$$= -3(36) - 2(-12) + 9 + 9 + 3 = -63$$

3.6.5

a) Usando a definição de sequência de Fibonacci, temos

$$f[n] = f[n-1] + f[n-2]$$

ou

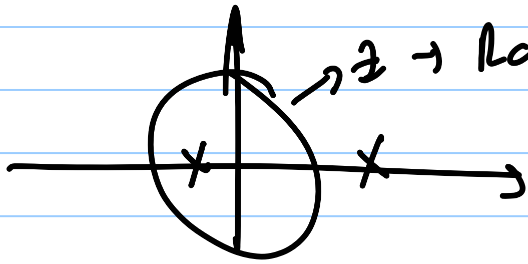
$$f[n] - f[n-1] - f[n-2] = 0$$

Repare que ñ há entradas, sistema autônomo. Só as CI é que alimentam o sistema.

b)

$$1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \to \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Raízes
$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{+1+\sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62 \\ \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62 \end{cases}$$



<u>Instável</u>.

c) Podemos resolver a equação de Fibonacci

A resposta entrada-zero (natural) é

$$f[n] = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

$$f[1] = 0 = A\lambda_1 + B\lambda_2$$
$$f[2] = 1 = A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2$$

Resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A\lambda_1 + B\lambda_2 = 0 \\ A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A\lambda_1^2 - B\lambda_1\lambda_2 = 0 \\ A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow B(\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2) = 1$$

$$B = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2} \quad e \quad A = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2)}$$

Então:

$$f(n) = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2)}\lambda_1^n + \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2}\cdot\lambda_2^n$$

3.7.1

a) $y[n+1] + 2y[n] = x[n]$ ou

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n-1]$$

Aplicando o impulso, temos:

$$h[n] + 2h[n-1] = \delta[n-1]$$

Sabemos que o sistema é causal.

Exemplo:

$$y[0] + 2y[-1] = x[-1]$$

$0, -1, -1$ só passado.

Logo $h[n] = 0$ para $n < 0$.

Para $h[0]$, temos

$$h[0] + 2\cancel{h[-1]}^{\,0} = \delta[-1] = 0$$

A forma da resposta ao impulso é a mesma da equação característica a não ser por um termo.

Eq. característica:

$$1 + \frac{2}{\lambda} = 0 \rightarrow \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

Logo: $h[n] = A\delta[n] + B(-2)^n$

Para $n=0 \rightarrow h[0] = A + B = 0$

Caso ñ houvesse o termo $A\delta[n]$ não seria possível zerar a $h[n]$.

. Precisamos de mais uma condição inicial.

Para $n=1$

$$h[1] + 2h[0] = \delta[0]$$

$$h[1] + 0 = 1 \rightarrow h[1] = 1.$$

Logo:

$$h[1] = B(-2) = 1 \rightarrow B = -1/2 \rightarrow A = 1/2$$

Finalmente:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}(-2)^n u[n]$$

O coeficiente do impulso é determinado por

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \text{termo de maior atraso}$$

3.8.4

$$x[n] = (3)^{-n+2} u[n+3]$$
$$h[n] = 3(n-2)(2)^{n-3} u[n-4]$$

Solução: Colocar na forma da tabela 3.1 da página 263.

Reparar que lá só tem $\underline{\underline{u[n]}}$.

* No caso de x, temos que atrasar de $\underline{3}$

$$x[n-3] = (3)^{-(n-3)+2} u[n] = \frac{1}{3} 3^{-n} u[n]$$

* No caso de h, temos que adiantar de $\underline{4}$

$$h[n+4] = 3(n+2)(2)^{n+1} u[n]$$

* No caso de $y[n] = x[n] * h[n]$, temos que adiantar de $+4-3 = +1$.

$$y[n+1] = x[n-3] * h[n+4]$$
$$y[n+1] = \frac{1}{3} 3^{-n} u[n] * \left(3(n+2)(2)^{n+1} \cdot u[n]\right)$$
$$= \frac{1}{\cancel{3}} 3^{-n} u[n] * \cancel{3} \cdot 2 \left((n+2) 2^{n} u[n]\right)$$
$$= 2 \cdot 3^{-n} u[n] * \left(n 2^{n} u[n] + 2(2)^{n} u[n]\right)$$
$$= 2\left(3^{-n} u[n] * n 2^{n} u[n]\right) + 4\left(3^{-n} u[n] * 2^{n} u[n]\right)$$

Olhando na Tabela 3.1 da página 263

9) (b) $n 2^n u[n] * 3^{-n} u[n]$ (Invertendo a ordem)

$n\, r_1^n u[n] * r_2^n u[n]$

$r_1 = 2,\ r_2 = \frac{1}{3}$.

