Exercícios do Capítulo 2: Convolução

Prof. Fernando de Oliveira Souza

(baseado nas notas de aula de SDL do Prof. Eduardo Mendes)

`fosouza@cpdee.ufmg.br` `(http://www.cpdee.ufmg.br/~fosouza/)`

Departamento de Engenharia Eletrônica

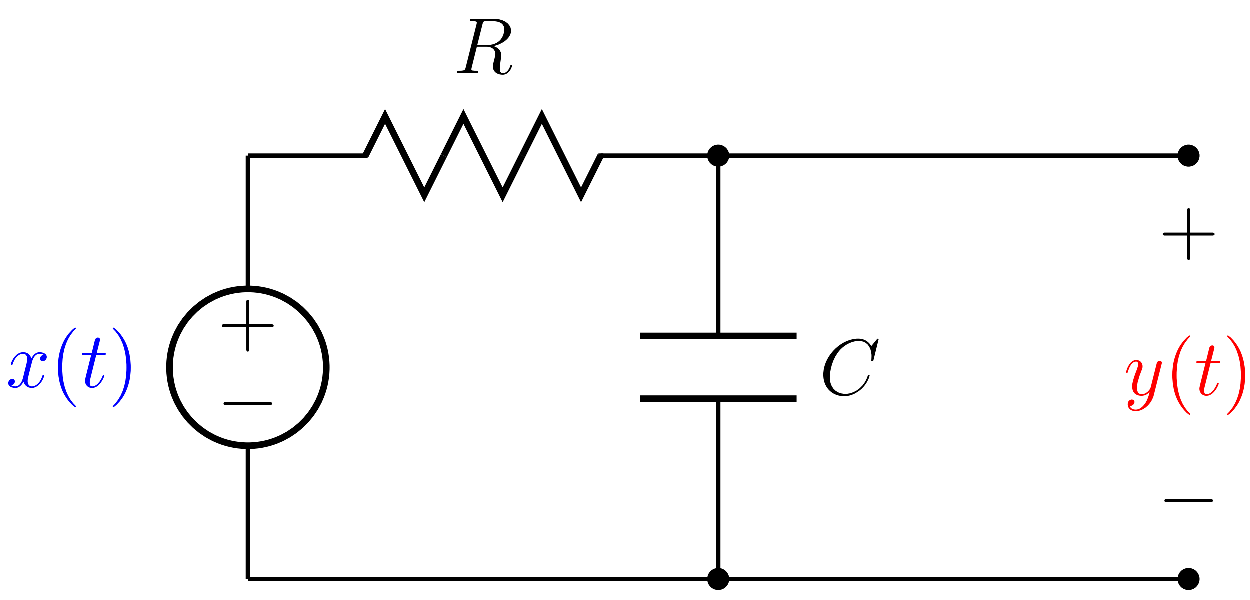
Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil

Exercício

Encontre a resposta ao degrau unitário do circuito abaixo que tem a seguinte resposta ao impulso

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$



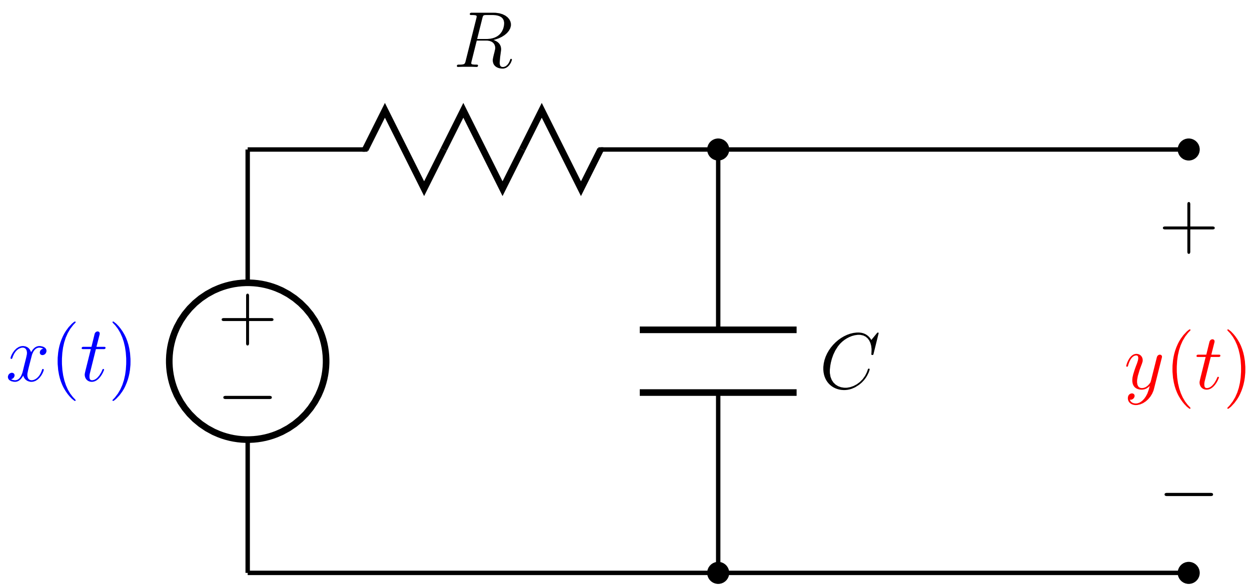
Ordem de executar a convolução

- A convolução pode ser executada em qualquer ordem, i.e

$$
\begin{aligned}
h(t) * x(t) &= x(t) * h(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad \begin{cases} v = t - \tau \\ d\tau = -d\nu \\ \tau \to -\infty, \quad \nu \to \infty \\ \tau \to \infty, \quad \nu \to -\infty \end{cases} \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} x(t-\nu) h(\nu)(-d\nu) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\nu) h(\nu) d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) x(t-\nu) d\nu \quad = \quad h(t) * x(t)
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 - Circuito RC

Considere novamente o Circuito RC



Suponha que o seguinte sinal de entrada $x(t)$ é aplicado no circuito:

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

Exemplo 1 - (Solução 2)

