

# Projeto de Compensadores no Domínio da Frequência

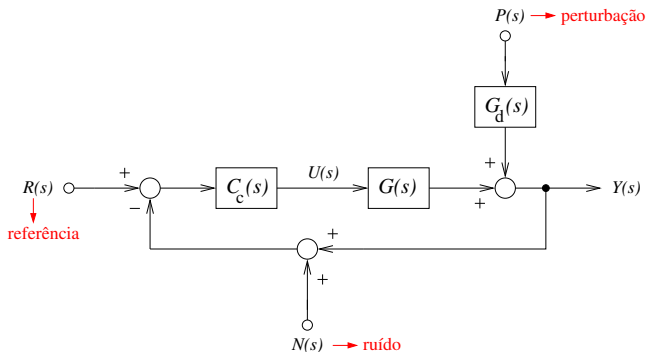
Leonardo Tôrres

Dep. de Engenharia Eletrônica – UFMG

Maio de 2014

# Loop Shaping I

No projeto de compensadores no domínio da frequência, parte-se do pressuposto de que o sistema a ser controlado pode ser representado como abaixo:



# Loop Shaping II

Neste caso, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 Y(s) = & \underbrace{\frac{C_c(s)G(s)}{1 + C_c(s)G(s)}}_{T(s)} R(s) \\
 & + \underbrace{\frac{1}{1 + C_c(s)G(s)}}_{S(s)} G_d(s)P(s) \\
 & - \underbrace{\frac{C_c(s)G(s)}{1 + C_c(s)G(s)}}_{T(s)} N(s),
 \end{aligned}$$

sendo que, por definição, as funções **Sensibilidade**  $S(s)$  e **Sensibilidade Complementar**  $T(s)$  são tais que  $S(s) + T(s) = 1$ .

# Loop-Shaping: Variável Erro

Definindo a variável erro como (note que ela não pode ser representada diretamente no diagrama anterior):

$$E(s) = R(s) - Y(s),$$

tem-se que:

$$E(s) = S(s) R(s) + S(s) G_d(s) P(s) + T(s) N(s).$$

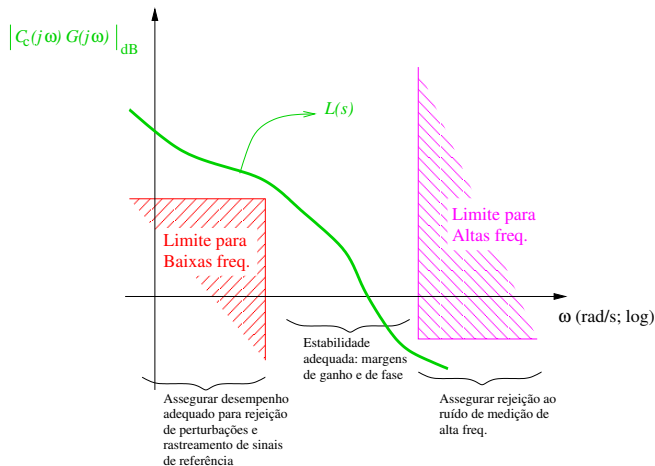
# Loop-Shaping: Conclusões I

A partir dessa análise, conclui-se que um projeto adequado do compensador  $C_c(s)$  deve ser tal que:

- 1 Estabilidade:** O sistema é estável em malha fechada, com margens adequadas de ganho e de fase  $\Rightarrow$  Análise do Diagrama de Bode (ou de Nyquist, ou de Nichols) associado a  $L(s) = C_c(s)G(s)$ .
- 2 Desempenho:** A Função Sensibilidade  $S(s)$  deve apresentar valores pequenos nos intervalos de frequência em que os sinais de referência  $R(s)$  e de perturbação  $P(s)$  têm amplitude significativa (baixas frequências):  $s = j\omega, \omega \rightarrow 0 \Rightarrow L(s) = C_c(s)G(s), |L(s)| \gg 1$ .
- 3 Desempenho:** A Função Sensibilidade Complementar  $T(s)$  deve apresentar valores pequenos nos intervalos de frequência em que o sinal de ruído  $N(s)$  tem amplitude significativa (altas frequências):  $s = j\omega, \omega \rightarrow \infty \Rightarrow L(s) = C_c(s)G(s), |L(s)| \ll 1$ .

