

Fundamentos de Controle Não Linear: Sistemas Dissipativos

Leonardo A. B. Torres

PPGEE/UFMG

Maio de 2024

- 1 Introdução
- 2 Sistemas Dissipativos
 - Funções de Armazenamento Normalizadas
 - Função Armazenamento Disponível
 - Função Fornecimento Requerido
- 3 Sistemas Passivos
 - Estabilidade de Sistemas Passivos
 - Composição de Sistemas Passivos
- 4 Passividade de SLITs
 - Funções de Transferência Reais Positivas
- 5 Referências Bibliográficas

Section 1

Introdução

Introdução

- Na exposição que segue, considere o sistema dinâmico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u), \\ y &= h(x,u),\end{aligned}\tag{1}$$

sendo $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ o vetor de estados; $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas; $y(t) \in Y \subseteq \mathbb{R}^p$ o vetor de saídas.

- Considere ainda que as soluções para o sistema (1) estão definidas no intervalo $t \in [0, \infty)$, para todas as condições iniciais $x(0) = x_0$ e para todas as funções $u \in \mathcal{L}_{2e}$, sendo que os sinais de saída correspondentes são tais que $y \in \mathcal{L}_{2e}$ ¹.

¹O espaço de funções $\mathcal{L}_{2e}$ é formado por funções quadraticamente integráveis em intervalos de tempo finitos; i.e. $\int_0^T \|y(\tau)\|^2 d\tau < \infty$, para todo T finito.

Section 2

Sistemas Dissipativos

Sistemas Dissipativos I

Definição (Sistema Dinâmico Dissipativo)

Um sistema dinâmico

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x,u),$$

sendo $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ o vetor de estados; $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas; $y(t) \in Y \subseteq \mathbb{R}^p$ o vetor de saídas é **dissipativo em relação a uma taxa de fornecimento** $s(u,y) : U \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ (*supply rate*) pré-estabelecida, em que $\int_{t_0}^{t_1} |s(u(\tau), y(\tau))| d\tau < \infty$ (localmente absolutamente integrável) para quaisquer sinais $u(t) \in U$ admissíveis ($u \in \mathcal{L}_{2e}$) e condições iniciais $x(t_0) \in X$, quando existe uma **função de armazenamento** $V(x) \geq 0$ (*storage function*) tal que

$$V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau, \quad (2)$$

para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, para todo $t_1 > t_0$, com $y(t) : \mathbb{R} \rightarrow Y$ o sinal de saída resultante da aplicação da entrada $u(t)$, correspondente à condição inicial $x(t_0)$.

Sistemas Dissipativos II

- A ideia nesta definição é que $\int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau$ representa a “energia fornecida” ao sistema no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, e que a “energia armazenada” $V(x(t_1))$ em um sistema dissipativo está limitada à “energia” pré-existente $V(x(t_0))$ mais o que foi recebido de agentes externos. Ou seja, não há geração interna de “energia”.
- O limite $\int_{t_0}^{t_1} |s(u(\tau), y(\tau))| d\tau < \infty$ indica que há um máximo que pode ser recebido ou perdido de agentes externos.
- Para funções de armazenamento $V(x) \in \mathcal{C}^1$, i.e. continuamente diferenciáveis, a desigualdade

$$V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau$$

é equivalente a

$$\dot{V}(t) \leq s(u(t), y(t)). \quad (3)$$

Sistemas Dissipativos III

- As funções de armazenamento lembram funções de “armazenamento de energia”, e as taxas de fornecimento lembram funções de “fornecimento de potência”. Entretanto, é muito interessante considerar diferentes maneiras de se definir taxas de fornecimento, pois cada opção conduz a resultados úteis para diferentes análises:

- 1 Para $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^m$, $s(u,y) = u^\top y$: análise de passividade.
- 2 $s(u,y) = \gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2$: análise de ganho $\mathcal{L}_2$ induzido.
- 3 $s(u,y) = y^\top Qy + 2y^\top Su + u^\top Ru$, com $Q = Q^\top$ e $R = R^\top$: análise de dissipatividade (Q,S,R) . Compreende os casos anteriores e outros casos de interesse.

Sistemas Dissipativos IV

- Um ponto interessante é que se um sistema tem duas funções de armazenamento $V_1(x)$ e $V_2(x)$; i.e.

$$V_1(x(t_1)) \leq V_1(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau,$$
$$V_2(x(t_1)) \leq V_2(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau,$$

multiplicando a primeira desigualdade por α , com $\alpha \in [0; 1]$, e a segunda por $(1 - \alpha)$, e somando os termos correspondentes, tem-se que

$$V_\alpha(x(t_1)) \leq V_\alpha(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau,$$

em que

$$V_\alpha(x) = \alpha V_1(x) + (1 - \alpha) V_2(x).$$

Isto é, o conjunto de funções de armazenamento de um sistema em relação a uma dada taxa de fornecimento é convexo.

Funções de Armazenamento Normalizadas I

- Podemos definir a classe das Funções de Armazenamento *normalizadas* $\mathcal{V}^n$, para as quais o menor valor possível é zero:

$$\mathcal{V}^n \equiv \left\{ V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+; \min_x V(x) = 0 \right\}.$$

- Além disso, podemos definir

$$x^{\min} = \operatorname{argmin}_x V(x), \quad V(x) \in \mathcal{V}^n \Leftrightarrow V(x^{\min}) = 0.$$

Funções de Armazenamento Normalizadas II

- Dada uma Função de Armazenamento $V(x) \geq 0$ qualquer, em que $V_{\min} = \min_x V(x)$, podemos sempre obter uma outra função normalizada $V_n(x)$, pois

$$\begin{aligned} V(x(t_1)) - V(x(t_0)) &\leq \int_{t_0}^{t_1} s(u,y) dt \\ \Leftrightarrow \underbrace{[V(x(t_1)) - V_{\min}]}_{V_n(x(t_1))} - \underbrace{[V(x(t_0)) - V_{\min}]}_{V_n(x(t_0))} &\leq \int_{t_0}^{t_1} s(u,y) dt. \end{aligned}$$

- A partir da constatação acima, podemos restringir nossa análise de sistemas dissipativos àqueles que o são em relação a uma Função de Armazenamento Normalizada, isto é, $V(x) \geq 0$, com $V(x^{\min}) = 0$.

Função Armazenamento Disponível I

- Uma importante questão é se determinar quando um dado sistema é dissipativo em relação a uma taxa de fornecimento previamente estabelecida $s(u, y)$.
- A resposta pode ser buscada a partir de uma caracterização *variacional* para a dissipatividade; i.e. que faz uso de conceitos encontrados em **Cálculo das Variações** e **Controle Ótimo**; como mostrado a seguir.

Função Armazenamento Disponível II

Definição (Armazenamento Disponível (*Available Storage*))

$$V_a(x) = \sup_{u(\cdot), T \geq 0} - \int_0^T s(u(\tau), y(\tau)) d\tau,$$

em que $y(t)$ corresponde ao sinal de saída associado ao sistema dinâmico

$$\Sigma: \quad \dot{\chi} = f(\chi, u), \quad y = h(\chi, u), \quad \chi(0) = x.$$

- $V_a(x) \geq 0$. Para ver isso, escolha $T = 0$ na definição acima.
- Se considerarmos que $\int_0^T s(u, y)$ é a “energia fornecida para o sistema” no intervalo de tempo T , então $-\int_0^T s(u, y)$ é a “energia extraída do sistema” neste mesmo intervalo, e $V_a(x)$ é a máxima energia que se pode extrair, usando uma entrada $u(t) = u^*(t)$ ótima para esse propósito, escolhendo o intervalo de tempo $T = T^* \geq 0$ mais adequado, e considerando a condição inicial específica que foi dada.