Integral de convolução

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu - t)h(\nu)d\nu$$

Sendo

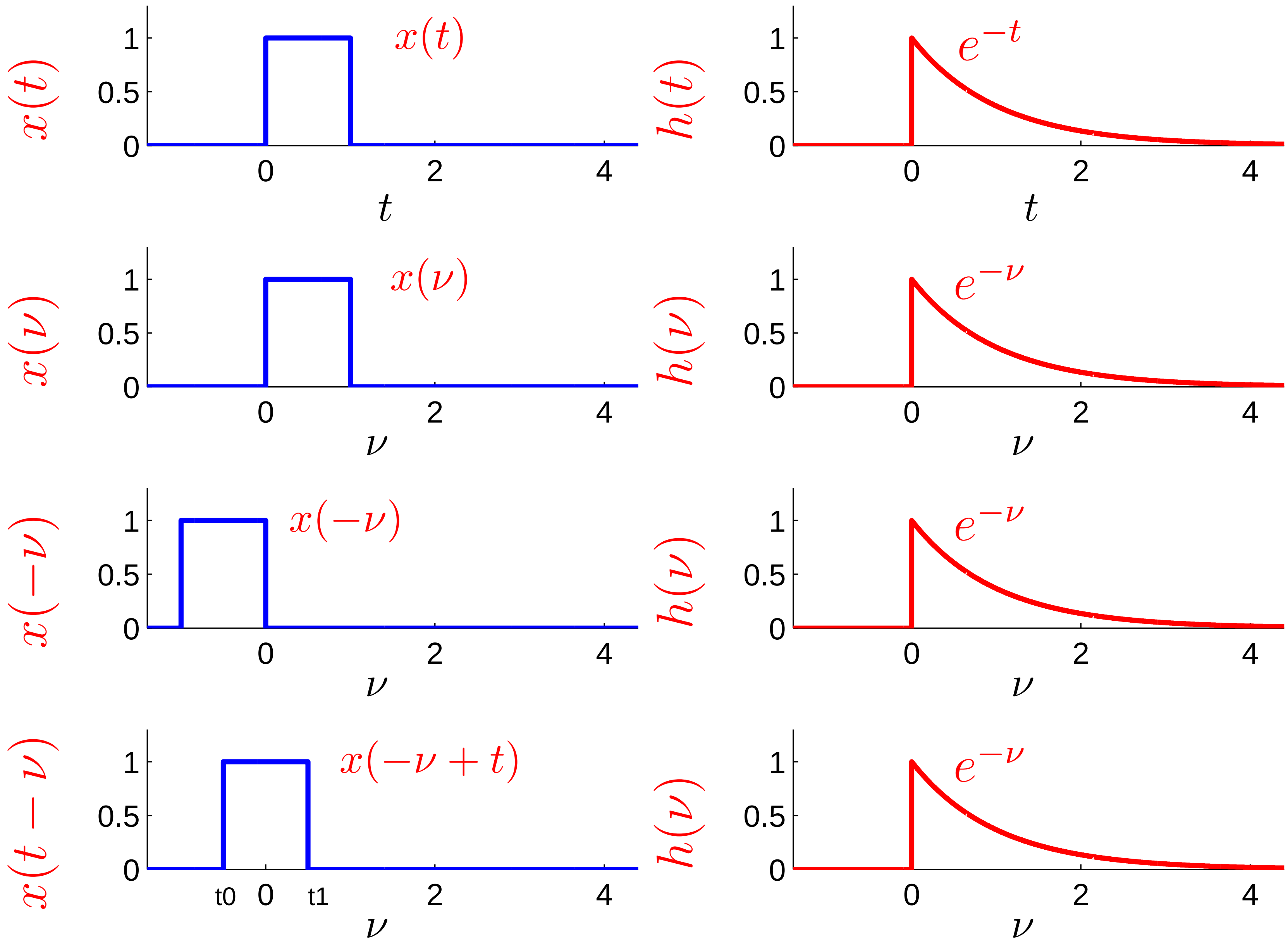
$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$$

com $RC = 1$ e

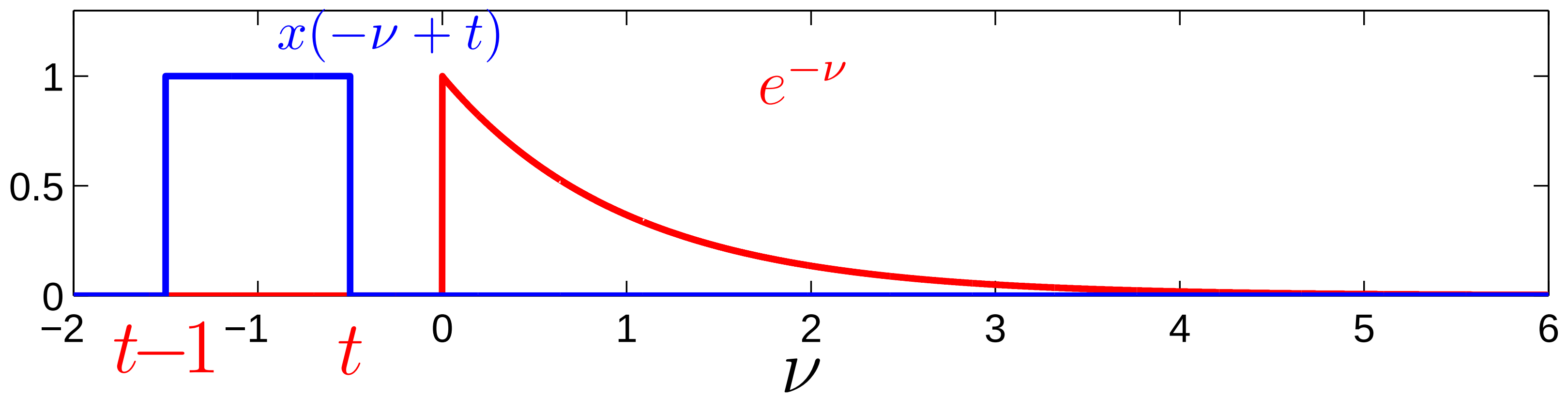
$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

- Determinar intervalos de integração.

Exemplo 1 - (Solução 2)



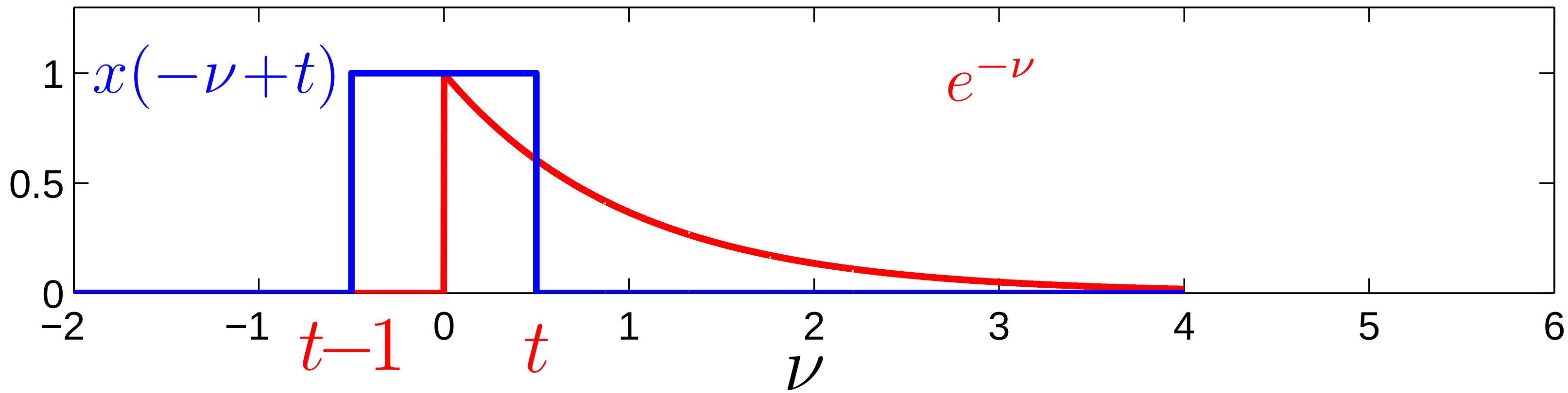
Exemplo 1 - (Primeiro Intervalo)