# Loop-Shaping: Conclusões II

Os requisitos anteriores podem ser resumidos na figura abaixo:



# Loop-Shaping: Conclusões III

- Ou seja, o projeto do compensador pode ser visto como um projeto de  
Conformação da Função de Transferência de Laço Aberto  $L(s)$ ,  
que recebe o nome, em Inglês, de *Loop Shaping*.
- Para realizar essa modificação no formato das curvas de magnitude e de fase de  $L(s)$ , de forma a atingir os objetivos de estabilidade e de desempenho desejados, pode-se lançar mão de uma série de “curvas padrão” associadas aos chamados *compensadores em avanço* (Lead), *compensadores em atraso* (Lag) e *compensadores em atraso-avanço* (Lag-Lead).

# Compensadores em Atraso (*Lag*) I

## Definition (Compensador em Atraso)

$$C_c(s) = k_p \frac{\left(\frac{s}{\omega_z} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_p} + 1\right)}, \quad \omega_p < \omega_z.$$

### Vantagem:

- Aumento do ganho nas baixas frequências (o que é condizente com o objetivo de *loop shaping*).

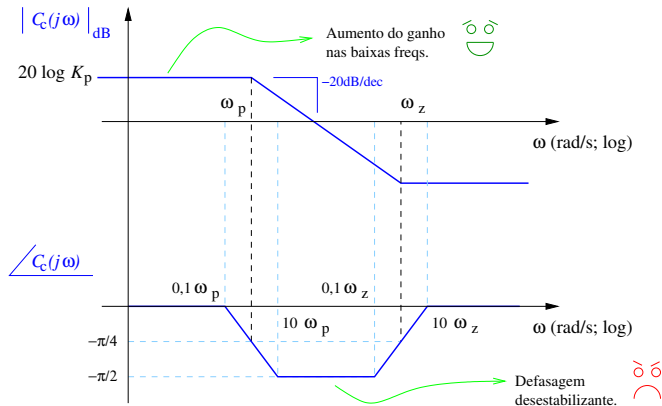
### Desvantagem:

- Diminuição da margem de fase  $\phi_m$  (lembrando que para sistemas padrão de 2ª ordem  $\zeta \approx \phi_m/100$ , com  $\phi_m$  em graus, pode ocorrer uma depreciação do desempenho em regime transitório).



# Compensadores em Atraso (*Lag*) II

Resposta em frequência de um compensador em atraso, considerando a aproximação por assíntotas:



# Compensadores em Atraso (*Lag*) III

Em relação à implementação de controladores digitais, com o objetivo de emular o comportamento de um compensador em atraso, é preciso ficar atento aos seguintes pontos:

- 1 Em geral escolhe-se  $\omega_p < \omega_z \ll \omega_c$ , sendo  $\omega_c$  a frequência de cruzamento por zero de  $|G(j\omega)|_{dB}$  (ponto em que se determina a margem de fase do sistema com um controlador proporcional apenas  $K_p = 1$ ), pois assim diminui-se o efeito desestabilizante introduzido pelo compensador em atraso.
- 2 Como consequência da prática anterior, e considerando que  $\omega_c < \frac{\omega_s}{2}$ , tem-se que  $\omega_p < \omega_z \ll \frac{\omega_s}{2}$ . Isso produz zeros e polos, do controlador digital equivalente, muito próximos de  $z = 1$ , de modo que pode haver problemas numéricos de implementação.

# Compensadores em Atraso (*Lag*) IV

## ■ Exemplo:

$$G(s) = \frac{40}{(s+1)(s+20)},$$

Objetivo do projeto de controle: Garantir erro de rastreamento para sinais senoidais de referência com período  $T_{\text{ref}} = 60$  s menor do que 10% do valor da amplitude do sinal de referência, em regime permanente.

Solução:

$$E(s) = S(s)R(s) = \frac{1}{1+L(s)}R(s),$$

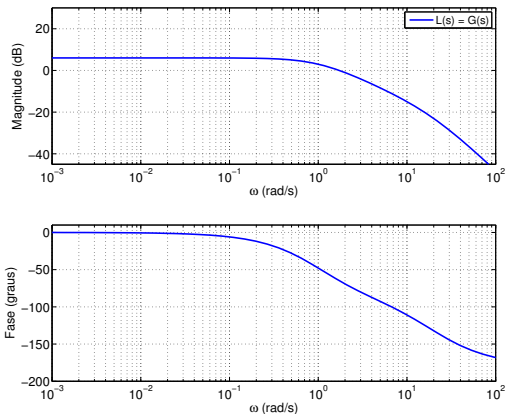
$$\therefore \frac{|E(j\omega)|}{|R(j\omega)|} = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} \approx \frac{1}{|L(j\omega)|}, \quad \text{assumindo que } |L(j\omega)| \gg 1.$$

