Capítulo 1 - Fundamentos de Sinais e Sistemas

Prof. Fernando de Oliveira Souza
(baseado nas notas de aula de SDL do Prof. Eduardo Mendes)
fosouza@ppgee.ufmg.br

Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil

Fundamentos de Sinais

- Definição
- Exemplos
- Energia e Potência
- Transformações de Sinais
- Sinais Periódicos
- Simetria
- Sinais Exponenciais e Senoidais
- Funções "Base"

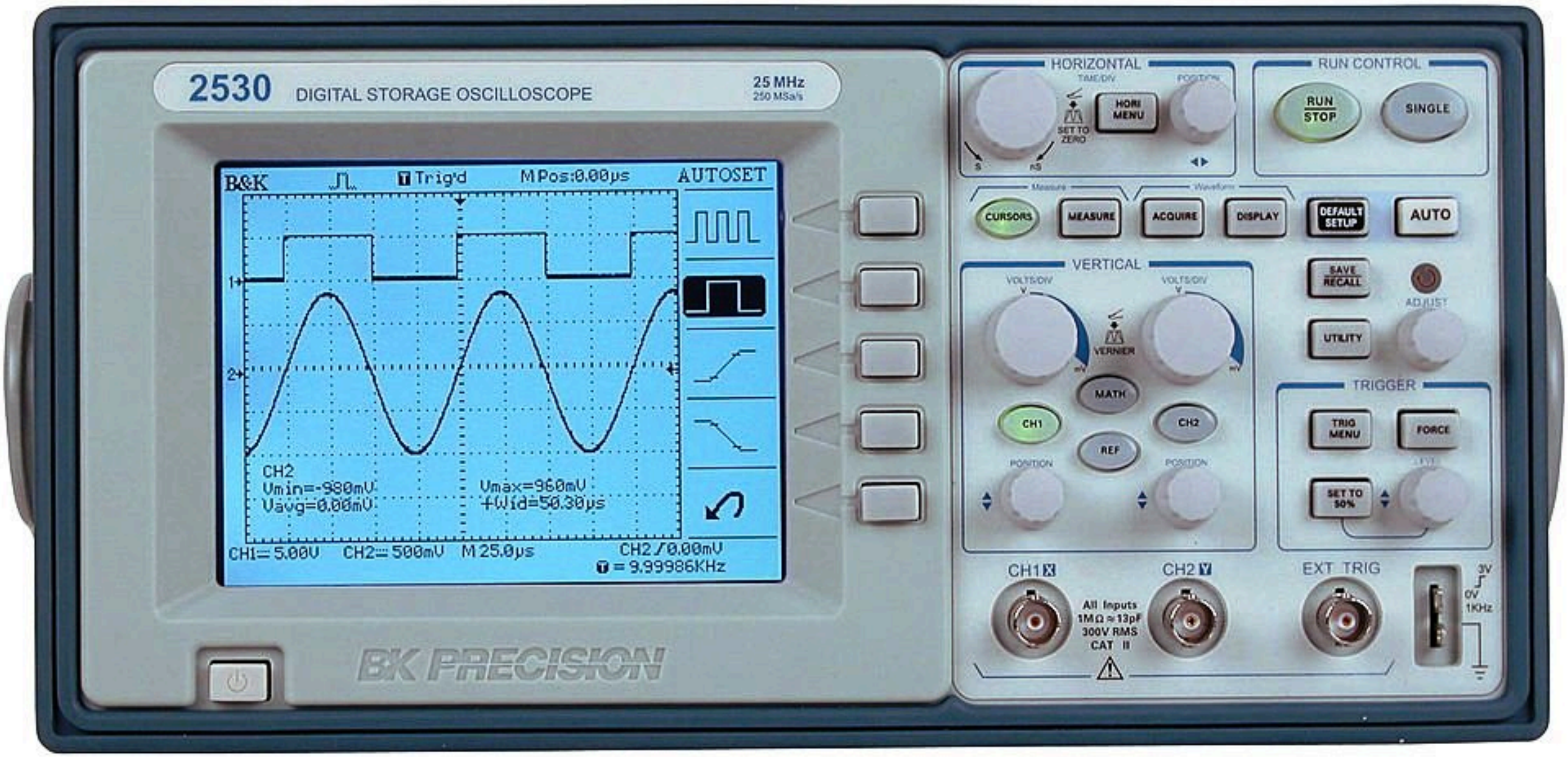
Sinais

Podemos dizer que sinal é uma abstração de qualquer quantidade mensurável que é uma função de uma ou mais variáveis independentes (por exemplo, tempo ou espaço) e que carrega informação da natureza de um fenômeno.

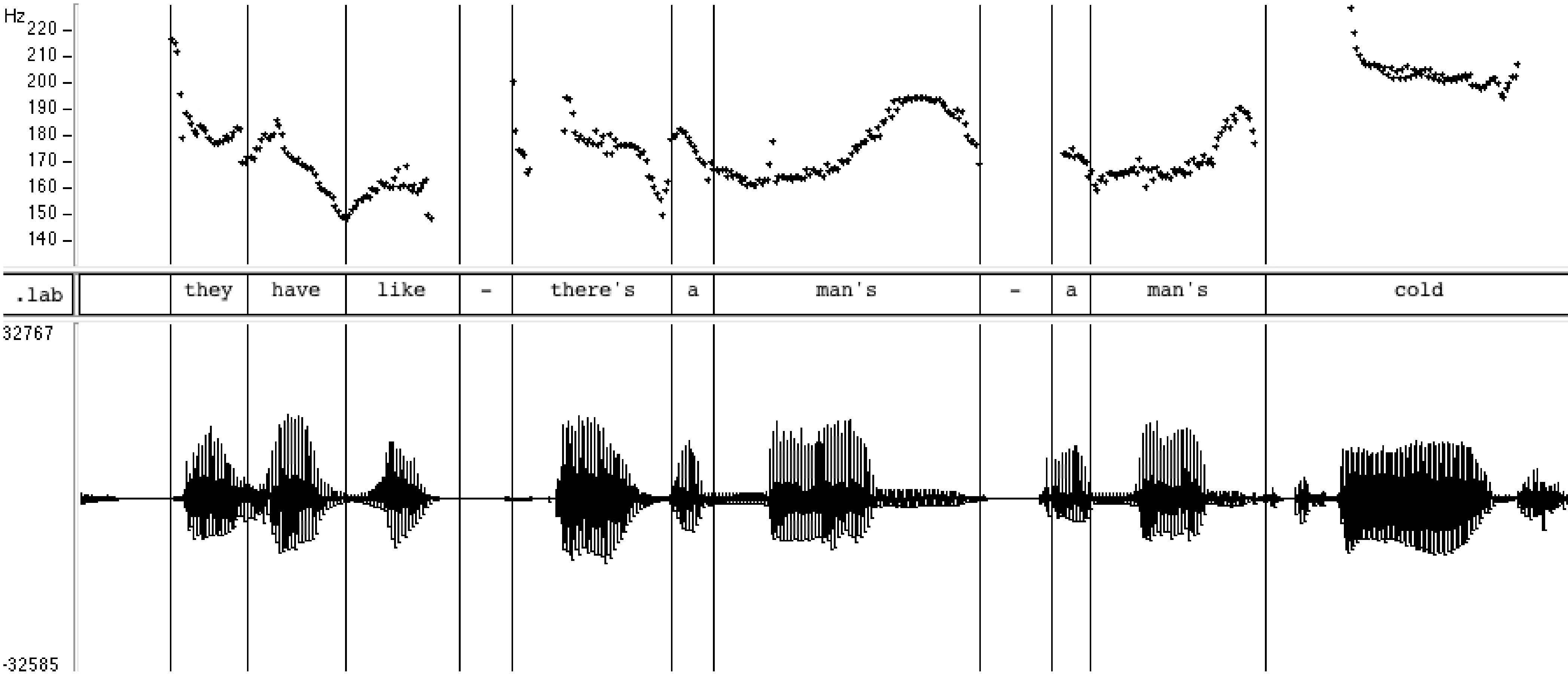
Exemplos:

- Tensão ou corrente em um circuito
- Vídeo e áudio
- Índice Bovespa
- Eletrocardiograma, Eletroencefalograma etc.
- Imagem Monocromática

Tensão em um circuito



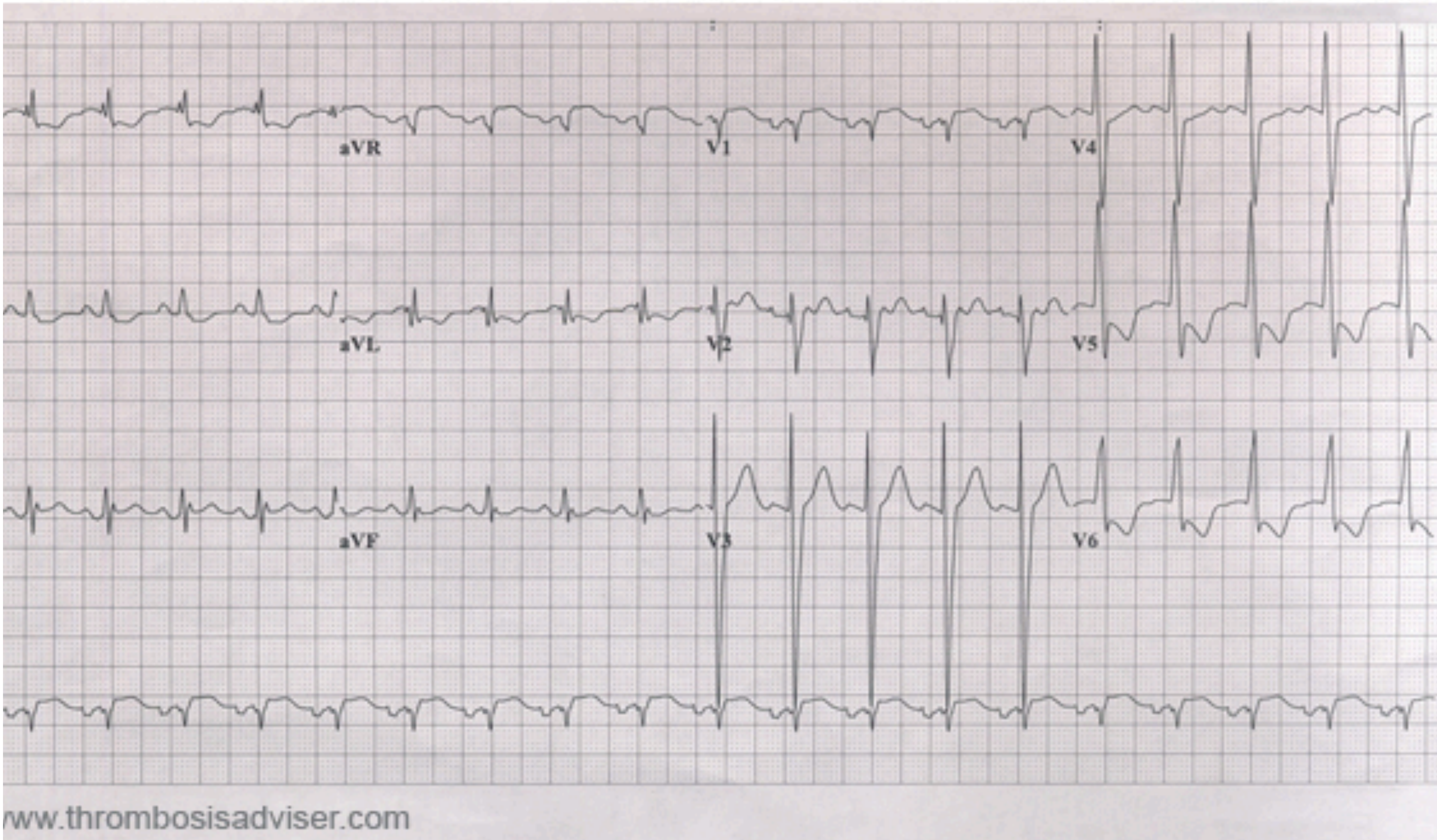
Audio



Hz
220
210
200
190
180
170
160
150
140
.lab
they
have
like
-
there's
a
man's
-
a
man's
cold
32767
-32585

Índice Bovespa

Eletrocardiograma



Sinal amostrado

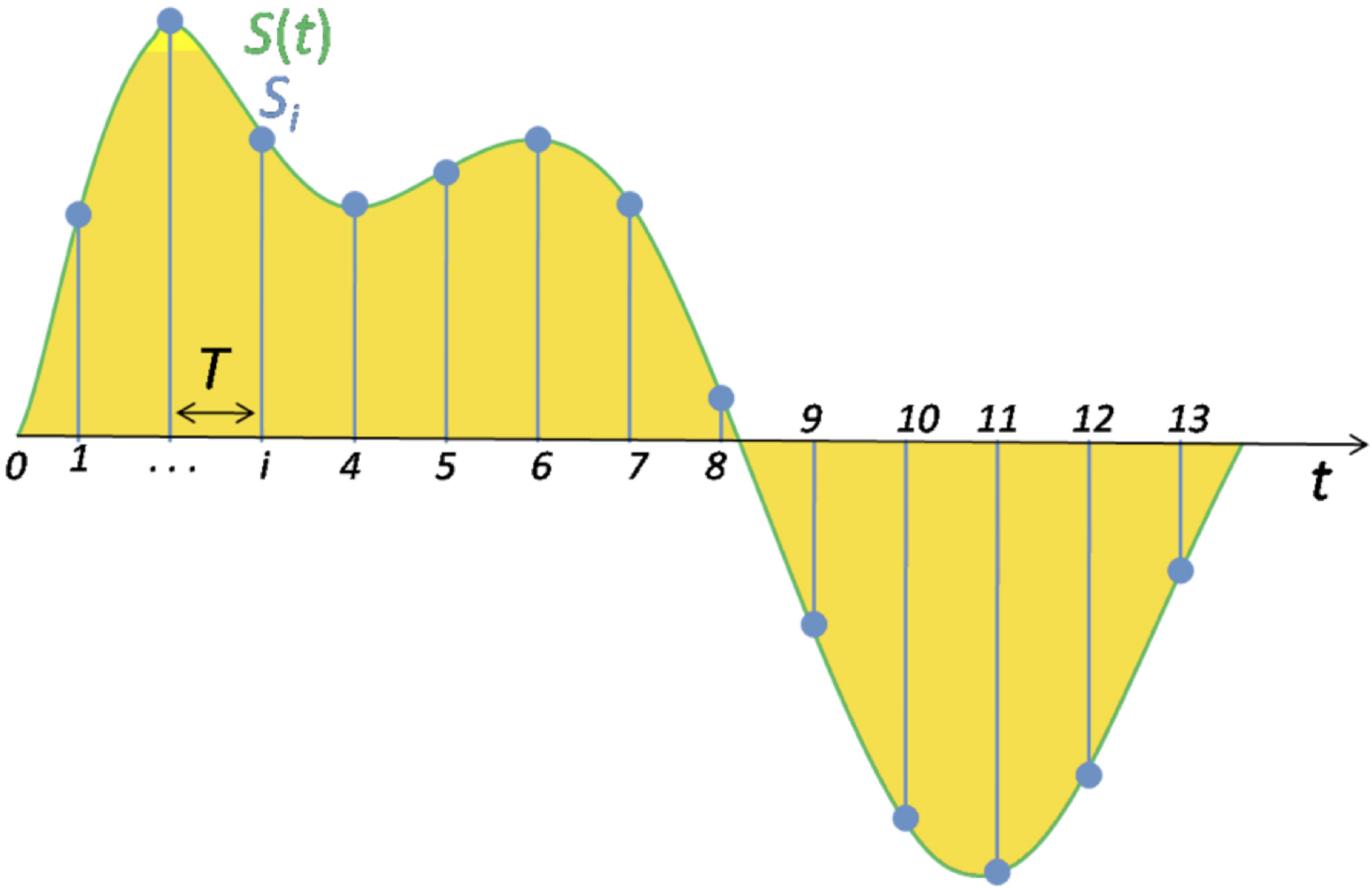


Imagem monocromática

Sinais Contínuos

- Normalmente podem ser escritos com uma função da variável t
- No curso procuraremos usar parêntesis para funções contínuas no tempo
- Exemplo: $x(t)$
- t é variável independente contínua (conjunto dos reais).

Sinais Discretos

- Normalmente podem ser escritos com uma função da variável n
- No curso procuraremos usar colchetes para funções discretas no tempo
- Exemplo: $x[n]$
- n é variável independente discreta (conjunto dos inteiros).

Potência e Energia de um Sinal

- $v(t)$: tensão instantânea em um resistor
- $\rho = 1/R$: valor constante
  - Potência Instantânea
    $$p(t) = \rho v^2(t)$$
  - Energia total dissipada em um intervalo de tempo
    $$\int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \rho v^2(t)dt$$
  - Potência Média durante um intervalo de tempo
    $$\frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \rho v^2(t)dt$$

Potência e Energia de um Sinal

- $v(t)$: velocidade de um objeto
- ρ: constante
  - Potência Instantânea

$$p(t) = \rho v^2(t)$$

  - Energia total dissipada em um intervalo de tempo

$$\int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \rho v^2(t)dt$$

  - Potência Média durante um intervalo de tempo

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \rho v^2(t)dt$$

Potência e Energia de um Sinal

- Potência Instantânea de um sinal

$$P = |x(t)|^2 \qquad\qquad P = |x[n]|^2$$

- Energia de um sinal

$$E = \int_{t_0}^{t_1} |x(t)|^2 dt \qquad\qquad E = \sum_{n=n_0}^{n_1} |x[n]|^2$$

- Potência Média de um sinal

$$P = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} |x(t)|^2 dt \qquad\qquad P = \frac{1}{n_1 - n_0 + 1} \sum_{n=n_0}^{n_1} |x[n]|^2$$

Potência e Energia de um Sinal (tempo $\rightarrow \infty$)

Normalmente usamos os limites de integração (soma) sobre todo o conjunto dos reais (inteiros), logo:

- Energia total de um sinal

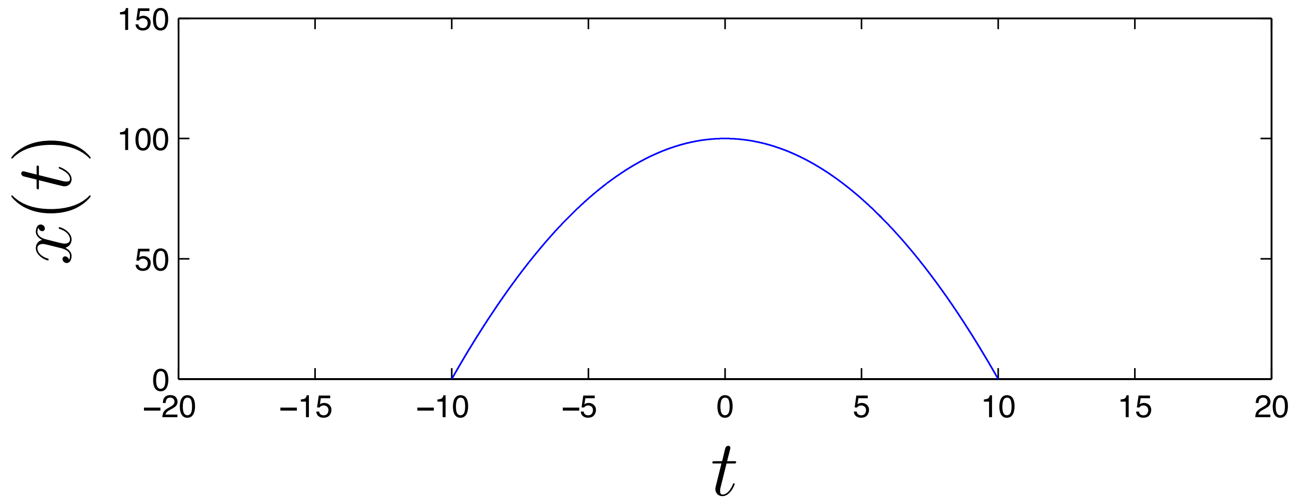
$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \qquad E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Potência média em um intervalo infinito

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt, \qquad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

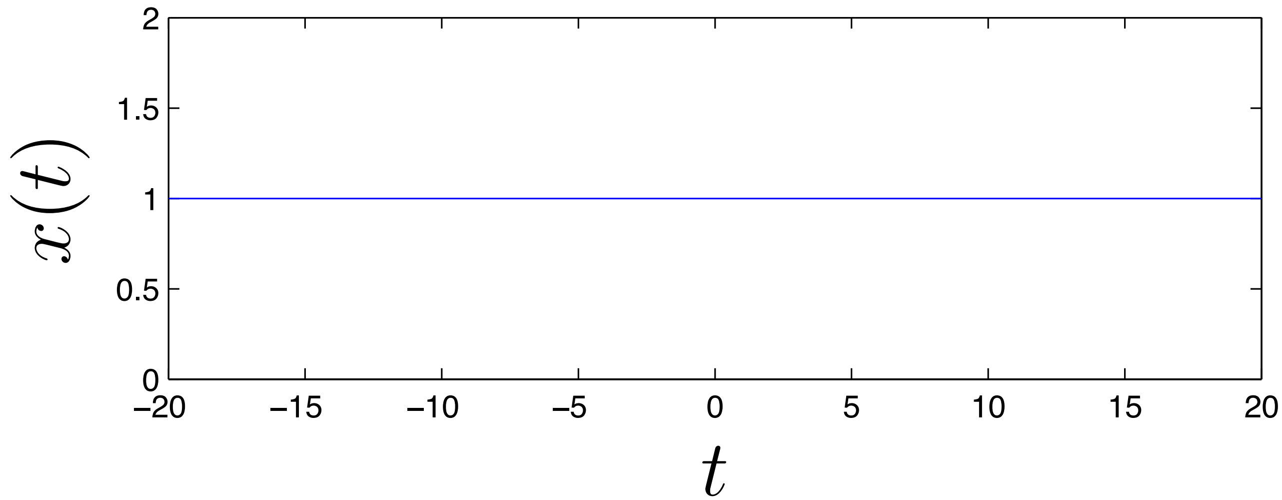
  - Se $E_\infty < \infty \Longrightarrow P_\infty = 0$

Potência e Energia de um Sinal



- Sinais com energia total finita
  - $E_\infty < \infty$
  - $P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0$
    - $P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{E_\infty}{2N+1} = 0$

Potência e Energia de um Sinal



- Sinais com energia total infinita
  - $E_\infty = \infty$
  - $P_\infty = \lim_{T \to \infty} \dfrac{E_\infty}{2T} > 0$
    - $P_\infty = \lim_{N \to \infty} \dfrac{E_\infty}{2N+1} > 0$

Exemplo: Potência e Energia de um Sinal

Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a energia do sinal

Exemplo: Potência e Energia de um Sinal

Solução:

Usando a definição de Energia, temos:

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt \\
&= \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{1}{3}(2-t)^3\right|_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Exercício

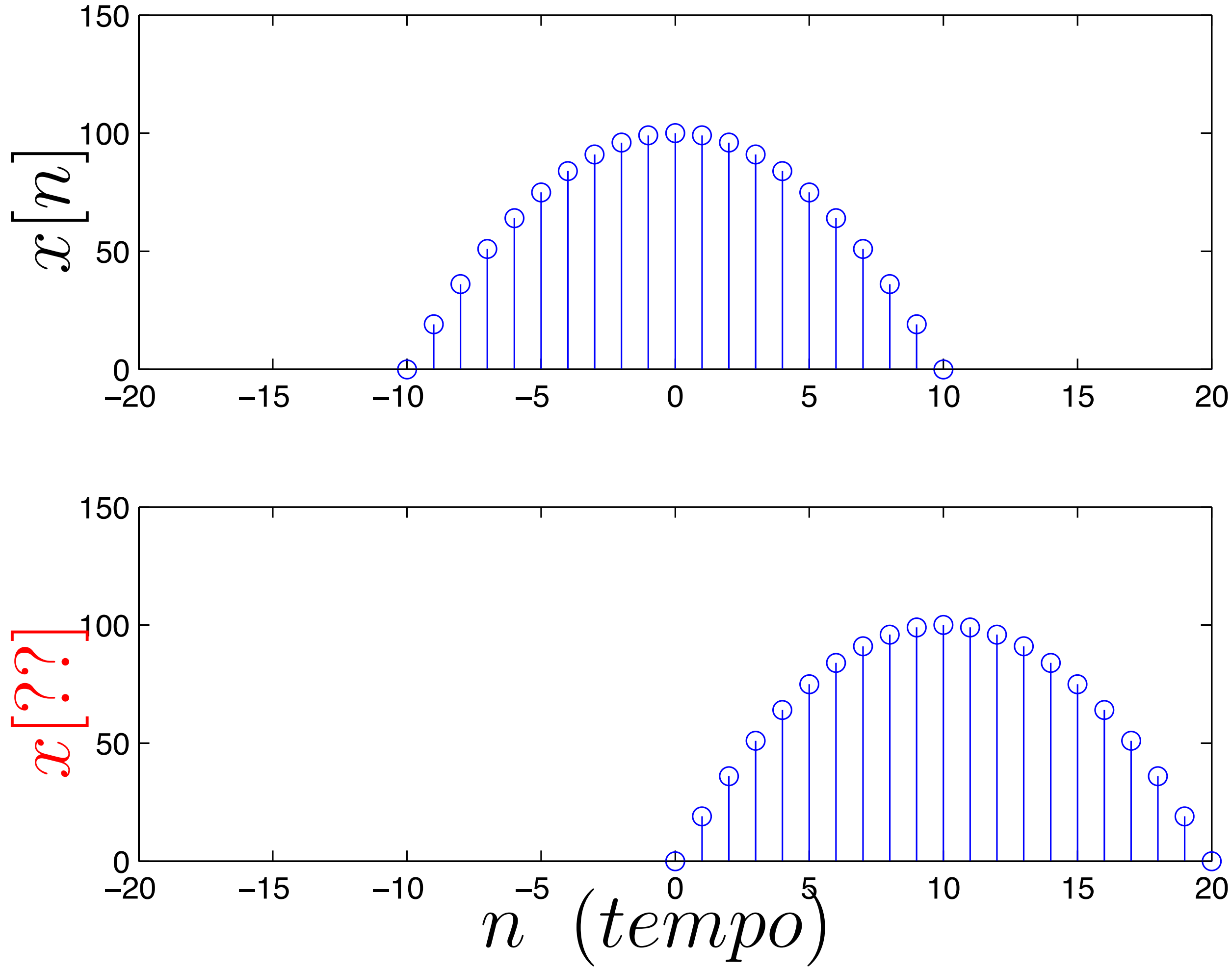
Considere o sinal

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -1 \leq t \leq 0 \\ 2e^{-t/2}, & 0 \leq t \leq \infty \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a energia do sinal

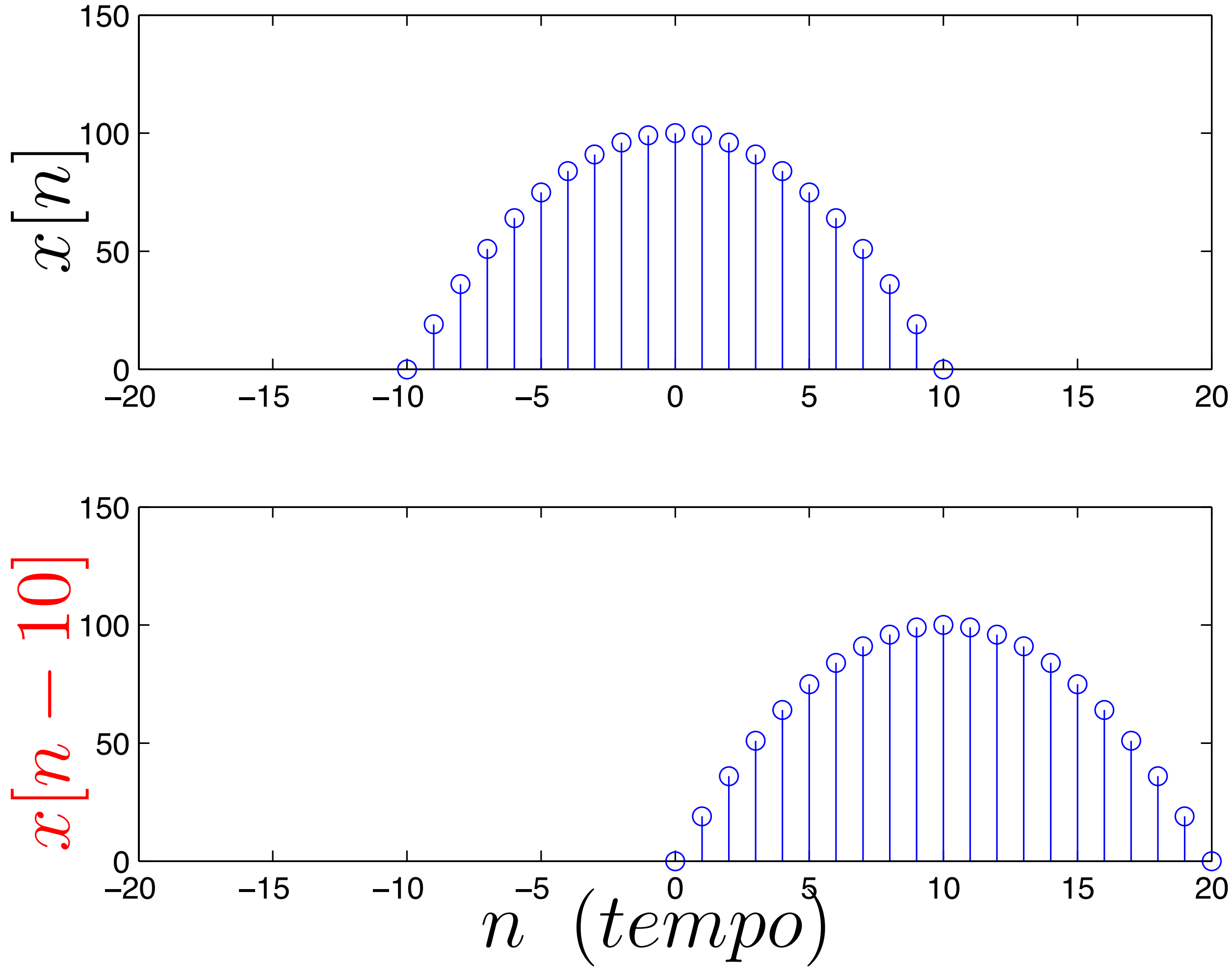
Deslocamento no tempo

- Atrasar e Adiantar um sinal no tempo



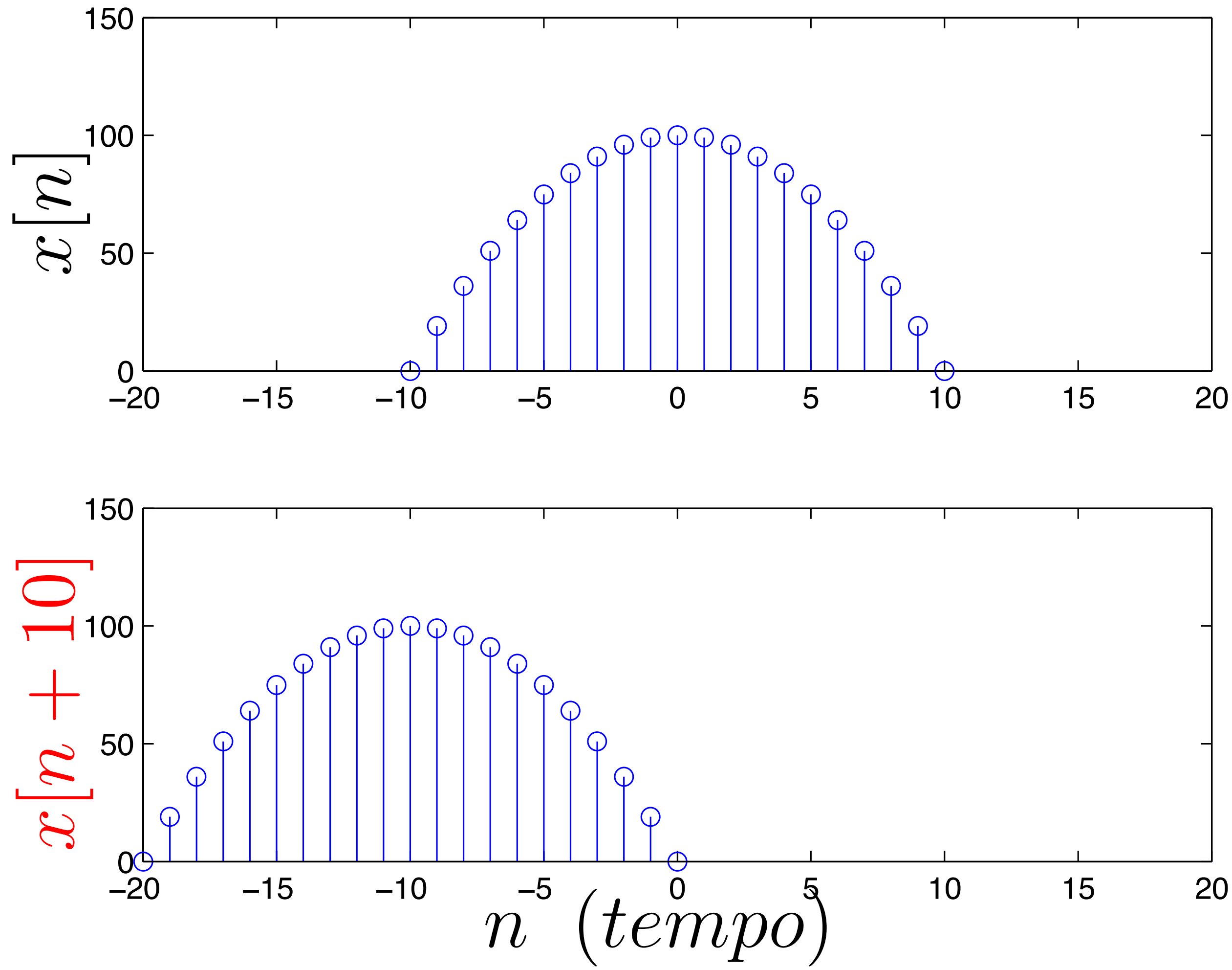
Deslocamento no tempo

- Exemplo de sinal atrasado:

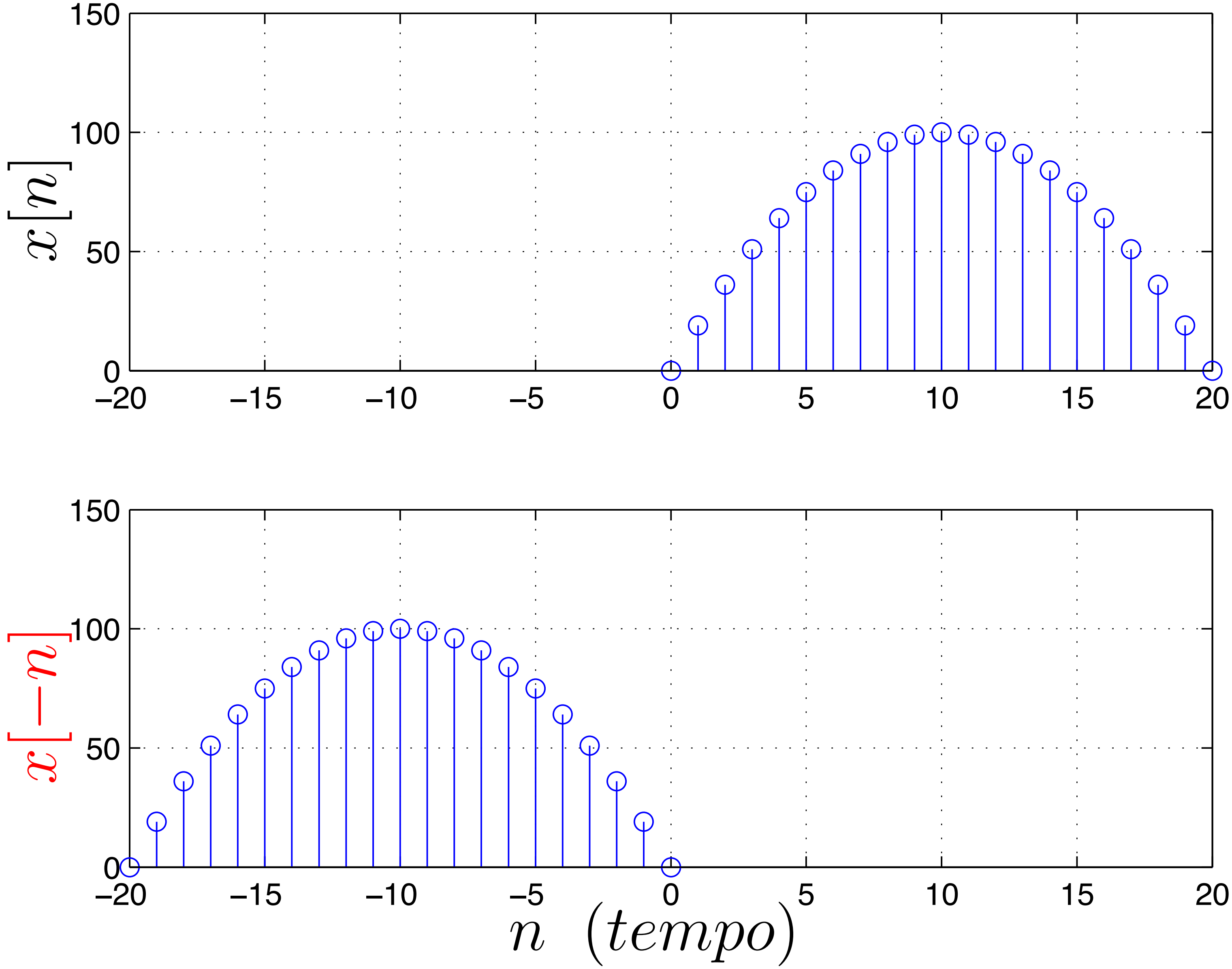


Deslocamento no tempo

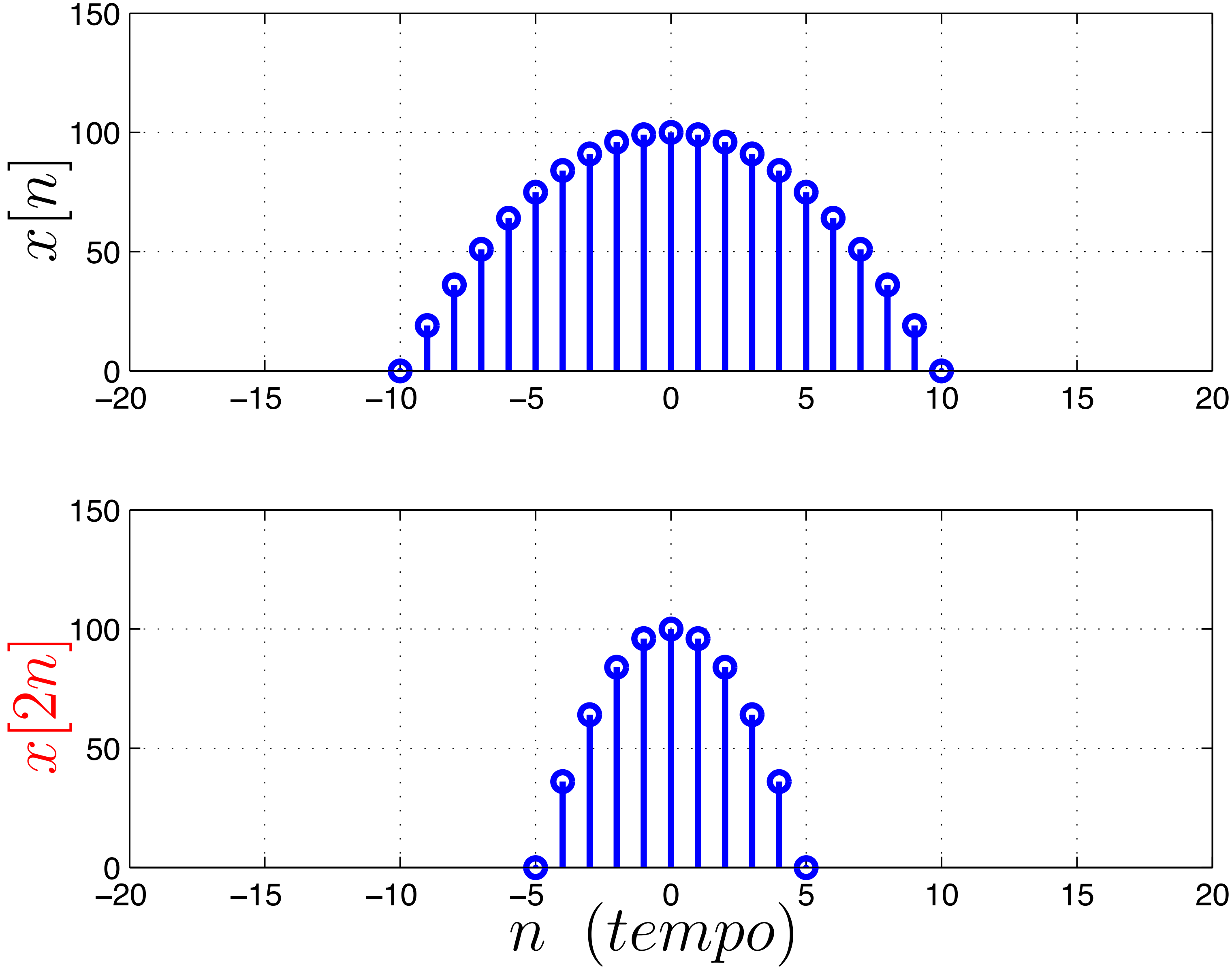
- Exemplo de sinal avançado:



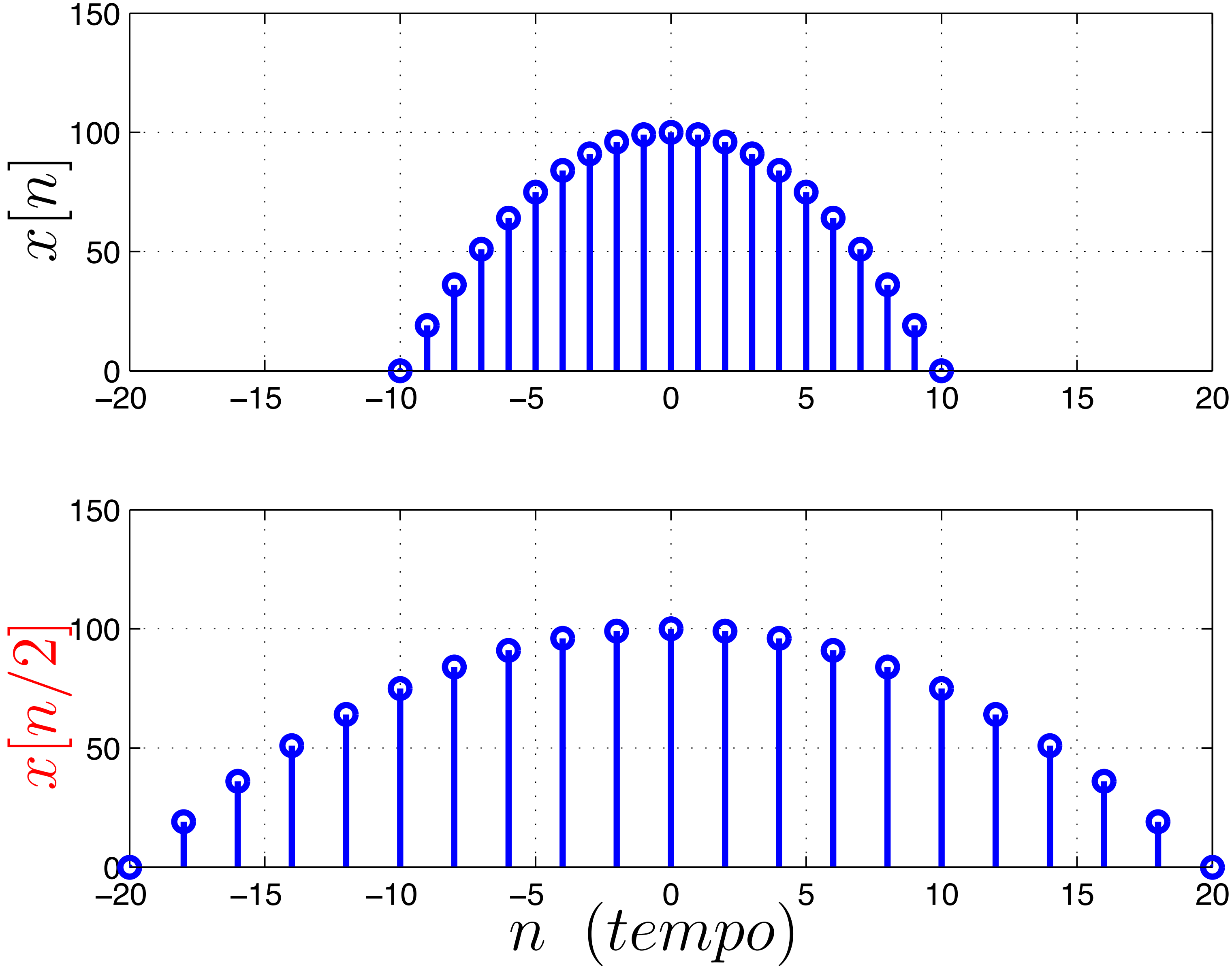
Reflexão no tempo



Mudança de escala no tempo



Mudança de escala no tempo



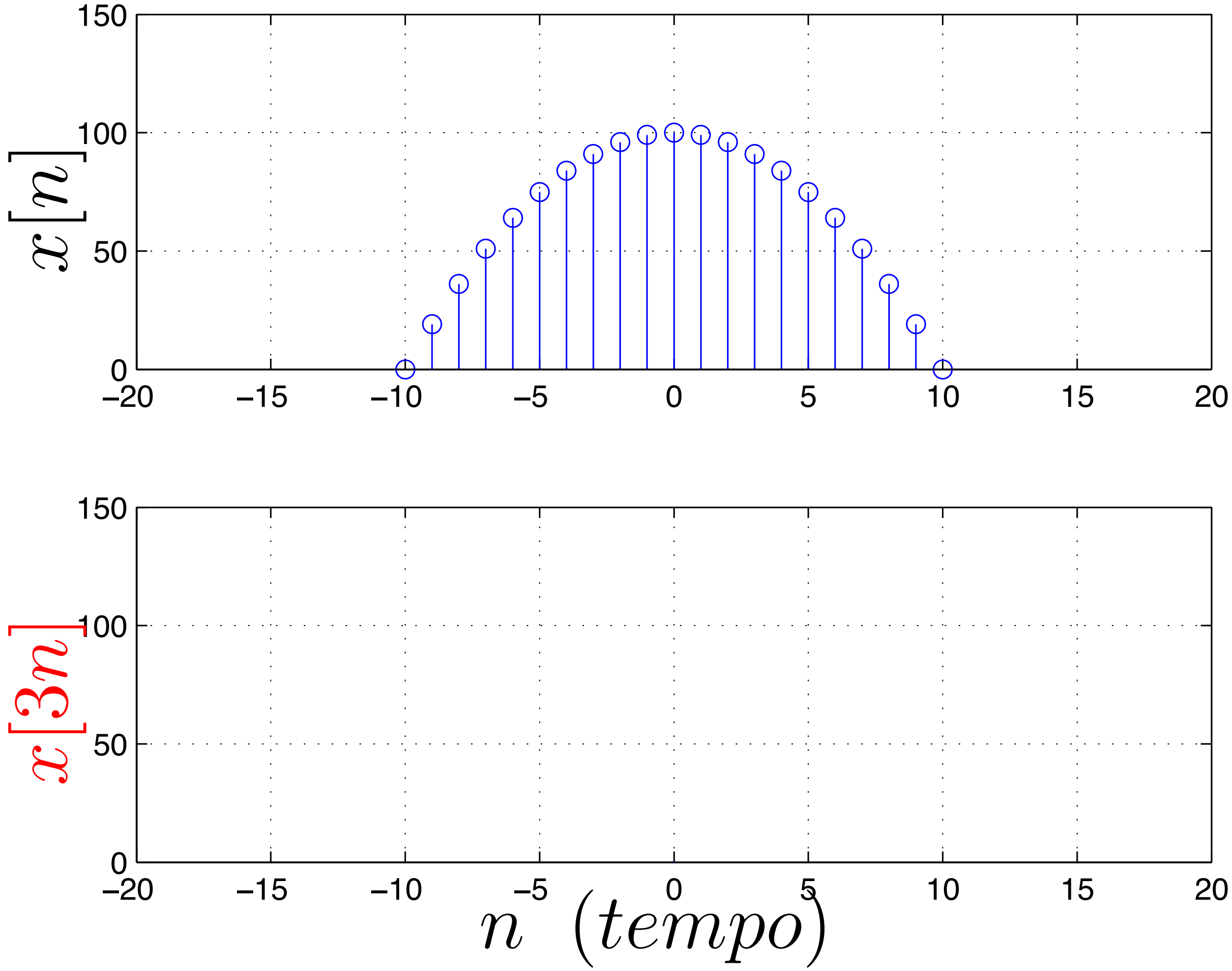
Transformações *(na variável independente)*

$$x(t) \to x(\alpha t - t_0) \qquad x[n] \to x[\alpha n - n_0]$$

- Deslocamento no tempo:
  - Se $t_0 > 0$ ou $n_0 > 0$ então o sinal é deslocado para a direita (Atraso)
  - Se $t_0 < 0$ ou $n_0 < 0$ então o sinal é deslocado para a esquerda (Avanço)
- Mudança da escala/reflexão no tempo:
  - Se $|\alpha| > 1$ o sinal será linearmente comprimido
  - Se $|\alpha| < 1$ o sinal será linearmente estendido
  - Se $\alpha < 0$ o sinal será refletido

Exercício

Considere o sinal mostrado na figura abaixo.
Esboce $y[n] = x[3n]$.



Transformações *(na variável independente)*

$$y(t) = x(\alpha t + \beta)$$

1) Trocar t por τ no sinal: $x(t) \rightarrow x(\tau)$

2) Encontrar o valor de t considerando, $\tau = \alpha t + \beta$, ou seja: $t = \tau/\alpha - \beta/\alpha$

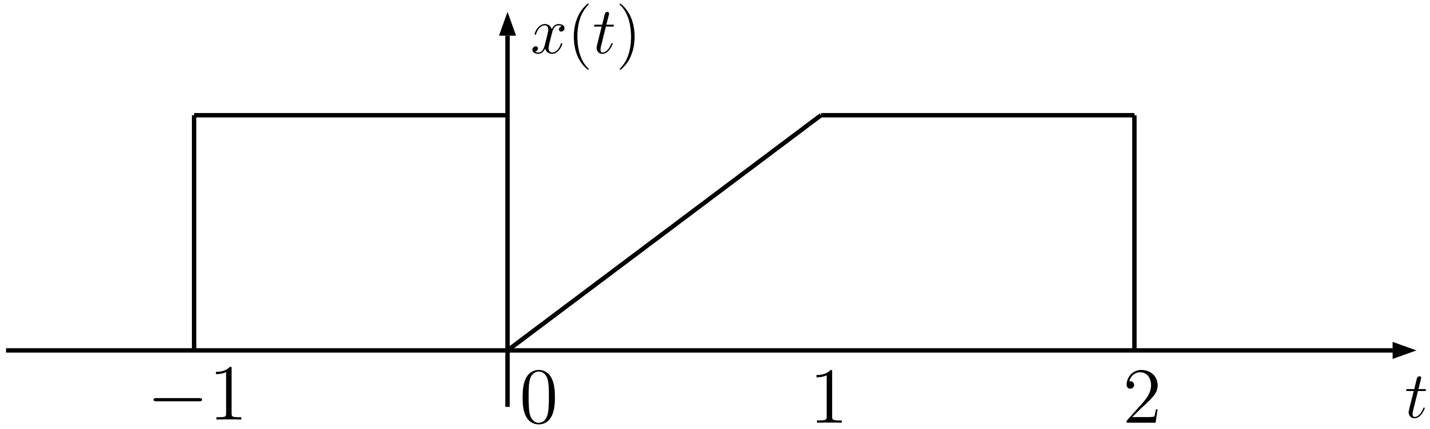
3) Esboçar o eixo t transformado abaixo do eixo τ

4) Esboçar $y(t)$

- Obs.: O deslocamento deve ser aplicado primeiro

Exemplo: Transformações

Considere o sinal na figura abaixo:

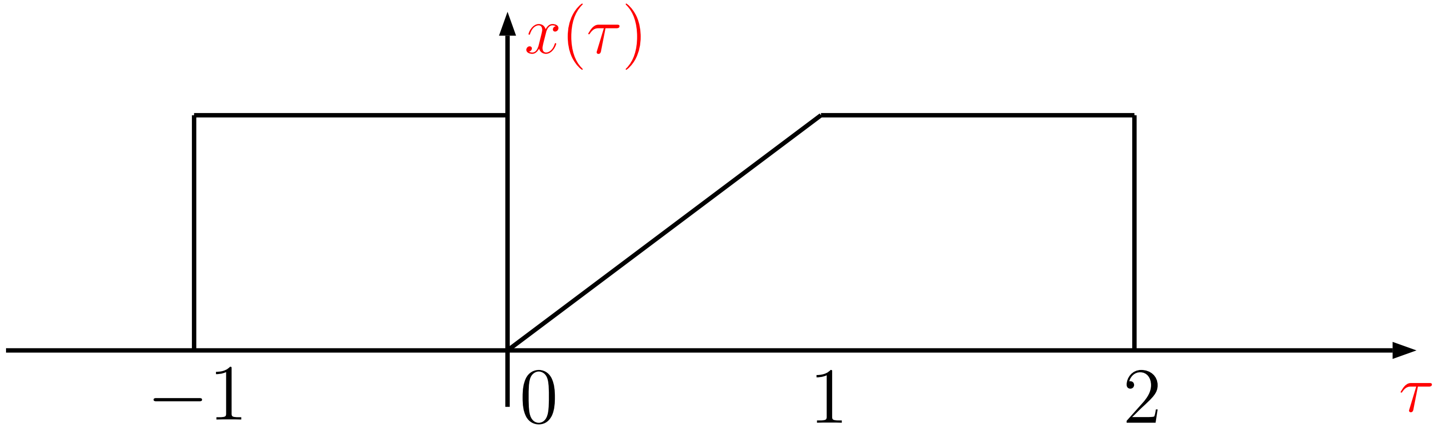


Esboce:

$$y(t) = x(1 - t/2)$$

Exemplo: Transformações (Solução)

Considere o sinal na figura abaixo:



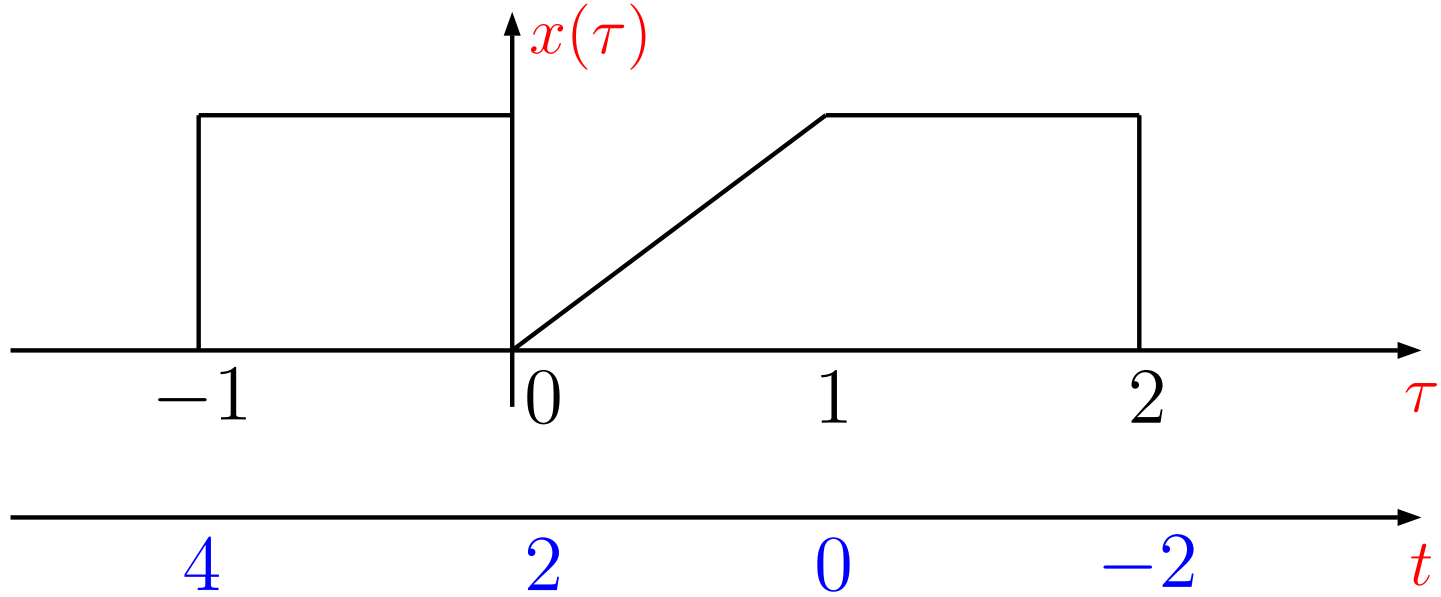
1) Trocar t por τ no sinal: $x(t) \to x(\tau)$

2) Encontrar o valor de t considerando, $\tau = 1 - t/2$, ou seja: $t = -2\tau + 2$

$$t = \begin{cases} 4, & \text{para } \tau = -1 \\ 2, & \text{para } \tau = 0 \\ 0, & \text{para } \tau = 1 \\ -2, & \text{para } \tau = 2 \end{cases}$$

Exemplo: Transformações (Solução)

Considere o sinal na figura abaixo:



1) Trocar t por τ no sinal: $x(t) \rightarrow x(\tau)$

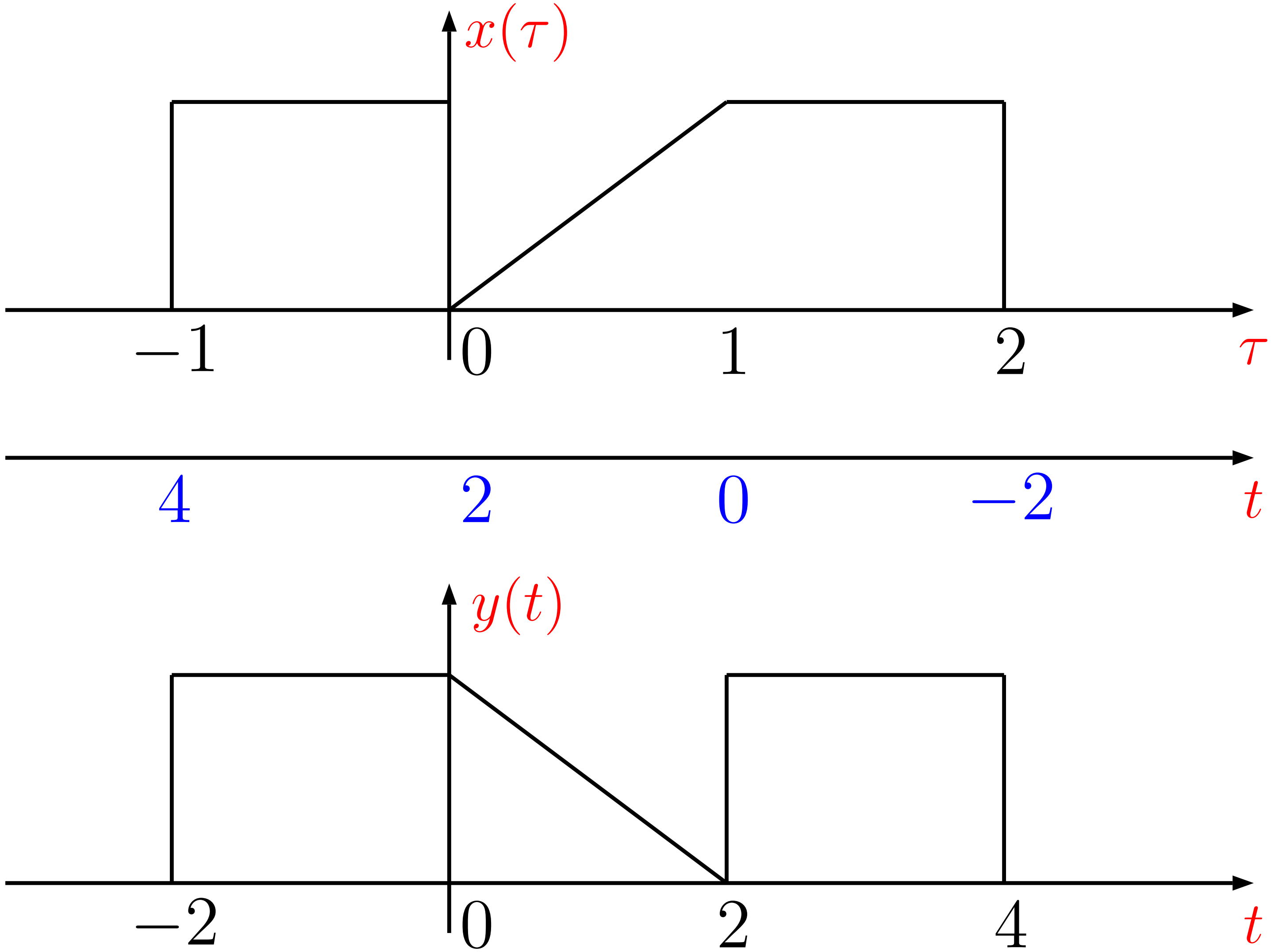
2) Encontrar o valor de t considerando, $\tau = 1 - t/2$, ou seja: $t = -2\tau + 2$