Função Armazenamento Disponível III

Para um sistema dissipativo, espera-se que a máxima “energia extraível” seja finita, como mostrado no Teorema a seguir.

Teorema (Dissipatividade e Propriedades de $V_a(x)$)

O sistema

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x,u),$$

é dissipativo em relação a taxa de fornecimento $s(u,y)$ se, e somente se, a função Armazenamento Disponível é finita; i.e. $V_a(x) < \infty, \forall x \in X$.

Neste caso $V_a(x)$ é uma função de armazenamento para o sistema em relação à taxa $s(u,y)$, e qualquer outra função de armazenamento $V(x)$ associada à mesma taxa de fornecimento para o sistema é tal que

$$V(x) \geq V_a(x), \quad \forall x \in X.$$

Função Armazenamento Disponível IV

- Prova:**

Note que a partir da definição da função $V_a(x)$, considerando que o sistema é invariante no tempo, tem-se que, para qualquer $t_{\text{ini}} \in \mathbb{R}$,

$$V_a(x(t_0)) = \sup_{\substack{u(\cdot), T \geq 0 \\ \chi(t_{\text{ini}}) = x(t_0)}} - \int_{t_{\text{ini}}}^{t_{\text{ini}}+T} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau.$$

Neste caso, considerando que $V_a(x) < \infty$ para todo $x \in X$, tem-se que:

$$\begin{aligned} & \underbrace{- \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau}_{\chi(t_0)=x(t_0), \chi(t_1)=x(t_1)} + \underbrace{\sup_{\substack{u(\cdot), T_1 \geq 0 \\ \chi(t_1)=x(t_1)}} - \int_{t_1}^{t_1+T_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau}_{V_a(x(t_1))} \\ & \leq \underbrace{\sup_{\substack{u(\cdot), T_2 \geq 0 \\ \chi(t_0)=x(t_0)}} - \int_{t_0}^{t_0+T_2} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau}_{V_a(x(t_0))}, \end{aligned}$$

Função Armazenamento Disponível V

pois o lado esquerdo corresponde a um caso particular dentre todas as possibilidades de se “extrair energia” usando a entrada $u(t)$, a saber: levar o sistema da condição inicial $x(t_0)$ para um estado particular $x(t_1)$, e só depois tentar extrair o máximo de energia a partir de $x(t_1)$.

Portanto, com $V_a(x) < \infty$, ela se qualifica como Função de Armazenamento em relação à taxa de fornecimento $s(u,y)$, tendo em vista que a desigualdade anterior pode ser reescrita como:

$$V_a(x(t_1)) \leq V_a(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau.$$

Função Armazenamento Disponível VI

Considere agora que existe uma outra Função de Armazenamento

$V(x) : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ em relação à mesma taxa de fornecimento $s(u, y)$; i.e.

$$0 \leq V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau.$$

Neste caso, como $V(x(t_1)) \geq 0$,

$$V(x(t_0)) \geq - \int_{t_0}^{t_1} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau, \quad \forall u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1],$$

com a condição inicial $\chi(t_0) = x(t_0)$ pré-estabelecida, e $V(x(t_0)) < \infty$. O fato da desigualdade acima ser verdadeira para todos os casos implica que, $\forall x(t_0) \in X$,

$$\infty > V(x(t_0)) \geq V_a(x(t_0)) = \sup_{\substack{u(\cdot), T \geq 0 \\ \chi(t_0) = x(t_0)}} - \int_{t_0}^{t_0+T} s(u(\tau), y(\tau)) d\tau.$$

Função Armazenamento Disponível VII

- A Função de Armazenamento Disponível é uma função de armazenamento normalizada:

$$V_a(x) \in \mathcal{V}^n \Leftrightarrow \min_x V_a(x) = 0.$$

Para ver que isto é verdade, note que foi provado que, para qualquer função de armazenamento $V(x)$, tem-se que $V(x) \geq V_a(x)$, e, além disso, que $V_a(x) \geq 0$. Portanto, considere que

$$V \in \mathcal{V}^n \Leftrightarrow V(x^{\min}) = 0, \quad x^{\min} = \operatorname{argmin}_x V(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} V(x) \geq V_a(x) \Rightarrow V(x^{\min}) = 0 \geq V_a(x^{\min}), \\ V_a(x) \geq 0 \Rightarrow V_a(x^{\min}) \geq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow V_a(x^{\min}) = 0.$$

Função Fornecimento Requerido I

Existe ainda uma outra Função de Armazenamento que é de certa maneira “canônica”, como definido abaixo:

Definição (Fornecimento Requerido (*Required Supply*))

$$V_{\text{req}}(x) = \inf_{u(\cdot), T \leq 0} \int_T^0 s(u(\tau), y(\tau)) d\tau,$$

em que $y(t)$ corresponde ao sinal de saída associado ao sistema dinâmico

$$\Sigma: \quad \dot{\chi} = f(\chi, u), \quad y = h(\chi, u), \quad \chi(T) = x^{\min}, \quad \chi(0) = x.$$

em que $x^{\min} = \operatorname{argmin}_x \{V_a(x)\}$, e tal que a entrada $u(t)$ conduz o sistema do estado inicial $\chi(T) = x^{\min}$ ao estado final $\chi(0) = x$. Assume-se, portanto, que o estado x é alcançável (*reachable*) a partir de $x^{\min}$.

Função Fornecimento Requerido II

- Um estado x é *Alcançável* (*Reachable*) a partir de um estado $x^{\min}$ se, e somente se, existe uma ação de controle admissível $u(t)$, definida em um intervalo de tempo finito, com a qual é possível levar o sistema do estado inicial $x^{\min}$ até um estado final qualquer x . No presente caso, o intervalo é $[T, 0]$, com $0 > T > -\infty$.
- Note que $\int_T^0 s(u, y)$ é a “energia” mínima necessária para levar o estado do sistema da condição de “energia armazenada disponível” nula (pois $V_a(x^{\min}) = 0$) para um estado qualquer, usando um intervalo de tempo $[T, 0]$ e uma entrada $u(t) = u^*(t)$ ótimos no sentido de minimizar a “energia” despendida.
- Uma das diferenças importantes desta definição em relação à definição de $V_a(x)$ é que tanto o estado inicial, quanto o final, são pré-estabelecidos. No caso de $V_a(x)$ o estado final é arbitrário, buscando-se apenas a maximização da “energia extraída”. Por isso a noção de *Alcançabilidade* (*Reachability*) é importante aqui.

Função Fornecimento Requerido III

Para um sistema dissipativo, cujos estados sejam alcançáveis a partir de $x^{\min} = \operatorname{argmin}_x \{V_a(x)\}$, $V_{\text{req}}(x)$ é uma Função de Armazenamento especial, como mostrado no Teorema a seguir.

Teorema (Dissipatividade e Propriedades de $V_{\text{req}}(x)$)

O sistema

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x,u),$$

dissipativo em relação a taxa de fornecimento $s(u,y)$, e com seus estados alcançáveis a partir de $x^{\min} = \operatorname{argmin}_x \{V_a(x)\}$, tem $V_{\text{req}}(x)$ como uma possível função de armazenamento. Além disso, para qualquer função de armazenamento normalizada $V(x) \in \mathcal{V}^n \Leftrightarrow V(x^{\min}) = 0$, para a mesma taxa de fornecimento, tem-se que

$$V_{\text{req}}(x) \geq V(x).$$

Além disso, $V_{\text{req}}(x^{\min}) = 0$, isto é, $V_{\text{req}} \in \mathcal{V}^n$.