- Note que todo $t < 0$ não existe sobreposição entre as curvas.
- Portanto,

$$\text{Se } t < 0, \text{ então, } y(t) = 0, \ \forall \nu$$

Exemplo 1 - *(Segundo Intervalo)*



- Note que todo $0 \leq t \leq 1$ o domínio de sobreposição entre as curvas aumenta a medida que t também aumenta.
- Portanto,

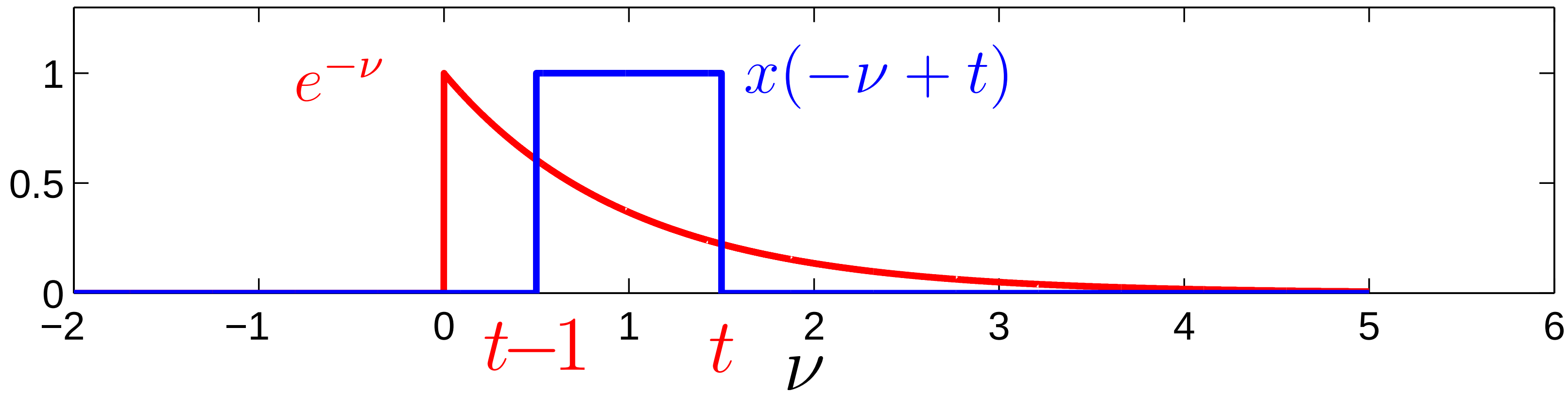
  Se $0 \leq t \leq 1$, então, $y(t) \neq 0$, para $0 \leq \nu \leq t$

Exemplo 1 - (Segundo Intervalo)

- Para todo $0 \leq t \leq 1$.
- O intervalo de integração é $0 \leq \nu \leq t$.
- A integral de Convolução é calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t 1.e^{-\nu} d\nu \\ &= (e^{-\nu}|_0^t) = -e^{-t} + 1 \\ &= 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

Exemplo 1 - *(Terceiro Intervalo)*



- Note que todo $t > 1$ o domínio de sobreposição entre as curvas permanece inalterado, sendo este $t-1 \leq \nu \leq t$
- Portanto,

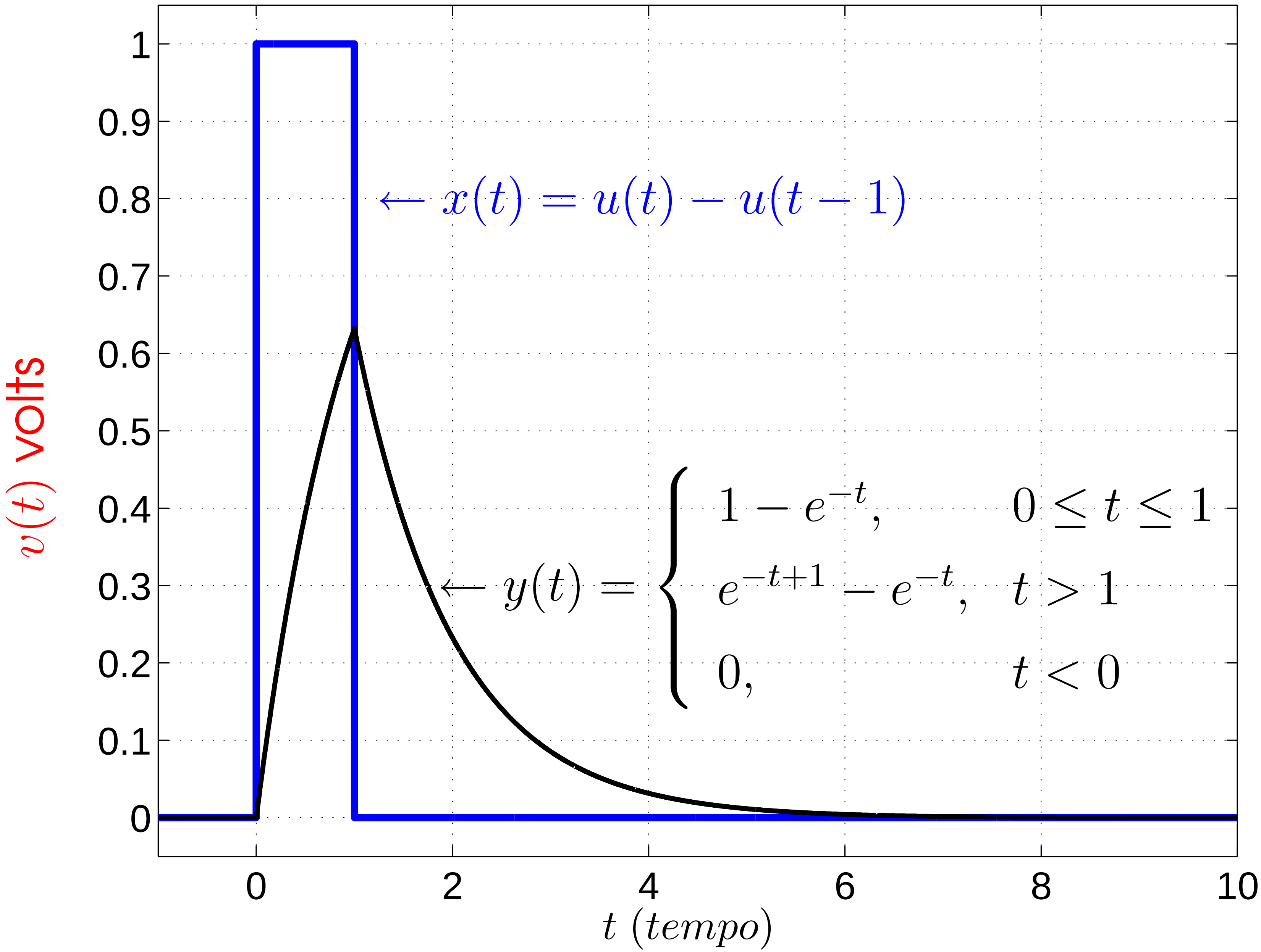
Se $t > 1$, então, $y(t) \neq 0$, para $t-1 \leq \nu \leq t$