3) Esboçar o eixo t transformado abaixo do eixo τ

4) Esboçar $y(t)$

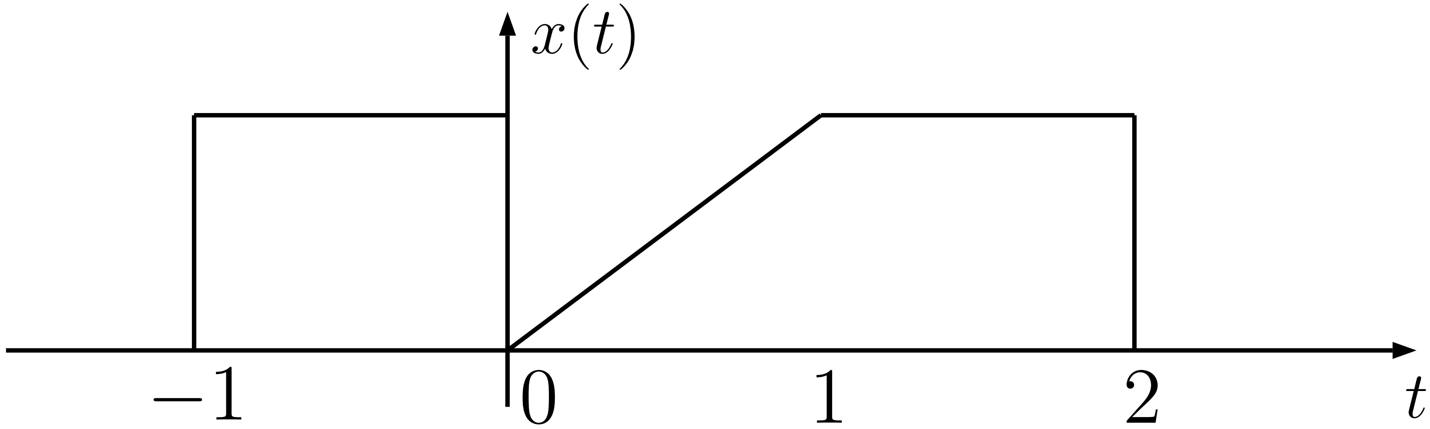
Exemplo: Transformações (Solução)

Considere o sinal na figura abaixo:



Exercício: Transformações

Considere o sinal na figura abaixo:

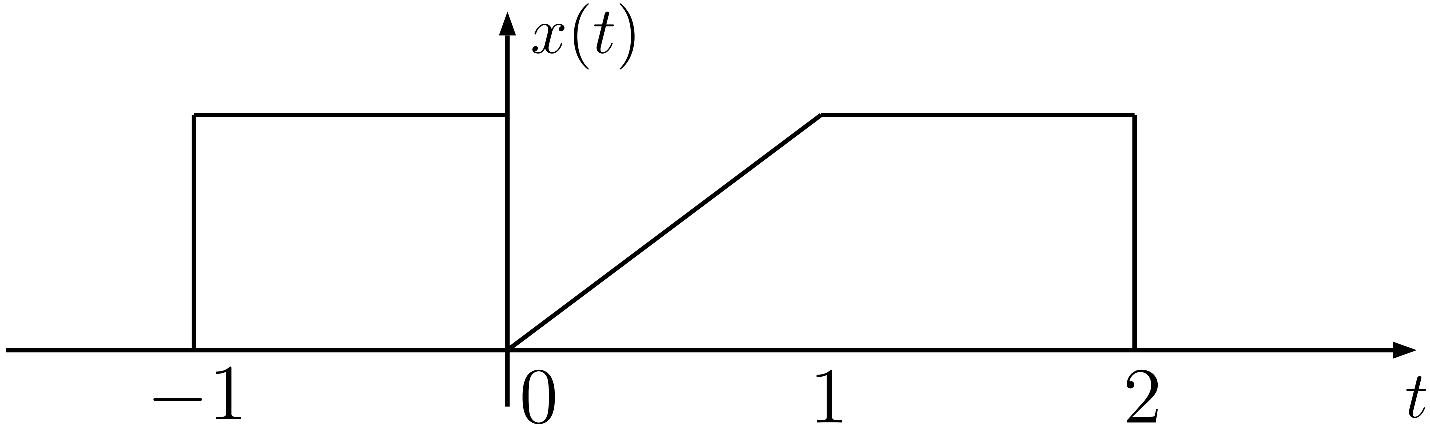


Esboce:

$$y(t) = x(2t - 1)$$

Exercício: Transformações

Considere o sinal na figura abaixo:



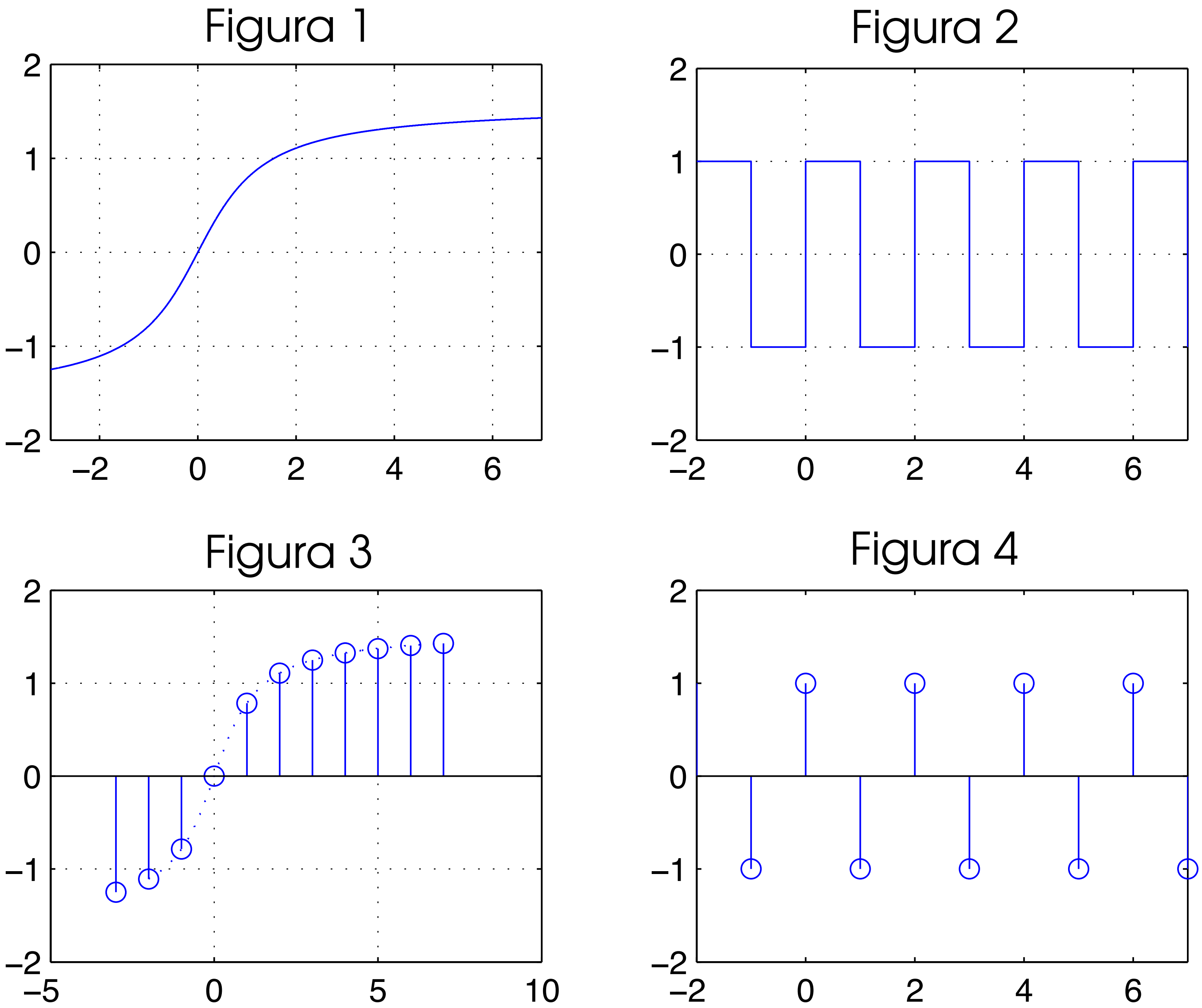
Esboce:

$$y(t) = 3x(2t-1) - 2$$

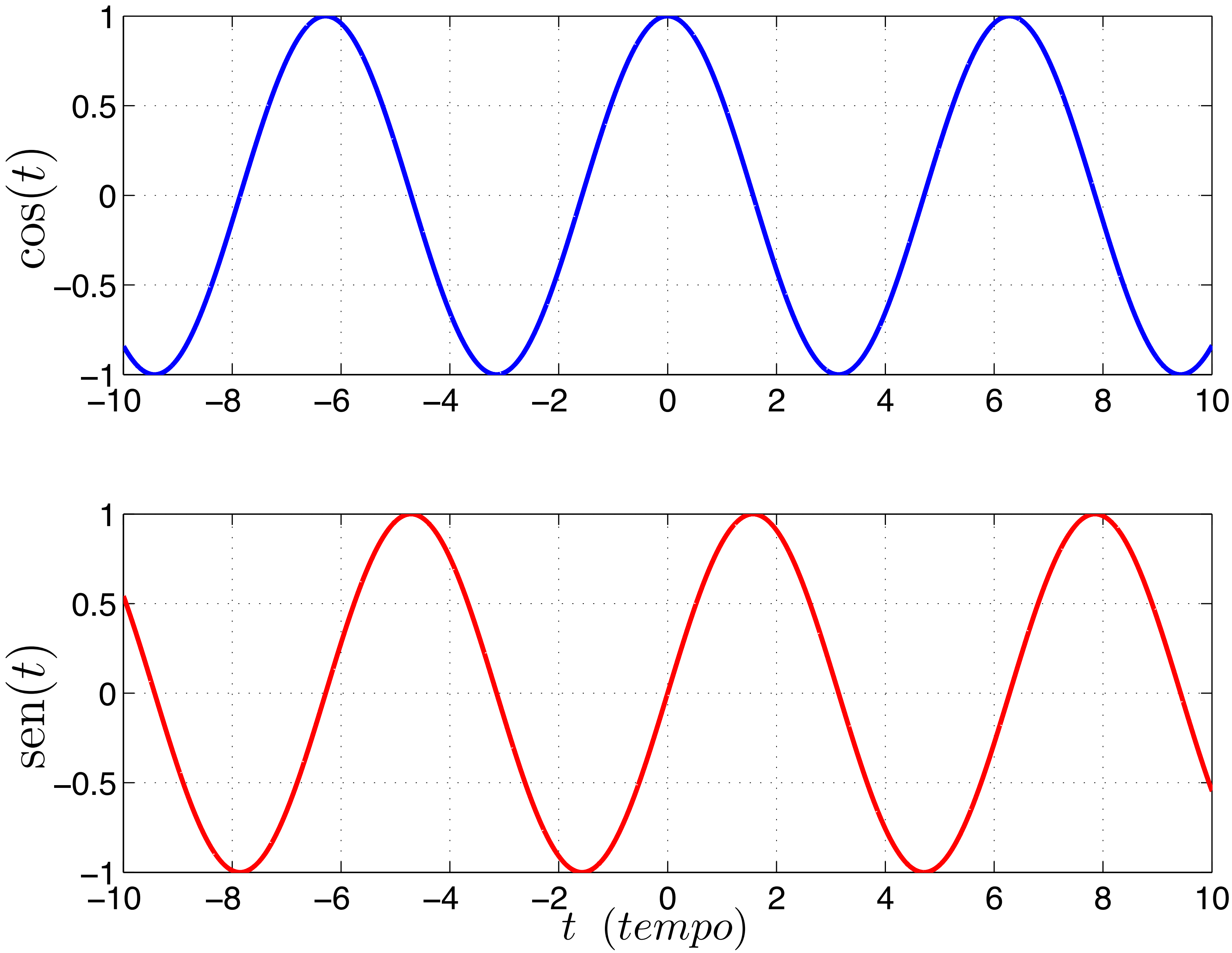
Sinais analógico e digital

- Sinal analógico:
  - A amplitude de um sinal analógico pode assumir infinitos valores
- Sinal digital:
  - A amplitude de um sinal digital pode assumir M valores é um sinal M-nário

Sinais contínuos e discreto X Sinais analógico e digital



Simetria Par e Ímpar



Simetria Par e Ímpar

- Um sinal Par é igual a sua versão refletida no tempo
  - Um sinal de tempo contínuo tem simetria par se

$$x(-t) = x(t)$$

ou no caso discreto,

$$x[-n] = x[n]$$

Simetria Par e Ímpar

- Um sinal Ímpar é igual ao *negativo* de sua versão refletida no tempo.
  - Um sinal de tempo contínuo tem simetria ímpar se

    $$x(-t) = -x(t)$$

    ou no caso discreto,

    $$x[-n] = -x[n]$$

Simetria Par e Ímpar

- Qualquer sinal pode ser escrito como uma soma de um sinal par e um sinal ímpar

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \\ x_i(t) &= \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \\ x_p(t) + x_i(t) &= x(t) \end{aligned}$$

- $x_p(t)$ é a parte Par do sinal $x(t)$
- $x_i(t)$ é a parte Ímpar do sinal $x(t)$

Exercício: *(Simetria Par e Ímpar)*

Considerando a fórmula de Euler

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\mathrm{sen}(\omega t)$$

Mostre que a parte par do sinal

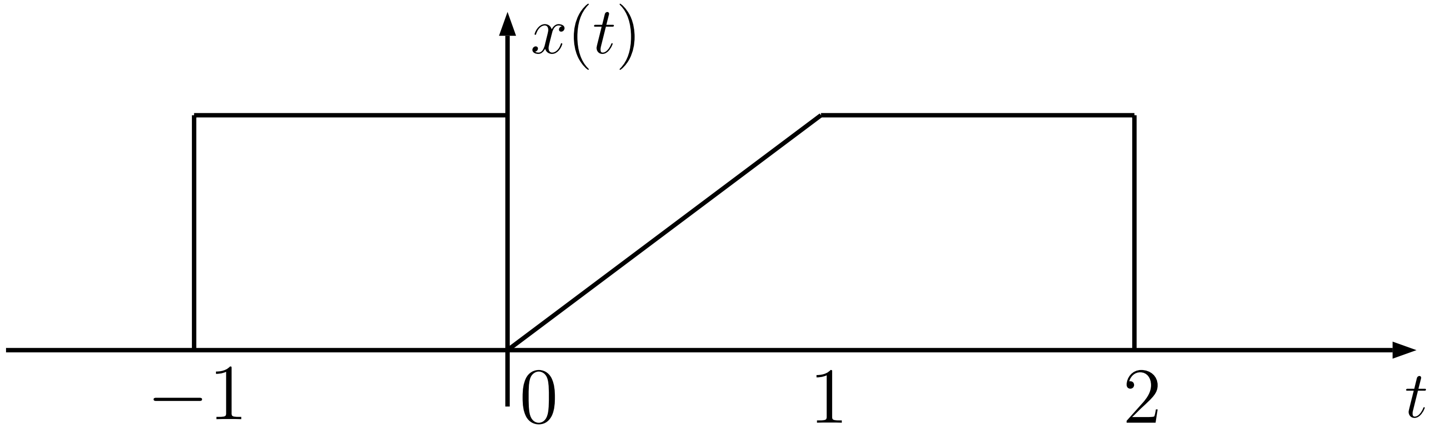
$$x(t) = e^{j\omega t}$$

é igual a:

$$x_p(t) = \cos(\omega t)$$

Exercício: (Simetria Par e Ímpar)

Esboce a parte par e a parte ímpar do sinal:



Sinais Exponenciais e Senoidais

Sinais Exponenciais

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \qquad\qquad x[n] = C(e^{\alpha})^n = Cr^n$$

onde C e α podem ser números complexos.

- Sinais exponenciais e senoidais aparecem como resultado da análise de **sistemas lineares**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(t) &= e^{At}x(0) \end{aligned}$$

- Exemplo: Sistema Massa-Mola

Sinais Exponenciais e Senoidais

Sinais Exponenciais

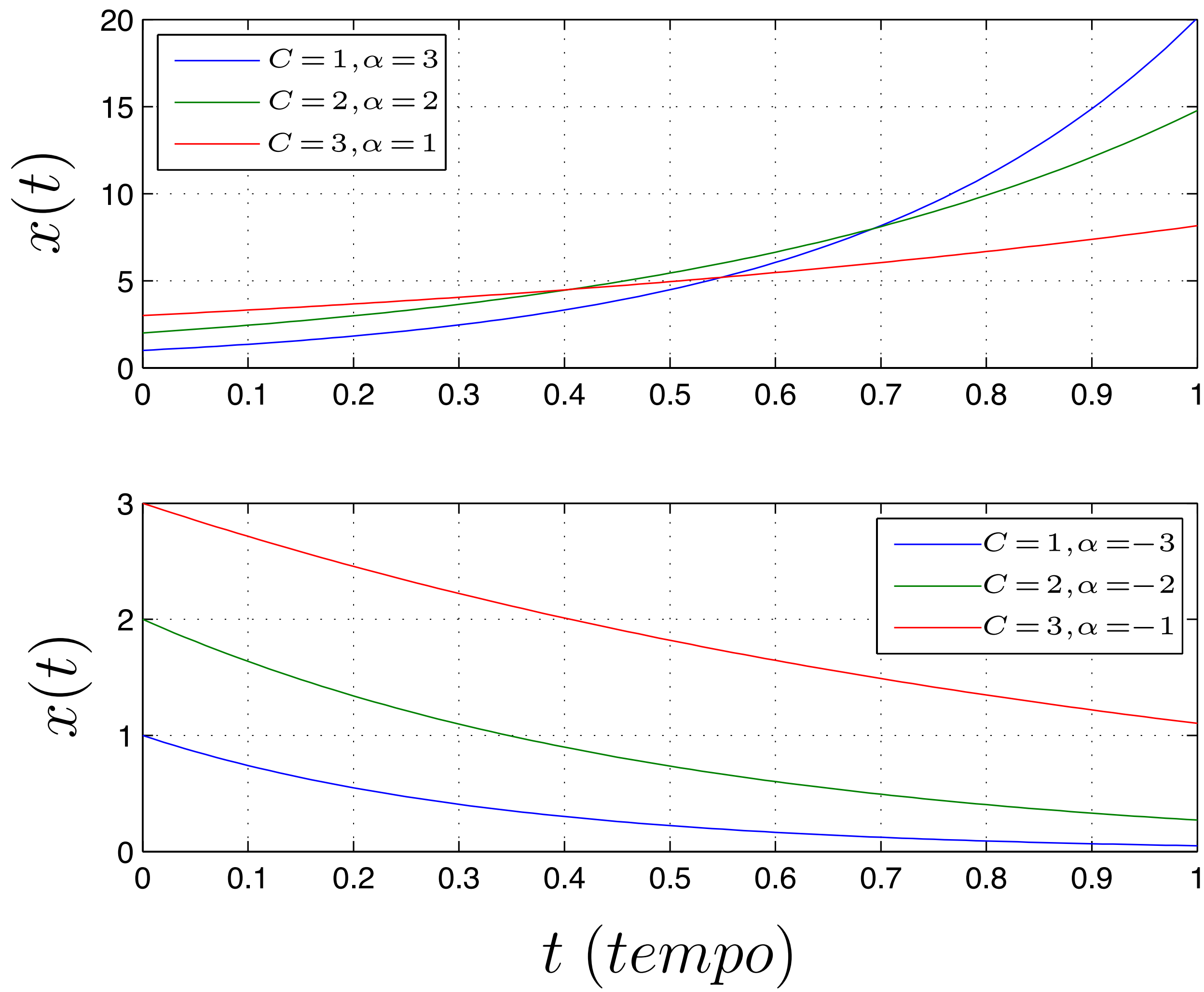
$$x(t) = Ce^{\alpha t} \qquad\qquad x[n] = Cr^n = C(e^{\alpha})^n$$

- Existem vários “tipos” de sinais (sistemas) exponenciais:
  - C e α reais
  - C real e α complexo
  - C e α complexos
- No caso discreto, podemos ter ainda:
  - r real e $r < 0$

Sinais Exponenciais e Senoidais

Sinais exponenciais reais de tempo contínuo

$$x(t) = Ce^{\alpha t}$$



Sinais Exponenciais e Senoidais

Sinais exponenciais complexos gerais de tempo contínuo

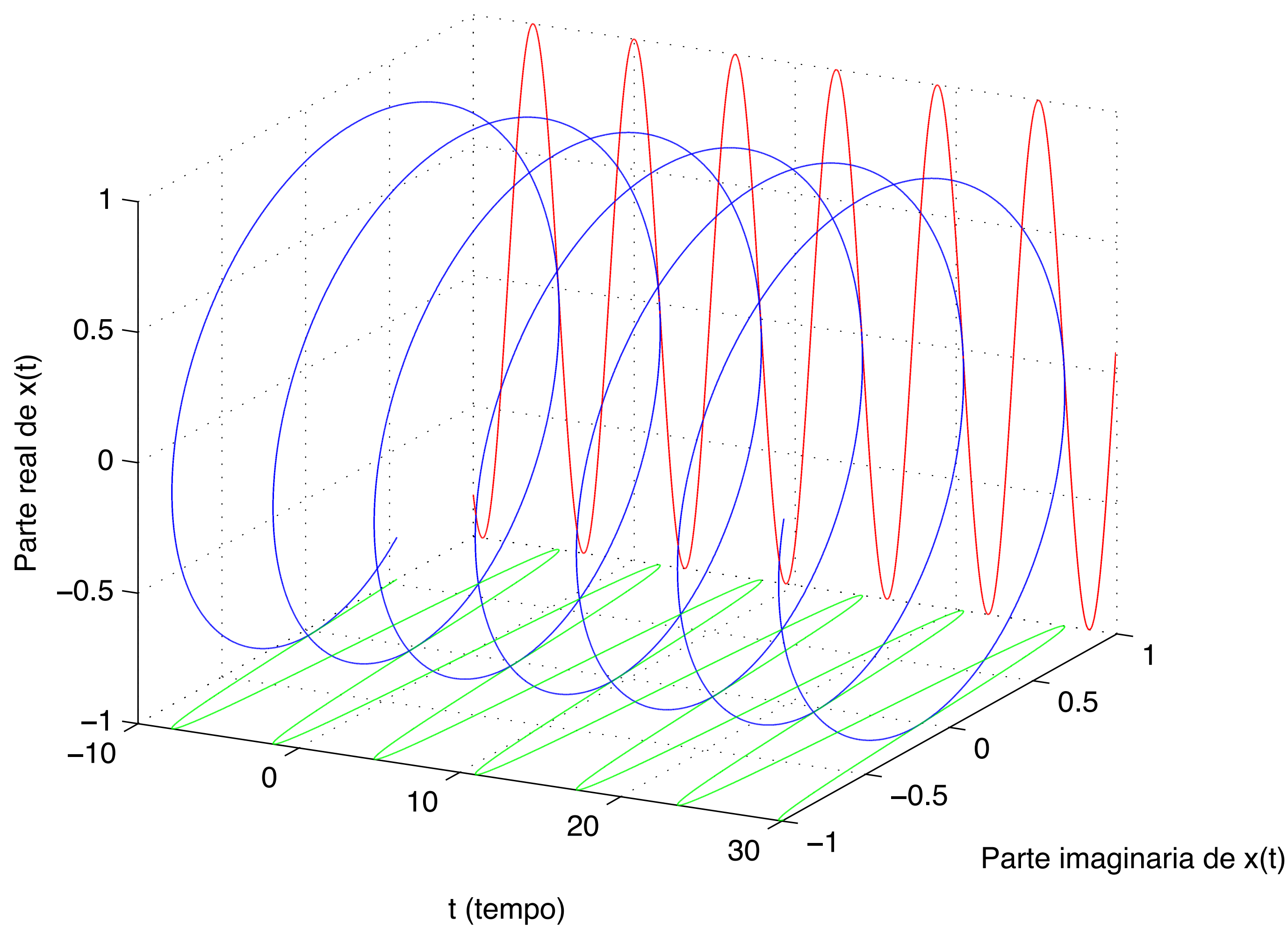
$$x(t) = Ce^{\alpha t} \begin{cases} C = |C|e^{j\theta} \\ \alpha = r + j\omega \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} Ce^{\alpha t} &= |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega)t} \\ &= |C|e^{rt}e^{j(\omega t+\theta)} \\ &= |C|e^{rt}\cos(\omega t+\theta) + j|C|e^{rt}\mathrm{sen}(\omega t+\theta) \end{aligned}$$

Sinais Exponenciais e Senoidais

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \begin{cases} C = 1 \\ \alpha = j \end{cases}$$

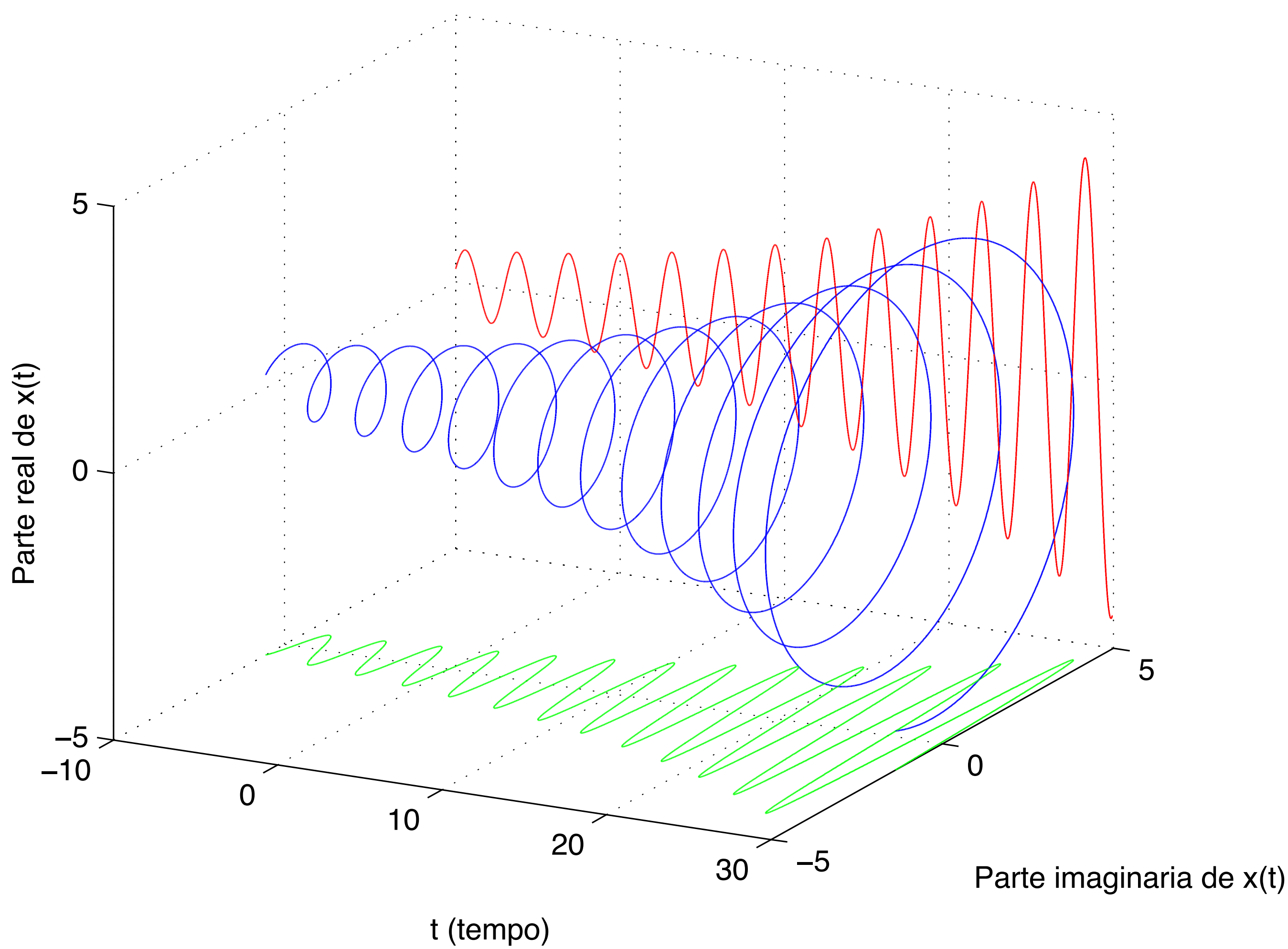


MATLAB - $Ce^{\alpha n}$, $C = 1$ e $\alpha = j$

```
t = -10:1/500:30;
a = j;
C = 1;
x = C*exp(a*t);
plot3(t,imag(x),real(x),'b');
hold on;
plot3(t,ones(size(t)),real(x),'r');
plot3(t,imag(x),-ones(size(t)),'g');
grid;
xlabel('t (tempo)');
ylabel('Parte imaginaria de x(t)');
zlabel('Parte real de x(t)');
view(27.5,22)
```

