

Características Dinâmicas dos Instrumentos

Leonardo A. B. Tôrres

Novembro de 2003

Resumo

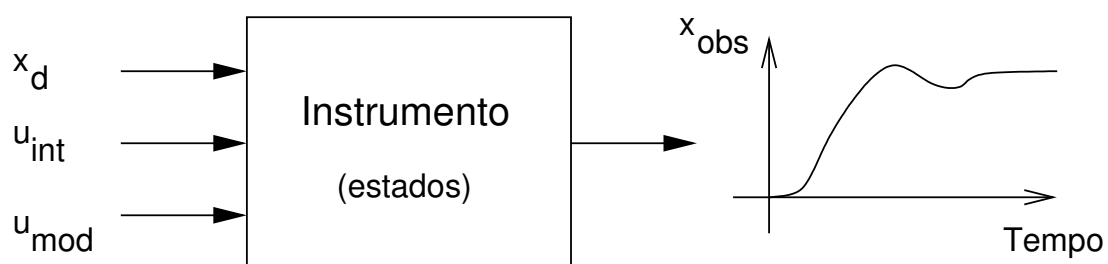
Análise dos instrumentos como sistemas dinâmicos. Linearização, resposta em frequência, classificação de acordo com a ordem dinâmica, respostas temporais clássicas, tempo morto.

Caracterização Dinâmica dos Instrumentos

Definição

Descrição do comportamento dinâmico do instrumento, ou seja, especificação do comportamento temporal da variável observada/controlada como consequência direta da variação da grandeza que está sendo medida/manipulada.

Os instrumentos são, antes de mais nada, sistemas dinâmicos.

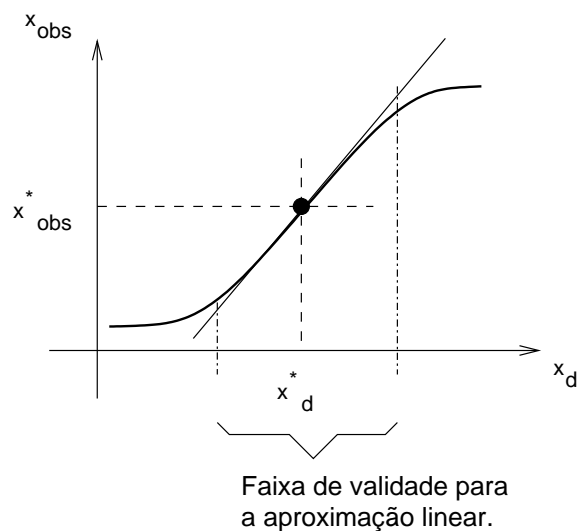


$$\begin{cases} \dot{x} & = f(x, x_d, u_{int}, u_{mod}); \\ x_{obs} & = h(x, x_d, u_{int}, u_{mod}); \end{cases}$$

Análise via Linearização

Condição de equilíbrio:

$$\begin{cases} x & = x^*; \\ x_d & = x_d^*; \\ u_{\text{int}} & = u_{\text{int}}^*; \\ u_{\text{mod}} & = u_{\text{mod}}^*; \end{cases}$$



Tem-se que:

$$\begin{cases} \dot{x} & = f(x^*, x_d^*, u_{\text{int}}^*, u_{\text{mod}}^*) = 0; \\ x_{\text{obs}}^* & = h(x^*, x_d^*, u_{\text{int}}^*, u_{\text{mod}}^*); \end{cases}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do instrumento.

Análise via Linearização - cont.

Hipóteses:

1. O instrumento está na condição de equilíbrio,
2. $d(u_{\text{int}})/dt \approx 0$ e $d(u_{\text{mod}})/dt \approx 0$.

$$\begin{aligned}\delta x_d &= x_d - x_d^*; \\ \delta x_{\text{obs}} &= x_{\text{obs}} - x_{\text{obs}}^*;\end{aligned}$$

Expansão em série de Taylor em torno da condição de equilíbrio:

$$\begin{cases} \delta \dot{x} & \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_d - x_d^*); \\ \delta x_{\text{obs}} & \approx \frac{\partial h}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial h}{\partial x_d}(x_d - x_d^*); \end{cases}$$
$$\begin{cases} \delta \dot{x} & \approx A \delta x + B \delta x_d; \\ \delta x_{\text{obs}} & \approx C \delta x + D \delta x_d; \end{cases} \quad (1)$$

A validade desta expansão depende da excursão total de δx_d e de δx_{obs} , e do grau de não linearidade de $f(\cdot)$ e de $h(\cdot)$.