Exemplo 1 - *(Terceiro Intervalo)*

- Para todo $t > 1$.
- O intervalo de integração é $t-1 \leq \nu \leq t$.
- A integral de Convolução é calculada da seguinte maneira:

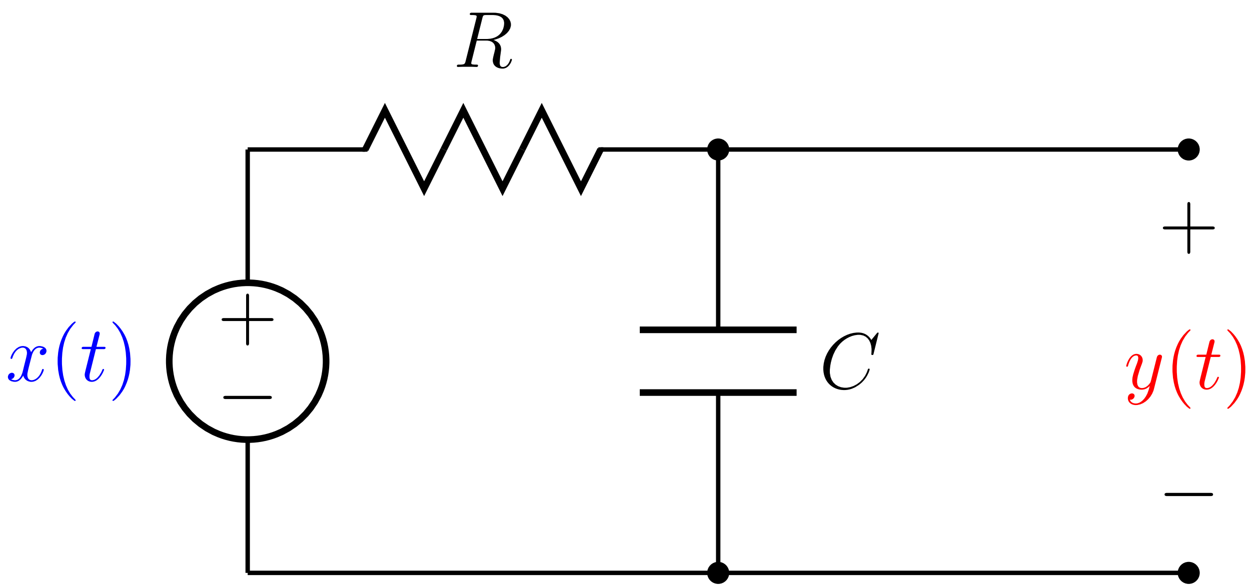
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-1}^{t} 1.e^{-\nu} d\nu \\ &= -(e^{-\nu}|_{t-1}^{t}) = -(e^{-t} - e^{-t+1}) \\ &= e^{-t+1} - e^{-t} \end{aligned}$$

Exemplo 1 - Circuito RC -Solução



Exemplo 1 - Circuito RC

Considere novamente o Circuito RC



Suponha que o seguinte sinal de entrada $x(t)$ é aplicado no circuito:

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

Exemplo 1 - (Solução 1)

Integral de convolução

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Sendo

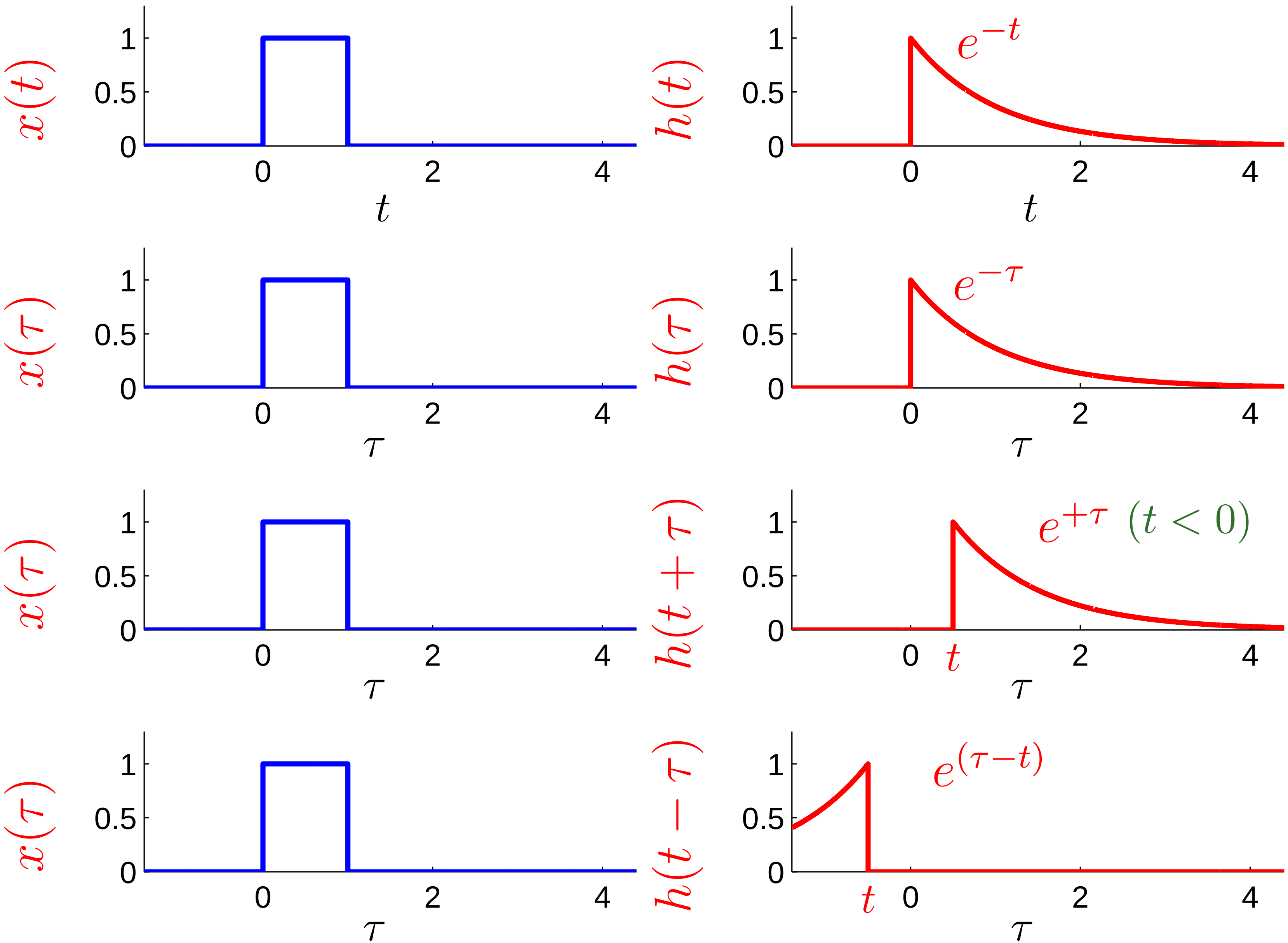
$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$$