$$\frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2)^2} = \frac{2 \cdot 1/3}{(2 - 1/3)^2} = \frac{2/3}{(5/3)^2} = \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{25} = \frac{6}{25}$$

$$\left[r_2^n - r_1^n + \frac{r_1 - r_2}{r_2} n\, r_1^n\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n + \frac{2 - 1/3}{1/3} n\, 2^n\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n + \frac{5/3}{1/3} n\, 2^n\right] =$$

$$= \left[(3)^{-n} + (5n - 1) 2^n\right]$$

Logo:

$$n 2^n u[n] * 3^{-n} u[n] = \frac{6}{25}\left[(3)^{-n} + (5n-1)2^n\right] u[n]$$

(c) $3^{-n} u[n] * 2^n u[n]$

4) $r_1^n u[n] * r_2^n u[n] = \left[\frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}\right] u[n]$

Neste caso, $r_1 = \frac{1}{3}$ e $r_2 = 2$, logo.

$$3^{-n}u[n] * 2^n u[n] = \left[\frac{(1/3)^{n+1} - 2^{n+1}}{1/3 - 2}\right] u[n]$$

$$= \left[\frac{(3)^{-n-1} - 2^{n+1}}{-5/3}\right] u[n] =$$

$$= -\frac{3}{5}\left[3^{-n-1} - 2^{n+1}\right] u[n]$$

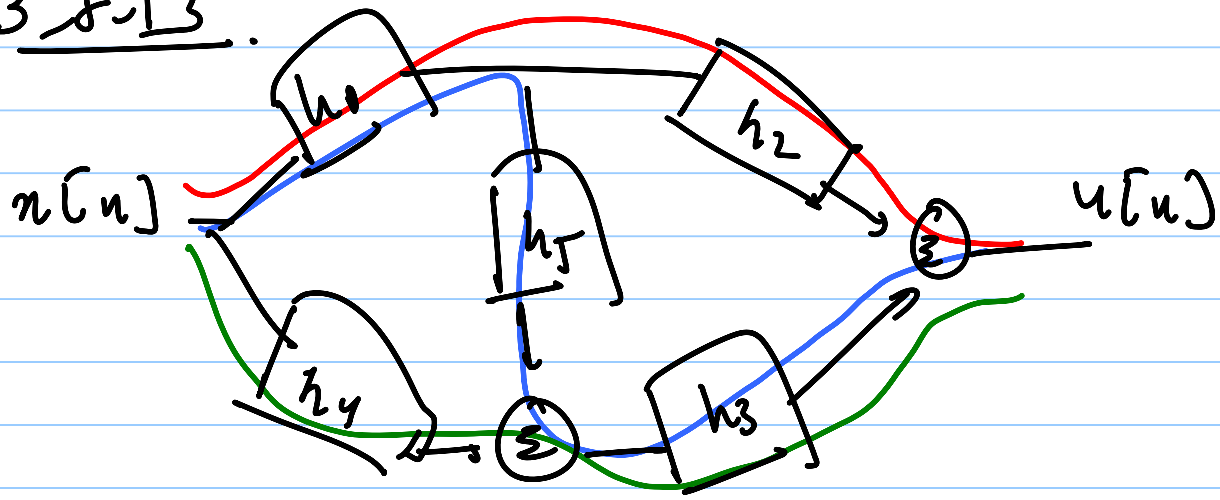
$$y[n+1] = \frac{12}{25}\left[3^{-n} + (5n-1)2^n\right]u[n]$$
$$- \frac{12}{5}\left[3^{-(n+1)} - 2^{n+1}\right]u[n]$$

Finalmente

$$y[n] = -\frac{12}{5}\left[3^{-n} - 2^n\right]u[n-1] +$$
$$+ \frac{12}{25}\left[3^{-(n-1)} + (5n-6)\,2^{(n-1)}\right]u[n-1]$$

3.8-13.

a)



$h_1[n] * h_2[n]$

$h_1[n] * h_5[n] * h_3[n]$

$h_4[n] * h_3[n]$

$$y[n] = \big(h_1[n] * h_2[n] + h_1[n] * h_5[n] * h_3[n] + h_4[n] * h_3[n]\big) * x[n]$$

3.8.22.