Portanto, para  $\omega = \frac{2\pi}{60} = 0,1047$  rad/s,  $|L(j\omega)| > 1/0,1 = 10 = 20$  dB. Note que a frequência de cruzamento  $\omega_c = 1,72$  rad/s ( $|G(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0$ ), com  $\phi_m \approx 115$  graus. Um possível projeto é ter  $K_P > 10/2 = 5$ , com  $\omega_p = 0,1047$  rad/s e  $\omega_z = 10\omega_p = 1,047$  rad/s  $< \omega_c$ .

Escolhendo  $K_P = 10$ , tem-se:  $C_C(s) = 10 \frac{\frac{s}{0,1047} + 1}{\frac{s}{1,047} + 1}$ .

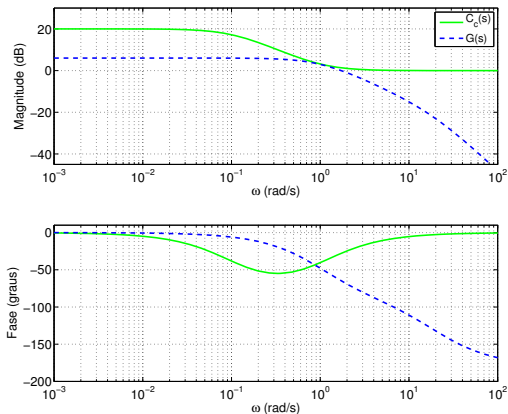
# Compensadores em Atraso (*Lag*) V

Diagrama de Bode de  $L(s) = G(s)$ , equivalente a se considerar um controlador apenas proporcional:



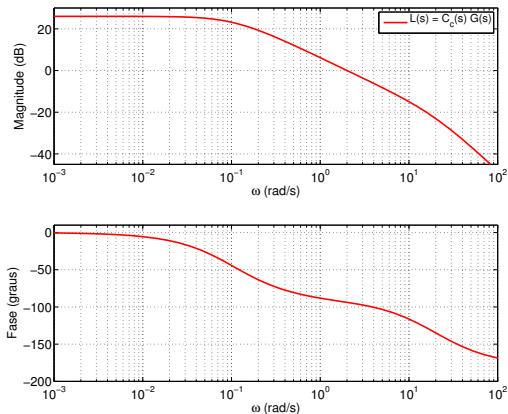
# Compensadores em Atraso (*Lag*) VI

Diagrama de Bode do compensador  $C_C(s)$ . Note que o pico da contribuição da defasagem negativa do compensador está relativamente distante de  $\omega_C$ :



# Compensadores em Atraso (*Lag*) VII

Diagrama de Bode de  $L(s) = C_c(s)G(s)$ . Pode-se notar que em torno de  $\omega = 0,1047$  rad/s, o ganho de laço aberto é maior do que 20 dB, e a margem de fase ainda é positiva:



# Compensadores em Atraso (*Lag*) VIII

Como a frequência de cruzamento foi deslocada para  $\omega_c \approx 2 \text{ rad/s}$ , pode-se imaginar o uso de um controlador digital equivalente  $C_d(z)$ , no lugar do controlador projetado  $C_c(s)$ , para o qual se adote uma frequência de amostragem

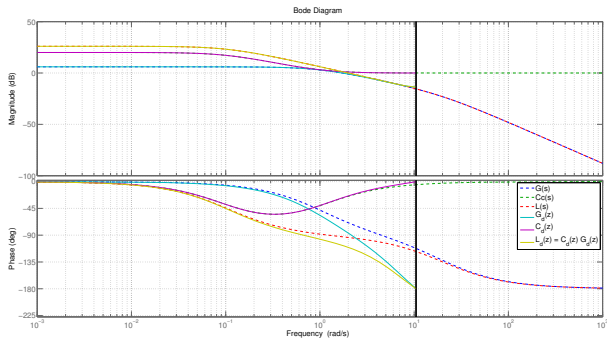
$$\omega_s \geq 10\omega_c = 20 \text{ rad/s} \Rightarrow T = 2\pi/\omega_s \leq 0,314 \text{ s.}$$

Usando  $T = 0,3 \text{ s}$ , e adotando-se a Transformação Bilinear, obtém-se:

$$C_c(s) \approx C_c(w), w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \implies C_d(z) = 1,1392 \frac{(z-0,7285)}{(z-0,9691)}$$

# Compensadores em Atraso (*Lag*) IX

O resultado, considerando o uso do controlador digital  $C_d(z)$ , bem como a presença dos conversores A/D (amostragem) e D/A (segurador de ordem zero), pode ser visto na figura abaixo. Note as diferenças entre o projeto em "s" e o resultado em "z".