Análise via Linearização - cont.

A partir de (1) podemos obter a seguinte relação entrada-saída:

$$a_n \frac{d^n(\delta x_{\text{obs}})}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d(\delta x_{\text{obs}})}{dt} + a_0 \delta x_{\text{obs}} = \\ b_p \frac{d^p(\delta x_d)}{dt^p} + \dots + b_1 \frac{d(\delta x_d)}{dt} + b_0 \delta x_d;$$

sendo n a ordem do instrumento, que corresponde ao número de estados necessários para caracterizar completamente seu comportamento dinâmico.

Os coeficientes a_i , $0 \leq i \leq n$, e b_j , $0 \leq j \leq p$, são determinados a partir das matrizes A , B , C e D em (1).

Aplicando a transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

a ambos os lados da equação, obtém-se a função de transferência do instrumento:

$$G(s) = \frac{X_{\text{obs}}(s)}{X_d(s)} = \frac{\mathcal{L}\{\delta x_{\text{obs}}(t)\}}{\mathcal{L}\{\delta x_d(t)\}},$$

$$G(s) = \frac{b_p s^p + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (2)$$

Resposta em Frequência

Suponha a seguinte variação no sinal de entrada do instrumento:

$$\begin{aligned}\delta x_d(t) &= \cos(\omega t), \\ &= \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}),\end{aligned}$$

Para cada componente do sinal δx_d , temos:

$$\begin{aligned}X_{\text{obs}}^1(s) &= G(s)X_d^1(s), \\ &= G(s) \left(\frac{1/2}{s - j\omega} \right), \\ G(s) \left(\frac{1/2}{s - j\omega} \right) &= \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{M_1}{s - j\omega},\end{aligned}$$

$$M_1 = \lim_{s \rightarrow j\omega} [G(s)X_d(s)](s - j\omega),$$

$$M_1 = \frac{G(j\omega)}{2}.$$

Analogamente:

$$X_{\text{obs}}^2(s) = G(s) \left(\frac{1/2}{s + j\omega} \right) = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{M_2}{s + j\omega},$$

$$M_2 = \frac{G(-j\omega)}{2} = M_1^*.$$

Resposta em Frequência - cont.

Se o instrumento for estável, então sua resposta natural tenderá a desaparecer com o tempo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} \right\} = 0$$

Portanto, a variação forçada do sinal observado no instrumento será:

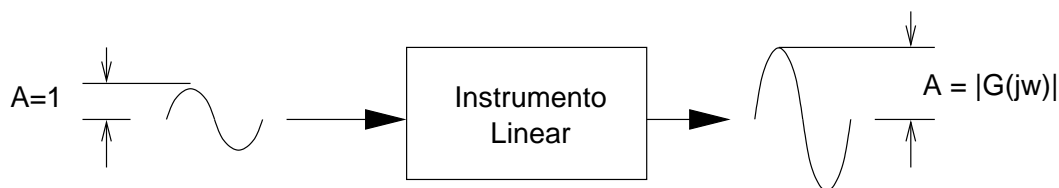
$$\begin{aligned} \delta x_{\text{obs}}(t)|_{t \gg 0} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{M_1}{s - j\omega} + \frac{M_1^*}{s + j\omega} \right\}, \\ &= M_1 e^{j\omega t} + M_1^* e^{-j\omega t} \\ &= M_1 e^{j\omega t} + (M_1 e^{j\omega t})^*, \\ &= 2\text{Re}\{M_1 e^{j\omega t}\} = 2\text{Re} \left\{ \frac{G(j\omega)}{2} e^{j\omega t} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x_{\text{obs}}(t)|_{t \gg 0} &= \text{Re}\{G(j\omega) e^{j\omega t}\}, \\ &= \text{Re}\{G(j\omega)\} \cos(\omega t) - \text{Im}\{G(j\omega)\} \sin(\omega t), \end{aligned}$$