com $RC = 1$ e

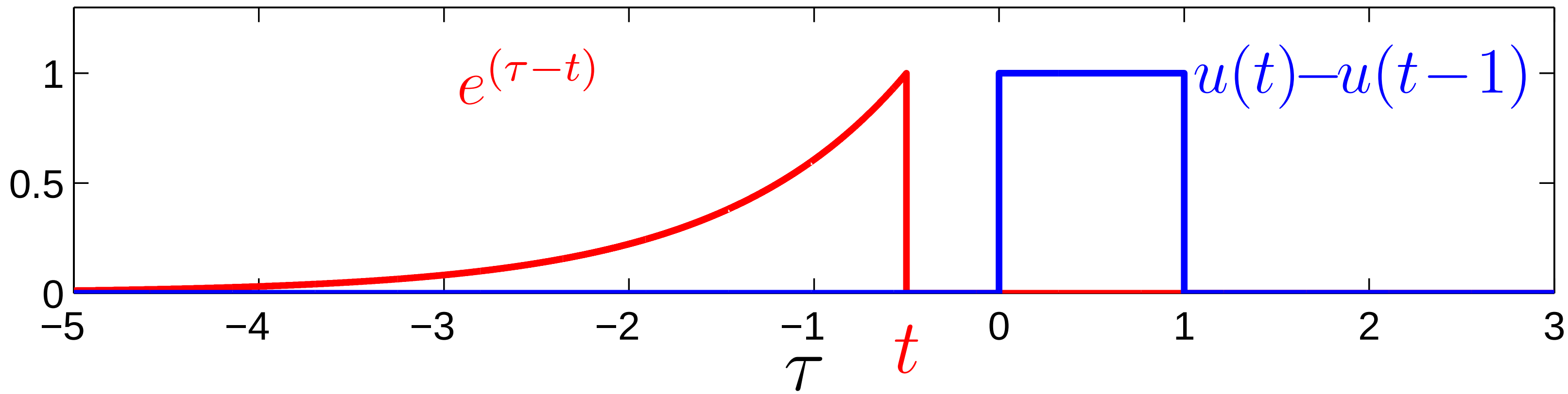
$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

- Determinar intervalos de integração.

Exemplo 1 - (Solução 1)



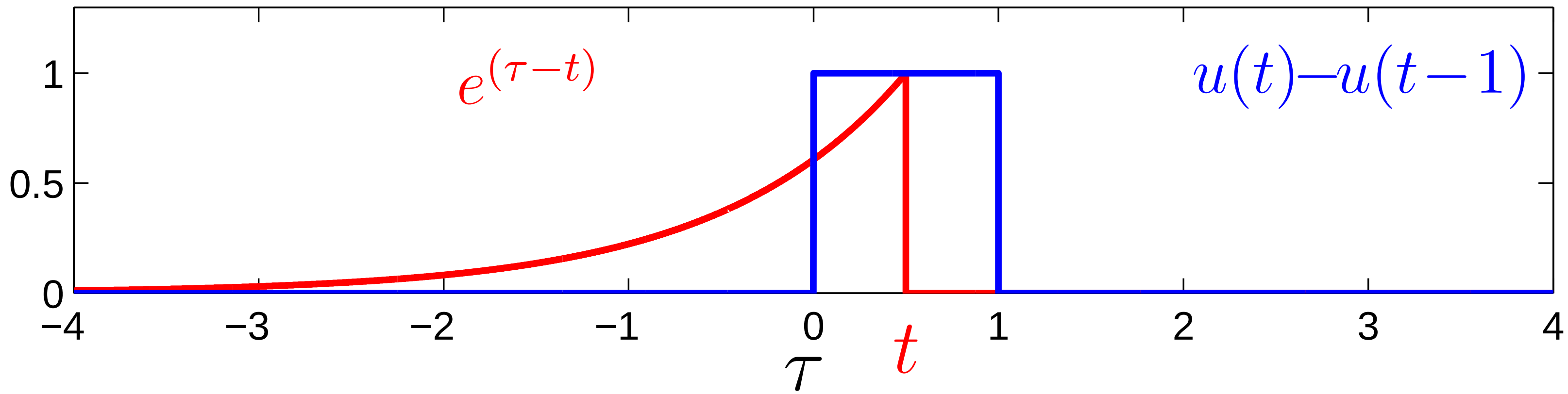
Exemplo 1 - (Primeiro Intervalo)



- Note que todo $t < 0$ não existe sobreposição entre as curvas.
- Portanto,

$$\text{Se } t < 0, \text{ então, } y(t) = 0, \; \forall \tau$$

Exemplo 1 - *(Segundo Intervalo)*



- Note que todo $0 \leq t \leq 1$ o domínio de sobreposição entre as curvas aumenta a medida que t também aumenta .
- Portanto,

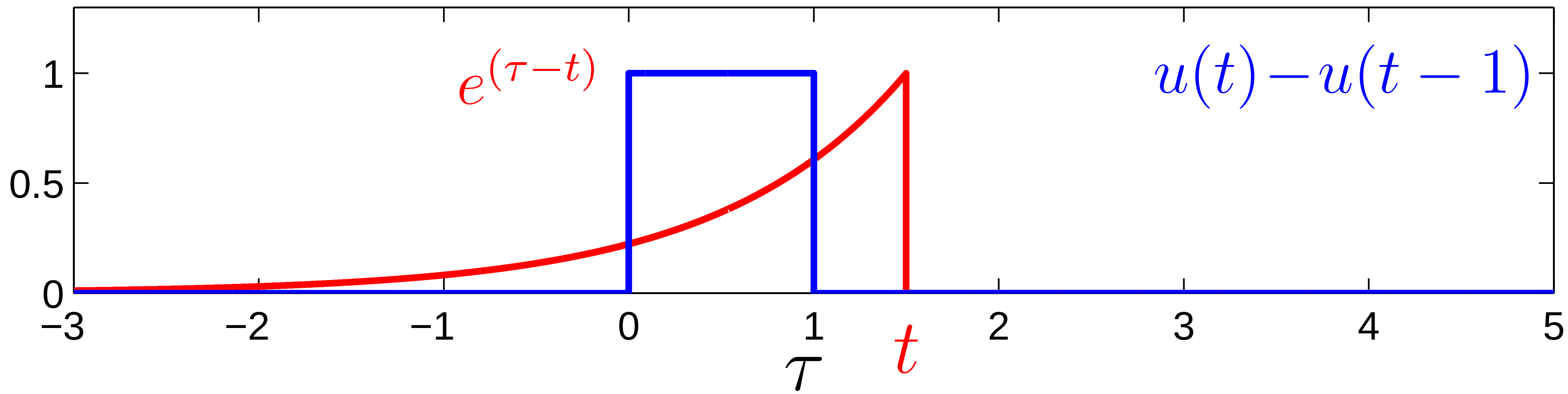
Se $0 \leq t \leq 1$, então, $y(t) \neq 0$, para $0 \leq \tau \leq t$