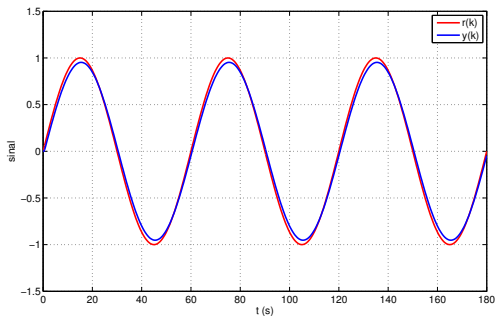


Particularmente, veja que a margem de fase será menor do que a projetada em "s", devido à presença do segurador de ordem zero.



# Compensadores em Atraso (*Lag*) X

No domínio do tempo, o resultado de rastreamento para um sinal senoidal de referência com período 60 s e amplitude unitária, considerando a implementação digital do controlador, é mostrado abaixo.



# Compensadores em Avanço (*Lead*) I

## Definition (Compensador em Avanço)

$$C_c(s) = k_p \frac{\left(\frac{s}{\omega_z} + 1\right)}{\left(\frac{s}{\omega_p} + 1\right)}, \quad \omega_p > \omega_z.$$

### Vantagem:

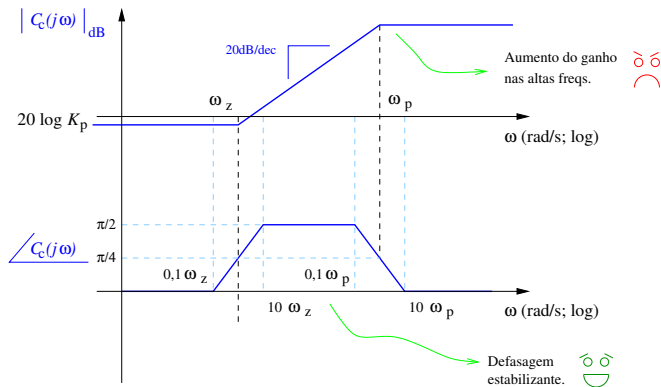
- Aumento da margem de fase (lembrando que para sistemas padrão de 2ª ordem  $\zeta \approx \phi_m/100$ , com  $\phi_m$  em graus, pode ocorrer uma melhoria no desempenho em regime transitório).

### Desvantagem:

- Aumento do ganho em altas frequências (o que é contrário ao objetivo de *loop shaping*.)

# Compensadores em Avanço (*Lead*) II

Resposta em frequência de um compensador em avanço, considerando a aproximação por assíntotas:



## Compensadores em Avanço (*Lead*) III

Em relação à implementação de controladores digitais, com o objetivo de emular o comportamento de um compensador em avanço, é preciso ficar atento aos seguintes pontos:

- 1 Em geral escolhe-se  $\omega_z < \omega_c < \omega_p$ , sendo  $\omega_c$  a frequência de cruzamento por zero de  $|G(j\omega)|_{dB}$  (ponto em que se determina a margem de fase do sistema com um controlador proporcional apenas  $K_p = 1$ ). Desta maneira aproveita-se a defasagem positiva para aumentar a margem de fase do sistema.
- 2 Como consequência da prática anterior, e considerando que  $\omega_c < \frac{\omega_s}{2}$ , as frequências  $\omega_z$  e  $\omega_p$  tendem a estar mais próximas de  $\frac{\omega_s}{2}$ , e há menos problemas numéricos na implementação dos controladores digitais obtidos.