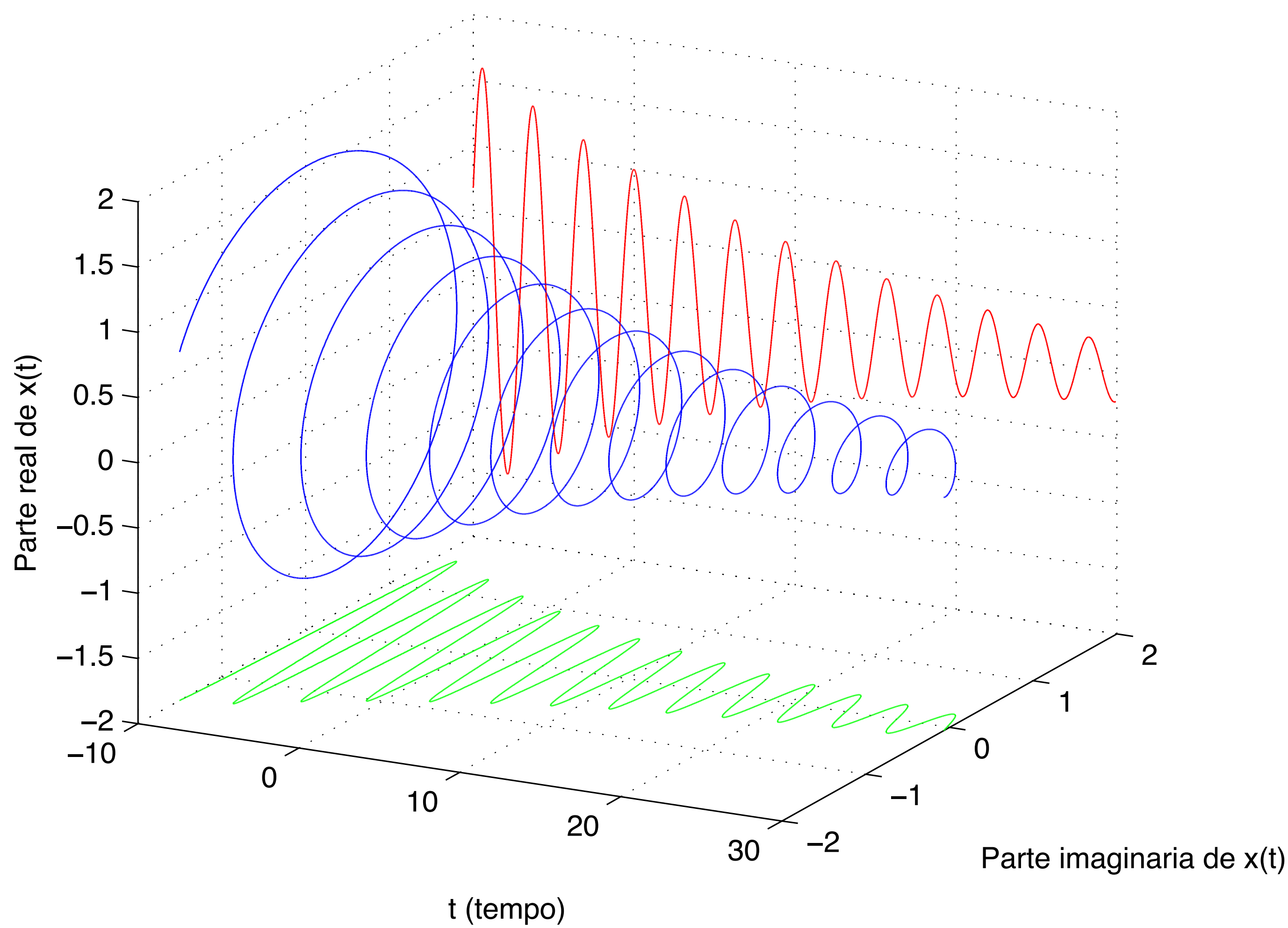
Sinais Exponenciais e Senoidais

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \begin{cases} C = 1 \\ \alpha = 0{,}05 + j2 \end{cases}$$



Sinais Exponenciais e Senoidais

$$x(t) = Ce^{\alpha t} \begin{cases} C = 1 \\ \alpha = -0{,}05 + j2 \end{cases}$$



Sinais Exponenciais e Senoidais

Sinais exponenciais complexos gerais de tempo discreto

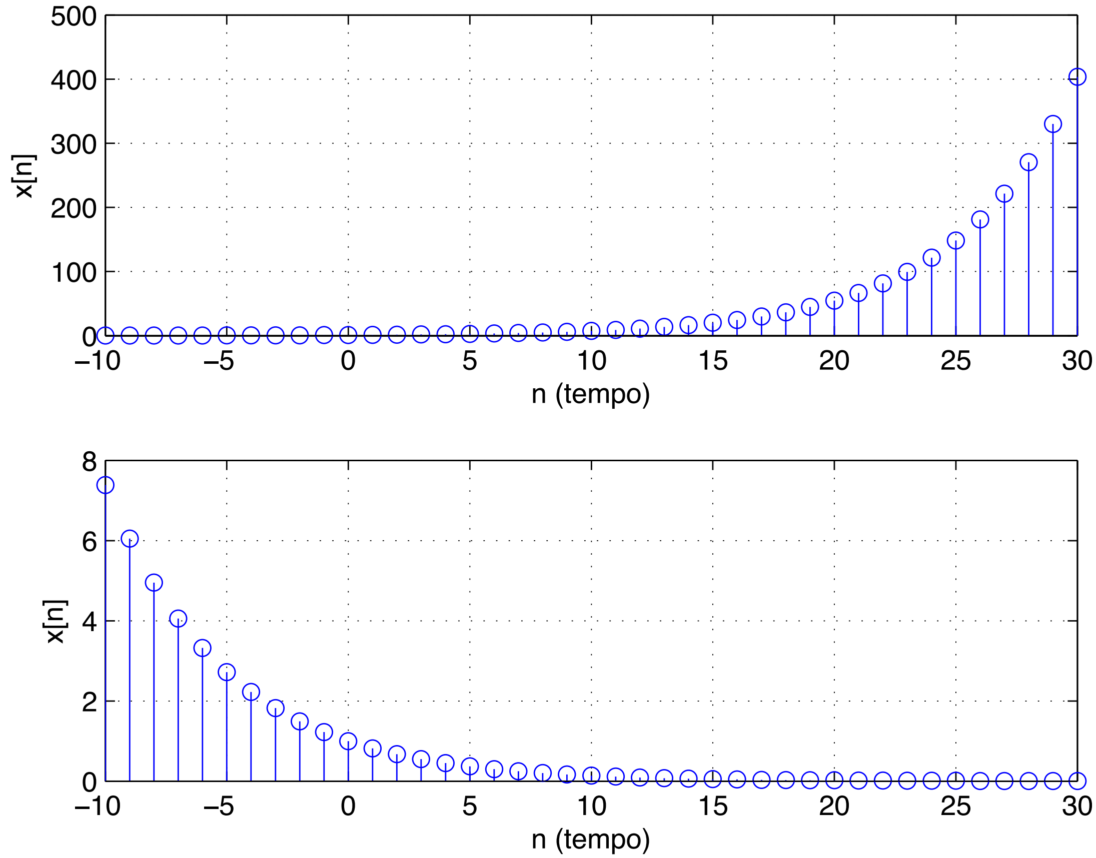
$$x[n] = Cr^n \begin{cases} C = |C|e^{j\theta} \\ r = |r|e^{j\omega} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} Cr^n &= |C|e^{j\theta}(|r|e^{j\omega})^n \\ &= |C||r|^n e^{j(\omega n+\theta)} \\ &= |C||r|^n \cos(\omega n + \theta) + j|C||r|^n \text{sen}(\omega n + \theta) \end{aligned}$$

Sinais Exponenciais e Senoidais

$$x[n] = Cr^n \begin{cases} C = 1 \\ r = 1{,}2214 > 1 \quad (figura\ superior) \\ 0 < r = 0{,}8187 < 1 \quad (figura\ inferior) \end{cases}$$

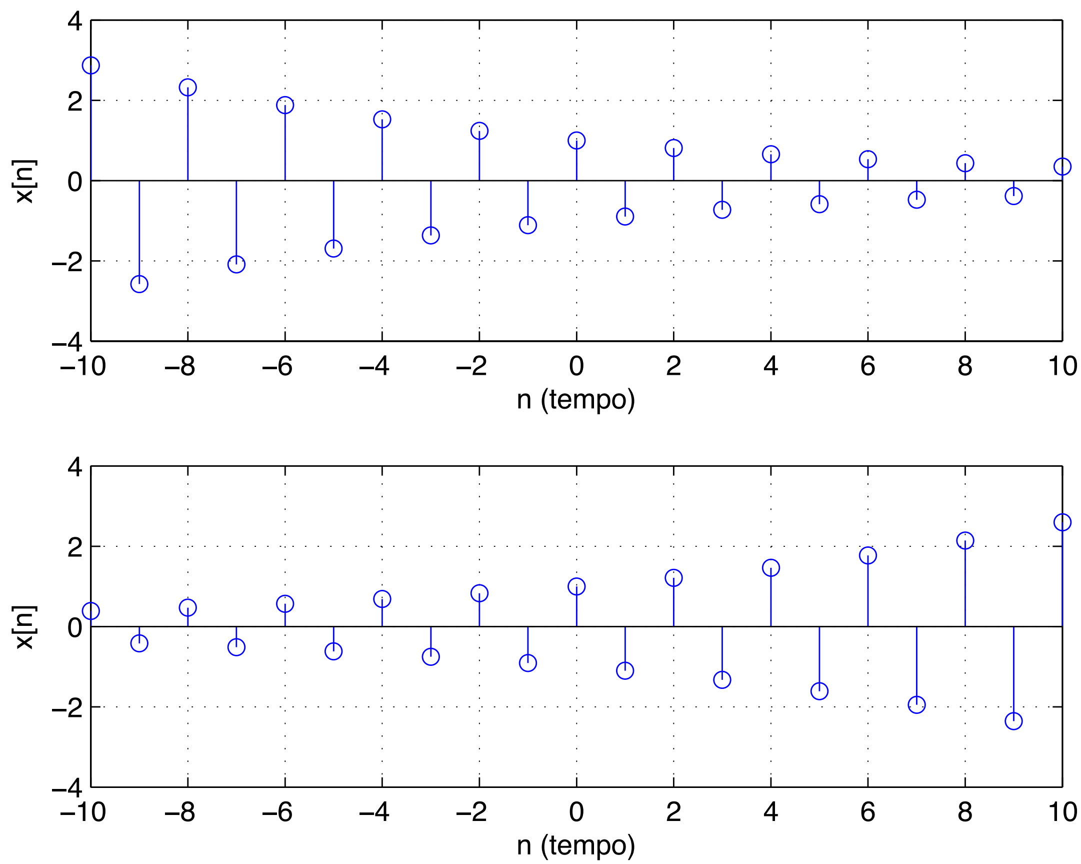


MATLAB - $Ce^{\alpha n}$, $C = 1$ e $\alpha = \pm\frac{1}{5}$

```
n = -10 : 30;
subplot(2,1,1);
y = exp(n/5);
stem(n,y)
xlabel('n (tempo)')
ylabel('x[n]')
grid;
subplot(2,1,2);
y = exp(-n/5);
stem(n,y)
xlabel('n (tempo)')
grid;
ylabel('x[n]')
```

Sinais Exponenciais e Senoidais

$$x[n] = Cr^n \begin{cases} C = 1 \\ -1 < r = -0{,}9 < 0 \quad (figura\ superior) \\ r = -1{,}1 < -1 \quad (figura\ inferior) \end{cases}$$



Sinais Periódicos (no tempo)

Um sinal é periódico no tempo se existe um valor positivo de T ou N tal que:

$$x(t) = x(t+T), \forall t \qquad\qquad x[n] = x[n+N], \forall n$$

- O período fundamental, T_0 ou N_0 (número natural), é o menor valor positivo para o qual a equação é válida.
- A amostragem de um sinal periódico contínuo nem sempre resulta num sinal periódico discreto.

Comentários

Periodicidade no tempo de $x(t) = e^{j\omega t}$:

- Para que $e^{j\omega t}$ seja periódico no tempo é necessário que: $x(t) = x(t+T)$, ou,

$$e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+T_0)} = e^{j\omega t}e^{j\omega T_0}$$

que equivale a,

$$e^{j\omega T_0} = 1$$

Assim, basta que ωT_0 seja múltiplo de 2π:

$$\omega T_0 = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

- Definindo,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Comentários

Periodicidade no tempo de $e^{j\omega n}$:

- Para que $e^{j\omega_0 n}$ seja periódico é necessário que:

$$e^{j\omega n} = e^{j\omega(n+N)}$$

que equivale a: $e^{j\omega N} = 1$

Assim, ωN deve ser múltiplo de 2π, ou seja

$$\omega N = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

então,

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

N e m são números inteiros, logo a razão $\frac{\omega}{2\pi}$ deve ser um número racional para que $e^{j\omega n}$ seja periódico.

Periodicidade na frequência (diferenças)

$$x(t) = e^{j\omega t} \qquad\qquad x[n] = e^{j\omega n}$$

Considerando a frequência: $\omega + \theta$, temos que:

- $x(t) = e^{j(\omega+\theta)t} = e^{j\omega t}e^{j\theta t} \neq e^{j\omega t} \quad \forall t \quad (e^{j\theta t} \neq 1 \quad \forall t)$
  - $e^{j\omega t}$ não é periódico na frequência;
- $x[n] = e^{j(\omega+\theta)n} = e^{j\omega n}e^{j\theta n} = e^{j\omega n} \quad \forall n$
  para $\theta = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$
  $(e^{j\theta n} = 1 \quad \forall n$ com $\theta = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots)$
  - $e^{j\omega n}$ é periódico na frequência com período fundamental $\theta_0 = 2\pi$;
  - Basta estudar $e^{j\omega n}$ em um intervalo de frequência de largura 2π.

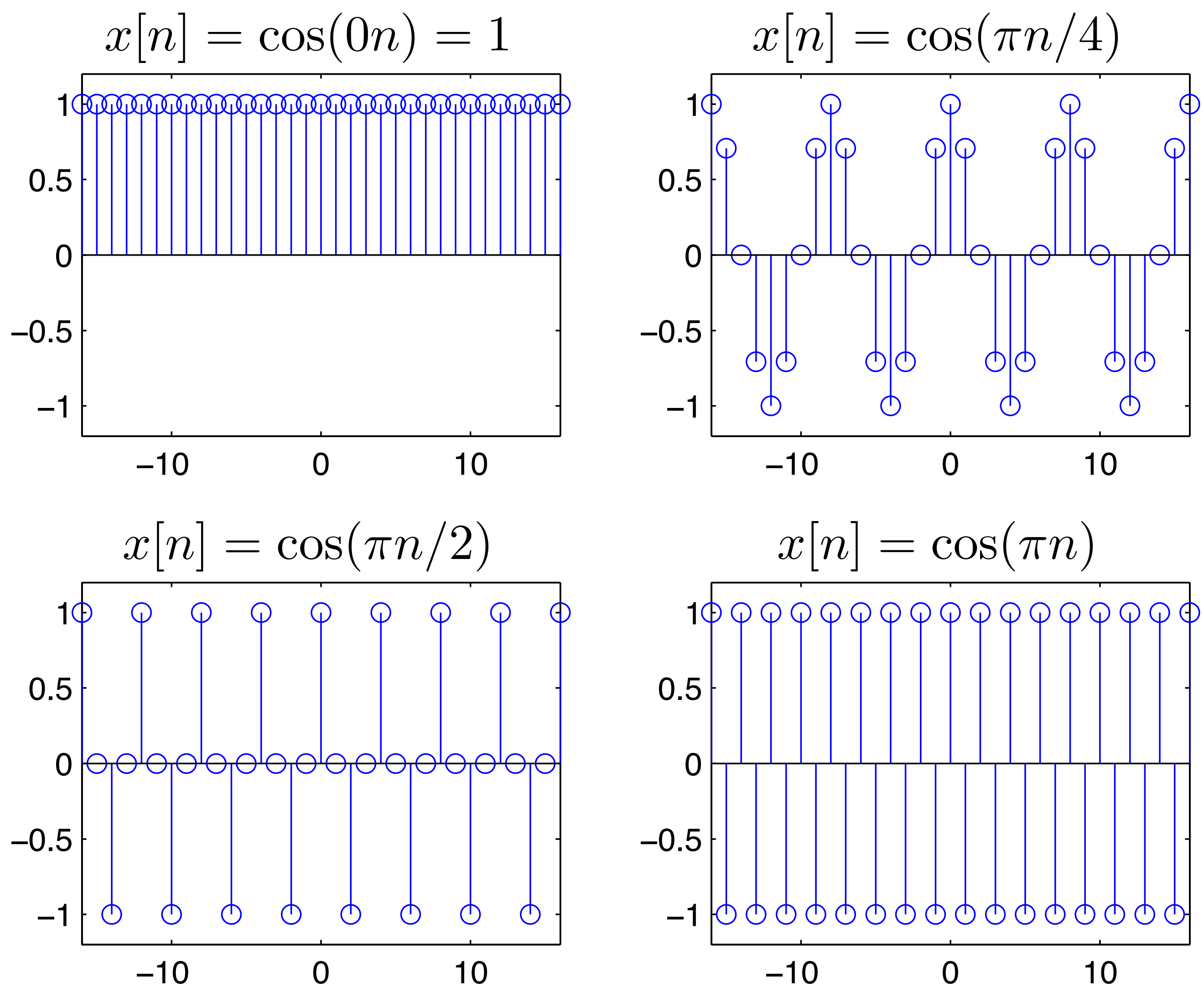
Diferenças

- $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\mathrm{sen}(\omega t)$
  - Para valores diferentes de ω os sinais de $e^{j\omega t}$ são distintos;
  - $e^{j\omega t}$ é periódico para qualquer ω_0 real, com período fundamental $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
  - Quanto maior o módulo de ω_0 maior a taxa de oscilação do sinal;
- $e^{j\omega n} = \cos[\omega n] + j\mathrm{sen}[\omega n]$
  - Para valores de ω espaçados de 2π os sinais de $e^{j\omega n}$ são idênticos;
  - $e^{j\omega n}$ é periódico se $\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ é um número racional.
  - Não tem taxa crescente de oscilação com o aumento do módulo de ω_0;

Comentários

Taxa de oscilação de $e^{j\omega n}$:

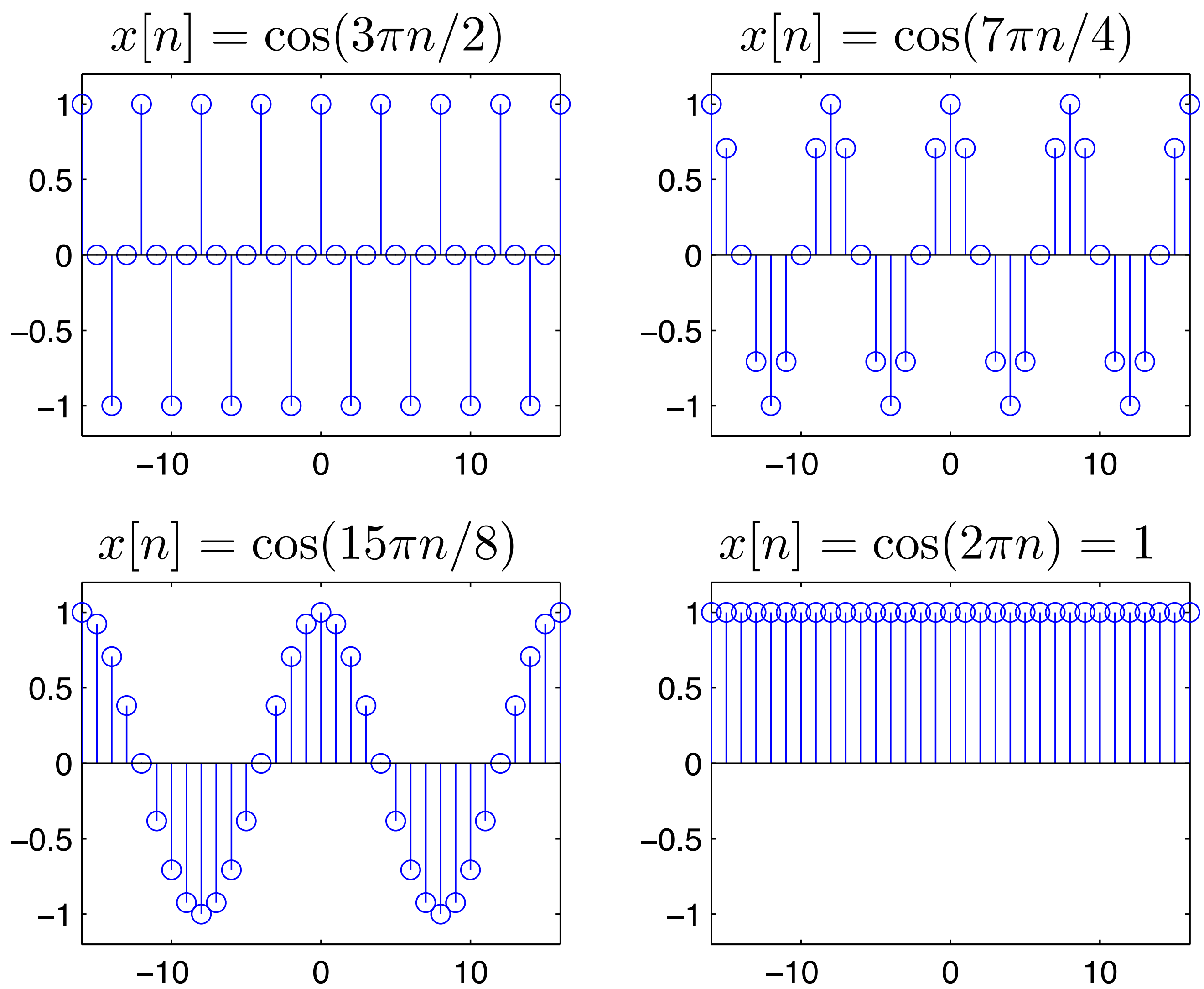
- aumenta, quando aumentamos ω_0 de 0 à π;



Comentários

Taxa de oscilação de $e^{j\omega n}$:

- diminui, quando aumentamos ω de π à 2π



Soma de Sinais Periódicos

Considere dois sinais periódicos: $x_1(t)$ e $x_2(t)$ com períodos fundamentais T_1 e T_2, respectivamente.

- A soma

$$x_1(t) + x_2(t)$$

é periódica? Ou, seja $\exists\, T$ tal que

$$x_1(t) + x_2(t) = x_1(t+T) + x_2(t+T) \quad \forall t?$$

Soma de Sinais Periódicos

- $\exists\, T$ tal que

$$x_1(t) + x_2(t) = x_1(t+T) + x_2(t+T) \quad \forall t?$$

- A igualdade acima é verdadeira se, e somente se, T_1/T_2 pode ser rescrito como uma razão q/r, com q, $r \in \mathbb{Z}$.

- Assim,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{q}{r} \quad \longrightarrow \quad rT_1 = qT_2 = T$$

  Portanto, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ têm o mesmo período T e o sinal $x_1(t) + x_2(t)$ também tem o período T.

  - Se q e r não tem fatores comuns $\neq 1$. Então, T é o período fundamental de $x_1(t) + x_2(t)$.

Soma de Sinais Periódicos

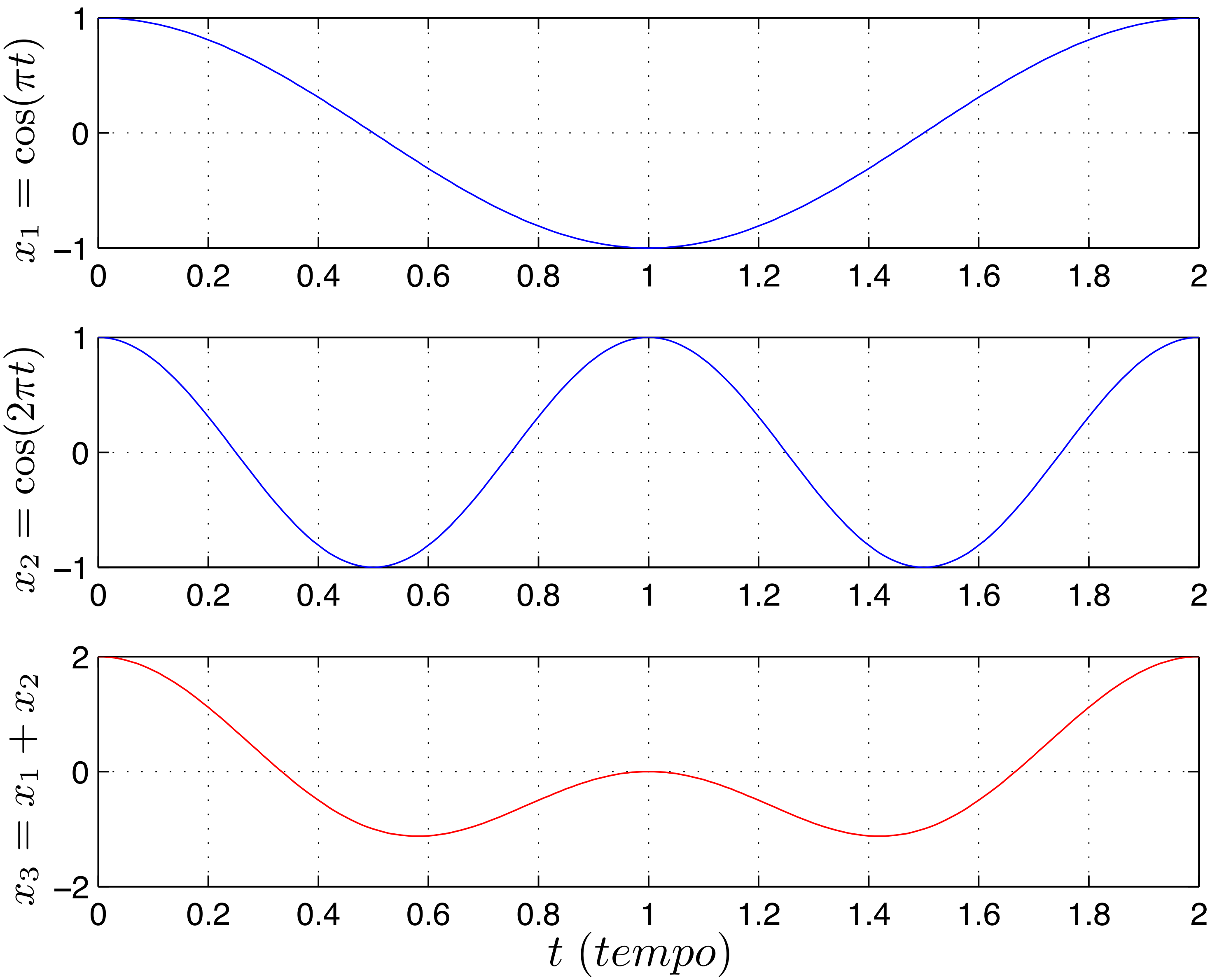
Considere os dois sinais periódicos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(\pi t) \\ x_2(t) &= \cos(2\pi t) \end{aligned}$$

Verifique se a soma deles é um sinal periódico. Se for, qual é o período fundamental?

- $T_1 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
- $T_2 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$
- $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{1} \rightarrow T_1 = 2T_2 = T_0$

Soma de Sinais Periódicos



Soma de Sinais Periódicos

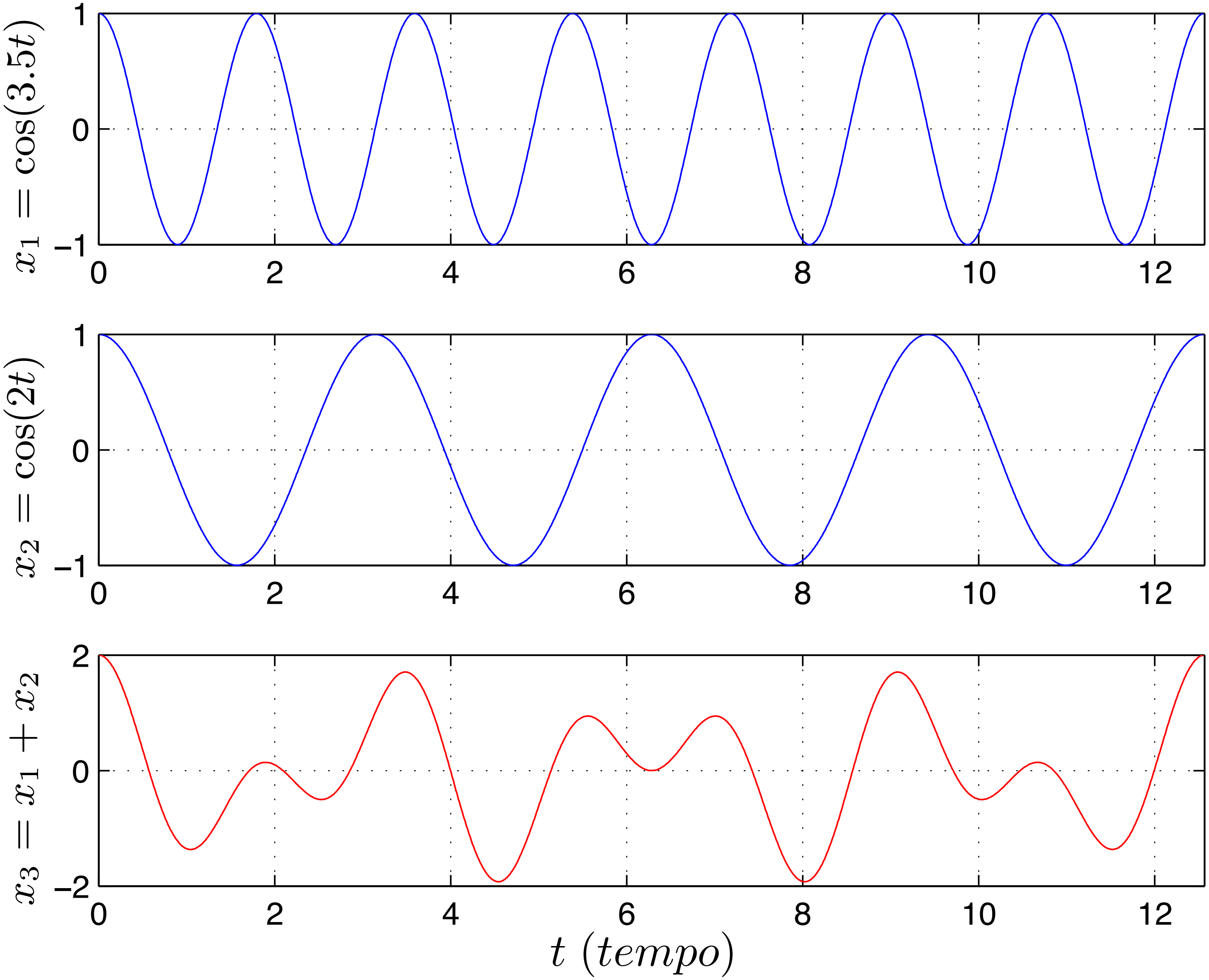
Considere os dois sinais periódicos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(3{,}5t) \\ x_2(t) &= \cos(2t) \end{aligned}$$

Verifique se a soma deles é um sinal periódico. Se for, qual é o período fundamental?

- $T_1 = \frac{2\pi}{3{,}5}$
- $T_2 = \frac{2\pi}{2}$
- $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{2\pi}{3{,}5}\dfrac{2}{2\pi} = \dfrac{2}{3{,}5} = \dfrac{4}{7} \rightarrow 7T_1 = 4T_2$
- $T_0 = 7T_1 = 4T_2$

Soma de Sinais Periódicos



Exercício

Considere três sinais periódicos:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \cos(3{,}5t) \\
x_2(t) &= \operatorname{sen}(2t) \\
x_3(t) &= 2\cos\left(\frac{7t}{6}\right)
\end{aligned}
$$

Verifique se a soma deles é um sinal periódico. Se for, qual é o período fundamental?

