Introdução ao Controle Automático de Aeronaves

Matriz de Sensibilidade Modal

Leonardo Tôrres

torres@cpdee.ufmg.br

Escola de Engenharia – Universidade Federal de Minas Gerais/EEUFMG

Análise Modal – Motivação

Um sistema dinâmico linear descrito por:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\Delta\vec{x}) & \approx & A(\Delta\vec{x}) + B(\Delta\vec{u}), \\ \Delta\vec{y} & \approx & C(\Delta\vec{x}) + D(\Delta\vec{u}) \end{cases}$$

sendo $\Delta\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ seu vetor de estados, apresenta uma resposta temporal dada por:

$$t \geq 0 \Rightarrow \Delta\vec{x}(t) = e^{At}(\Delta\vec{x}(0)) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B(\Delta\vec{u}(\tau))d\tau$$

Será que é possível simplificar a análise desta resposta temporal?

Análise Modal – Autovetores e Autovalores

Autovalores λ_i e autovetores $\vec{v}_i$ de uma matriz A, são escalares e vetores coluna $n \times 1$, respectivamente, que satisfazem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \lambda_1\vec{v}_1; \\ A\vec{v}_2 &= \lambda_2\vec{v}_2; \\ &\vdots \\ A\vec{v}_i &= \lambda_i\vec{v}_i; \\ &\vdots \\ A\vec{v}_n &= \lambda_n\vec{v}_n; \end{aligned}$$

Análise Modal – Autovetores e Autovalores

As relações anteriores podem ser representadas em forma matricial como:

$$A \underbrace{\left[\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \ \dots \ \vec{v}_n\right]}_{M} = \underbrace{\left[\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \ \dots \ \vec{v}_n\right]}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

Ou seja,

$$\boxed{AM = M\Lambda}$$

sendo $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ uma matriz diagonal, caso os autovalores sejam todos distintos.

Análise Modal – Autovetores e Autovalores

Se houver autovalores repetidos, em alguns casos será preciso considerar uma matriz bloco-diagonal especial, com blocos contendo o valor “1” acima da diagonal, chamada de *Forma de Jordan*.

Nos slides subsequentes adotaremos a simplificação de que *todos os autovalores de* A *são distintos*.

Análise Modal – Autovetores e Autovalores

É possível escrever então que

$$A = M\Lambda M^{-1},$$

isto é,

$$A = \underbrace{[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ldots\ \vec{v}_n]}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{w}_1^\top \\ \vec{w}_2^\top \\ \vdots \\ \vec{w}_n^\top \end{bmatrix}}_{M^{-1}}$$

Tendo definido a inversa de M a partir dos vetores linha $\vec{w}_i^\top$ (dimensão $1 \times n$), tal que

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{w}_1^\top \\ \vec{w}_2^\top \\ \vdots \\ \vec{w}_n^\top \end{bmatrix},$$

e lembrando que $M^{-1}M = I$, podemos escrever que

$$\vec{w}_i^\top . \vec{v}_j = \delta_{ij},$$

sendo δ_{ij} o delta de Kronecker: $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

Decomposição Modal

Como os autovetores formam uma base para o espaço $\mathbb{R}^n$, isto é, são um conjunto L.I. de vetores, é possível representar a variação $\Delta\vec{x}$ como uma soma ponderada dos autovetores (as auto-direções):

$$\Delta\vec{x} = \vec{v}_1 z_1 + \vec{v}_2 z_2 + \ldots + \vec{v}_n z_n,$$

ou seja,

$$\Delta\vec{x}(t) = \underbrace{[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \ \ldots \ \ \vec{v}_n]}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}}_{\vec{z}} .$$

Decomposição Modal

As variáveis $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são os chamados *modos dinâmicos* do sistema:

$$\boxed{\Delta\vec{x}(t) = M\vec{z}}$$

É possível escrever que:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\vec{x}}{dt} &= A\Delta\vec{x} + B\Delta\vec{u}, \\ M\frac{d\vec{z}}{dt} &= AM\vec{z} + B\Delta\vec{u}, \\ \dot{\vec{z}} &= \underbrace{M^{-1}AM}_{\Lambda}\,\vec{z} + \underbrace{M^{-1}B}_{B'}\,\Delta\vec{u} \end{aligned}$$