Exemplo 1 - *(Segundo Intervalo)*

- Para todo $0 \leq t \leq 1$.
- O intervalo de integração é $0 \leq \tau \leq t$.
- A integral de Convolução é calculada da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t 1.e^{\tau - t} d\tau \\
&= e^{-t} \int_0^t 1.e^{\tau} d\tau \\
&= e^{-t}(e^{\tau}|_0^t) = e^{-t}(e^t - 1) \\
&= 1 - e^{-t}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 - *(Terceiro Intervalo)*



- Note que todo $t > 1$ o domínio de sobreposição entre as curvas permanece inalterado, sendo este $0 \leq \tau \leq 1$
- Portanto,

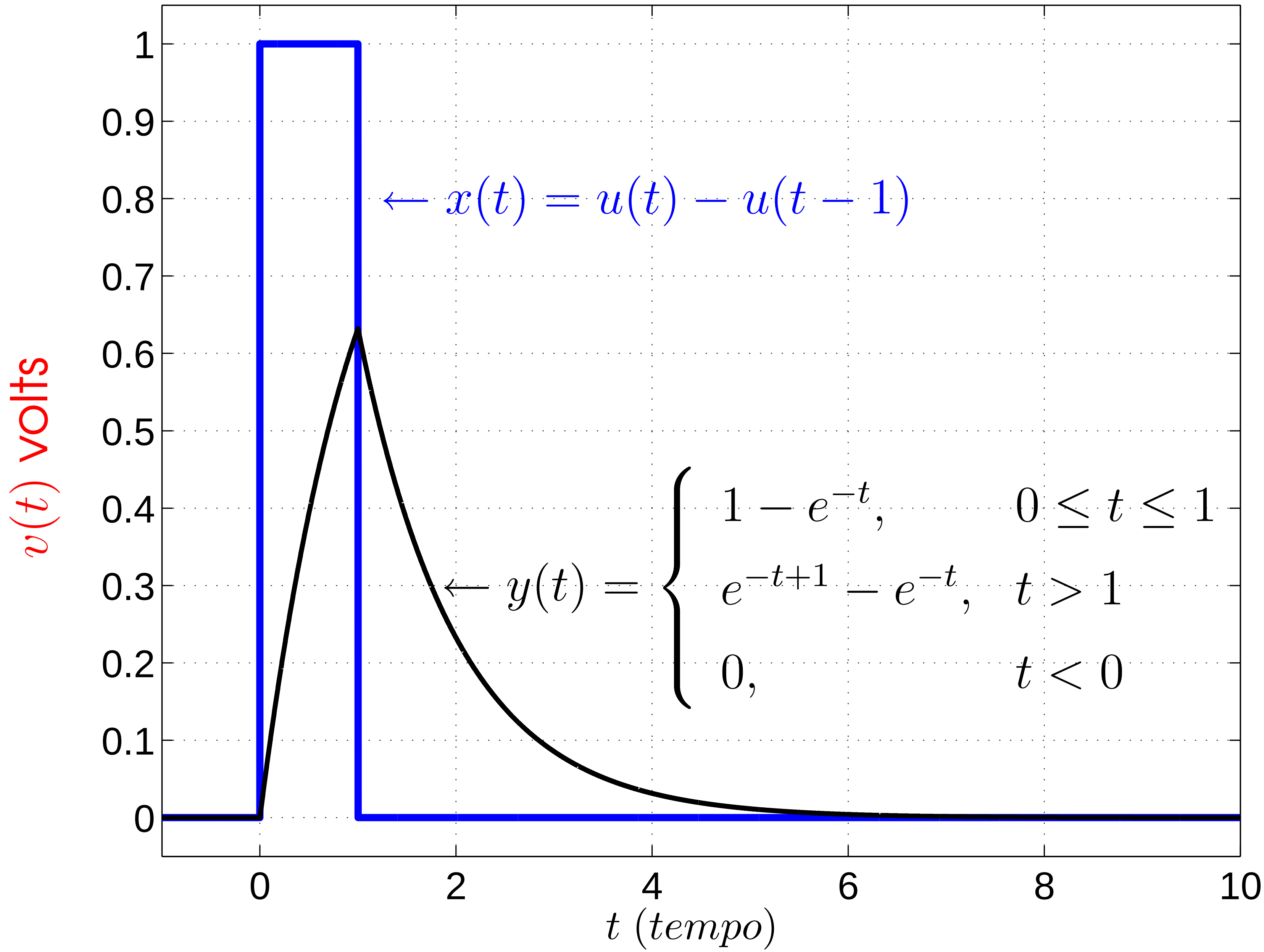
$$\text{Se } t > 1, \text{ então, } y(t) \neq 0, \text{ para } 0 \leq \tau \leq 1$$

Exemplo 1 - (Terceiro Intervalo)

- Para todo $t > 1$.
- O intervalo de integração é $0 \leq \tau \leq 1$.
- A integral de Convolução é calculada da seguinte maneira:

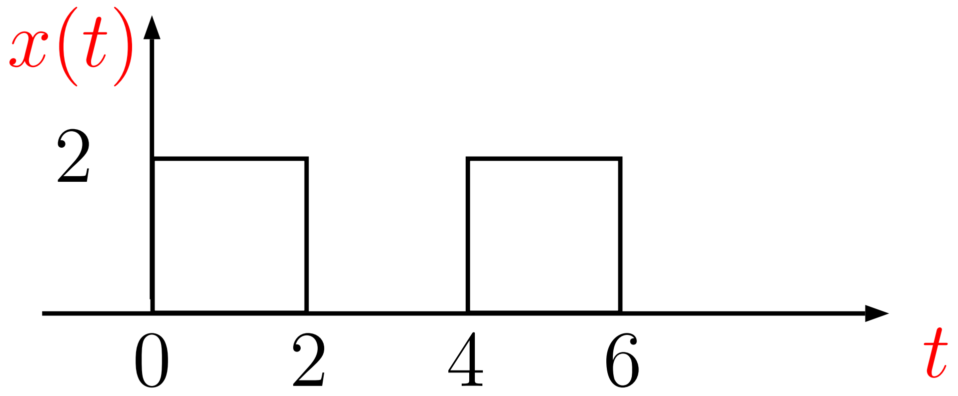
$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^1 1.e^{\tau - t} d\tau \\
&= e^{-t} \int_0^t 1.e^{\tau} d\tau \\
&= e^{-t}(e^{\tau}|_0^1) = e^{-t}(e^1 - 1) \\
&= e^{-t+1} - e^{-t}
\end{aligned}
$$