Solução

- Cálculo de T_1

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{3{,}5}$$

- Cálculo de T_2

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2}$$

- Cálculo de T_3

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{7/6}$$

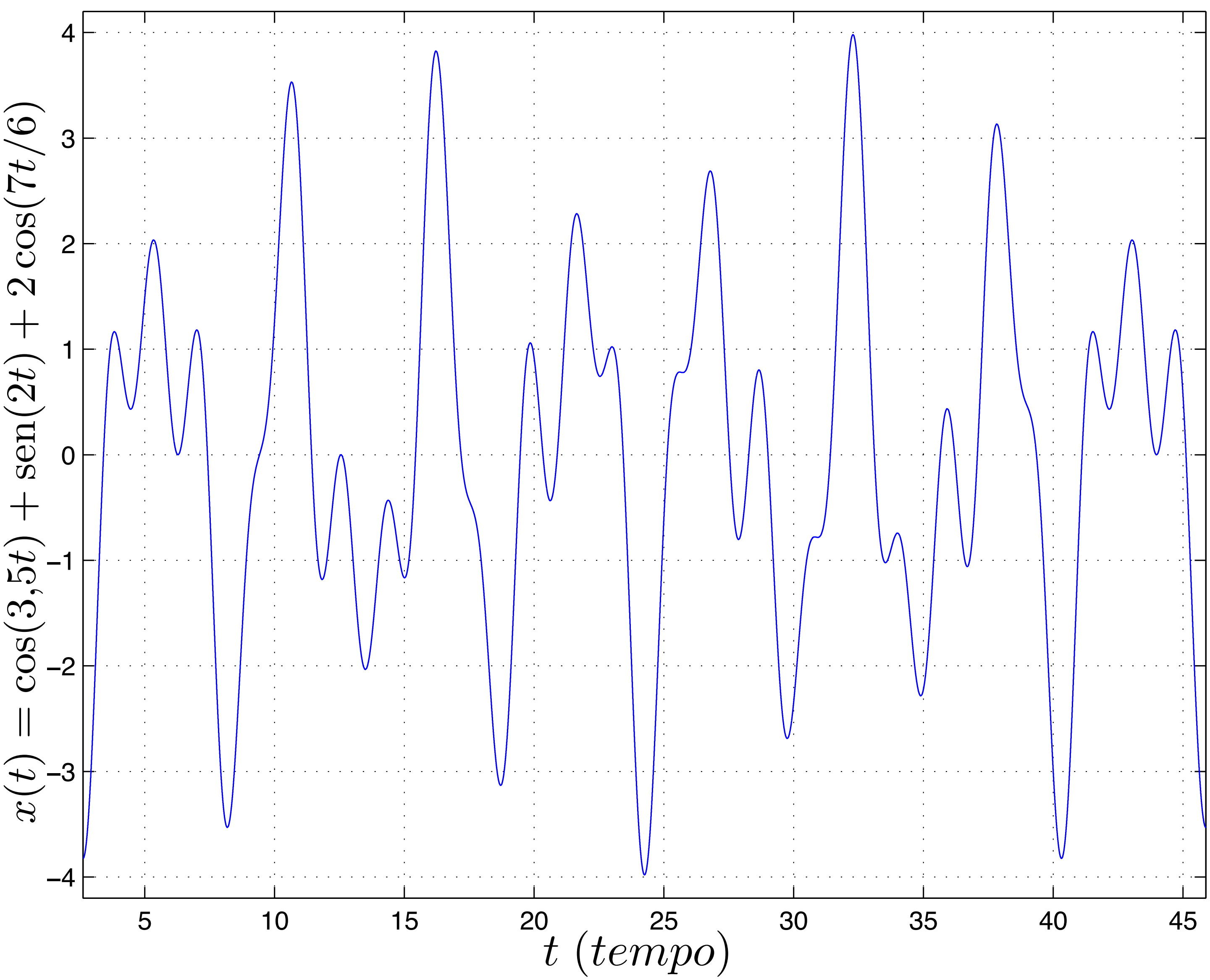
Solução

- Cálculo das razões entre os períodos

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1}{T_2} &= \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{2}{3{,}5} = \frac{4}{7} \\
\frac{T_1}{T_3} &= \frac{\frac{2\pi}{3{,}5}}{\frac{2\pi}{7/6}} = \frac{7/6}{3{,}5} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

- Note que os resultados são razões de números inteiros, portanto o sinal soma é periódico.
- O mínimo múltiplo comum dos denominadores é 21, logo o período fundamental do sinal soma é $T = 21 \underbrace{\frac{2\pi}{3{,}5}}_{T_1} = 12\pi$

Solução



4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
5
10
15
20
25
30
35
40
45
$x(t) = \cos(3{,}5t) + \mathrm{sen}(2t) + 2\cos(7t/6)$
$t\ (tempo)$

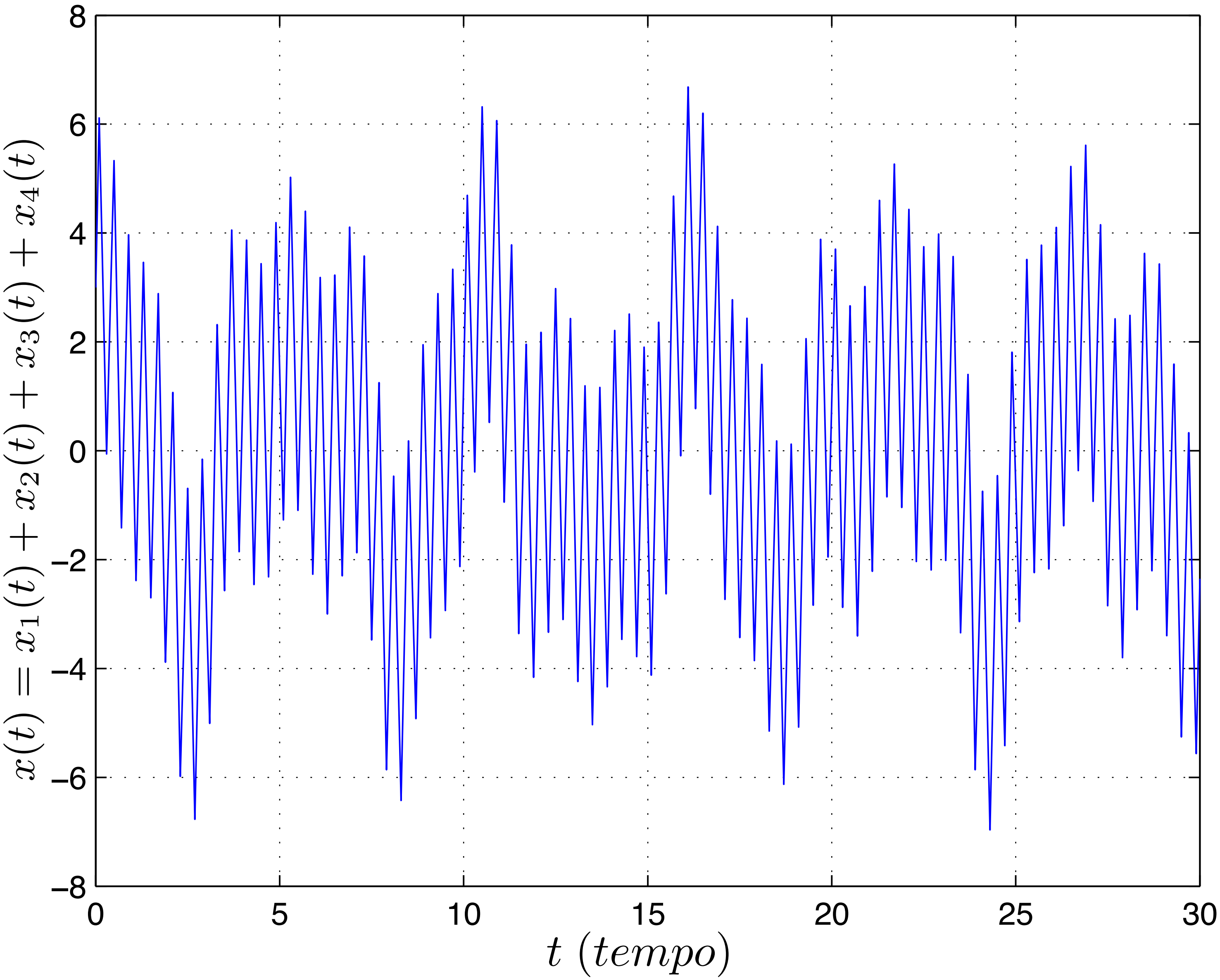
Exercício

Considere quatro sinais periódicos:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \cos(3{,}5t) \\
x_2(t) &= \operatorname{sen}(2t) \\
x_3(t) &= 2\cos\left(\frac{7t}{6}\right) \\
x_4(t) &= 3\operatorname{sen}(5\pi t)
\end{aligned}
$$

Verifique se a soma deles é um sinal periódico. Se for, qual é o período fundamental?

Sinal Não-periódico



Exemplo 1

Determine se o sinal $x(t) = \cos^2(5t)$ é periódico. Em caso afirmativo, determine o período.

Exemplo 1 - Solução

- Vamos aplicar a definição, ou seja, $x(t) = x(t+T)$. Temos, então que verificar se a seguinte igualdade é verdadeira.

$$\cos^2(5t) = \cos^2(5(t+T))$$

- Sabemos que

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \mathrm{sen}(A)\mathrm{sen}(B)$$

logo

$$\cos(5t+5T) = \cos(5t)\cos(5T) - \mathrm{sen}(5t)\mathrm{sen}(5T)$$

$$\cos(5(t+T)) = \cos(5t+5T) = \cos(5t)\cos(5T) - \operatorname{sen}(5t)\operatorname{sen}(5T)$$

- Elevando ao quadrado, temos:

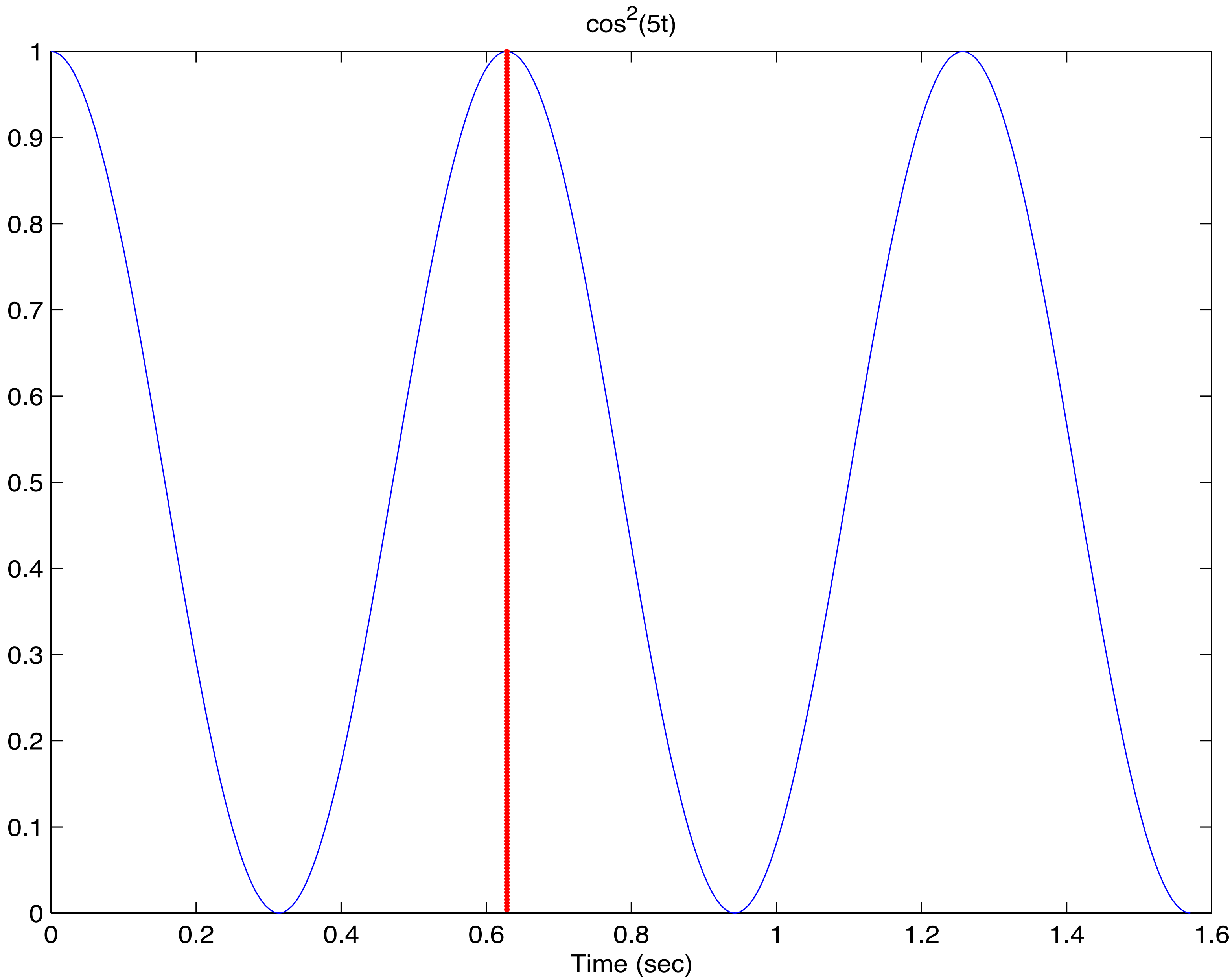
$$\begin{aligned}\cos^2(5t+5T) &= \cos^2(5t)\cos^2(5T) + \operatorname{sen}^2(5t)\operatorname{sen}^2(5T) - \\ &\quad 2\cos(5t)\cos(5T)\operatorname{sen}(5t)\operatorname{sen}(5T)\end{aligned}$$

- Para que a igualdade seja verdadeira, é preciso que:

$$\begin{cases} \cos^2(5T) &= 1 \\ \operatorname{sen}^2(5T) &= 0 \end{cases}$$

Isso acontece para $5T = k\pi$ e para $k = 1$ (Fundamental), temos $T = \frac{\pi}{5}$.

Exemplo 1 - Solução



Exemplo 2 - Discreto

Determine se o sinal $x[n] = (-1)^n$ é periódico.

Exemplo 2 - Solução

- Usando a definição, temos

$$\begin{aligned}(-1)^n &= (-1)^{n+N} \\ &= (-1)^n(-1)^N\end{aligned}$$

Isso só será verdade se N for par. O menor valor de N, diferente de zero, é 2.

Exemplo 2 - Outra Solução

- Sabemos que $e^{j\pi} = -1$. Usando a definição

$$\begin{aligned} (e^{j\pi})^n &= (e^{j\pi})^{n+N} \\ &= (e^{j\pi})^n (e^{j\pi})^N \end{aligned}$$

- O segundo termo deve ser 1, ou seja

$$\pi N = 2k\pi$$

O menor valor de k, diferente de zero, é 1, logo $N = 2$

Exercício - Discreto

Determine se o sinal $x[n] = \cos[2n]$ é periódico.

Exercício - solução

- Usando a definição, temos:

$$
\begin{aligned}
\cos(2n) &= \cos(2(n+N)) \\
&= \cos(2n)\cos(2N) - \mathrm{sen}(2n)\mathrm{sen}(2N)
\end{aligned}
$$

- A condição para que a igualdade seja verdadeira é:

$$
\begin{cases}
\cos(2N) = 1 \\
\mathrm{sen}(2N) = 0
\end{cases}
$$

Logo $2N = 2k\pi \rightarrow N = k\pi$. Mas N tem que ser inteiro, logo $x[n]$ não é periódico.

Exercício - Discreto

Determine se o sinal $x[n] = \cos(2\pi n)$ é periódico.

Exercício - solução

- Usando a definição, temos:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi n) &= \cos(2\pi(n+N)) \\ &= \cos(2\pi n)\cos(2\pi N) - \mathrm{sen}(2\pi n)\mathrm{sen}(2\pi N) \end{aligned}$$

- A condição para que a igualdade seja verdadeira é:

$$\begin{cases} \cos(2\pi N) &= 1 \\ \mathrm{sen}(2\pi N) &= 0 \end{cases}$$

Logo $2\pi N = 2k\pi \rightarrow N = k$. O menor $k \neq 0$ é 1, logo $N = 1$ e $x[n]$ é periódico.

Exercício - Discreto

Determine se o sinal $x[n] = (-1)^{n^2}$ é periódico.

Exercício - solução

- Usando a definição, temos:

$$
\begin{aligned}
(-1)^{n^2} &= (-1)^{(n+N)^2} \\
&= (-1)^{n^2+N^2+2nN} \\
&= (-1)^{n^2}(-1)^{N^2}\left((-1)^2\right)^{nN} \\
&= (-1)^{n^2}(-1)^{N^2}
\end{aligned}
$$

- Logo N^2 tem que ser par e isso acontece para $N = 2$.

Exercício - Outra solução

- Usando a definição e lembrando que $x[n] = (-1)^{n^2} = (e^{j\pi})^{n^2}$, temos:

$$
\begin{aligned}
(e^{j\pi})^{n^2} &= (e^{j\pi})^{(n+N)^2} \\
&= (e^{j\pi})^{n^2+N^2+2nN} \\
&= (e^{j\pi})^{n^2}(e^{j\pi})^{N^2}\left(e^{j2\pi}\right)^{nN} \\
&= (e^{j\pi})^{n^2}(e^{j\pi})^{N^2}
\end{aligned}
$$

- Logo $\pi N^2 = 2k\pi \rightarrow N = \sqrt{2k}$. Para N inteiro, o menor $k \neq 0$ é 2, logo $N = 2$ e $x[n]$ é periódico.

Harmônicos - Comentários

- Para que o sinal $x(t) = e^{j\omega t}$ seja periódico com período T_0, é preciso que a igualdade $x(t) = x(t + T_0)$ seja satisfeita, ou seja:

$$\omega T_0 = 2\pi m \text{ onde } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- A frequência fundamental é definida como o menor valor positivo (não-nulo) de frequência que satisfaz a condição acima:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

- As outras frequências que satisfazem a restrição de periodicidade são múltiplos inteiros de ω_0

$$k\omega_0, \quad \text{sendo } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

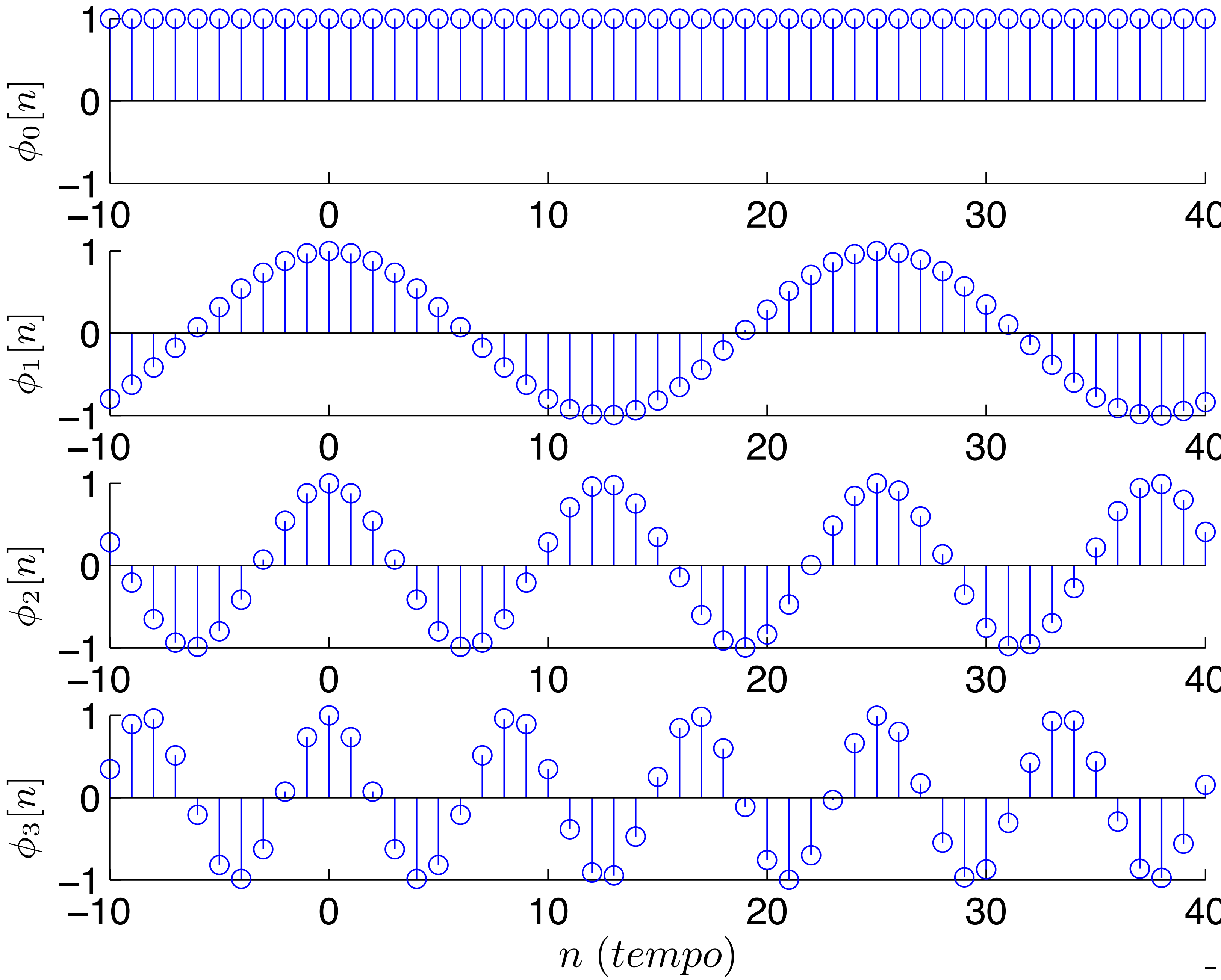
Harmônicos

- Um conjunto de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas é um conjunto de exponenciais periódicas com frequências fundamentais que são múltiplas de uma única frequência positiva ω_0:

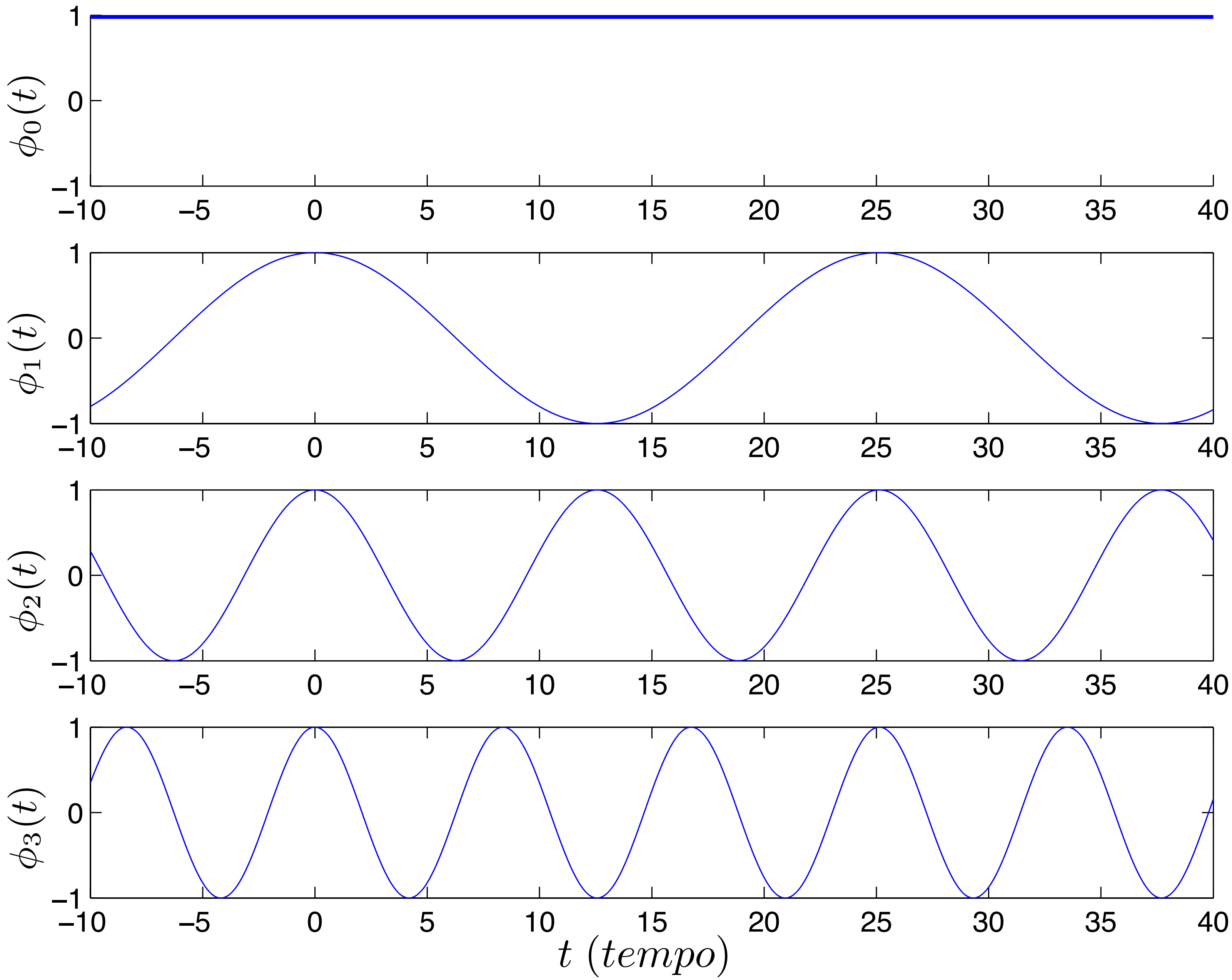
$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Para $k = 0$, $\phi_k(t)$ é uma constante
- Para $k \neq 0$, $\phi_k(t)$ é periódico com frequência fundamental $|k|\omega_0$
- Os harmônicos são extremamente importante no estudo das séries de Fourier e sinais periódicos.

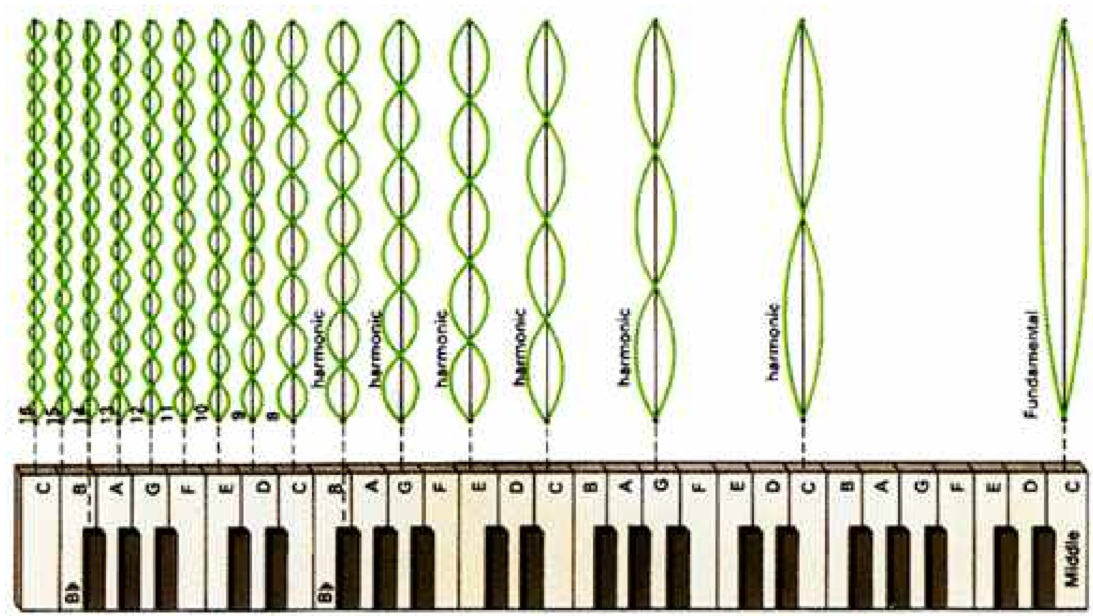
Harmônico - Discreto



Harmônico - Contínuo



Série Harmônica do Som

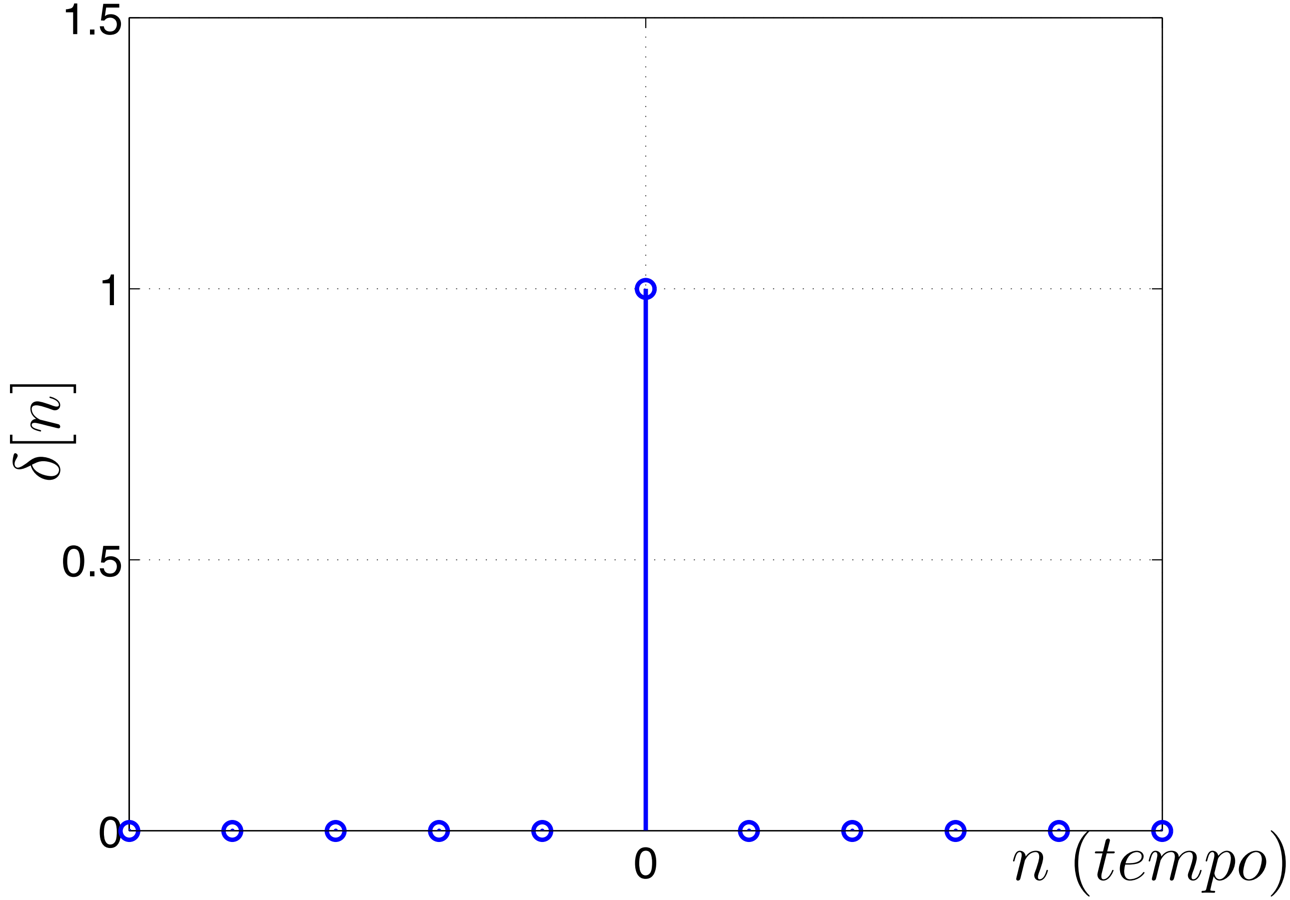


Pitágoras foi quem mais se destacou nesta área de pesquisa. Estudando as propriedades do som e das notas, observou que existem notas que mantém uma relação harmoniosa, ou seja, que são agradáveis ao ouvido. A partir desta observação foi possível construir uma escala em que cada nota mantém uma relação bem definida com a outra.