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & \cdots & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ h[n] & \cdots & & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ \vdots \\ x[n] \end{bmatrix}$$

a)

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 15 \\ 15 \\ 15,5 \\ 15,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 \\ h[4] & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & 0 \\ h[5] & h[4] & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$h[0] = 8$

$h[1] = 12 - 8 = 4$

$h[2] = 15 - 4 - 8 = 3$

$h[3] = 15 - 3 - 4 - 8 = 0$

$h[4] = 15,5 - 0 - 3 - 4 - 8 = 0,5$

$h[5] = 15,75 - 0,5 - 0 - 3 - 4 - 8 = 0,25$

b) $h = (1, 2, 4, \dots)$, $y = (1, 7/3, 43/9 \dots)$

$h[0], h[1], h[2] \quad | \cdot y[0], y[1], y[2]$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7/3 \\ 43/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 7/3 \\ 43/9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7/3 \\ 43/9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/9 \end{bmatrix}$$

<u>39.3</u>.

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = x[n+2] + 3x[n+1] + 3x[n]$$

$x[n] = 3^n u[n]$, $y[0] = 1$ e $y[1] = 3$.

Natural $\rightarrow$ eq. característica

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Logo:

$$y_h[n] = A(-2)^n + B(-1)^n$$

Particular: $y_p[n] = K(3)^n$

Substituindo $y_p[n]$ na equação, temos

$$K(3)^{n+2} + 3K(3)^{n+1} + 2K(3)^{n} =$$

$$= (3)^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 3^{n}$$

$$K \cdot 3^2 \cdot \cancel{(3)^n} + 3K3\cancel{(3)^n} + 2K\cancel{(3)^n} =$$
$$= 3^2 \cdot \cancel{(3)^n} + 3 \cdot 3 \cancel{(3)^n} + 3\cancel{(3)^n}$$

$$K[9 + 9 + 2] = 9 + 9 + 3$$

$K = \frac{21}{20}$, ou seja.

$$y_p[n] = \frac{21}{20}(3)^n$$

Para achar a resposta completa precisamos utilizar as condições iniciais.

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] =$$

$$= A(-2)^n + B(-1)^n + \frac{21}{30}(3)^n$$

$$\left.\begin{aligned} y[0] &= 1 = A + B + \frac{21}{30} \\ y[1] &= 3 = -2A - B + \frac{63}{30} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A &= \frac{1}{5} \\ B &= -1/4 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$y[n] = \left(\frac{1}{5}(-2)^n - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{21}{20}(3)^n\right)u[n]$$

b) $y[-1] = y[-2] = 1$

Precisamos achar $y[0]$ e $y[1]$

$$y[0] = -3y[-1] - 2y[-2] + x[0] + 3x[-1] + 3x[-2]$$

Se considerarmos que $x[n] = 3^n u[n]$, logo $x[-1] = x[-2] = 0$. e

$$y[0] = -3 - 2 + 1 = -4$$

$$y[1] = -3\cancel{y[0]}^{\to -4} - 2\cancel{y[-1]}^{\to 1} + \cancel{x[1]}^{\to 3} + 3\cancel{x[0]}^{\to 1} + 3\cancel{x[-1]}^{\to 0}$$

$$y[1] = +12 - 2 + 3 + 3 = 16$$

Com $y[0] = -4$ e $y[1] = 16$, podemos usar o mesmo raciocínio da letra a)

$$\left.\begin{aligned} -4 &= A + B + \frac{21}{20} \\ 16 &= -2A - B + \frac{63}{20} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} A &= -\frac{39}{5} \\ B &= 11/4 \end{aligned}$$

Finalmente.

$$y[n] = \left(-\frac{39}{5}(-2)^n + \frac{11}{4}(-1)^n + \frac{21}{20}(3)^n\right)u[n]$$

3.9.5

a) $\sum_{k=0}^{n} k$

Temos que fundar em um sistema dinâmico

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k}_{y[n-1]} + n$$

ou

$$y[n] = y[n-1] + n$$

Pensando p/ a forma "adiantada"

$$y[n+1] = y[n] + n+1 \quad \text{ou}$$

$$y[n+1] - y[n] = n+1$$

Resposta Natural

$$\lambda - 1 = 0 \;\Big\}\; \lambda = 1$$

$$y_h[n] = A(1)^n = A.$$

Resposta Particular:

$$y_p[n] = B + Cn$$

A

igual a y_H

Logo:

$$y_p[n] = Bn + Cn^2$$

Substituindo $y_p[n]$ na equação, temos:

$$B(n+1) + C(n+1)^2 - Bn - Cn^2 = n+1.$$

$$Bn + B + C(n^2 + 2n + 1) - Bn - Cn^2 = n+1$$

$$B + C + 2Cn = n+1.$$

$$C = 1/2 \Rightarrow B = 1/2.$$

Logo:

$$y[n] = A + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = A + \frac{1}{2}n(n+1)$$

Com condição inicial nula, temos:

$$y[0] = 0 = A \Rightarrow 0$$

Logi:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{k} = \frac{n(n+1)}{2}.$$