Função Fornecimento Requerido IV

- Prova:**

A partir da definição de $V_{\text{req}}(x)$, e considerando que o sistema é invariante no tempo, podemos escrever que

$$\underbrace{\inf_{u(\cdot), T_0 \leq 0} \int_{t_0+T_0}^{t_0} s(u,y)dt}_{\chi(t_0+T_0)=x^{\min}, \chi(t_0)=x(t_0)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} s(u,y)dt}_{\chi(t_0)=x(t_0), \chi(t_1)=x(t_1)} \geq \underbrace{\inf_{u(\cdot), T_1 \leq 0} \int_{t_1+T_1}^{t_1} s(u,y)dt}_{\chi(t_1+T_1)=x^{\min}, \chi(t_1)=x(t_1)},$$
$$V_{\text{req}}(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u,y)dt \geq V_{\text{req}}(x(t_1)),$$

uma vez que o lado esquerdo representa uma passagem particular (portanto, não necessariamente com gasto mínimo de energia) do estado $x^{\min}$ para o estado $x(t_1)$. Portanto, $V_{\text{req}}(x)$ é uma função de armazenamento para a taxa de fornecimento $s(u,y)$.

Função Fornecimento Requerido V

Note também que para quaisquer $x, x_a \in \mathbb{R}^n$,

$$\underbrace{V(x_a) - V(x)}_{\geq 0} \leq \underbrace{\int_0^{T_a} s(u, y) dt}_{\chi(0)=x, \chi(T_a)=x_a} \Rightarrow -V(x) \leq \int_0^{T_a} s(u, y) dt,$$

$$\therefore V(x) \geq - \int_0^{T_a} s(u, y) dt \Rightarrow V(x) \geq \sup_{u(\cdot), T_a \geq 0} - \int_0^{T_a} s(u, y) dt = V_a(x).$$

Além disso, para uma função de armazenamento normalizada $V \in \mathcal{V}^n$, tem-se,

$$V(x) - \cancel{V(x^{\min})}^0 \leq \underbrace{\int_{T_b}^0 s(u, y) dt}_{\chi(T_b)=x^{\min}, \chi(0)=x} \Rightarrow V(x) \leq \int_{T_b}^0 s(u, y) dt,$$

$$\therefore V(x) \leq \inf_{u(\cdot), T_b \leq 0} \int_{T_b}^0 s(u, y) dt = V_{\text{req}}(x).$$

Função Fornecimento Requerido VI

Consequentemente, para qualquer $V \in \mathcal{V}^n$,

$$V_a(x) \leq V(x) \leq V_{\text{req}}(x)$$

Neste caso, vemos que $V_{\text{req}}(x^{\min}) \geq V_a(x^{\min}) = 0$, e, pela definição da Função Fornecimento Requerido:

$$V_{\text{req}}(x^{\min}) = \inf_{u(\cdot), T \leq 0} \underbrace{\int_T^0 s(u(\tau), y(\tau)) d\tau}_{\chi(T)=x^{\min}, \chi(0)=x^{\min}},$$

em que $T = 0$ poderia ser escolhido na busca pelo ínfimo (pois o estado inicial e final são idênticos), de modo que $V_{\text{req}}(x^{\min}) \leq 0$.

Combinando os dois fatos: $V_{\text{req}}(x^{\min}) \geq 0$, $V_{\text{req}}(x^{\min}) \leq 0 \Leftrightarrow V_{\text{req}}(x^{\min}) = 0$ e, portanto, $V_{\text{req}} \in \mathcal{V}^n$.

Section 3

Sistemas Passivos

Caracterização de Sistemas Passivos I

Definição (Sistemas Passivos)

Sistemas passivos são sistemas com o mesmo número de entradas e saídas; i.e. $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $y(t) \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$; que são **sistemas dissipativos em relação a taxa de fornecimento** $s(u,y) = u^\top y$, com funções de armazenamento continuamente diferenciáveis. Portanto, existe $V(x) \geq 0$, tal que

$$V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} u^\top(\tau)y(\tau) d\tau, \quad (4)$$

que é equivalente a

$$\dot{V}(t) \leq u^\top(t)y(t). \quad (5)$$

Caracterização de Sistemas Passivos II

- Quando existe $V(x) \geq 0$ para a qual se tem a igualdade

$$V(x(t_1)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} u^\top(\tau)y(\tau) d\tau,$$

ao invés da desigualdade, o sistema é conservativo ou *sem perdas* (*lossless*).

- Note que $s(u,y) = u^\top y$ corresponde à “potência fornecida” (e.g. tensão u , e corrente y) ao sistema.
- Como estamos supondo $u(t), y(t) \in \mathcal{L}_{2e}$, a integral $\int_{t_0}^{t_1} u^\top(\tau)y(\tau)d\tau \leq \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^{t_1} u^\top(\tau)u(\tau) + y^\top(\tau)y(\tau)d\tau \right) < \infty$, indicando que a integral da taxa de fornecimento (a “energia” total fornecida) é limitada.

Caracterização de Sistemas Passivos III

Definição (Sistemas Estritamente Passivos – SP)

Sistemas estritamente passivos (*strictly passive*) são sistemas passivos para os quais existe $V(x) \geq 0$ tal que

$$\dot{V}(t) \leq -\psi(x(t)) + u^\top(t)y(t), \quad (6)$$

em que $\psi(x) > 0, \forall x \neq 0$, e $\psi(0) = 0$; i.e. $\psi(x)$ é definida positiva.

- Neste caso a função de armazenamento $V(x)$ semidefinida positiva será, de fato, necessariamente *definida positiva* pois, para $u(t) \equiv 0$, tem-se que $V(x(t)) - V(x(0)) \leq -\int_0^t \psi(x(\tau))d\tau$ e, portanto:

$$\begin{aligned} V(x(0)) &\geq V(x(t)) + \int_0^t \psi(x(\tau))d\tau, \quad V(x(t)) \geq 0, \\ V(x(0)) &\geq \int_0^t \psi(x(\tau))d\tau > 0, \quad \forall x(0) \neq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Caracterização de Sistemas Passivos IV

Definição (Sistemas Estritamente Passivos pela Saída – OSP)

Sistemas estritamente passivos pela saída (*output strictly passive*) são sistemas passivos para os quais existe $V(x) \geq 0$ tal que

$$\dot{V}(t) \leq -y^\top(t)\rho(y(t)) + u^\top(t)y(t), \quad (8)$$

em que $y^\top \rho(y) > 0, \forall y \neq 0$.

Definição (Sistemas Estritamente Passivos pela Entrada – ISP)

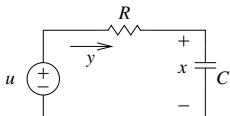
Sistemas estritamente passivos pela entrada (*input strictly passive*) são sistemas passivos para os quais existe $V(x) \geq 0$ tal que

$$\dot{V}(t) \leq -u^\top(t)\varphi(u(t)) + u^\top(t)y(t), \quad (9)$$

em que $u^\top \varphi(u) > 0, \forall u \neq 0$.