Impulso Unitário Discreto

O impulso discreto é definido como

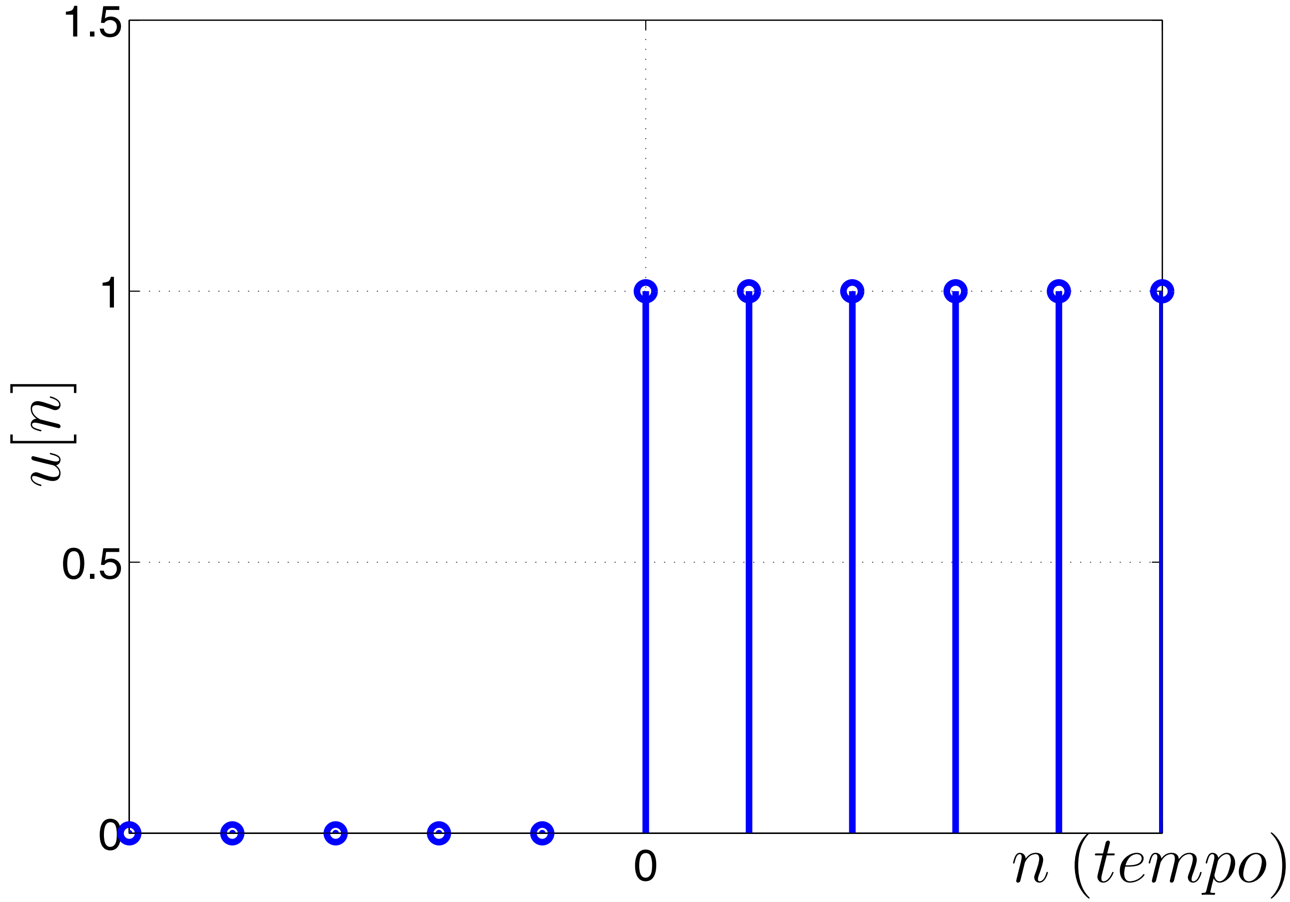
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



Degrau Unitário Discreto

A função degrau unitário discreto é definida como:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



Funções Discretas - Resumo

- Existe uma relação entre $\delta[n]$ e $u[n]$

$$\begin{aligned}
\delta[n] &= u[n] - u[n-1] \\
u[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \ \ (com\ m = n-k:) \\
u[n] &= \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]
\end{aligned}$$

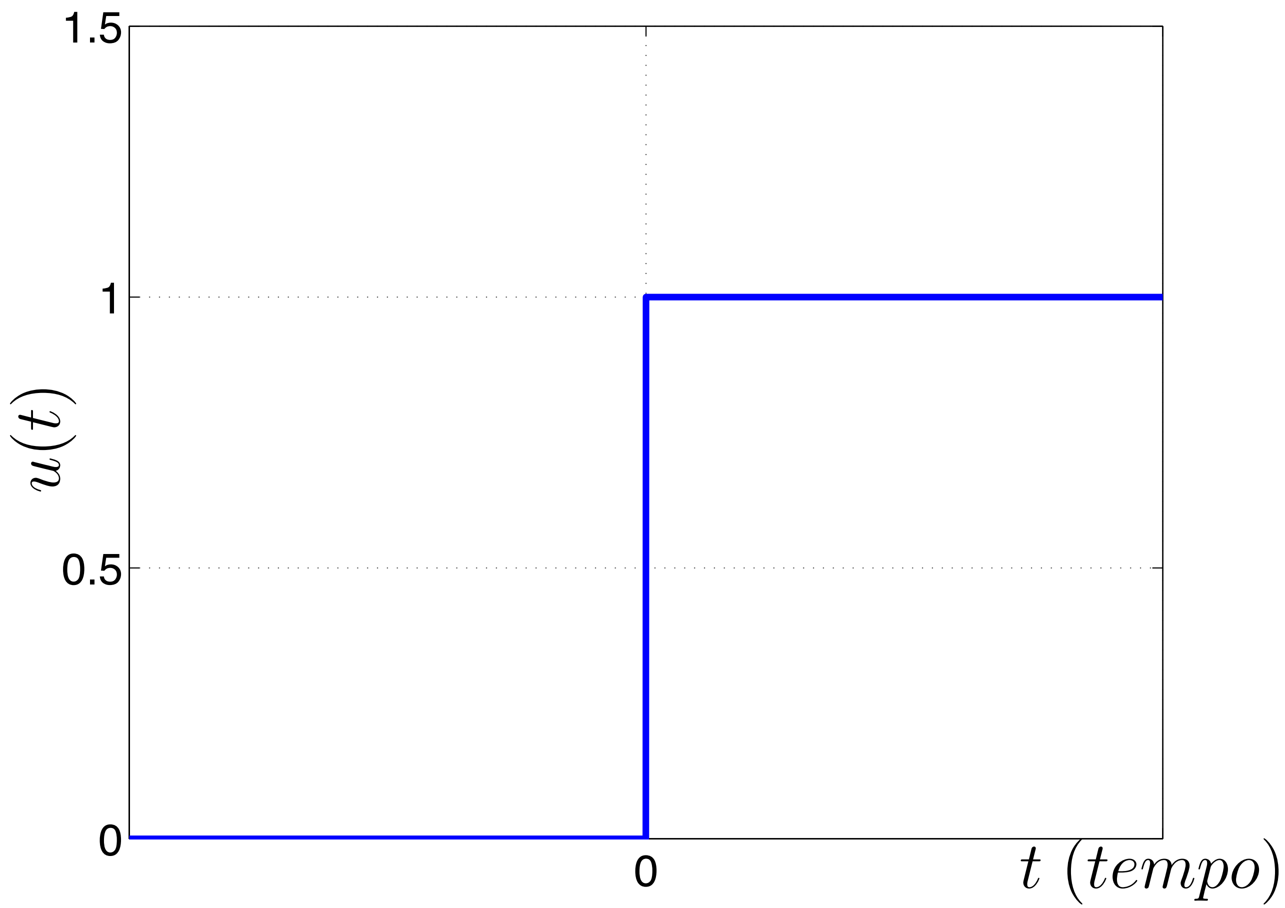
- O impulso unitário pode ser usado para amostrar um sinal no tempo discreto $x[n]$

$$x[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[k] \qquad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

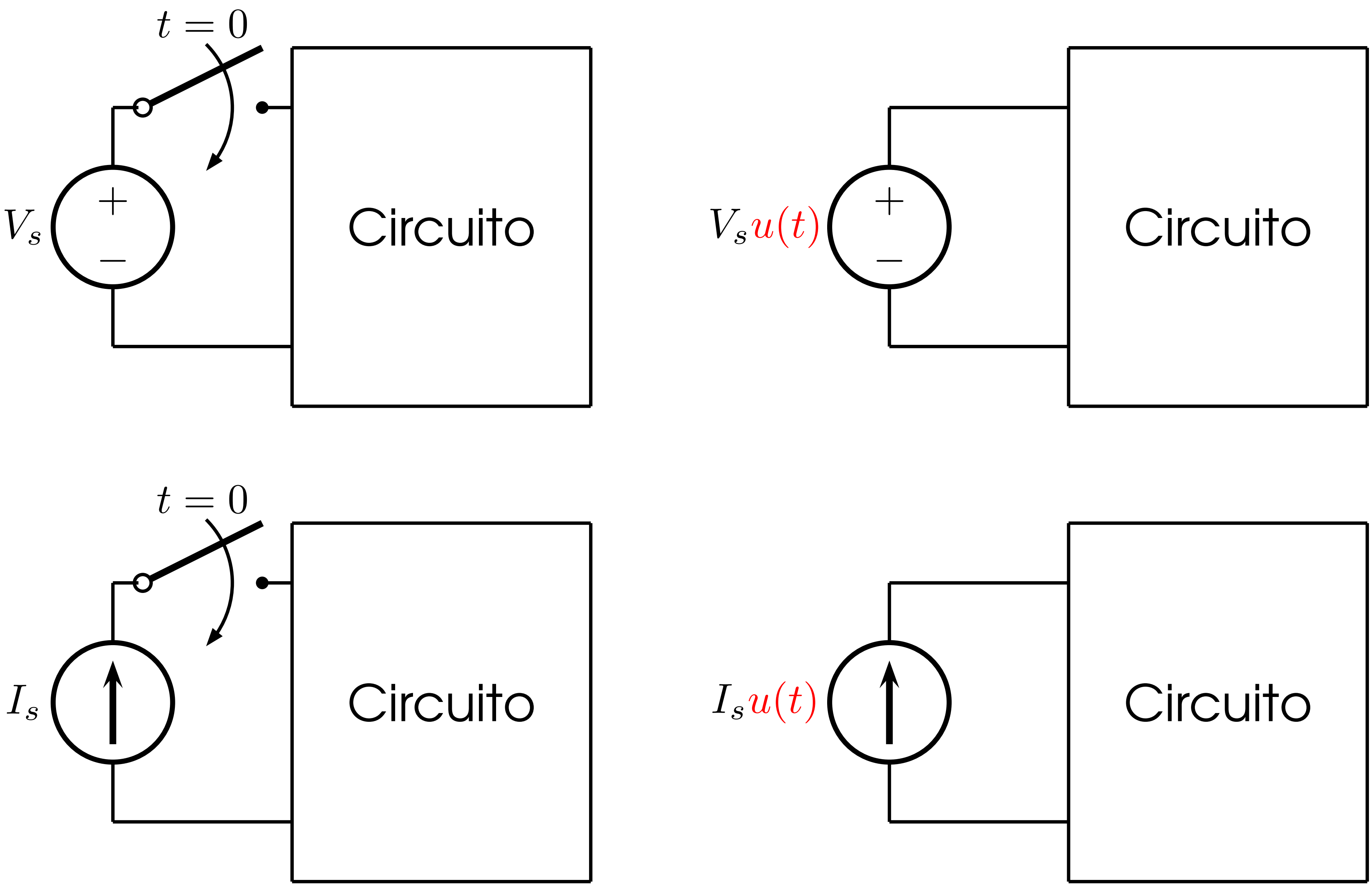
Degrau Unitário Contínuo

- Também chamado função de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



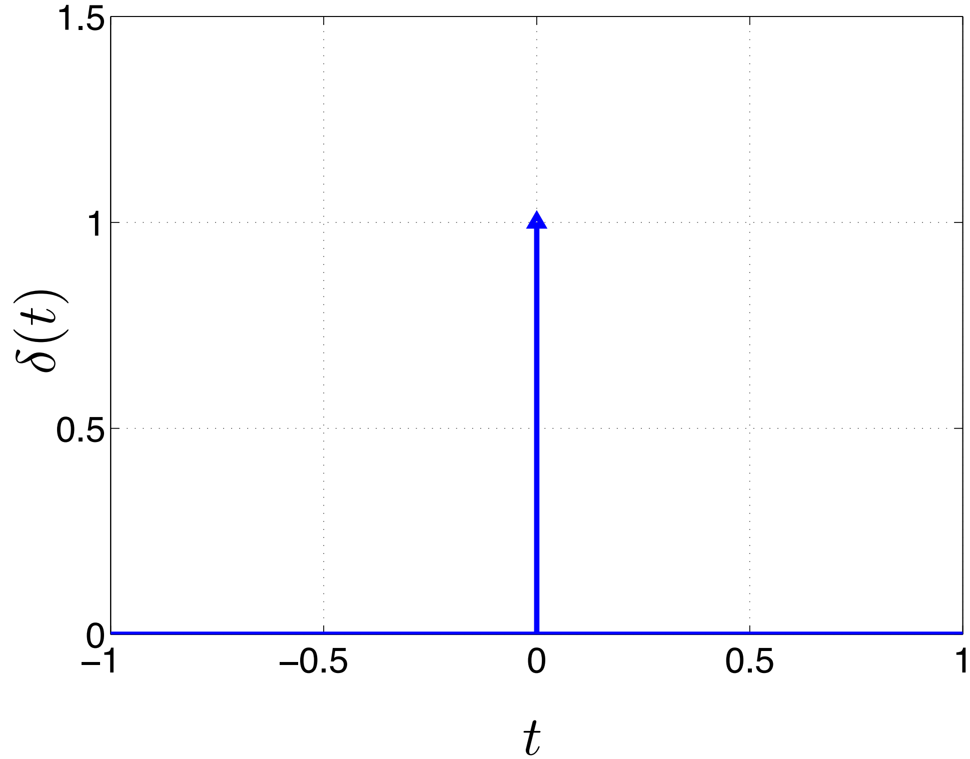
Degrau Unitário (Prática)



Impulso Unitário Contínuo

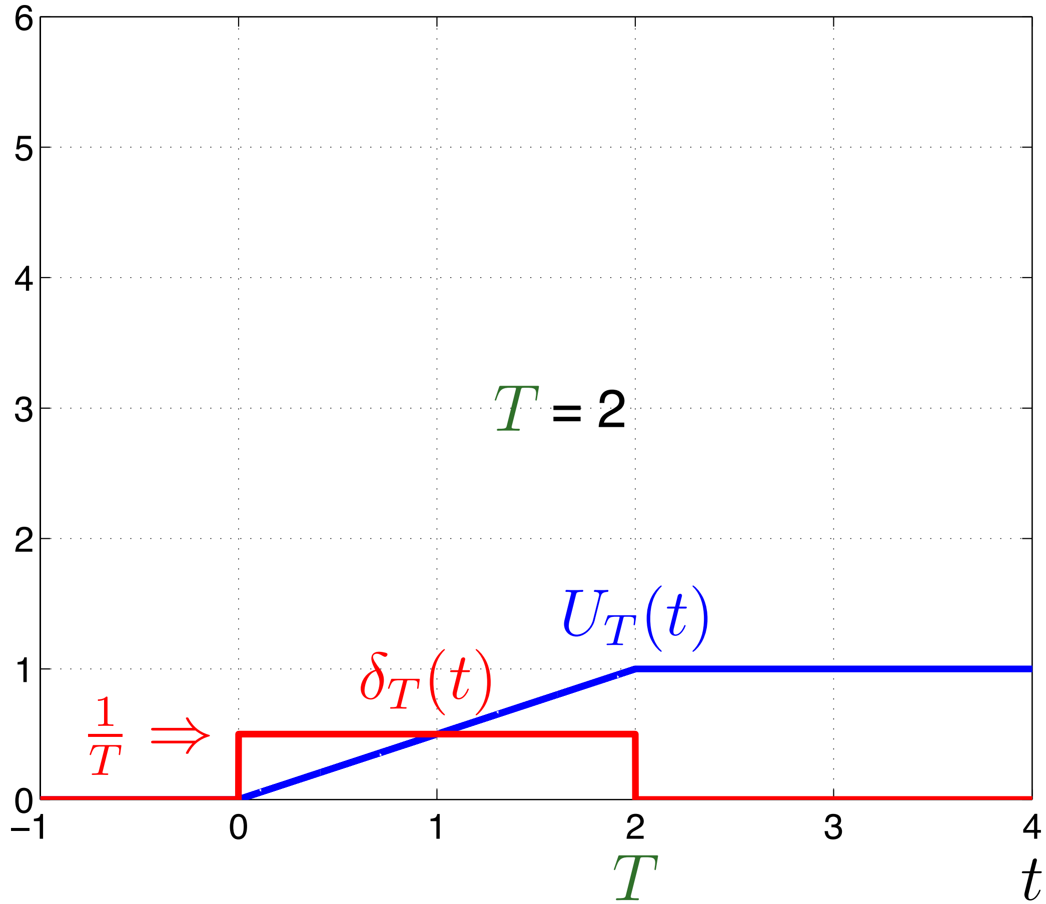
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \neq 0 \\ \infty, & \text{para } t = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

- Conhecido também por função delta de Dirac
- Esboçado como uma seta com altura unitária
  - $5\delta(t)$ é esbocado como uma seta de altura 5.



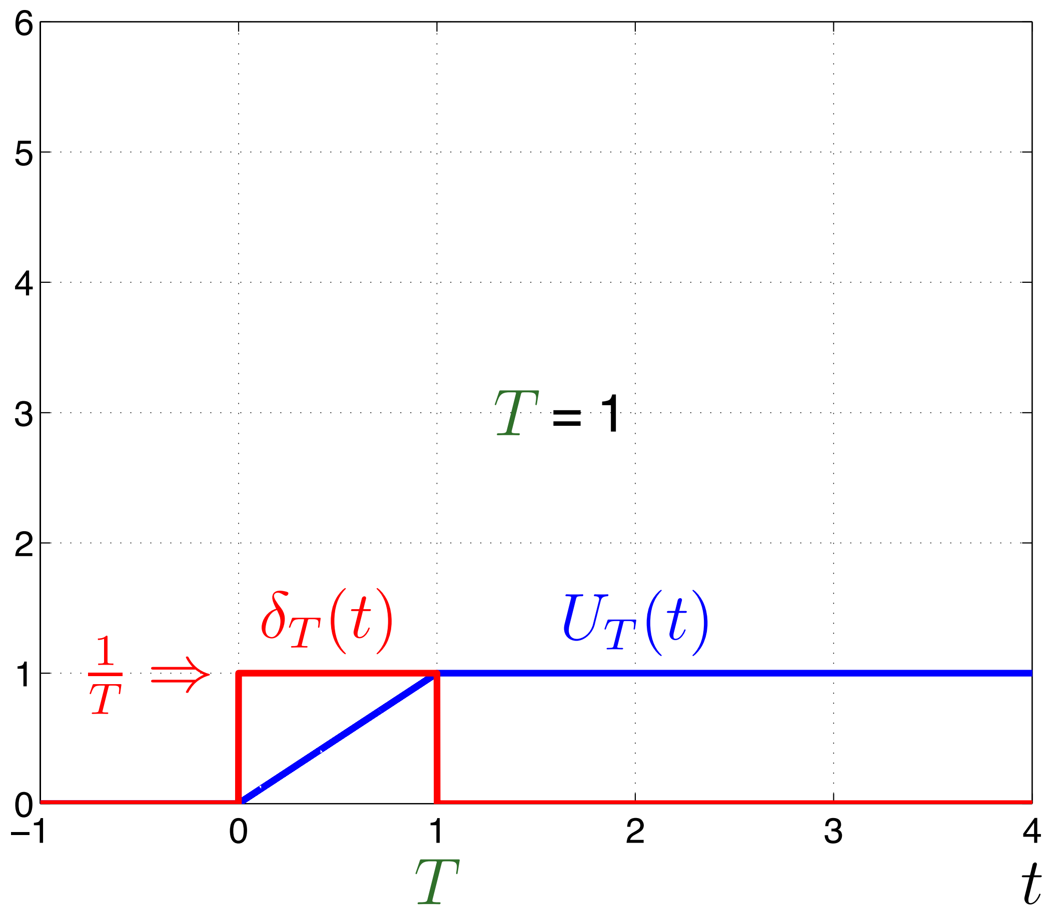
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \leq t \leq T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t) dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



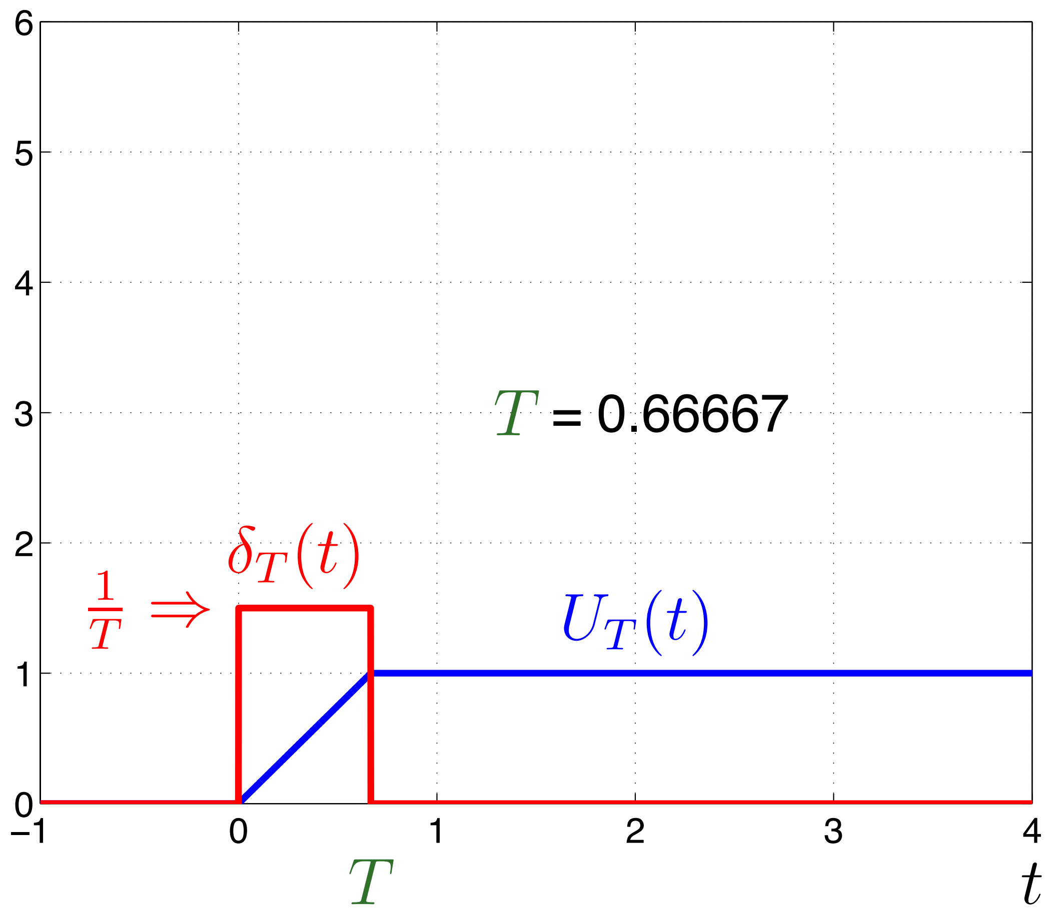
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt=1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



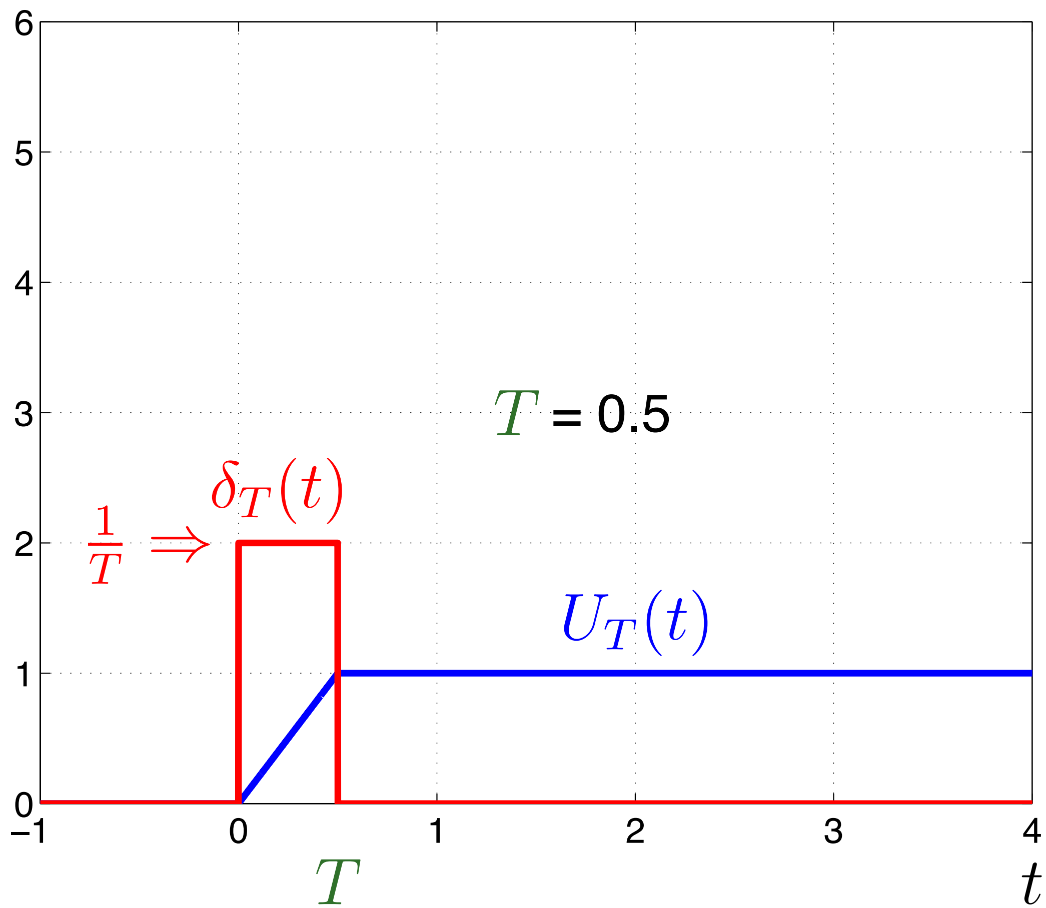
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt=1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



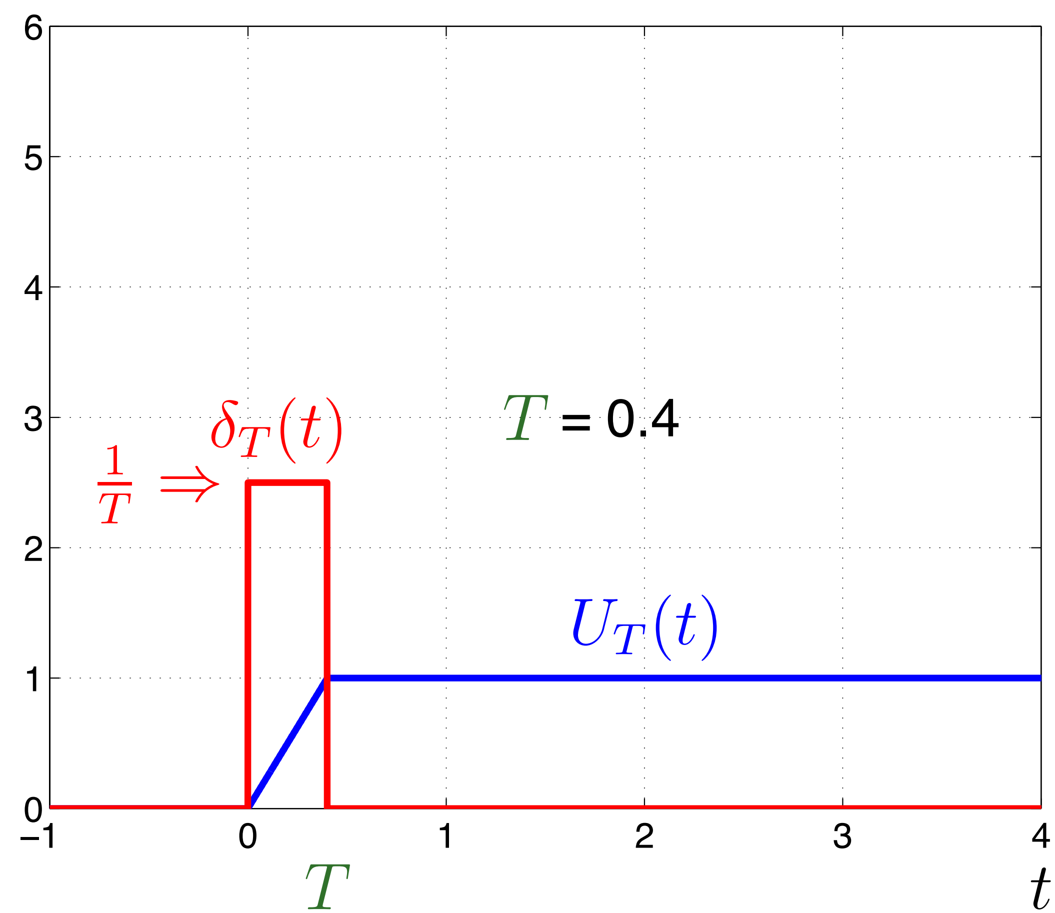
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



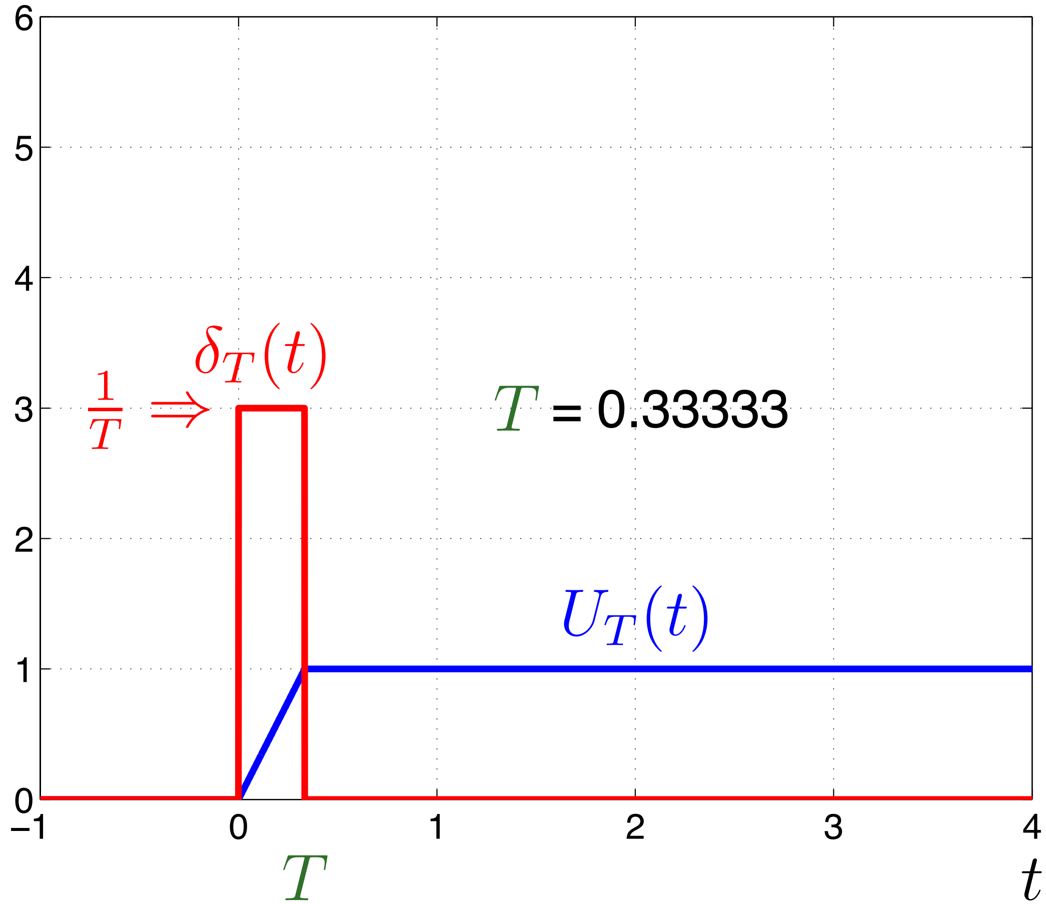
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt=1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



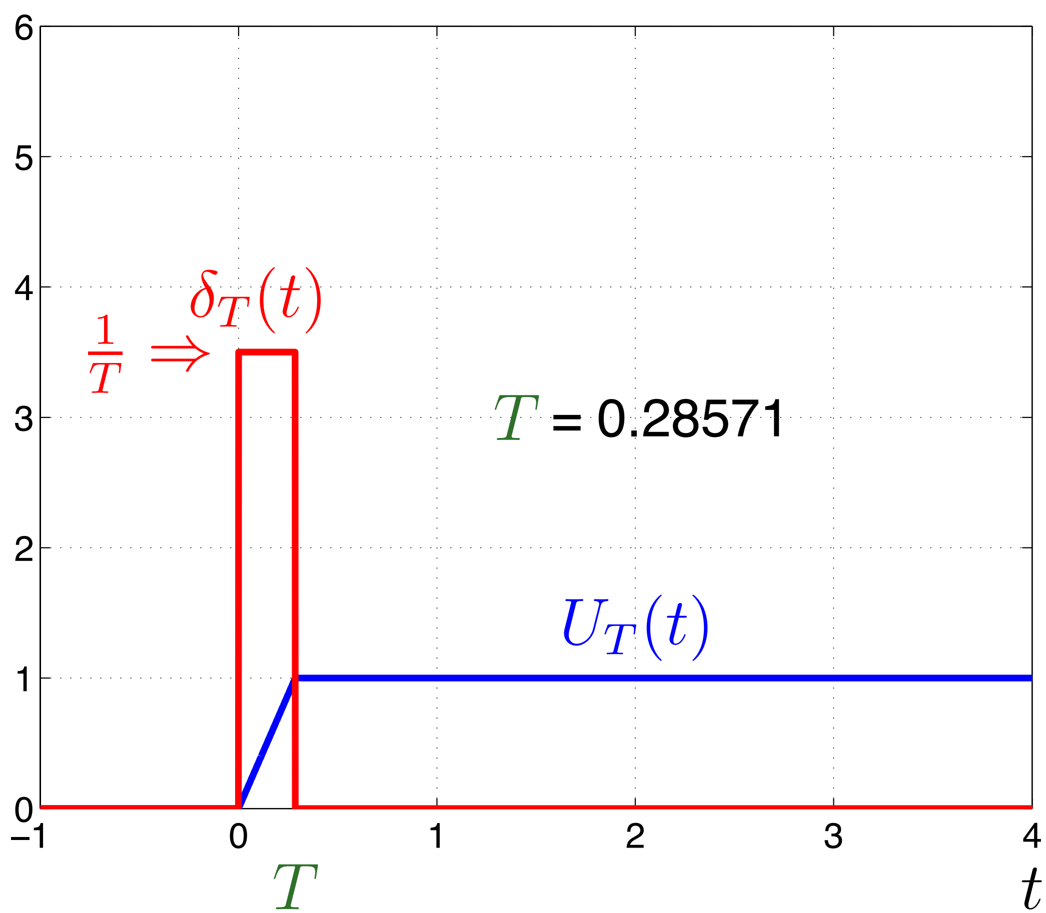
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \leq t \leq T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt=1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



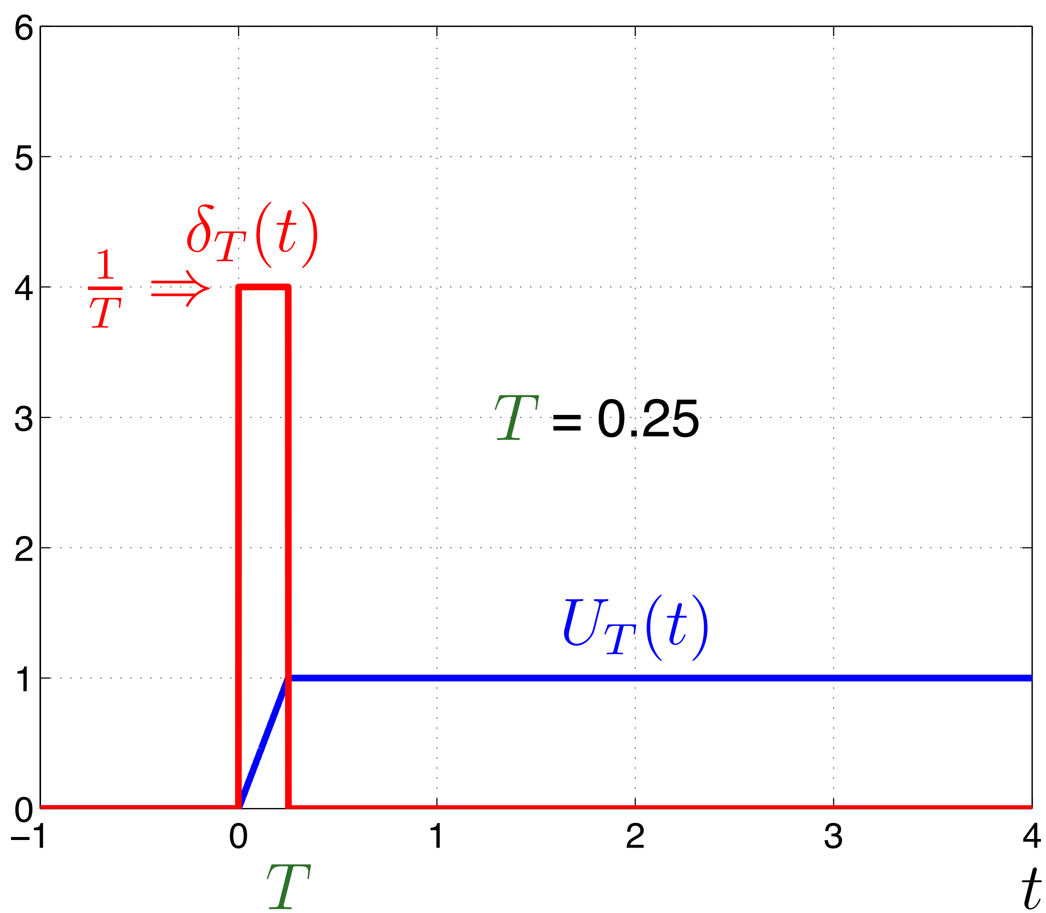
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



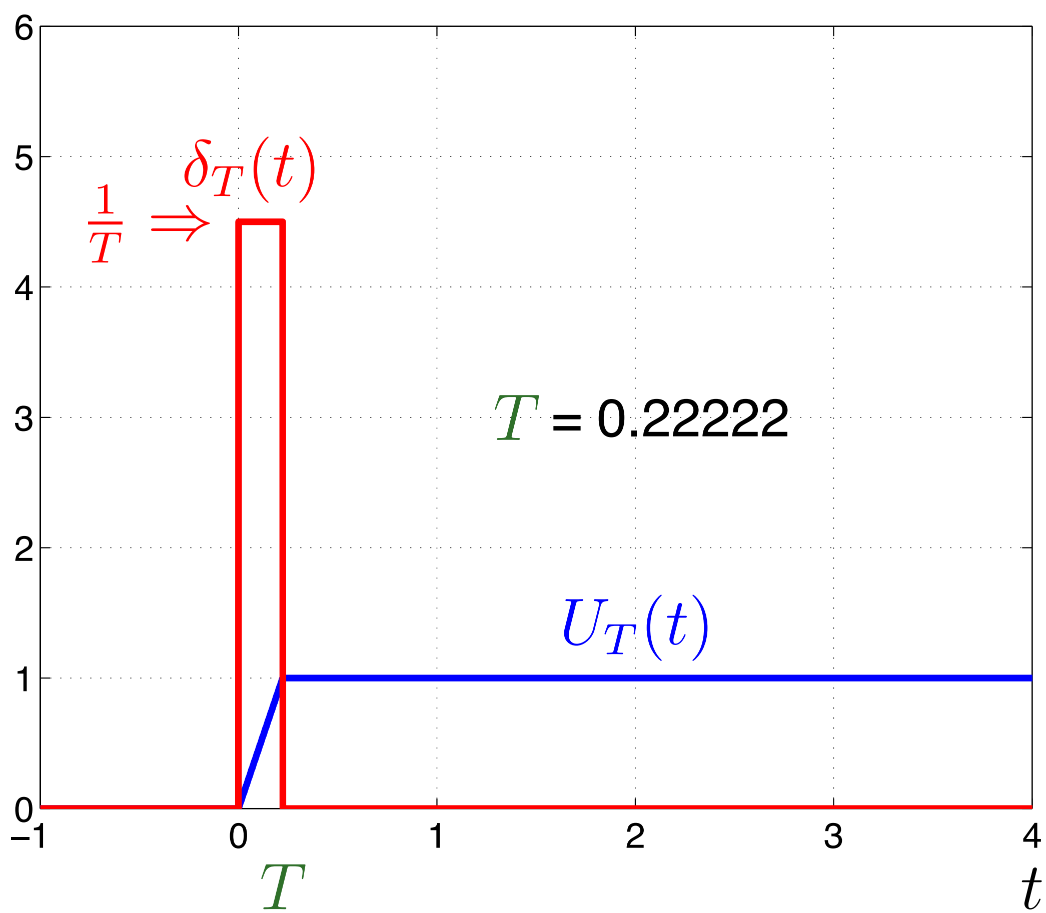
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



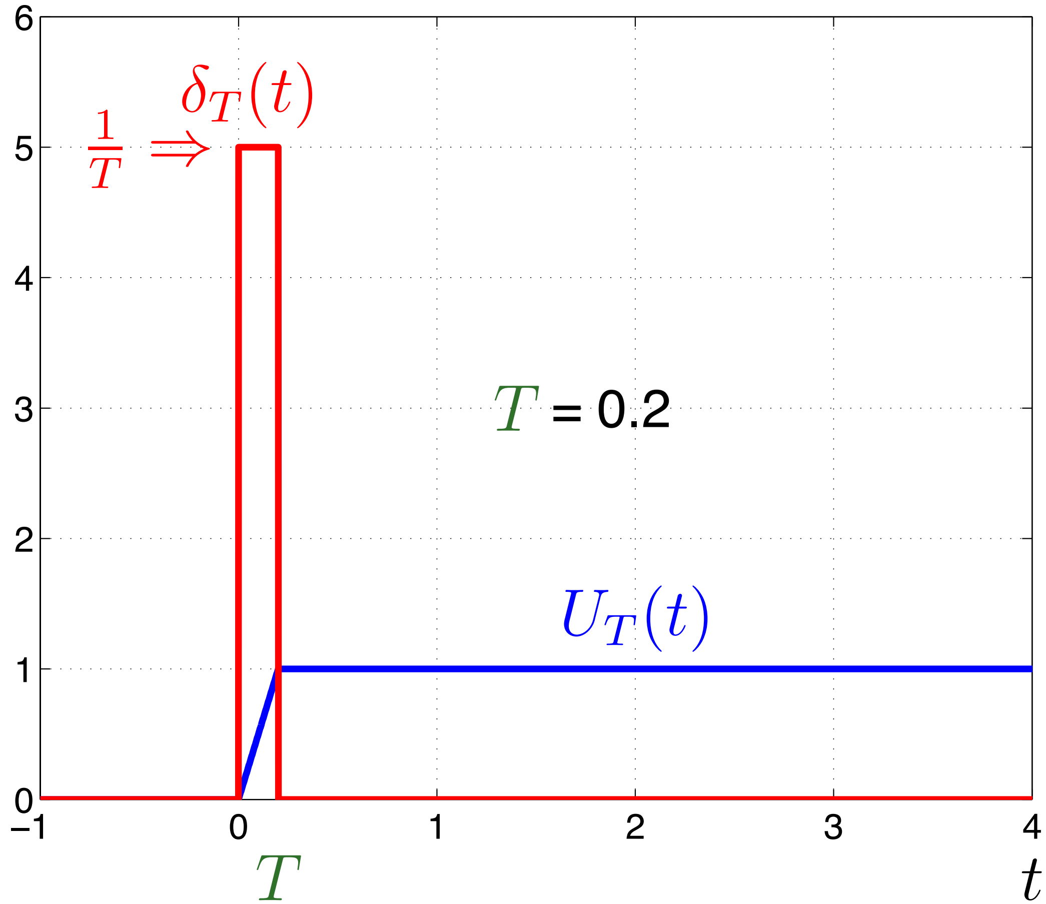
Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \le t \le T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt = 1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \le t \le T \\ 0, & T < t \end{cases}$$



Impulso X Degrau Unitário (Tempo contínuo)

$$U_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T, & 0 \leq t \leq T, \\ 1, & T < t \end{cases} \qquad \underbrace{U'_T(t) = \delta_T(t)}_{\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)dt=1} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & T < t \end{cases}$$

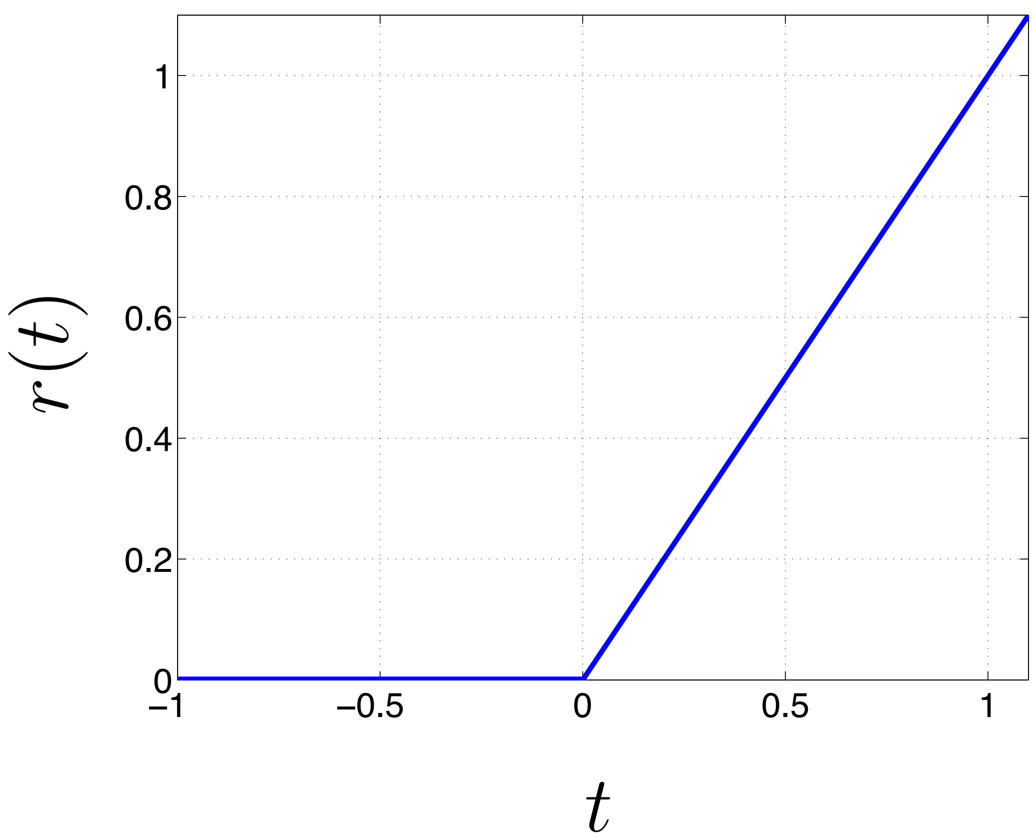
- $u(t) = \lim_{T \to 0} U_T(t)$
- $\delta(t) = \lim_{T \to 0} \delta_T(t)$
- $\dfrac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

Impulso Unitário Contínuo - Comentários

- $\delta(t)x(t) = \delta(t)x(0)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$
- $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$

Rampa Unitária Contínua

$$r(t) \equiv \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$



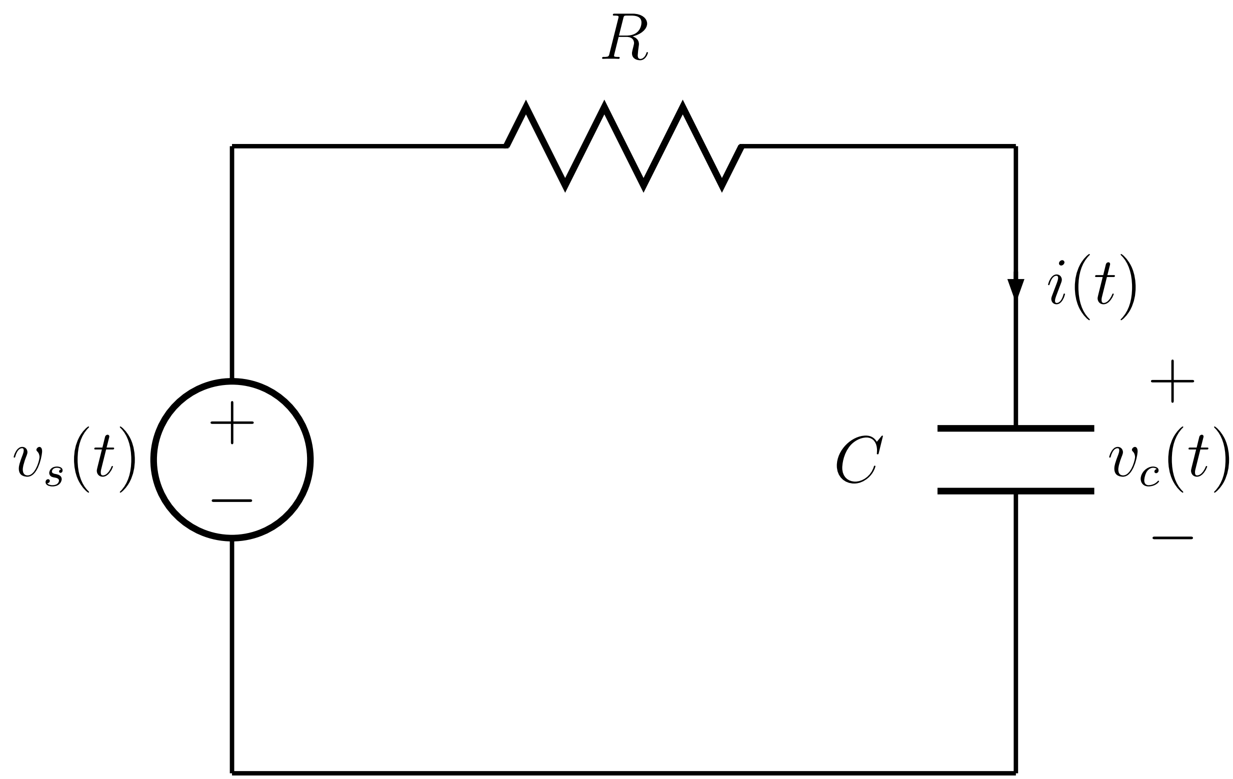
Relações Básicas

- $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$
  - $\dfrac{du(t)}{dt} = \delta(t)$
- $r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$
  - $\dfrac{dr(t)}{dt} = u(t)$

Fundamentos de Sistemas

- Um sistema é um processo físico que relaciona o sinal de entrada (ou excitação) com um sinal de saída (ou resposta).
- Propriedades
  - Invertibilidade
  - Memória
  - Causalidade
  - Linearidade
  - Invariância no Tempo
  - Estabilidade

Sistema: Circuito RC em série



- $v_s(t)$: entrada
- $v_c(t)$: saída

- $i(t) = \dfrac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$
- $i(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt}$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

Sistema

- Um sistema é representado por um modelo matemático de um processo físico, o qual pode ser visto como uma transformação (ou mapeamento) da entrada na saída:

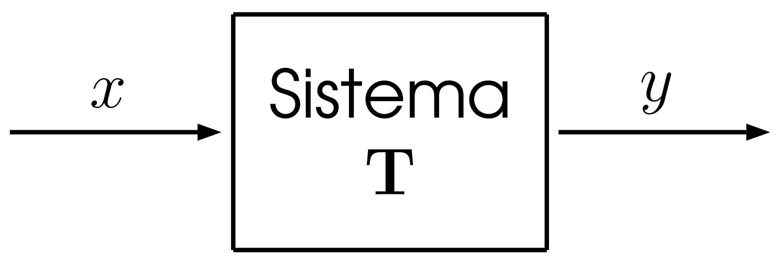
$$y = \mathbf{T}x$$

  - $\mathbf{T}$ é o operador que representa alguma regra
  - x: entrada
  - y: saída
    - $x|y$ representa tanto $x(t)|y(t)$ quanto $x[n]|y[n]$

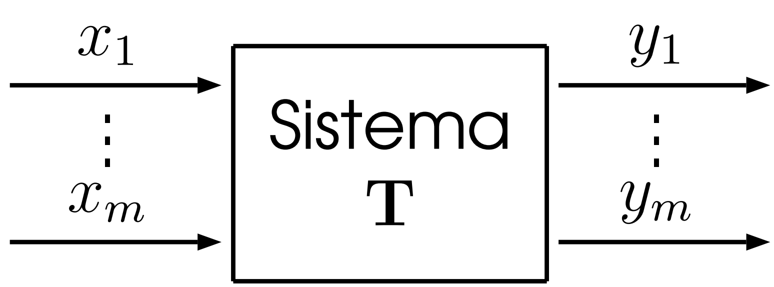
Sistema:

$$y = \mathbf{T}x$$

- Sistema com uma entrada e uma saída (SISO):

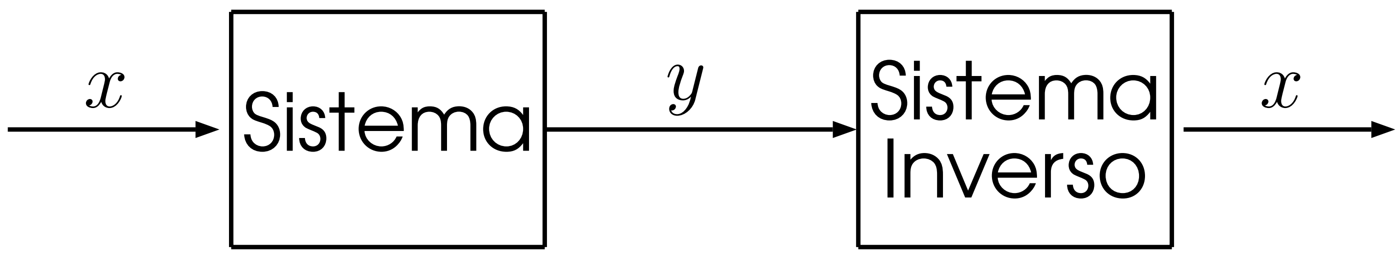


- Sistema com múltiplas entradas e saídas (MIMO):



Invertibilidade

Um sistema é invertível se entradas distintas causam saídas distintas.



Exemplos

Determine se os seguintes sistemas possuem o seu sistema inverso.

- $y[n] = x[n]^2$
- $y(t) = x(t-2)$
- $y[n] = x[n+3]$
- $y(t) = \mathrm{sen}(2\pi x(t))$
- $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$
- $y[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

Solução: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

- Considere $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos escrever

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = X(t) - X(-\infty)$$

- Aplicando a derivada nos dois lados e levando em conta o TFC, temos

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{d(X(t) - X(-\infty))}{dt} \\ &= x(t) \end{aligned}$$

logo o sistema é invertível.

Solução: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

- Considere o sistema

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- A prova será dada usando um contra-exemplo:
  - Para $x(t) = z(t)$, temos:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dz(t)}{dt}$$

  - Para $x(t) = z(t) + C$, temos:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(z(t) + C)}{dt} = \frac{dz(t)}{dt}$$

  - O valor da constante C não modifica o resultado, portanto o sistema é não-invertível.

Sistema Com Memória e Sem Memória

- Um sistema é dito sem memória se a sua saída y em qualquer tempo é dependente somente da entrada x naquele instante de tempo.
  - Também é chamado de *sistema instantâneo*
  - *Resistores não possuem memória:*

$$y(t) = Rx(t)$$

Sistema Com Memória e Sem Memória

- Um sistema com memória é todo sistema que não é sem memória.
  - A saída atual de um sistema com memória pode depender apenas das entradas e saídas futuras
  - Capacitores possuem memória:

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Exemplos

Determine se os seguintes sistemas são com ou sem memória:

- $y[n] = x[n]^2$
- $y(t) = x(t-2)$
- $y[n] = x[n+3]$
- $y(t) = \mathrm{sen}(2\pi x(t))$
- $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- $y[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

Causalidade

Um sistema é dito causal se sua saída em qualquer tempo depende somente dos valores entrada/saída naquele tempo e no passado.

- Sistemas causais também podem ser chamados de não-antecipativos.
- Todos os circuitos analógicos são causais.
- Sistemas não causais não são realizáveis em tempo real.

Exemplos

Determine se os seguintes sistemas são causais:

- $y[n] = x[n]^2$
- $y(t) = x(t-2)$
- $y[n] = x[n+3]$
- $y(t) = \text{sen}(2\pi x(t))$
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \int_{t}^{\infty} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
- $y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$

Linearidade

$$y = \mathbf{T}x$$

- Se o operador $\mathbf{T}$ é um operador linear, então um sistema representado por um operador linear $\mathbf{T}$ é chamando sistema linear;
- O operador $\mathbf{T}$ é linear se as seguintes condições são satisfeitas:
  1. Aditividade:
     Sendo $\mathbf{T}x_1 = y_1$ e $\mathbf{T}x_2 = y_2$, então

     $$\mathbf{T}\{x_1 + x_2\} = y_1 + y_2, \quad \forall\ x_1 \quad e \quad x_2$$

  2. Homogeneidade (Escalonamento):

     $$\mathbf{T}\{\alpha x\} = \alpha y, \quad \forall\ x \quad e \quad \alpha\ (\mathbb{R})$$

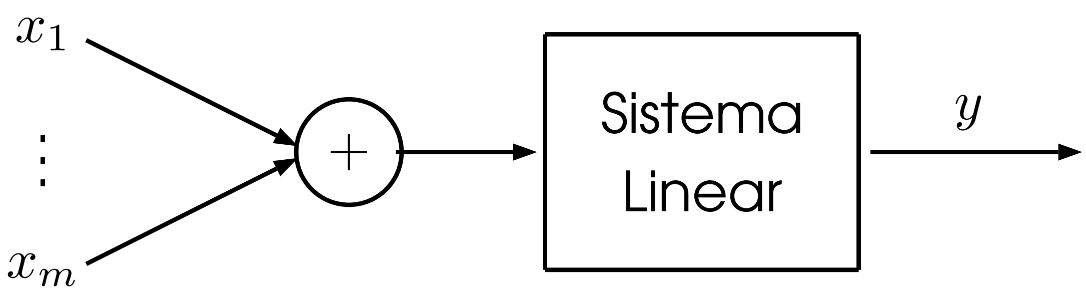
As condições de Aditividade e de Homogeneidade podem ser combinadas da seguinte forma:

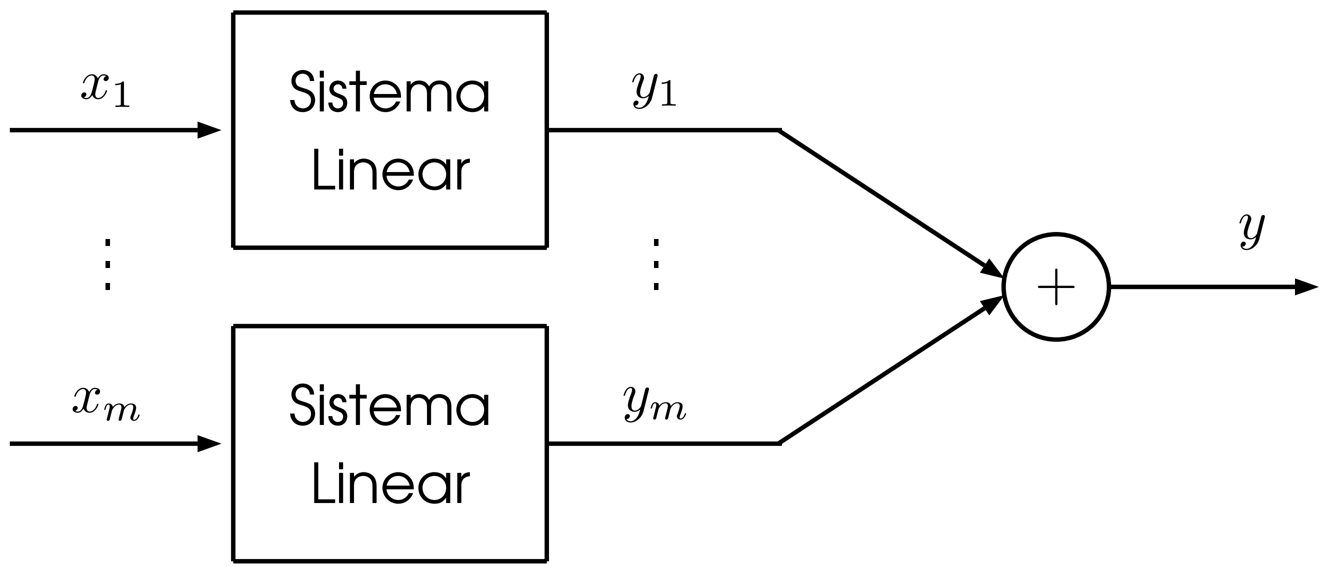
$$\mathbf{T}\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

A relação acima é conhecida como propriedade da superposição

- A superposição só pode ser aplicada a sistemas lineares.
- Um sistema não-linear não satisfaz as condições acima.

Superposição: sistemas lineares





Linearidade

- Aditividade: $x_1 + \ldots + x_m \rightarrow y_1 + \ldots + y_m$
- Homogeneidade: $\alpha x \rightarrow \alpha y$
- O princípio da Superposição se aplica
- Se a entrada é um somatório de diferentes entradas, a saída é o mesmo somatório das saídas resultantes.

Exemplos

Determine se os seguintes sistemas são lineares:

- $y[n] = x[n]^2$
- $y(t) = x(2t)$
- $y[n] = x[-n]$
- $y[n] = nx[n+3]$
- $y(t) = \mathrm{sen}(2\pi x(t))$
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \int_{t}^{\infty} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$
- $y[n] = \dfrac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$

Solução: $y[n] = x[n]^2$

- Usando o princípio da superposição, temos:

$$y_1[n] = x_1[n]^2$$

e

$$y_2[n] = x_2[n]^2$$

- $y[n] = y_1[n] + y_2[n] = x_1[n]^2 + x_2[n]^2$
- Considerando a entrada como sendo $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$, temos

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n])^2 = \underbrace{x_1[n]^2 + x_2[n]^2 + 2x_1[n]x_2[n]}_{\neq y_1[n]+y_2[n]}$$

- Logo o sistema é não-linear

Solução: $y(t) = \text{sen}(2\pi x(t))$

- Usando o princípio da superposição, temos:

$$y_1(t) = \text{sen}(2\pi x_1(t))$$

e

$$y_2(t) = \text{sen}(2\pi x_2(t))$$

- $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \text{sen}(2\pi x_1(t)) + \text{sen}(2\pi x_2(t))$
- Considerando a entrada como sendo $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{sen}(2\pi(x_1(t) + x_2(t)) \\ &= \text{sen}(2\pi x_1(t)) \cos(2\pi x_2(t)) + \text{sen}(2\pi x_2(t)) \cos(2\pi x_1(t)) \\ &\neq y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

- Logo o sistema é não-linear

Solução: $y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$

$$y_1[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x_1[n+k] \text{ e } y_2[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x_2[n+k]$$

- Considerando $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5}(x_1[n+k] + x_2[n+k]) \\ &= \frac{1}{11}\left(\sum_{k=-5}^{5} x_1[n+k] + \sum_{k=-5}^{5} x_2[n+k]\right) \\ &= \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x_1[n+k] + \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x_2[n+k] \end{aligned}$$

- Logo o sistema é linear (homogeneidade também se aplica)

Invariância no Tempo

Um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento temporal (retardo ou adiantamento) no sinal de entrada resulta em um deslocamento temporal idêntico do sinal de saída.

- Um sistema de tempo contínuo é invariante no tempo se

$$\mathbf{T}\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau), \ \forall\, \tau \in \mathbb{R}$$

- Um sistema de tempo discreto é invariante no tempo se

$$\mathbf{T}\{x[n-k]\} = y[n-k], \ \forall\, k \in \mathbb{I}$$

Exemplo: Invariância no Tempo

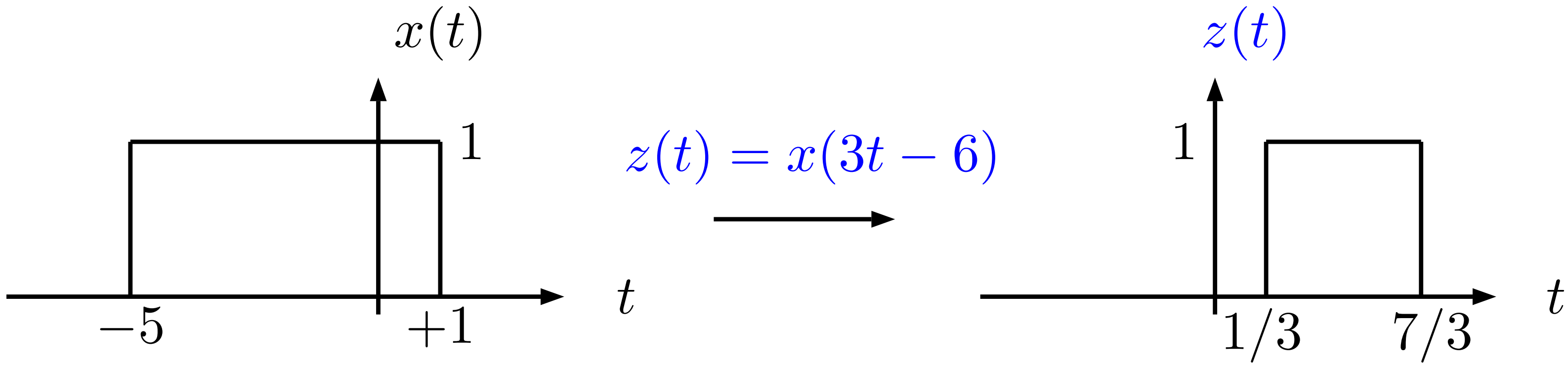
Determine se o seguinte sistema é invariante no tempo:

$$y(t) = x(3t)$$

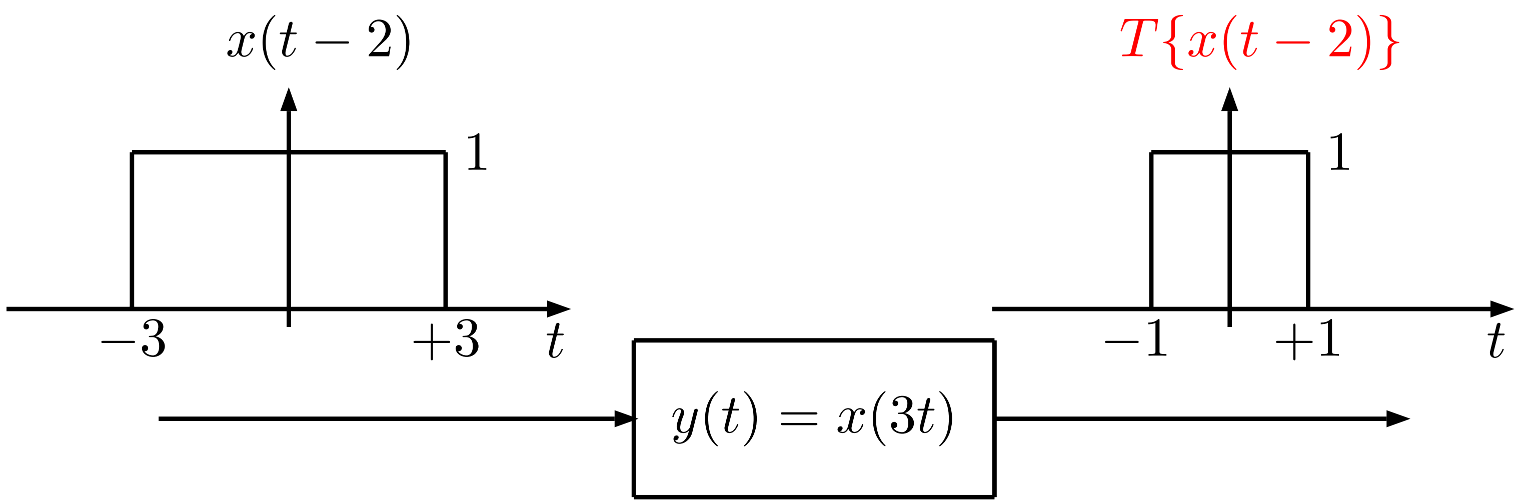
- Verificar se: $\mathbf{T}\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau)$.
- Para fazer o teste, assuma $\tau = 2$, então:
  - $y(t-2) = x(3(t-2)) = x(3t-6)$
  - $\mathbf{T}\{x(t-2)\} = x(3t-6)$?

Exemplo: Invariância no Tempo

- A saída atrasada $y(t-2) = x(3t-6)$ é



- Aplicando a entrada atrasada $x(t-2)$ no sistema, temos



- $y(t-2) = x(3t-6) \neq \mathbf{T}\{x(t-2)\}$.
  Portanto, o sistema não é invariante no tempo.

Invariância no Tempo

- Um teste para invariância temporal é:

$$y(t)|_{t-\tau} \;=\; y(t)|_{x(t-\tau)}$$

sendo:

  - $y(t)|_{t-\tau}$ saída do sistema $y(t)$ deslocada por $-\tau$.
  - $y(t)|_{x(t-\tau)}$ saída do sistema $y(t)$ resultante de uma entrada deslocada no tempo por $-\tau$.

- Exemplo:

$$y(t) = f(x(g(t)))$$

então

  - $y(t)|_{t-\tau} = f(x(g(t-\tau)))$
  - $y(t)|_{x(t-\tau)} = f(x(g(t)-\tau))$

Invariância no Tempo

- Um teste para invariância temporal é:

$$y(t)|_{t-\tau} \;=\; y(t)|_{x(t-\tau)}$$

  sendo:

  - $y(t)|_{t-\tau}$ saída do sistema $y(t)$ deslocada por $-\tau$.
  - $y(t)|_{x(t-\tau)}$ saída do sistema $y(t)$ resultante de uma entrada deslocada no tempo por $-\tau$.

- Um sistema linear e invariante no tempo é chamado de sistema linear e invariante no tempo (LTI).

Exemplos

Determine se os seguintes sistemas são invariantes no tempo:

- $y[n] = x[n]^2$
- $y(t) = x(2t)$
- $y[n] = x[-n]$
- $y[n] = nx[n+3]$
- $y(t) = \text{sen}(2\pi x(t))$
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \int_{t}^{\infty} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
- $y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$

Solução: $y[n] = x[n]^2$

- Usando o teste de invariância temporal, temos:
- $y[n]|_{n-n_0} = x[n-n_0]^2$
- $y[n]|_{x[n-n_0]} = x[n-n_0]^2$
- Portanto o sistema é invariante no tempo.

Solução: $y(t) = x(2t)$

- Usando o teste de invariância temporal, temos:
- $y(t)|_{t-t_0} = x(2(t-t_0))$
- $y(t)|_{x(t-t_0)} = x(2t-t_0)$
- Portanto o sistema é variante no tempo.

Solução: $y(t) = x(2t)$

Supondo

$$t_0 = 2 \text{ e } x(t) = \begin{cases} 1 & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

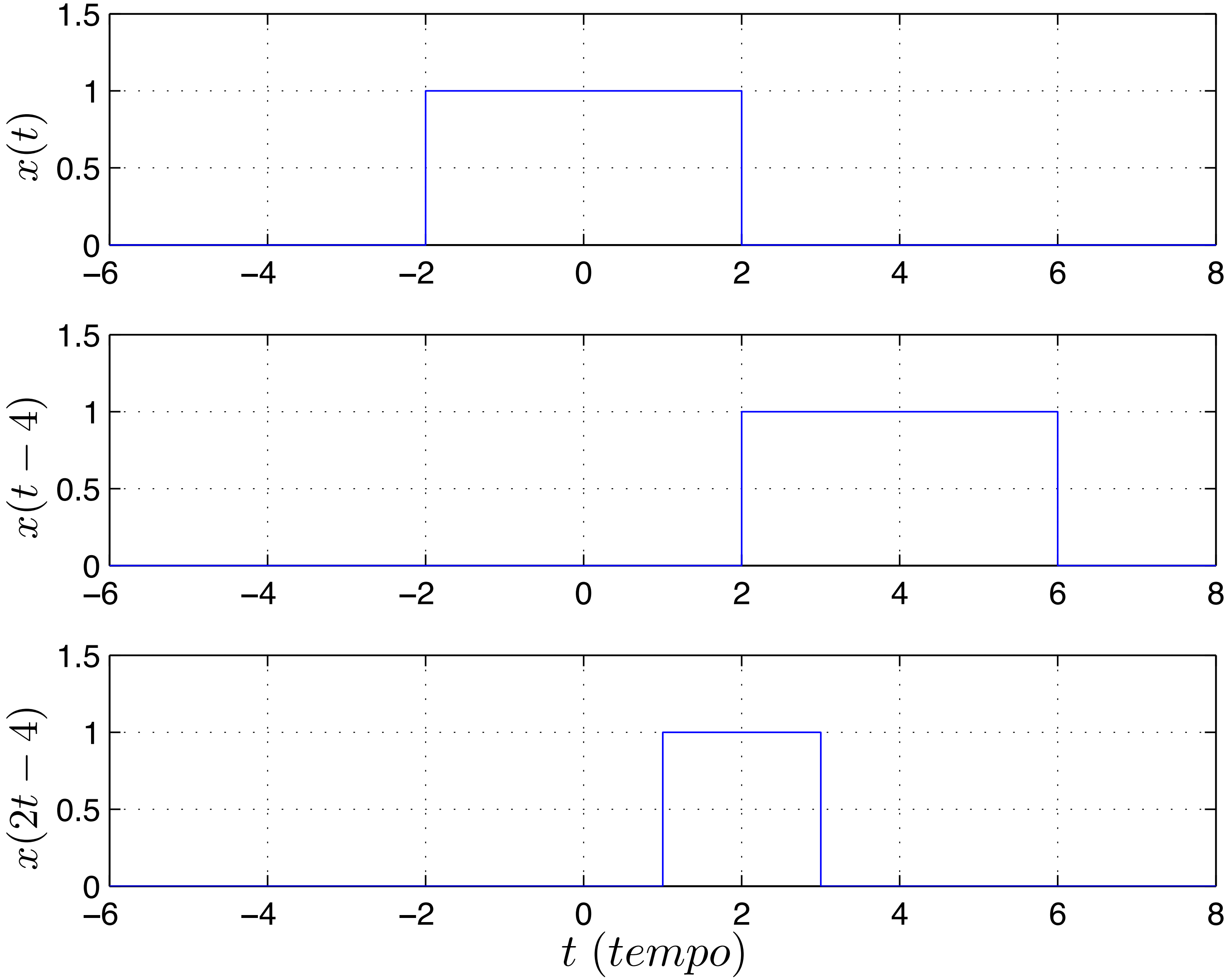
- $y(t)|_{t-t_0} = x(2(t-t_0)) = x(2t-4)$. Para $t=-2$ e $t=2$:

$$\begin{cases} 2t-4 = -2 \longrightarrow 2t = 2 \longrightarrow t = 1 \\ 2t-4 = 2 \longrightarrow 2t = 6 \longrightarrow t = 3 \end{cases}$$

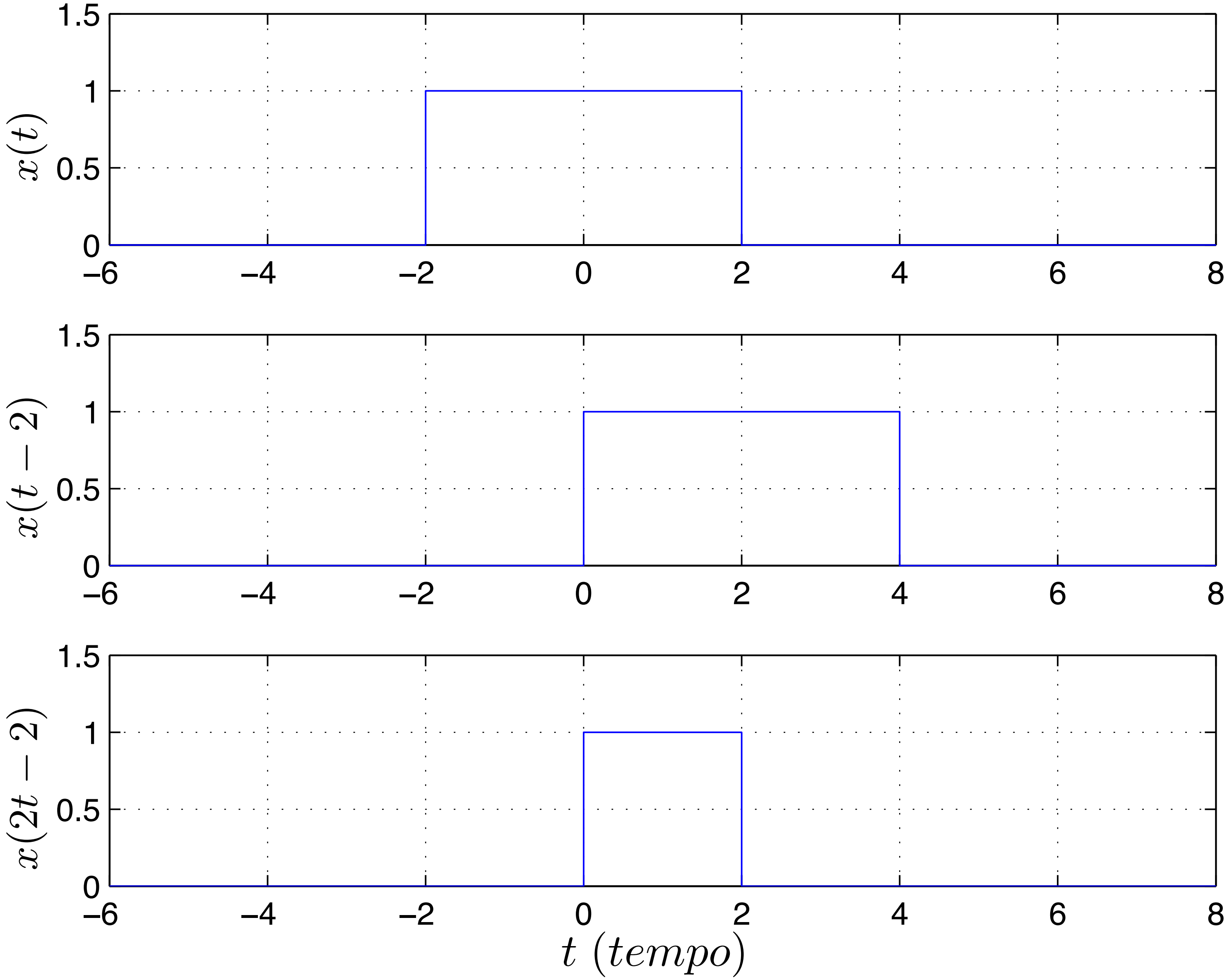
- $y(t)|_{x(t-t_0)} = x(2t-t_0) = x(2t-2)$. Para $t=-2$ e $t=2$:

$$\begin{cases} 2t-2 = -2 \longrightarrow 2t = 0 \longrightarrow t = 0 \\ 2t-2 = 2 \longrightarrow 2t = 4 \longrightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$y(t)\Big|_{t-2} = x(2t-4)$$



$y(t)\,\Big|_{x(t-2)} = x(2t-2)$



Mais um exemplo: $y(t) = x(t/3)$

- Usando o teste de invariância temporal, temos:
- $y(t)|_{t-t_0} = x((t-t_0)/3)$
- $y(t)|_{x(t-t_0)} = x(\frac{t}{3} - t_0)$
- Portanto o sistema é variante no tempo.

Mais um exemplo: $y(t) = x(2 - t)$

- Usando o teste de invariância temporal, temos:
- $y(t)|_{t-t_0} = x(2 - t + t_0)$
- $y(t)|_{x(t-t_0)} = x(2 - t - t_0)$
- Portanto o sistema é variante no tempo.

Solução: $y[n] = x[-n]$

- Usando o teste de invariância temporal, temos:
- $y[n]|_{n-n_0} = x[-n+n_0]$
- $y[n]|_{x[n-n_0]} = x[-n-n_0]$
- Portanto o sistema é variante no tempo.

Solução: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

- Usando o teste de invariância temporal, temos:
- $y(t)|_{t-t_0} = \displaystyle\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$
- $y(t)|_{x(t-t_0)} = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau - t_0)d\tau$
- Fazendo uma mudança de variável na equação, $\tau' = \tau - t_0 \Rightarrow d\tau' = d\tau$ e $\tau \to -\infty \Rightarrow \tau' \to -\infty$ e $\tau \to t$ $\Rightarrow \tau' \to t - t_0$, temos:

$$y(t)|_{x(t-t_0)} = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau')d\tau'$$

- Portanto o sistema é invariante no tempo.

Estabilidade

Um sistema é chamado estável com entrada-limitada/saída-limitada (BIBO estável) se, para qualquer entrada limitada x:

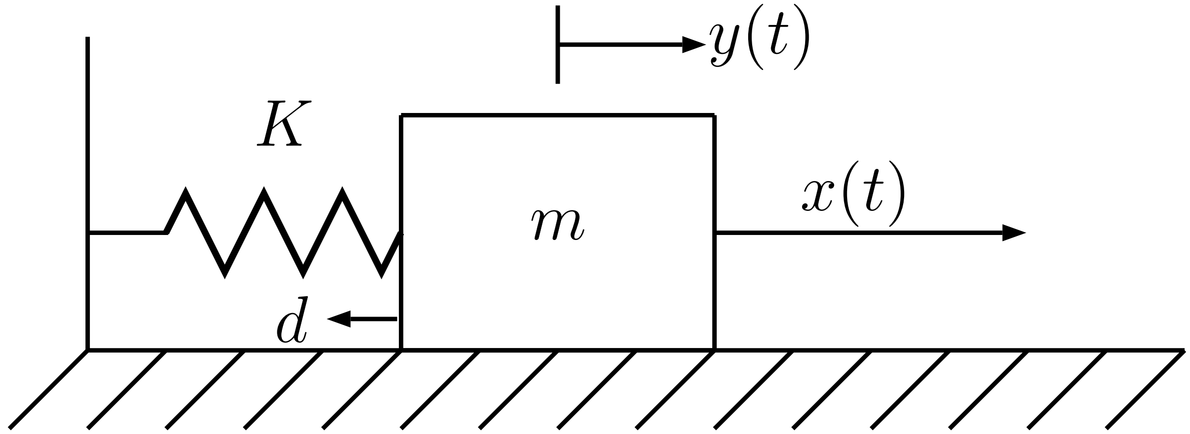
$$|x| \leq k_x$$

a saída y correspondente é também limitada:

$$|y| \leq k_y$$

sendo que, $k_x < \infty$ e $k_y < \infty$ e $k_x, k_y \ \in \mathbb{R}$

Exemplo: Sistema massa e mola



Balanço de forças:

$$m\ddot{y}(t) = x(t) - ky(t) - d\dot{y}(t)$$

$$m\ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + ky(t) = x(t)$$

Exemplos

Determine se os seguintes sistemas são BIBO estáveis:

- $y[n] = x[n]^2$
- $y(t) = x(2t)$
- $y[n] = x[-n]$
- $y[n] = nx[n+3]$
- $y(t) = \text{sen}(2\pi x(t))$
- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \int_{t}^{\infty} x(\tau)d\tau$
- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
- $y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$

Solução: $y[n] = x[n]^2$

- Usando a definição
  - Assuma a entrada finita: $|x[n]| < \infty$ ou $|x[n]| \leq M$, sendo M um número real finito.

  Logo:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n]^2 \\
|y[n]| &= |x[n]^2| \\
|y[n]| &= |x[n]|^2 \\
|y[n]| &\leq M^2 \quad \text{sendo } M^2 \text{ um número real finito, logo}
\end{aligned}
$$

- $|y[n]| \leq M^2 \Rightarrow$ sistema estável.

Solução: $y(t) = \mathrm{sen}(2\pi x(t))$

- Usando a definição
  - Assuma a entrada finita: $|x(t)| < \infty$ ou $|x(t)| \leq M$, sendo M é um número real finito.
- Sabemos ainda que a função seno é limitada, ou seja, $|\mathrm{sen}(\cdot)| \leq 1$.
  Logo:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{sen}(2\pi x(t)) \\
|y(t)| &= |\mathrm{sen}(2\pi x(t))| \\
|y(t)| &\leq 1
\end{aligned}
$$

- $|y(t)| \leq 1 \Rightarrow$ sistema estável.

Solução: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

- Usando a definição, temos que $|x(t)| < \infty$ ou $|x(t)| \leq M$, onde M é um número real finito.
- Logo:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \\
|y(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right| \text{ Aplicando o módulo} \\
|y(t)| &\leq \int_{-\infty}^{t} |x(\tau)|d\tau \\
|y(t)| &\leq \int_{-\infty}^{t} M d\tau \\
|y(t)| &\leq M\tau|_{-\infty}^{t} = M(t+\infty)
\end{aligned}
$$

- Logo o sistema é instável.

Solução: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

- Usando a definição, temos que $|x(t)| < \infty$ ou $|x(t)| \leq M$, onde M é um número real finito.
- A prova será dada usando um contra-exemplo.
- Considere $x(t)$ como sendo um degrau unitário. $|x(t)|$ é limitado, ou seja, $|x(t)| \leq 1$.
- A derivada de $x(t)$ é o impulso unitário que, como sabemos, tem amplitude infinita. Logo $y(t)$ é ilimitado e o sistema instável.

Solução: $y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k] \\
|y[n]| &= \left|\frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} x[n+k]\right| \quad \text{Aplicando o módulo} \\
|y[n]| &\leq \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} |x[n+k]| \\
|y[n]| &\leq \frac{1}{11}\sum_{k=-5}^{5} M \\
|y[n]| &\leq M
\end{aligned}
$$

- $|y[n]|$ é limitado, logo o sistema é estável.

Exercício 1 - Propriedades

$$y(t) = 3x(3t+3)$$

Determine se o sistema descrito pela equação acima é:

- com memória,
- causal,
- invertível,
- linear
- invariante no tempo,
- estável

Exercício 1(solução): $y(t) = 3x(3t+3)$

- Memória - Para $t = 0$, temos

$$y(0) = 3x(3)$$

ou seja, tem memória.

- Causal - O sistema é antecipativo (depende de entradas futuras), portanto ele é não causal
- Invertibilidade - Fazendo $\tau = 3t + 3$, temos

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\tau}{3} - 3\right) &= 3x(\tau) \\ \frac{1}{3}y\left(\frac{\tau}{3} - 3\right) &= x(\tau) \end{aligned}$$

ou seja, $x(t) = \frac{1}{3}y\left(\frac{t}{3} - 3\right)$ e gera valores únicos, logo o sistema é invertível

Exercício 1(solução): $y(t) = 3x(3t+3)$

- Linearidade - Temos

$$\begin{aligned} ax_1(t) &\rightarrow y_1(t) = 3ax_1(3t+3) \\ bx_2(t) &\rightarrow y_2(t) = 3bx_2(3t+3) \\ ax_1(t) + bx_2(t) &\rightarrow y(t) = \underbrace{3(ax_1(3t+3) + bx_2(3t+3))}_{=y_1(t)+y_2(t)} \end{aligned}$$

  logo o sistema é linear.

- Invariância no tempo - Temos

$$3x(3(t-t_0)+3) \neq 3x(3t-t_0+3)$$

  logo o sistema é variante no tempo.

- Estabilidade - Supondo $x(t) \leq M$, temos $y(t) \leq 3M$, logo o sistema é estável.

Exercício 2 - Propriedades

$$y(t) = \int_{t}^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau$$

Determine se o sistema descrito pela equação acima é:

- com memória,
- causal
- invertível,
- linear
- invariante no tempo,
- estável

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau-\alpha)d\tau$

- Memória - Para $t = 0$, temos

$$y(0) = \int_0^1 x(\tau - \alpha)d\tau = X(1-\alpha) - X(-\alpha)$$

ou seja, tem memória.

- Causalidade - Temos que

$$y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha)d\tau = X(t+1-\alpha) - X(t-\alpha)$$

para que seja causal, é preciso que:

$$\begin{aligned} t+1-\alpha &\leq t \\ \alpha &\geq 1 \end{aligned}$$

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha)d\tau$

- Invertibilidade - Fazendo $\nu = \tau - \alpha$

$$y(t) = \int_{t-\alpha}^{t-\alpha+1} x(\nu)d\nu$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$y(t) = X(t-\alpha+1) - X(t-\alpha)$$

logo,

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t-\alpha+1) - x(t-\alpha)$$

que é invertível.

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau$

- Linearidade - Temos

$$
\begin{aligned}
ax_1(t) \quad &\rightarrow \quad y_1(t) = \int_t^{t+1} ax_1(\tau - \alpha) d\tau \\
bx_2(t) \quad &\rightarrow \quad y_2(t) = \int_t^{t+1} bx_2(\tau - \alpha) d\tau \\
ax_1(t) + bx_2(t) \quad &\rightarrow \quad y(t) = \int_t^{t+1} (ax_1(\tau - \alpha) + bx_2(\tau - \alpha)) d\tau \\
& \qquad\quad y(t) = \int_t^{t+1} ax_1(\tau - \alpha) d\tau \\
& \qquad\quad + \int_t^{t+1} bx_2(\tau - \alpha)) d\tau \\
& \qquad\quad y(t) = y_1(t) + y_2(t)
\end{aligned}
$$

logo o sistema é linear.

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau$

- Invariância - Fazendo $\nu = \tau - \alpha$

$$y(t) = \int_{t-\alpha}^{t-\alpha+1} x(\nu) d\nu$$

temos:

$$y(t)|_{t-t_0} = \int_{t-t_0-\alpha}^{t-t_0-\alpha+1} x(\nu) d\nu$$

$$y(t)|_{x(t-t_0)} = \int_{t-\alpha}^{t-\alpha+1} x(\nu - t_0) d\nu$$

Fazendo $\eta = \nu - t_0$, temos:

$$y(t)|_{x(t-t_0)} = \int_{t-t_0-\alpha}^{t-t_0-\alpha+1} x(\eta) d\eta$$

portanto, o sistema é invariante no tempo

Exercício 2 (solução): $y(t) = \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau$

- Estabilidade - Supondo $x(t) \leq M$, temos:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) d\tau \\
|y(t)| &= \left| \int_t^{t+1} x(\tau - \alpha) \right| d\tau \\
&\leq \int_t^{t+1} |x(\tau - \alpha)| d\tau \\
&\leq \int_t^{t+1} M d\tau \\
&\leq M\tau|_t^{t+1} = M
\end{aligned}
$$

portanto, o sistema é estável.