# Compensadores em Avanço (*Lead*) IV

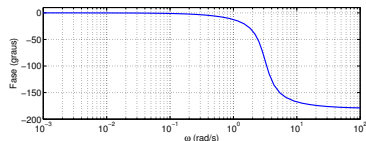
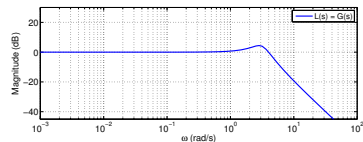
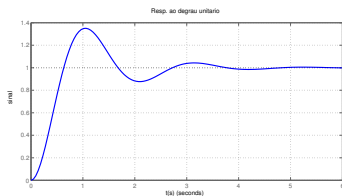
- 3 Há que se observar a possível amplificação de ruídos de alta frequência, bem como respostas abruptas do controlador a variações rápidas do erro (e.g. degrau na referência).
- 4 Além disso, uma vez que as frequências  $\omega_z$  e  $\omega_p$  usualmente estão mais próximas de  $\frac{\omega_s}{2}$ , há uma tendência em se obter maiores diferenças entre os comportamentos obtidos usando  $C_c(s)$  e o compensador digital equivalente  $C_d(z)$ .

# Compensadores em Avanço (*Lead*) V

## Exemplo:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

Objetivo do projeto de controle: Diminuir pela metade o tempo de acomodação do sistema para uma resposta ao degrau (deixar o sistema "mais rápido").



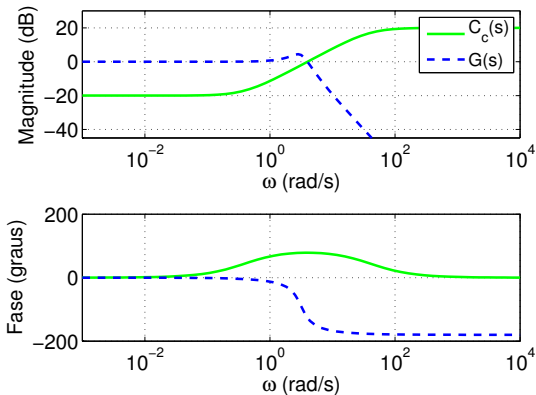
# Compensadores em Avanço (*Lead*) VI

Solução: Sabemos que um aumento na Margem de Fase  $\phi_m$  provavelmente conduzirá a uma diminuição do tempo de acomodação. Avaliando a margem de fase do sistema, para um controlador apenas proporcional e de ganho unitário, tem-se  $\phi_m = 53,1^\circ$ , com  $\omega_c = 4 \text{ rad/s}$ .

Usando um compensador em avanço, projetado para que a defasagem estabilizante contribua para aumentar  $\phi_m$ , podemos escolher  $\omega_z = 0,4 \text{ rad/s}$  e  $\omega_p = 40 \text{ rad/s}$ , com um ganho proporcional  $k_p = 0,1$  que ainda mantém a mesma freq. de cruzamento original:

$$C_c(s) = 0,1 \frac{\frac{s}{0,4} + 1}{\frac{s}{40} + 1}$$

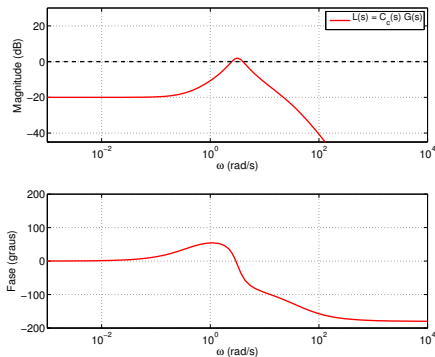
# Compensadores em Avanço (*Lead*) VII





# Compensadores em Avanço (*Lead*) VIII

Note que a utilização do compensador levou a um aumento da margem de fase para  $\phi_m = 132^\circ$ . Entretanto, note que o ganho DC foi comprometido (10 vezes menor). Note também que um aumento em  $k_D$  para corrigir isso, conduziria a uma diminuição da margem de fase.



# Compensadores em Avanço (*Lead*) IX

Como a frequência de cruzamento foi mantida em  $\omega_c \approx 4 \text{ rad/s}$ , pode-se imaginar o uso de um controlador digital equivalente  $C_d(z)$ , no lugar do controlador projetado  $C_c(s)$ , para o qual se adote uma frequência de amostragem

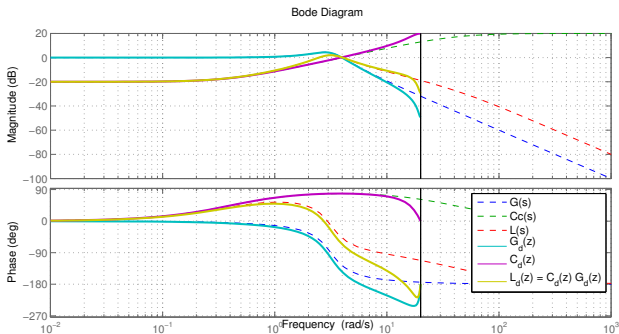
$$\omega_s \geq 10\omega_c = 40 \text{ rad/s} \Rightarrow T = 2\pi/\omega_s \leq 0,157 \text{ s.}$$

Usando  $T = 0,157 \text{ s}$ , e adotando-se a Transformação Bilinear, obtém-se:

$$C_c(s) \approx C_c(w), w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \implies C_d(z) = 2,4904 \frac{(z-0,9391)}{(z+0,5171)}$$

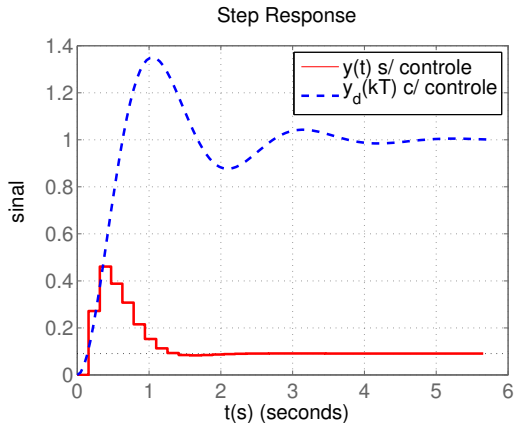
# Compensadores em Avanço (*Lead*) X

Note que para o sistema de controle digital implementado consegue-se uma margem de fase menor do que a projetada, devido à presença dos processos de amostragem e retenção de ordem zero. Além disso, o efeito pretendido em alta frequência é mais distorcido, devido à aproximação associada ao uso da Transf. Bilinear:



# Compensadores em Avanço (*Lead*) XI

No domínio do tempo, vê-se claramente o compromisso entre aumento de velocidade de resposta e redução do ganho DC:



Uma maneira de ter mais flexibilidade no projeto para se tentar manter o erro nulo ou pequeno para entradas ao degrau é combinar os dois compensadores, como será visto a seguir.

# Compensadores em Atraso-Avanço (*Lag-Lead*) I

## Definition (Compensador em Atraso-Avanço)

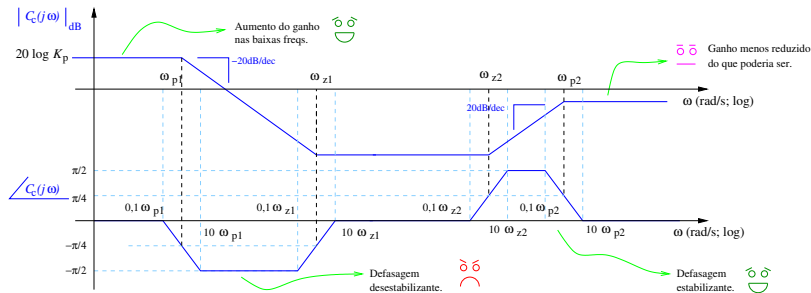
$$C_c(s) = k_p \left[ \frac{\left( \frac{s}{\omega_{z1}} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{\omega_{p1}} + 1 \right)} \right] \left[ \frac{\left( \frac{s}{\omega_{z2}} + 1 \right)}{\left( \frac{s}{\omega_{p2}} + 1 \right)} \right], \quad \omega_{p1} < \omega_{z1} < \omega_{z2} < \omega_{p2}.$$

Ideia:

- Usar simultaneamente as boas características de ambos os compensadores em avanço e em atraso.

# Compensadores em Atraso-Avanço (*Lag-Lead*) II

Resposta em frequência de um compensador em atraso-avanço, considerando a aproximação por assíntotas:



# Compensadores em Atraso-Avanço (*Lag-Lead*) III

## Cuidados na Implementação Digital:

- Os mesmos cuidados tomados nas implementações dos compensadores em atraso e em avanço, considerando os valores comumente usados para as frequências  $\omega_{p1}$ ,  $\omega_{z1}$ ,  $\omega_{z2}$  e  $\omega_{p2}$ .
- Pode-se iniciar o processo de sintonia do controlador, supondo uma frequência de cruzamento  $\omega_c$  para o processo controlado com um controlador proporcional de ganho unitário, obedecendo às seguintes regras:

$$\omega_{p1} < \omega_{z1} \ll \omega_c,$$

$$\omega_{z2} < \omega_c < \omega_{p2},$$

e  $k_p$  escolhido para atender a um critério pré-estabelecido de erro, em regime permanente, para entradas em degrau na referência ou na perturbação de saída.