Exemplos de Sistemas Passivos I

1 Circuito RC:



$$\dot{x} = -\frac{x}{RC} + \frac{u}{RC}, \quad y = \frac{u - x}{R}.$$

$$V(x) = \frac{1}{2}Cx^2,$$

$$\dot{V} = Cx\dot{x} = \frac{x(-x + u)}{R} = xy,$$

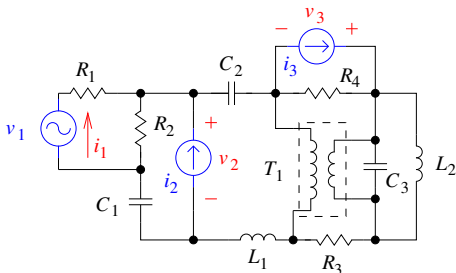
$$\dot{V} - u^\top y = xy - uy = (x - u)y = -Ry^2,$$

$$\dot{V} = -Ry^2 + yu \leq -\epsilon y^2 + yu, \quad 0 \leq \epsilon \leq R.$$

A taxa de variação da energia armazenada no capacitor é igual à potência entregue menos a potência dissipada no resistor.

Exemplos de Sistemas Passivos II

- 2 Qualquer circuito elétrico com um número finito de elementos passivos (resistores, indutores, capacitores, transformadores e *gyrators*), lineares ou não [Anderson and Vongpanitlerd, 1973]:

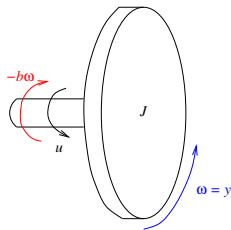


No circuito ao lado, considerando a fonte de tensão v_1 e as fontes de corrente i_2 e i_3 como *entradas*, e a corrente i_1 através da fonte de tensão, bem como as tensões v_2 e v_3 nos terminais das fontes de corrente, como *saídas*, tem-se um sistema passivo.

A prova deste fato faz uso do Teorema de Tellegen.

Exemplos de Sistemas Passivos III

8 Máquina rotativa:



$$J\dot{\omega} = -b\omega + u; \quad y = \omega.$$

$$V(x) = \frac{1}{2}J\omega^2,$$

$$\dot{V} = J\omega\dot{\omega} = \omega(-b\omega + u) = -b\omega^2 + u\omega,$$

$$\dot{V} - u^\top y = -b\omega^2 + u\omega - u\omega = -by^2,$$

$$\dot{V} = -by^2 + yu \leq -\epsilon y^2 + yu, \quad 0 \leq \epsilon \leq b.$$

Note que, se $b = 0$ (não há perdas por atrito), a máquina rotativa é um sistema *lossless*.

Exemplos de Sistemas Passivos IV

- ⊛ Qualquer sistema de Euler-Lagrange (sistemas mecânicos, sistemas elétricos, eletromecânicos, robôs, naves espaciais, carros, submarinos, etc) é passivo em relação à taxa de fornecimento que é o produto entre as velocidades generalizadas e as forças generalizadas. De fato, todo sistema de Euler-Lagrange, por definição, obedece à seguinte equação diferencial:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau, \quad (10)$$

sendo:

- ▶ q o vetor de coordenadas generalizadas;
- ▶ $\dot{q}$ o vetor de velocidades generalizadas;
- ▶ $M(q) = M^\top(q) > 0$ a matriz de inércia;
- ▶ $C(q,\dot{q})$ é a matriz de Coriolis, tal que $\left[\dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q})\right]$ é anti-simétrica;
- ▶ $g(q) = \frac{\partial P(q)}{\partial q}$ é o vetor gradiente da energia potencial $P(q)$;
- ▶ τ é o vetor de forças generalizadas externas aplicadas (somado, possivelmente, às forças generalizadas não conservativas).

Assumiremos que:

$$u = \tau, \quad y = \dot{q}$$

Exemplos de Sistemas Passivos V

Neste caso, usando como função de armazenamento a energia total do sistema:

$$V(q, \dot{q}) = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{q}^\top M(q) \dot{q}}_{\text{Energia cinética}} + \underbrace{P(q)}_{\text{Energia potencial}},$$

tem-se que

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{q}^\top M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^\top \dot{M} \dot{q} + \frac{\partial P(q)}{\partial q} \dot{q}, \\ &= \dot{q}^\top [\tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q)] + \frac{1}{2} \dot{q}^\top \dot{M} \dot{q} + g^\top(q) \dot{q}, \\ &= \dot{q}^\top \tau + \frac{1}{2} \dot{q}^\top [\dot{M} - 2C] \dot{q}, \\ \dot{V} &= \dot{q}^\top \tau = y^\top u.\end{aligned}$$

Portanto, se forem consideradas apenas forças conservativas, todo sistema de Euler-Lagrange é conservativo (*lossless*).

Exemplos de Sistemas Passivos VI

Além disso, se forem consideradas forças de atrito viscosas, tais que $u = \hat{u} - R\dot{q} = \hat{u} - Ry$, com $R = R^\top > 0$ e $\hat{u}$ as forças externas, então o sistema de Euler-Lagrange é OSP, pois

$$\dot{V} = \dot{q}^\top \tau = y^\top u,$$

$$\dot{V} = \dot{q}^\top (\hat{u} - R\dot{q}) = -y^\top Ry + y^\top \hat{u}.$$

Estabilidade de Sistemas Passivos I

- As propriedades de estabilidade dos sistemas passivos podem em geral ser deduzidas a partir da análise do que ocorre para $u(t) \equiv 0$.
- Entretanto, a **função de armazenamento** (*storage function*) pode ser apenas **semidefinida positiva**, o que não atende, em princípio, a um dos requisitos mínimos para ser uma função de Lyapunov candidata.
- Como a noção de passividade (ou dissipatividade) está vinculada à relação entrada-saída por meio da taxa de fornecimento (*supply rate*) $s(u,y)$, é preciso tomar cuidado com o que se pode deduzir sobre o comportamento dos estados, a partir desta relação. Isto é, pode ser necessário levar em consideração conceitos associados à controlabilidade (entrada-estados) e à observabilidade (estados-saída para diferentes entradas).

Estabilidade de Sistemas Passivos II

Teorema (Estabilidade de Sistemas SP)

Se um sistema é Estritamente Passivo, então ele é assintoticamente estável quando $u(t) = 0$.

- **Prova:** A partir da definição de sistema Estritamente Passivo no slide 28, existe uma função de armazenamento $V(x)$ *definida positiva* (veja (7)) tal que:

$$\dot{V}(t) \leq -\psi(x(t)),$$

em que $\psi(x)$ é uma função definida positiva. Portanto, pelo Teorema de Lyapunov (Método Direto), o sistema é assintoticamente estável.

Estabilidade de Sistemas Passivos III

Definição (*Zero-State Observability* – ZSO)

Um sistema dinâmico

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x,u),$$

é Observável no Estado Zero (*Zero-State Observable*) quando somente a solução $x(t) \equiv 0, \forall t \geq t_0$, é possível para

$$\dot{x} = f(x,0), \quad y = h(x,0) = 0.$$

Isto é, quando $u(t) = 0$, somente $x(t) = 0, \forall t \geq t_0$, garante que $y(t) = 0, \forall t \geq t_0$.

Estabilidade de Sistemas Passivos IV

Lema (F. de Armazenamento Def. Positiva: OSP + ZSO)

A função de armazenamento $V(x)$ de um sistema OSP e ZSO é definida positiva.