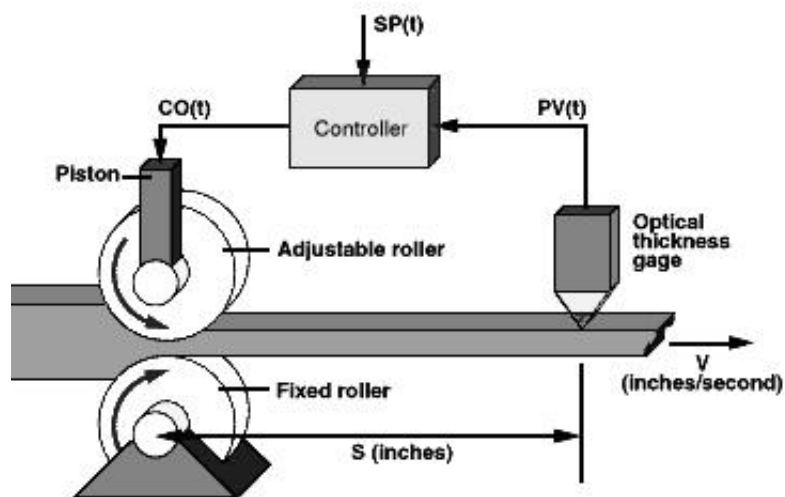
A expressão anterior pode ser expressa como:

$$\delta x_{\text{obs}}(t)|_{t \gg 0} = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi);$$

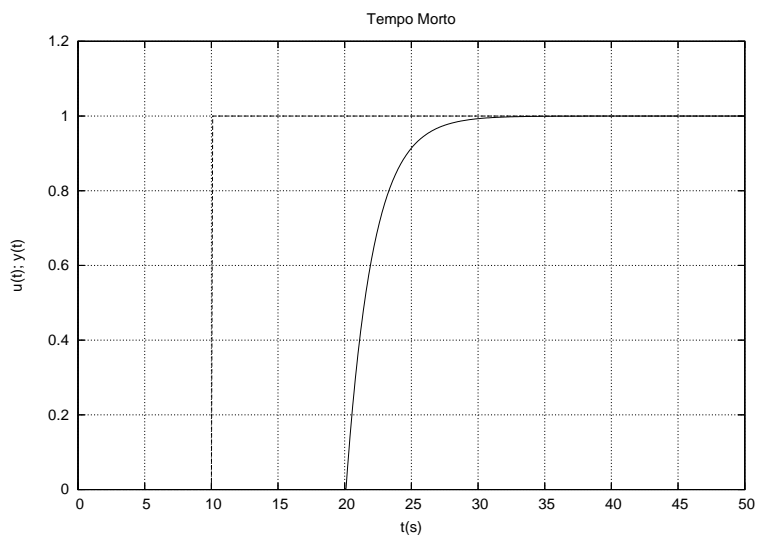
sendo $\phi = \text{atan}(\text{Re}\{G(j\omega)\} / \text{Im}\{G(j\omega)\})$.



Tempo Morto



$$G(s) = e^{-\tau s}$$



$$G' = \frac{e^{-10s}}{2s + 1}$$

Tempo Morto (cont.)

Aproximações de alta ordem

1. Primeira tentativa:

$$\begin{aligned}G(s) &= e^{-\tau s}, \\ &= \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{1 + \tau s + \tau^2 \frac{s^2}{2!} + \tau^3 \frac{s^3}{3!} + \dots},\end{aligned}$$

$$G(s) \approx \frac{1}{1 + \tau s + \tau^2 \frac{s^2}{2!} + \dots + \tau^N \frac{s^N}{N!}}$$

→ só funciona até 4ª ordem. Para ordens $> 4 \Rightarrow$ instabilidade.