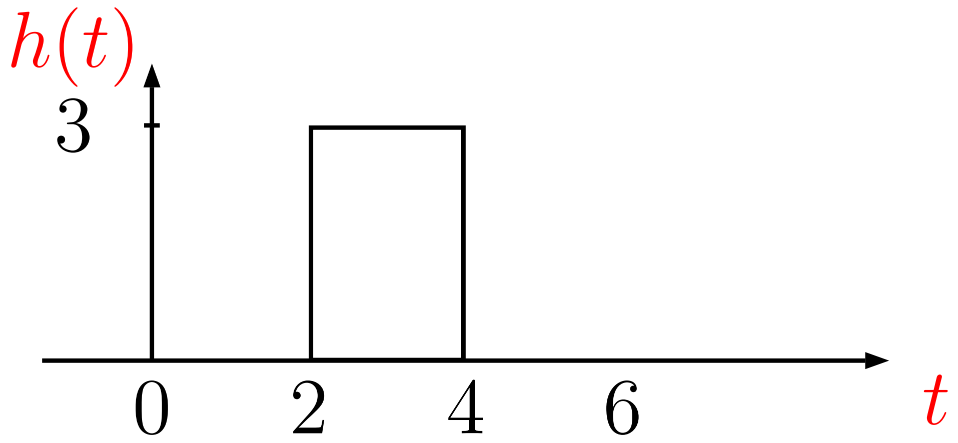
Exemplo 1 - Circuito RC -Solução



Exercício

Encontre a saída $y(t)$ de um sistema LTI com





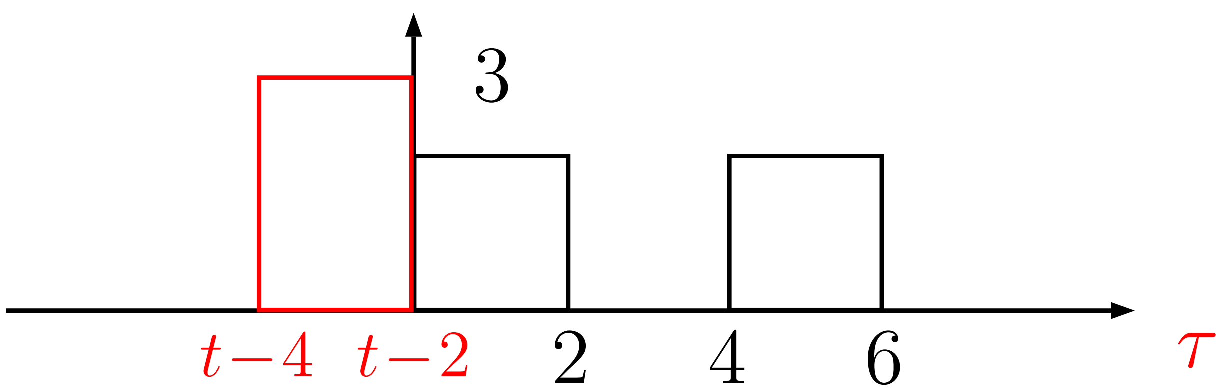
Exercício

Considere

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- 1^a região:

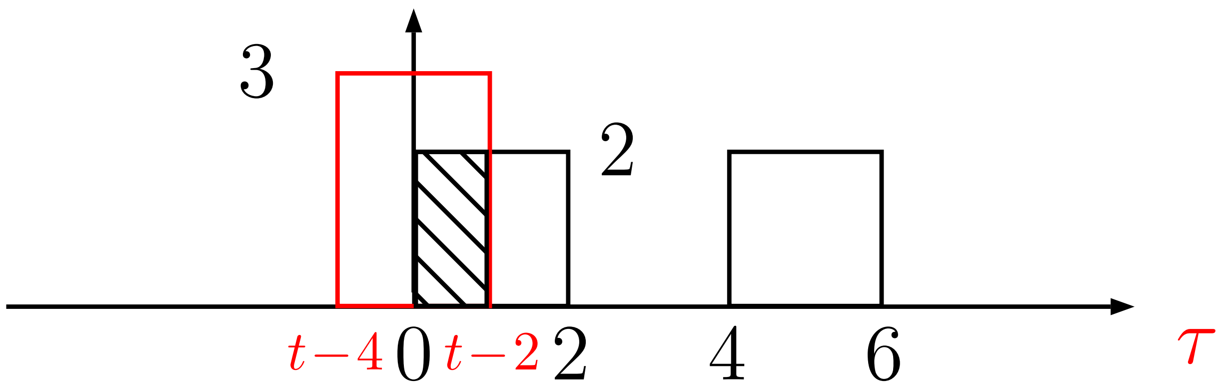
Se $t < 2, \quad y(t) = 0, \quad \forall\tau$



Exercício

- 2^a região:

Se $2 \leq t \leq 4$, $y(t) \neq 0$, para $0 \leq \tau \leq t-2$

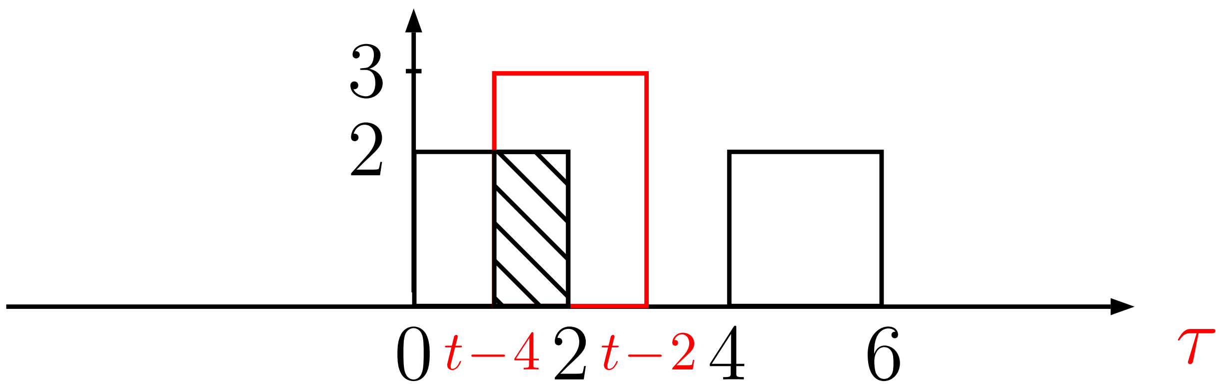


$$\int_0^{t-2} 2 \times 3 d\tau = 6\tau \Big|_0^{t-2} = 6t - 12$$

Exercício

- 3^a região:

Se $4 < t \leq 6$, $y(t) \neq 0$, para $t - 4 \leq \tau \leq 2$

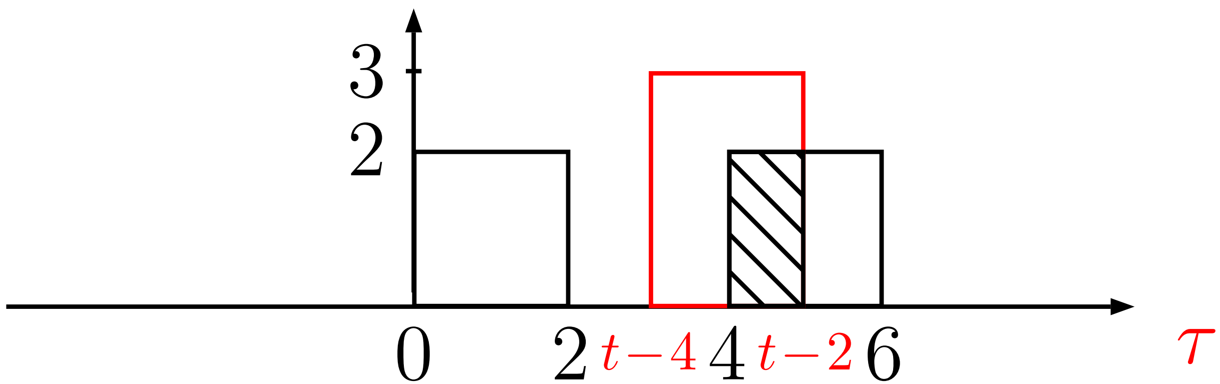


$$\int_{t-4}^{2} 2 \times 3 d\tau = 6\tau \Big|_{t-4}^{2} = 24 - 6t$$

Exercício

- 4^a região:

Se $6 < t \leq 8$, $y(t) \neq 0$, para $4 \leq \tau \leq t-2$

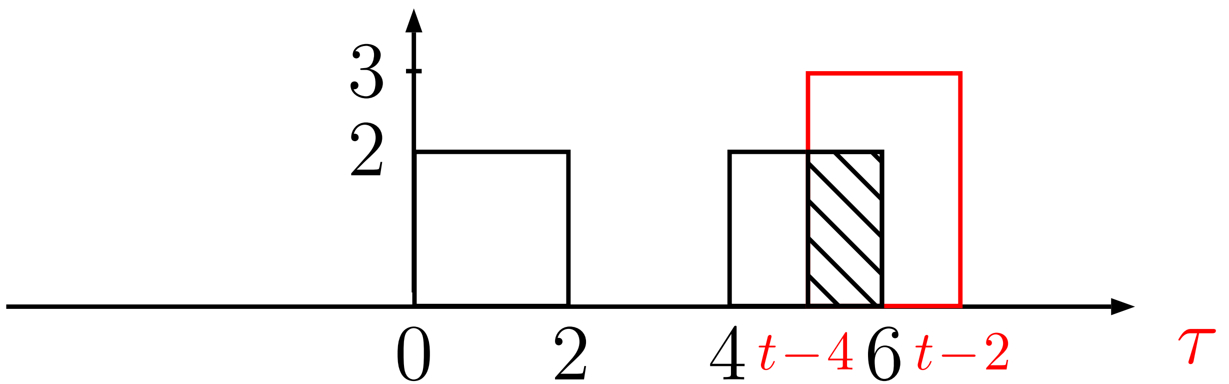


$$\int_4^{t-2} 2 \times 3 d\tau = 6\tau \Big|_4^{t-2} = 6t - 36$$

Exercício

- 5^a região:

Se $8 < t \leq 10$, $y(t) \neq 0$, para $t - 4 \leq \tau \leq 6$



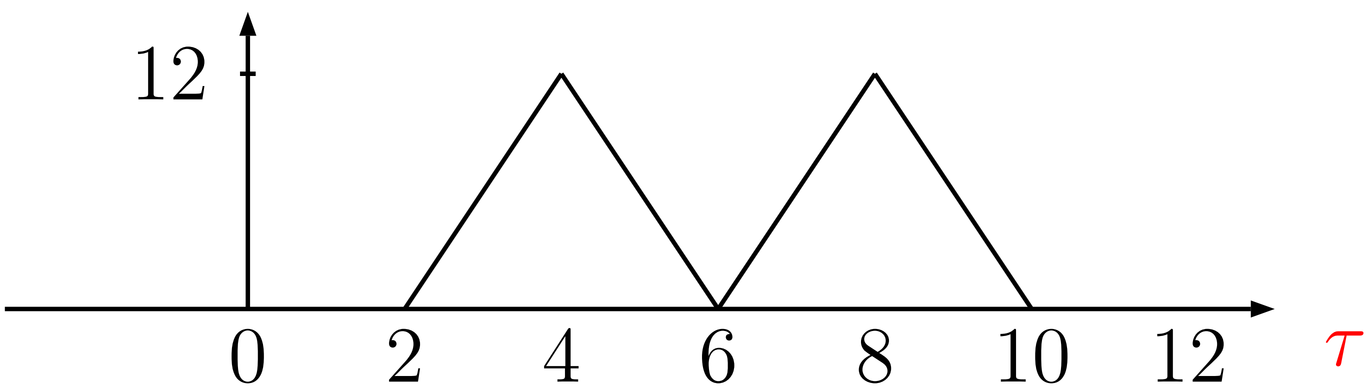
$$\int_{t-4}^{6} 2 \times 3 d\tau = 6\tau \Big|_{t-4}^{6} = -6t + 60$$

Exercício

- 6^a região:

$$\text{Se } t > 10, \quad y(t) = 0, \quad \forall \tau$$

- Portanto,



Exercício

Refaça o exercício utilizando:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Exercício

Encontre $x(t) * h(t)$, sendo

$$x(t) = 2u(t+2) - 2u(t-2)$$

e

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < -4 \\ e^{-|t|}, & -4 \leq t \leq 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$$

Exercício: Propriedade Associativa

- Prove a igualdade

$$x(t) * (h(t) * g(t)) = (x(t) * h(t)) * g(t)$$

mostrando que os dois membros da equação acima são iguais a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\sigma) g(t - \tau - \sigma) d\tau d\sigma$$

Exercício: Propriedade Associativa (Solução)

Temos que

$$x(t) * \underbrace{(h(t) * g(t))}_{z(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) z(t-\tau) d\tau \qquad (1)$$

$$\text{sendo} \quad z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) g(t-\sigma) d\sigma \qquad (2)$$

substituindo (2) em (1), temos

$$x(t) * (h(t) * g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) g(t-\tau-\sigma) d\sigma d\tau$$

- Logo

$$x(t) * (h(t) * g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\sigma) g(t-\tau-\sigma) d\tau d\sigma$$

Exercício: Propriedade Associativa (Solução)

Temos que

$$\underbrace{(x(t) * h(t))}_{z(t)} * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\nu) g(t-\nu) d\nu \qquad (3)$$

$$\text{sendo} \quad z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \qquad (4)$$

substituindo (4) em (3), temos

$$(x(t) * h(t)) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\nu - \tau) g(t-\nu) d\nu \right] d\tau$$

- Fazendo $\sigma = \nu - \tau$, temos

$$x(t) * (h(t) * g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\sigma) g(t - \tau - \sigma) d\tau d\sigma$$