- **Prova:** Segundo a definição de um sistema *OSP*, para $u(t) = 0$ tem-se que, $\forall t \geq t_0$, $\dot{V}(t) \leq -y^\top(t)\rho(y(t))$, e logo $V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)) - \int_{t_0}^{t_1} y^\top(\tau)\rho(y(\tau))d\tau$, em que $V(x) \geq 0$, e $y^\top\rho(y)$ é definida positiva. Portanto $V(x(t_0)) \geq \int_{t_0}^{t_1} y^\top(\tau)\rho(y(\tau))d\tau \geq 0$, $\forall t_1 \geq t_0$. Particularmente, esta última desigualdade deve ser verdadeira para:

$$V(x(t_0)) \geq \int_{t_0}^{\infty} y^\top(\tau)\rho(y(\tau))d\tau \geq 0.$$

Quando $V(x(t_0)) = 0$, é necessário que $y(t) = 0$, $\forall t \geq t_0$. Como o sistema é ZSO, isto implica que $x(t_0) = 0$. Portanto, $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, com $V(x) > 0$, se $x \neq 0$.

Estabilidade de Sistemas Passivos V

Teorema (Estabilidade de Sistemas OSP + ZSO)

Se um sistema é Estritamente Passivo pela Saída – OSP e Observável no Estado Zero – ZSO, então ele é assintoticamente estável quando $u(t) = 0$.

- **Prova:** Da definição de sistema OSP em (6), para $u(t) = 0$ tem-se que

$$\dot{V}(t) \leq -y^\top(t)\rho(y(t)),$$

em que $y^\top(t)\rho(y(t)) > 0$, para $y \neq 0$. Além disso, do Lema 12 sabe-se que $V(x)$ é definida positiva. Neste caso, existe $c < 0$ pequeno o suficiente tal que $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\}$ é um conjunto compacto e positivamente invariante. O subconjunto $\Omega_Z = \{x \in \Omega_c; V(x) = 0\}$ corresponde aos valores x tais que $y^\top \rho(y) = 0 \Rightarrow y = 0$. O maior conjunto positivamente invariante $\Omega_I \subseteq \Omega_Z$ (i.e. o conjunto de condições iniciais que mantêm $y = 0$), neste caso, será formado por um único ponto $x = 0$, pois o sistema é ZSO. Pelo Teorema de Krasovskii-LaSalle:

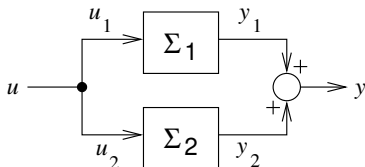
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Composição de Sistemas Passivos I

- As composições de sistemas passivos em **paralelo** ou em **realimentação negativa** formam sistemas também passivos.
- Isto possibilita a análise de sistemas complexos, formados por muitos subsistemas passivos interconectados, valendo-se das propriedades de passividade dos subsistemas para deduzir propriedades do sistema como um todo.
- Nos casos a seguir, considere que as constantes $\eta_i \geq 0$, $\varepsilon_i \geq 0$, $\delta_i \geq 0$, com $i = 1, 2$, são escolhidas para caracterizar o tipo de passividade dos sistemas Σ_1 e Σ_2 .

Composição de Sistemas Passivos II

- Conexão em Paralelo:



$$\dot{V}_1(x_1) \leq -\eta_1 \psi_1(x_1) - \varepsilon_1 y_1^\top \rho_1(y_1) - \delta_1 u_1^\top \varphi_1(u_1) + u_1^\top y_1,$$

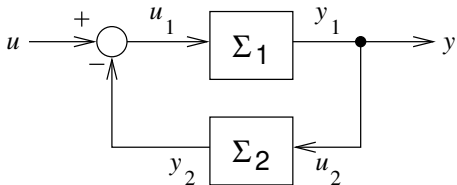
$$\dot{V}_2(x_2) \leq -\eta_2 \psi_2(x_2) - \varepsilon_2 y_2^\top \rho_2(y_2) - \delta_2 u_2^\top \varphi_2(u_2) + u_2^\top y_2.$$

$$V(x_1, x_2) = V(x_1) + V(x_2), \text{ } u_1 = u_2 = u, y = y_1 + y_2 :$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) \leq & - \underbrace{(\eta_1 \psi_1(x_1) + \eta_2 \psi_2(x_2))}_{\psi'(x_1, x_2)} - \underbrace{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) y^\top (\rho_1(y) + \rho_2(y))}_{y^\top \rho'(y)} \\ & - \underbrace{(\delta_1 + \delta_2) u^\top (\varphi_1(u) + \varphi_2(u))}_{u^\top \varphi'(u)} + \underbrace{u^\top (y_1 + y_2)}_{u^\top y}. \end{aligned}$$

Composição de Sistemas Passivos III

- Conexão em Realimentação Negativa:



$$\dot{V}_1(x_1) \leq -\eta_1 \psi_1(x_1) - \varepsilon_1 y_1^\top \rho_1(y_1) - \delta_1 u_1^\top \varphi_1(u_1) + u_1^\top y_1,$$

$$\dot{V}_2(x_2) \leq -\eta_2 \psi_2(x_2) - \varepsilon_2 y_2^\top \rho_2(y_2) - \delta_2 u_2^\top \varphi_2(u_2) + u_2^\top y_2.$$

$$V(x_1, x_2) = V(x_1) + V(x_2), \text{ } u_1 = u - y_2, y = y_1 = u_2 :$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) \leq & \underbrace{-(\eta_1 \psi_1(x_1) + \eta_2 \psi_2(x_2))}_{\psi'(x_1, x_2)} - \underbrace{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) y^\top (\rho_1(y) + \rho_2(y))}_{y^\top \rho'(y)} \\ & - \underbrace{(\delta_1 + \delta_2) u^\top (\varphi_1(u) + \varphi_2(u))}_{u^\top \varphi'(u)} + \underbrace{(u - y_2)^\top y + y^\top y_2}_{u^\top y}. \end{aligned}$$

Section 4

Passividade de SLITs

SLITs Passivos I

- No caso de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo – SLITs, temos que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

tal que, para **condições iniciais nulas** $x(t_0) = 0$,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad s \in \mathbb{C},$$

representa a relação entrada-saída no domínio da frequência:

$Y(s) = G(s)U(s)$, com $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, em que

$$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t), \quad \forall t \geq 0.$$

SLITs Passivos II

- Para SLITs tais que qualquer estado é alcançável a partir de $x(t_0) = 0$, as seguintes condições são equivalentes:

❶ Existe uma Função de Armazenamento Disponível limitada, isto é,
 $0 \leq V_a(x) < \infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$, para $s(u, y) = u^\top y$.

❷ O SLIT é passivo.

❸ Para $x(t_0) = 0$ é verdade que $\int_0^t y^\top(\tau)u(\tau)d\tau \geq 0, \forall t \geq 0$.

► **Prova:** [Willems, 1972a, Willems, 1972b]

★ 1 $\Leftrightarrow$ 2: Vide slides anteriores sobre sistemas dissipativos.

★ 1 $\Rightarrow$ 3: Vamos mostrar que $(\neg 3) \Rightarrow (\neg 1)$. Se existir algum sinal de entrada $\bar{u}(t)$ tal que, para condições iniciais nulas, tem-se $\int_0^{t_1} \bar{y}^\top(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau < 0$, para algum $t_1 \geq 0$, então fazendo-se $u(t) = k\bar{u}(t)$, tem-se a saída $\bar{y}(t) = k\bar{u}(t)$ e, consequentemente, $\int_0^{t_1} y^\top(\tau)u(\tau)d\tau = k^2 \int_0^{t_1} \bar{y}^\top(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau \rightarrow -\infty$, quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, assumindo que o sistema é linear (entradas de amplitudes arbitrárias, mas finitas, podem ser usadas):

$$V_a(0) = \sup_{\substack{u(\cdot), t_1 \geq 0 \\ x(0)=0}} - \int_0^{t_1} u^\top(\tau)y(\tau)d\tau \rightarrow +\infty,$$

SLITs Passivos III

- ★ **3 $\Rightarrow$ 1:** Neste caso, por definição, uma vez que a Função de Armazenamento Disponível é uma função de armazenamento para a taxa de fornecimento $s = u^\top y$, a desigualdade integral

$$V_a(x(T)) \leq V_a(0) + \int_0^T y^\top(\tau)u(\tau)d\tau \quad (11)$$

é satisfeita para todo $x(T)$ alcançável usando um sinal de entrada $u(t)$ limitado no intervalo de tempo finito $[0, T]$, o qual gera um sinal de saída $y(t)$ também limitado durante o mesmo intervalo de tempo (existência e unicidade das soluções para SLITs garante que não há escape em tempo finito e, portanto, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ também será limitado para $t \in [0, T]$).

A hipótese de que qualquer estado pode ser alcançado a partir de $x(0) = 0$ é importante para garantir a existência de algum $T > 0$ finito, para qualquer $x(T) \in \mathbb{R}^n$.

SLITs Passivos IV

Por outro lado, da definição de Função de Armazenamento Disponível sabe-se que $V_a \geq 0$, e a condição **3** implica que

$$V_a(0) = \sup_{\substack{u(\cdot), t_1 \geq 0 \\ x(0)=0}} - \int_0^{t_1} u^\top(\tau)y(\tau)d\tau = 0.$$

Por sua vez, da desigualdade (11), e da existência de um sinal $u(t)$, limitado para $t \in [0, T]$, com $T < \infty$, que conduz o estado do SLIT da origem para um valor arbitrário, enquanto produz um sinal de saída $y(t)$ também limitado no mesmo intervalo, tem-se que

$$0 \leq V_a(x) \leq \int_0^T y^\top(\tau)u(\tau)d\tau < \infty.$$

SLITs Passivos V

- Em se tratando de SLITs representados por realizações mínimas (controláveis e observáveis):

- ❶ A Passividade pode ser investigada buscando-se por funções de armazenamento quadráticas, isto é,

$$V(x) = \frac{1}{2}x^\top Px, \quad P = P^\top > 0.$$

Isso se deve ao fato de que a Função de Fornecimento Requerido (*Required Supply*) está associada a um **problema de Controle Ótimo de Horizonte Infinito**, para minimização de um Funcional de Custo Quadrático, no contexto em que a dinâmica é linear e invariante no tempo.

Esses elementos garantem que a chamada *Função Valor* (*Value Function*) do problema de controle ótimo é quadrática (veja [[Athans and Falb, 2007](#), Seção 9.5] e [[Willems, 1972b](#), Seção 4]).

SLITs Passivos VI

De fato, $V_{\text{req}}(x)$ está intimamente relacionada à Função Valor (*Value Function* ou *Cost-to-Go*) $J^*(x)$ associada à minimização do Funcional $J(x, u_{[0, \infty]})$ do problema de controle ótimo (note que $x = 0 = x^{\min} = \operatorname{argmin}_x \{V_a(x)\}$, neste caso):

$$\begin{aligned} V_{\text{req}}(x) &= \inf_{\substack{u(\cdot), T \geq 0 \\ \chi(0)=0, \\ \chi(T)=x.}} \int_0^T u^\top(\tau) y(\tau) d\tau, \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \inf_{\substack{u(\cdot), \\ \chi(0)=0, \\ \chi(T)=x.}} \int_0^T u^\top(\tau) y(\tau) d\tau, \\ &= \inf_{\substack{u_{[0, \infty]}, \\ \chi(0)=x}} J(x, u_{[0, \infty]}), \quad u_{[0, \infty]} \equiv \{u(t), t \in [0, \infty)\} \\ &= J^*(x) = \frac{1}{2} x^\top (P_{\text{req}}) x, \quad P_{\text{req}} = P_{\text{req}}^\top > 0. \end{aligned}$$

SLITs Passivos VII

- ❷ E a Passividade também pode ser investigada diretamente no domínio da frequência, pois:
- ❶ Mostramos que, se o SLIT é tal que qualquer estado pode ser alcançado a partir de $x = 0$ (o que é verdade considerando que (A, B, C, D) é uma realização mínima),

$$\text{SLIT passivo} \Leftrightarrow \int_0^T y^\top(\tau) u(\tau) d\tau \geq 0, \forall T \geq 0, x(0) = 0.$$

- ❷ A integral acima pode ser representada no domínio da frequência usando o **Teorema de Parseval**, assumindo que os sinais $\{u(t), t \in [0, T]\}$ e $\{y(t), t \in [0, T]\}$ são limitados e, portanto, quadraticamente integráveis, garantido a existência de suas Transformadas de Fourier $U_T(j\omega)$ e $Y_T(j\omega)$, respectivamente. Neste caso:

$$\begin{aligned} \int_0^T y^\top(\tau) u(\tau) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(j\omega) Y_T(j\omega) d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(j\omega) \underbrace{G(j\omega) U_T(j\omega)}_{Y_T(j\omega)} d\omega, \end{aligned}$$

em que $U_T^*(j\omega) = [U_T(-j\omega)]^\top$ e $U_T(j\omega) = \mathcal{F}\{u_T(t)\}$, com $u_T(t) = u(t)$ para $t \in [0, T]$, e $u_T(t) = 0$, para $t > T$, com $T \geq 0$ qualquer.

Como a passividade neste caso é equivalente a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(j\omega) G(j\omega) U_T(j\omega) d\omega \geq 0, \\ \Rightarrow & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(j\omega) \left[\frac{G(j\omega) + G^*(j\omega)}{2} \right] U_T(j\omega) d\omega \geq 0, \\ \Rightarrow & \int_{-\infty}^{+\infty} U_T^*(j\omega) \underbrace{[G(j\omega) + G^*(j\omega)]}_{G_H(j\omega)} U_T(j\omega) d\omega \geq 0, \end{aligned}$$

em que $G_H(j\omega) = G(j\omega) + G^*(j\omega) = G_H^*(j\omega)$ é Hermitiana.

Vemos que: **(i)** se $G(j\omega) + G^*(j\omega) \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$, a desigualdade acima será verdadeira. **(ii)** Se a desigualdade acima é verdadeira, então $G(j\omega) + G^*(j\omega) \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$: considere que $G(j\bar{\omega}) + G^*(j\bar{\omega}) < 0$ para algum $\bar{\omega} \in \mathbb{R}$. Se esse fosse o caso, poderíamos escolher um sinal de entrada $u_T(t)$ cuja transformada de Fourier $U_T(j\omega)$ seja diferente de zero somente para $\omega \in [\bar{\omega} - \epsilon, \bar{\omega} + \epsilon]$, de modo que a integral acima seria negativa para esse caso em particular, e a desigualdade não poderia ser verdadeira.

SLITs Passivos: Sumário

A investigação da passividade de um SLIT $G(s)$ com uma realização mínima (A,B,C,D) em Espaço de Estados é facilitada pelo fato de se poder relacionar dois conceitos importantes, por meio do seguinte Teorema:

Teorema (Passividade e Positividade Real)

Um SLIT é passivo se, e somente se, sua Função de Transferência é Real Positiva.

- 1 **Passividade:** depende do conhecimento de uma função de armazenamento *quadrática*, tal que o SLIT seja dissipativo em relação à taxa de fornecimento $s(u,y) = u^\top y$.
- 2 **Positividade Real:** pode ser verificada no domínio da frequência diretamente via a análise da matriz Hermitiana $G_H(j\omega) = G(j\omega) + G^*(j\omega)$, ou a partir do conhecimento de uma realização mínima (A,B,C,D) .

Funções de Transferência Reais Positivas I

Definição (Funções de Transferência Reais Positivas – SISO)

- ① $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, e é real $\forall s \in \mathbb{R}^+$.
- ② $\operatorname{Re}\{G(s)\} \geq 0$, sempre que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$.

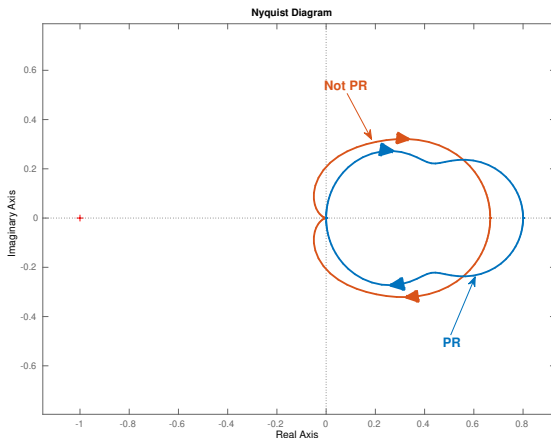
Alternativamente (mais fácil de testar):

- ① $G(s)$ é uma função racional de s que é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, i.e. não tem polos no semiplano direito aberto do plano complexo.
- ② $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \geq 0$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$ que não seja um polo de $G(j\omega)$.
- ③ Qualquer polo $j\omega$ é um polo simples, e o seu resíduo correspondente é não-negativo, i.e. $\lim_{s \rightarrow j\omega} [(s - j\omega)G(s)] \geq 0$.

Deduz-se, portanto, que, se $G(s)$ é PR, então a FT não tem polos no semiplano direito aberto do plano complexo, sua parte imaginária é nula para valores reais e positivos de s , e sua parte real é positiva para valores de s fora do eixo real e no semiplano direito aberto.

Funções de Transferência Reais Positivas II

- No caso SISO, como $\text{Re}\{G(j\omega)\} \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ (tal que $j\omega$ não é um polo), isso significa que o **Diagrama de Nyquist de $G(s)$** precisa estar completamente contido no semiplano direito do Plano Imagem:



Funções de Transferência Reais Positivas III

- Consequentemente, uma condição necessária para que a FT seja Real Positiva (*Positive Real*) é que

$$-90^\circ \leq \arg\{G(j\omega)\} \leq +90^\circ,$$

e, portanto, o grau relativo da FT (diferença entre a ordem do denominador e a ordem do numerador) deve ser $r \leq 1$, pois o ângulo da função racional $G(j\omega)$ quando $\omega \rightarrow \infty$ é igual a $(-90^\circ)r$.

Funções de Transferência Reais Positivas IV

Definição (Funções de Transferência Reais Positivas – MIMO)

- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, i.e. nenhum elemento de $G(s)$ tem polos no semiplano direito aberto do plano complexo.
- 2 $G(s)$ é uma matriz real, sempre que $s \in \mathbb{R}^+$;
- 3 $G(s) + G^*(s) \geq 0$, sempre que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$.

Alternativamente (mais fácil de testar):

- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, cujos elementos são funções racionais de s , i.e. nenhum elemento de $G(s)$ tem polos no semiplano direito aberto do plano complexo.
- 2 $G(j\omega) + G^*(j\omega) \geq 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, em que $j\omega$ não é um polo de $G(j\omega)$;
- 3 Qualquer polo $j\omega$ de qualquer elemento de $G(s)$ é um polo simples e a matriz resíduo correspondente $R = \lim_{s \rightarrow j\omega} [(s - j\omega)G(s)]$ é semidefinida positiva e Hermitiana.

Funções de Transferência Reais Positivas V

Além disso, é possível verificar se uma dada $G(s)$ é Real Positiva a partir do conhecimento de uma realização mínima (A,B,C,D) :

Lema (Real Positivo)

A representação em espaço de estados (A,B,C,D) , mínima, de um SLIT; i.e. assumindo-se o par (A,B) controlável, e o par (C,A) observável; é Real Positiva se, e somente se, existe uma matriz $P = P^\top > 0$, e matrizes quaisquer L e W de dimensões apropriadas, tal que

$$\begin{aligned}PA + A^\top P &= -L^\top L, \\ PB &= C^\top - L^\top W, \\ W^\top W &= D + D^\top.\end{aligned}$$

Funções de Transferência Reais Positivas VI

Alternativamente, pode-se verificar a factibilidade da desigualdade matricial linear (*Linear Matrix Inequality* – LMI) abaixo:

Lema (Real Positivo usando LMI)

A representação em espaço de estados (A,B,C,D) , mínima, de um SLIT; i.e. assumindo-se o par (A,B) controlável, e o par (C,A) observável; é Real Positiva se, e somente se, existe uma matriz $P = P^\top > 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB - C^\top \\ B^\top P - C & -(D + D^\top) \end{bmatrix} \leq 0.$$

A relação entre os dois lemas pode ser deduzida, observando-se que as igualdades anteriores conduzem a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB - C^\top \\ B^\top P - C & -(D + D^\top) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L^\top \\ W^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & W \end{bmatrix} \leq 0.$$

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas I

Definição (Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas)

Uma Função de Transferência $G(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é **Estritamente** Real Positiva se, e somente se, $G(s - \epsilon)$ é Real Positiva para algum valor real $\epsilon > 0$.

A partir desta definição, as definições anteriores podem ser reescritas, conforme mostrado a seguir.

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas II

Definição (Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas – Caso **SISO**)

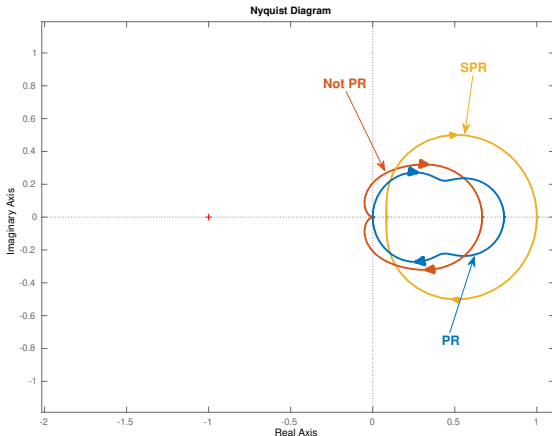
- ❶ $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, e $G(s)$ é real $\forall s \in \mathbb{R}^+$. Deduz-se, portanto, que todos os polos estão estritamente no semiplano esquerdo.
- ❷ $\operatorname{Re}\{G(s)\} > 0$, sempre que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$.

Alternativamente (mais fácil de testar):

- ❶ $G(s)$ é uma função racional de s que é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, i.e. todos os polos estão estritamente no semiplano esquerdo.
- ❷ $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0$, $\forall \omega \in [0, \infty)$;
- ❸ $G(\infty) > 0$ ou, se $G(\infty) = 0$, deve-se ter $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0$.

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas III

- Similarmente ao que foi visto anteriormente, se o Diagrama de Nyquist estiver contido no semiplano direito do Plano Imagem, e nunca tocar o eixo imaginário; i.e. $\text{Re}\{G(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in [0, \infty) \cup +\infty$; pode-se deduzir que a FT é Estritamente Real Positiva (*Strictly Positive Real*) – SPR :



Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas IV

Definição (Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas – Caso **MIMO**)

- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} \geq 0$, i.e. todos os elementos de $G(s)$ tem polos estritamente no semiplano esquerdo.
- 2 $G(s)$ é uma matriz real, sempre que $s \in \mathbb{R}^+$;
- 3 $G(s) + G^*(s) > 0$, sempre que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$.

Equivalentemente (mais fácil de testar):

- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, i.e. todos os elementos de $G(s)$ tem polos estritamente no semiplano esquerdo.
- 2 $G(j\omega) + G^*(j\omega) > 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$;
- 3 $G(\infty) + G^*(\infty) > 0$ ou, se $G(\infty) + G^*(\infty) = 0$, deve-se ter $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{2(n-r)} \det [G(j\omega) + G^*(j\omega)] > 0$, sendo n o número de linhas e colunas de $G(s)$ e r é o posto da matriz $[G(\infty) + G^*(\infty)]$.

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas V

Lema (Kalman-Yakubovich-Popov)

A representação em espaço de estados (A,B,C,D) , mínima, de um SLIT; i.e. assumindo-se o par (A,B) controlável, e o par (C,A) observável; é Estritamente Real Positiva (SPR – Strictly Positive Real) se, e somente se, existe uma matriz $P = P^\top > 0$, uma constante $\epsilon > 0$, e matrizes quaisquer L e W de dimensões apropriadas, tal que

$$PA + A^\top P = -L^\top L - \epsilon P,$$

$$PB = C^\top - L^\top W,$$

$$W^\top W = D + D^\top.$$

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas VI

Alternativamente, pode-se verificar a factibilidade da desigualdade matricial linear (*Linear Matrix Inequality* – LMI) abaixo:

Lema (KYP usando LMI)

Um SLIT com representação em espaço de estados mínima (A,B,C,D) ; i.e. o par (A,B) é controlável, e o par (C,A) é observável; é Estritamente Real Positivo se, e somente se, existe uma matriz $P = P^\top > 0$, e um valor real $\epsilon > 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P - \epsilon P & PB - C^\top \\ B^\top P - C & -(D + D^\top) \end{bmatrix} \leq 0.$$

A relação entre os dois lemas pode ser deduzida, observando-se que as igualdades anteriores conduzem a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P - \epsilon P & PB - C^\top \\ B^\top P - C & -(D + D^\top) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L^\top \\ W^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & W \end{bmatrix} \leq 0.$$

Representações SPR = Sistemas Estritamente Passivos I

- Seja uma Representação em Espaço de Estados do SLIT

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx + Du,$$

mínima (controlável e observável).

- Considere a seguinte a Função de Armazenamento:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^\top Px, \quad P = P^\top > 0.$$

- Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned}\dot{V} - u^\top y &= \frac{1}{2}\dot{x}^\top Px + \frac{1}{2}x^\top P\dot{x} - u^\top y, \\ &= \frac{1}{2}(Ax + Bu)^\top Px + \frac{1}{2}x^\top P(Ax + Bu) - u^\top (Cx + Du), \\ &= \frac{1}{2}x^\top (A^\top P + PA)x + x^\top PBu - u^\top Cx - u^\top Du.\end{aligned}$$

Representações SPR = Sistemas Estritamente Passivos II

- Portanto,

$$\dot{V} - u^\top y = \frac{1}{2}x^\top (A^\top P + PA)x + x^\top (PB - C^\top)u - \frac{1}{2}u^\top (D + D^\top)u.$$

- Usando o Lema de KYP:

$$\begin{aligned}\dot{V} - u^\top y &= \frac{1}{2}x^\top (-L^\top L - \epsilon P)x + x^\top (-L^\top W)u - \frac{1}{2}u^\top (W^\top W)u, \\ &= -\frac{\epsilon}{2}x^\top Px - \frac{1}{2}(Lx + Wu)^\top (Lx + Wu), \\ &\leq -\frac{\epsilon}{2}x^\top Px.\end{aligned}$$

- Em conclusão:

$$\dot{V} \leq -\psi(x) + u^\top y,$$

com $\psi(x) = \epsilon/2x^\top Px$ uma função definida positiva, o que coincide com a definição de sistema Estritamente Passivo.

Section 5

Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas I



Anderson, B. D. O. and Vongpanitlerd, S. (1973).
Network Analysis and Synthesis.
Prentice-Hall.



Athans, M. and Falb, P. L. (2007).
Optimal Control: An introduction to the theory and its applications.
Dover Publications, Inc.



Ebihara, Y., Peaucelle, D., and Arzelier, D. (2015).
S-Variable Approach to LMI-Based Robust Control.
Springer-Verlag London.



Khalil, H. K. (2002).
Nonlinear Systems.
Prentice Hall, third edition.



van der Schaft, A. (2016).
 L_2 -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control.
Springer, third edition.

Referências Bibliográficas II



Willems, J. C. (1972a).

Dissipative dynamical systems Part I: General theory.

Archive for Rational Mechanics and Analysis, 45(5):321–351.



Willems, J. C. (1972b).

Dissipative dynamical systems Part II: Linear systems with quadratic supply rates.

Archive for Rational Mechanics and Analysis, 45(5):353–393.

Section 6

Apêndice

LMIs e o Lema de KYP I

Em vários livros da área de Teoria de Controle é possível encontrar o Lema de KYP enunciado na forma de desigualdades matriciais lineares – LMI (*Linear Matrix Inequalities*) [Ebihara et al., 2015], ou na forma de um conjunto de equações que devem ser satisfeitas devido à existência de certas matrizes [Khalil, 2002]. O que une ambas as afirmações é o resultado abaixo.

Teorema

Uma matriz

$$M = M^\top = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (12)$$

se, e somente se, existem matrizes L e W quaisquer tais que

$$\begin{aligned} M_{11} &= L^\top L, \\ M_{12} &= L^\top W, \\ M_{22} &\geq W^\top W. \end{aligned} \quad (13)$$

LMIs e o Lema de KYP II

- (13) $\Rightarrow$ (12).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} L^\top L & L^\top W \\ W^\top L & W^\top W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} L^\top \\ W^\top \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} L & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right) \\ &= z^\top z \geq 0, \end{aligned}$$

em que $z = Lx + Wu$. Neste caso, usando (13), conclui-se que, para $M_{22} \geq W^\top W$, que

$$M = \begin{bmatrix} L^\top L & L^\top W \\ W^\top L & M_{22} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} L^\top L & L^\top W \\ W^\top L & W^\top W \end{bmatrix} \geq 0.$$

LMIs e o Lema de KYP III

- (12) $\Rightarrow$ (13).

Considere que $M = S^\top S$, sendo S uma matriz raiz-quadrada qualquer de M . Sempre é possível obter S , pois $M = M^\top \geq 0$ e pode ser, por exemplo, decomposta em valores singulares como $M = U^\top \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots) U$, com $U^\top U = I$, tal que $S = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots) U$.

Considere ainda a decomposição QR: $S = QR$, com $Q^\top Q = I$ e R uma matriz triangular superior. Note que $M = S^\top S = R^\top Q^\top QR = R^\top R$. $M = R^\top R$ é a decomposição de Choleski de M . Portanto,

$$M = R^\top R = \begin{bmatrix} R_{11}^\top & 0 \\ R_{12}^\top & R_{22}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \geq 0$$

e, fazendo-se $L = R_{11}$, $W = R_{12}$, e observando que $M_{22} = R_{12}^\top R_{12} + R_{22}^\top R_{22} \geq R_{12}^\top R_{12} = W^\top W$, conclui-se (13).