2. Segunda Tentativa:

$$\begin{aligned}e &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}; \\ e^{-\tau s} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{-\tau s/x}.\end{aligned}$$

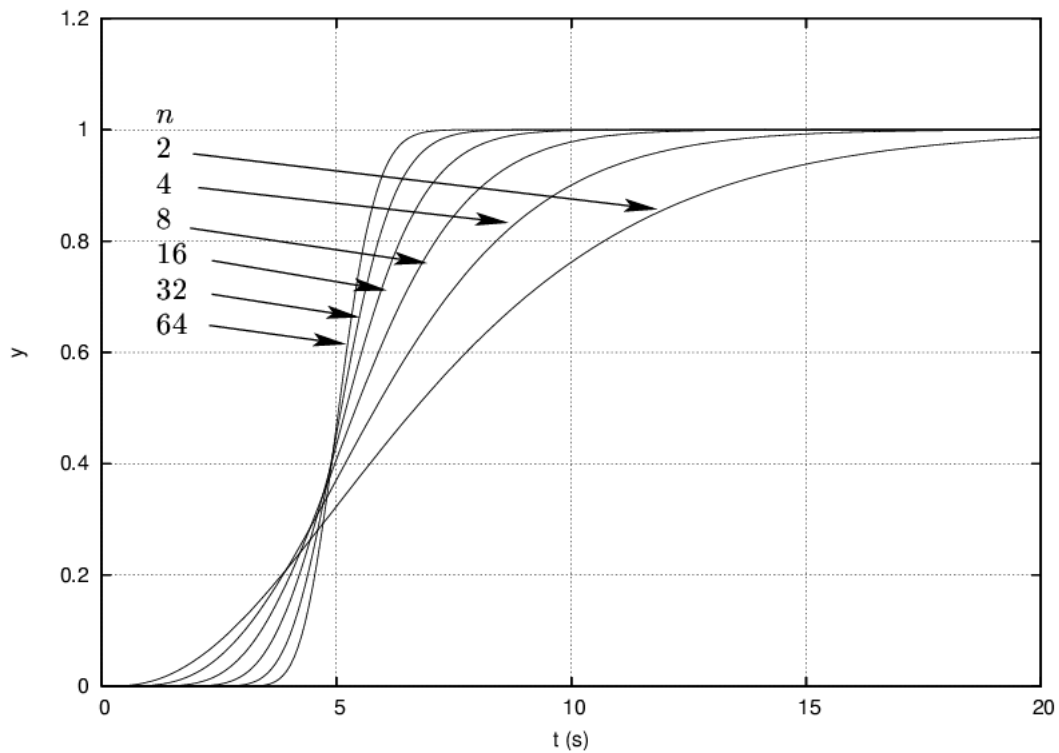
Fazendo $x = \tau s/n$, tem-se que:

$$G(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tau s}{n}\right)^{-n},$$

e, portanto,

$$G(s) \approx \frac{1}{\left(\frac{\tau}{n} + 1\right)^n},$$

Tempo Morto (cont.)



$$G(s) = e^{-\tau s},$$

$$G(s) \approx \frac{1}{\left(\frac{\tau}{n} + 1\right)^n},$$

Tempo Morto (cont.)

3. Terceira Tentativa:

A Aproximação de Padé

Útil não somente para aproximar atrasos puros de tempo, mas para quaisquer funções de transferência de alta ordem:

$$G(s) \approx G_{m,n}(s),$$

$$G_{m,n}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 s + 1}$$

Para o caso de $G(s) = e^{-\tau s}$:

$$b_k = (-\tau)^k \left[\frac{(m+n-k)!}{(m+n)!k!} \right] \frac{m!}{(m-k)!},$$

$$k = 0, 1, \dots, m$$

$$a_k = (-\tau)^k \left[\frac{(m+n-k)!}{(m+n)!k!} \right] \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

O Preditor de Smith

Usado para melhorar o desempenho de controladores em sistemas que incluem o efeito do atraso puro de tempo:

