Usando o MATLAB para estudar Controle Digital

Leonardo Tôrres

Dep. de Engenharia Eletrônica – UFMG

Abril de 2012

Representações de SLITs I

No MATLAB os Sistemas Lineares Invariantes no Tempo – SLITs podem ser representadas no domínio do tempo, ou no domínio da frequência, e podem ser discretos ou contínuos. Tem-se 3 maneiras distintas de se representar o comportamento dinâmico de SLITs.

Representações de SLITs II

- Sistemas em Tempo Contínuo:
  1. Objeto da classe *Transfer Function – TF*. Exemplo:

$$G(s) = \frac{2s+1}{2s^3 - s^2 + 2} e^{-2,3s}$$

```
G = tf([2 1],[2 -1 0 2],'iodelay',2.3)
```

Representações de SLITs III

2. Objeto da classe *Zero-Pole-gain – ZPK*;

$$G(s) = 12{,}7\frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)}e^{-1{,}2s}$$

```
G = zpk([-1  -2],[-3  -4],12.7,'iodelay',1.2)
```

Note que o ganho DC no exemplo acima *não é* igual a 12,7, mas sim igual a $\left(12{,}7\frac{(0+1)(0+2)}{(0+3)(0+4)}1\right) = 2{,}1167$.

Representações de SLITs IV

3. Objeto da classe *State Space – SS*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

```
A = [1  1;  2  -1];
B = [1;  0];
C = [1  0];
D = 0;

G = ss(A,B,C,D)
```

Representações de SLITs V

- Sistemas em Tempo Discreto:

  1. Objeto da classe *Transfer Function – TF*. Exemplo:

$$G(z) = \frac{2z+1}{2z^3 - z^2 + 2}; \quad T = 1{,}2\,\mathrm{s}$$

```
G = tf([2 1],[2 -1 0 2],1.2)
```

Representações de SLITs VI

2. Objeto da classe *Zero-Pole-gain – ZPK*;

$$G(s) = 12{,}7\frac{(z+1)(z+2)}{(z+3)(z+4)}; \quad T = 0{,}5\,\mathrm{s}$$

```
G = zpk([-1  -2],[-3  -4],12.7,0.5)
```

Note que o ganho DC no exemplo acima *não é* igual a 12,7, mas sim igual a $\left(12{,}7\frac{(1+1)(1+2)}{(1+3)(1+4)}\right) = 3{,}81$.

Representações de SLITs VII

3 Objeto da classe *State Space – SS*

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + u(k), \\
x_2(k+1) &= 2x_1(k) - x_2(k), \\
y(k) &= x_1(k), \\
T &= 0{,}8 \quad \text{(intervalo de amostragem)}.
\end{aligned}
$$

```
A = [1  1;  2  -1];
B = [1;  0];
C = [1  0];
D = 0;

G = ss(A,B,C,D,0.8)
```

Conversão de Objetos de uma Classe para Outra

É possível converter facilmente um objeto G de uma dada classe de representação de SLIT para outra.

- De uma classe qualquer para a classe TF:

```
sys = tf(G);
```

- De uma classe qualquer para a classe ZPK:

```
sys = zpk(G);
```

- De uma classe qualquer para a classe SS:

```
sys = ss(G);
```

Obtenção da Transformada $\mathcal{Z}$ de um Sinal I

Se o sinal em tempo discreto $x_{\mathrm{d}}(k)$ corresponder a um sinal contínuo $x_{\mathrm{c}}(t)$ amostrado em instantes $0, T, 2T, \ldots$, isto é, se

$$x_{\mathrm{d}}(k) = x_{\mathrm{c}}(kT), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

e se soubermos a transformada de Laplace $X_{\mathrm{c}}(s) = \mathcal{L}\left\{x_{\mathrm{c}}(t)\right\}$, podemos encontrar $\mathcal{Z}\left\{x_{\mathrm{d}}(k)\right\}$ usando o MATLAB.

Obtenção da Transformada $\mathcal{Z}$ de um Sinal II

Exemplo: $x_{\rm d}(k) = 2e^{-k} + 1 \Rightarrow x_{\rm c}(t) = 2e^{-t} + 1$, tal que, para $T = 1$, tem-se $x_{\rm c}(kT) = 2e^{-kT} + 1 = 2e^{-k} + 1 = x_{\rm d}(k)$. Note que $X_{\rm c}(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s}$.

```
Xc = zpk([],[-1],2) + tf(1,[1 0]);
T = 1;
Xd = c2d(Xc,T,'imp')        % MATLAB versao <  2010
Xd = 1/T*c2d(Xc,T,'imp') % MATLAB versao =  2013a
```

- Note que se pode somar objetos de classes diferentes.
- O comando "c2d" significa *Continuous - to ("two") - Discrete*.
- A opção "imp" serve para avisar ao MATLAB que a expressão em s pode ser vista como a transformada de Laplace de uma resposta ao impulso, e que se quer a correspondente transformada $\mathcal{Z}$ da sequência resultante de se amostrar essa resposta ao impulso com intervalo de amostragem $T = 1$.

Obtenção da Transformada $\mathcal{Z}^{-1}$ de um sinal

Há várias maneiras de se obter o sinal no tempo, a partir do sinal no domínio z. Talvez a maneira mais rápida seja usando o comando impulse, que calcula a resposta ao impulso de um SLIT.

Eemplo: $X_\mathrm{d}(z) = \frac{z(z-0{,}8)}{(z-1)(z-0{,}5)}$.

```
T = 1;
Xd = zpk([0  0.8],[1  0.5],1,T);
xd = impulse(Xd);      % MATLAB versao <  2010
xd = T*impulse(Xd);   % MATLAB versao =  2013a
stem(0:length(xd)-1,xd);
xlabel('k');  ylabel('x_d(k)');
```

- Note que a ideia usada acima é simular a resposta ao impulso do que seria a Função de Transferência de um SLIT. Mas isso é precisamente a transformada $\mathcal{Z}^{-1}$ da expressão em z.

Calculando o Sistema Discreto Equivalente visto pelo Computador

- Como visto em sala de aula, no controle digital de um processo contínuo, *este processo é visto pelo computador como um sistema discreto*. Se o processo tem Função de Transferência $G(s)$, então ele será visto pelo computador como:

$$\bar{G}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}.$$

- Para obter $\bar{G}(z)$ no MATLAB (exemplo em que $G(s) = \frac{2s}{s+5}e^{-0,3s}$, com $T = 0{,}2\,\mathrm{s}$, considerando um segurador de ordem zero como modelo para o processo de conversão D/A):

```
Gs = tf([2 0],[1 5],'iodelay',0.3);
Gbar = c2d(Gs,0.2,'zoh');
```