Decomposição Modal

Portanto, representado o desvio do equilíbrio como uma soma ponderada de movimentos nas direções definidas pelos autovetores da matriz A, tem-se que:

$$\dot{\vec{z}} = \Lambda \vec{z} + B' \Delta \vec{u}$$

Ou seja, obtém-se um conjunto de simples equações de $1^{\underline{a}}$ ordem desacopladas:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + (\vec{w}_1^\top B \Delta \vec{u}); \\
\dot{z}_2 &= \lambda_1 z_2 + (\vec{w}_2^\top B \Delta \vec{u}); \\
&\dots \\
\dot{z}_n &= \lambda_n z_n + (\vec{w}_n^\top B \Delta \vec{u});
\end{aligned}$$

Decomposição Modal

Podemos então facilmente escrever que, para $t \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &= e^{\lambda_1 t} z_1(0) + \int_0^t e^{\lambda_1 (t-\tau)} (\vec{w}_1^\top B \Delta \vec{u}(\tau)) d\tau, \\
z_2(t) &= e^{\lambda_2 t} z_2(0) + \int_0^t e^{\lambda_2 (t-\tau)} (\vec{w}_2^\top B \Delta \vec{u}(\tau)) d\tau, \\
&\vdots \\
z_n(t) &= e^{\lambda_n t} z_n(0) + \int_0^t e^{\lambda_n (t-\tau)} (\vec{w}_n^\top B \Delta \vec{u}(\tau)) d\tau.
\end{aligned}
$$

Decomposição Modal

A expressão anterior é equivalente a:

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &= e^{\lambda_1 t}\vec{w}_1^\top \Delta\vec{x}(0) + \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}(\vec{w}_1^\top B\Delta\vec{u}(\tau))d\tau, \\
z_2(t) &= e^{\lambda_2 t}\vec{w}_2^\top \Delta\vec{x}(0) + \int_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)}(\vec{w}_2^\top B\Delta\vec{u}(\tau))d\tau, \\
&\vdots \\
z_n(t) &= e^{\lambda_n t}\vec{w}_n^\top \Delta\vec{x}(0) + \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)}(\vec{w}_n^\top B\Delta\vec{u}(\tau))d\tau,
\end{aligned}
$$

a partir da qual percebemos que, caso $\Delta\vec{u} = 0$ e $\Delta\vec{x}(0) = k\vec{v}_j$ (desvio inicial na direção do autovetor $\vec{v}_j$), somente o modo $z_j(t) \neq 0$, i.e. será visível.

Matriz de Sensibilidade Modal

Uma vez que a evolução do desvio $\Delta\vec{x}$ ao longo do tempo depende da evolução dos modos dinâmicos $z_1, z_2, \ldots, z_n$; seria possível quantificar a importância de um dado modo dinâmico z_j sobre o desvio inicial de uma variável de estado específica k, supondo que somente esta variável de estado k foi perturbada inicialmente?

$$\boxed{\text{Matriz de Sensibilidade Modal}}$$

Para fins dessa análise, vamos supor que $\Delta\vec{u} = 0$.

Matriz de Sensibilidade Modal

Seja o desvio inicial $\Delta\vec{x}(0)$ dado por:

$$\Delta\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1(0) \\ \Delta x_2(0) \\ \vdots \\ \Delta x_{i-1}(0) \\ \Delta x_i(0) \\ \Delta x_{i+1}(0) \\ \vdots \\ \Delta x_n(0) \end{bmatrix}$$

Matriz de Sensibilidade Modal

Portanto, uma perturbação δ na i-ésima variável de estado, e supondo entradas nulas ($\Delta\vec{u} = 0$), produz as seguintes evoluções para os modos dinâmicos:

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &= e^{\lambda_1 t} w_{1i} \delta \\
z_2(t) &= e^{\lambda_2 t} w_{2i} \delta \\
&\vdots \\
z_j(t) &= e^{\lambda_2 t} w_{ji} \delta \\
&\vdots \\
z_n(t) &= e^{\lambda_n t} w_{ni} \delta
\end{aligned}
$$

Matriz de Sensibilidade Modal

Neste caso, a evolução do desvio Δx_i da i-ésima variável, em relação a condição de equilíbrio:

$$\Delta \vec{x}(t) = M\vec{z}(t) = \vec{v}_1 z_1(t) + \vec{v}_2 z_2(t) + \ldots + \vec{v}_n z_n(t),$$

$$\Rightarrow \Delta x_i(t) = v_{i1} z_1(t) + v_{i2} z_2(t) + \ldots + v_{in} z_n(t),$$

poderá ser escrita como:

$$\begin{aligned} \Delta x_i(t) \quad = \quad & e^{\lambda_1 t}\left(w_{1i} v_{i1}\right)\delta + e^{\lambda_2 t}\left(w_{2i} v_{i2}\right)\delta + \ldots + \\ & e^{\lambda_j t}\left(w_{ji} v_{ij}\right)\delta + \ldots + \\ & e^{\lambda_n t}\left(w_{ni} v_{in}\right)\delta; \end{aligned}$$

Matriz de Sensibilidade Modal

Isto é, a importância do j-ésimo modo dinâmico sobre a evolução temporal da i-ésima variável de estado, supondo uma perturbação inicial somente nesta variável, é determinada pelo fator:

$$w_{ji}v_{ij} = v_{ij}w_{ji}$$

Tais fatores são os elementos da chamada *Matriz de Sensibilidade Modal* S_{M}:

$$\boxed{S_{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} v_{11}w_{11} & v_{12}w_{21} & \cdots & v_{1n}w_{n1} \\ v_{21}w_{12} & v_{22}w_{22} & \cdots & v_{2n}w_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1}w_{1n} & v_{n2}w_{2n} & \cdots & v_{nn}w_{nn} \end{bmatrix} = M \odot \{M^{\top}\}^{-1},}$$

sendo que $\odot$ é o produto de Hadamard (ou de Schur; produto elemento a elemento de duas matrizes). No MATLAB: `Sm = real(M.*(inv(M.')));`

Exemplo: Dinâmica Longitudinal de uma Aeronave F-16

Suponha um caça F-16 operando na seguinte condição de vôo:

- Estados ($n = 5$):
  1. Velocidade $V_{\mathrm{T}} = 1500\,\mathrm{km/h}$;
  2. Ângulo de ataque: $\alpha = -2{,}23^o$;
  3. Ângulo de arfagem: $\theta = -2{,}23^o$;
  4. Velocidade angular de arfagem: $Q = 0\,\mathrm{rad/s}$;
  5. Altitude: $H = 10\,\mathrm{km}$.

Exemplo: Dinâmica Longitudinal F-16

A matriz A correspondente a esta condição de voo é:

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}0283 & 37{,}0008 & -9{,}8070 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}1950 & 0 & 0{,}9593 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0 \\ 0{,}0029 & -25{,}8381 & 0 & -1{,}2093 & 0 \\ 0 & -416{,}6667 & 416{,}6667 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores podem ser associados a diferentes modos dinâmicos:

- $\lambda_{1,2} = -1{,}2036 \pm j4{,}9788$, associados ao modo de oscilações rápidas e mais amortecido, conhecido como *período curto*;
- $\lambda_{3,4} = -0{,}0127 \pm j0{,}0338$, associados ao modo de oscilações lentas e pouco amortecidas, conhecido como *fugóide*;
- $\lambda_5 = 0$, associado a integração pura que conduz da velocidade vertical à variável Altitude.

Exemplo: F-16

A fim de nos concentrarmos apenas na análise da importância dos modos fugóide e período curto, eliminaremos a variável de estado "Altitude H" do modelo. Isto pode ser feito porque H é obtida pela integração de uma combinação linear das outras variáveis de estado remanescentes, e seu valor não afeta as demais variáveis (última coluna de zeros à direita).

Neste caso, passamos a ter um sistema dinâmico de ordem $n = 4$, com matriz:

$$A_{\text{red}} = \begin{bmatrix} -0{,}0283 & 37{,}0008 & -9{,}8070 & 0 \\ 0 & -1{,}1950 & 0 & 0{,}9593 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 \\ 0{,}0029 & -25{,}8381 & 0 & -1{,}2093 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são os mesmos $\lambda_{1,2} = -1{,}2036 \pm j4{,}9788$ (período curto) e $\lambda_{3,4} = -0{,}0127 \pm j0{,}0338$ (fugóide).

Exemplo: F-16

Agora estamos prontos para responder a seguinte pergunta:

Para uma dada variação abrupta na condição de voo em $t = t_0$, i.e. $\Delta\vec{x}(t_0) \neq 0$, que modos dinâmicos serão mais importantes para explicar as evoluções de cada um dos desvios das variáveis de estado V_{T}, α, θ e Q em relação aos seus valores de equilíbrio, caso aconteça uma perturbação?

Para responder esta pergunta, calcularemos a matriz de Sensibilidade Modal S_{M} associada a A_{red}.

Exemplo: F-16

Para calcular a matriz de Sensibilidade Modal, obtém-se uma matriz cujas colunas são os autovetores de A_{red}. No MATLAB:

```
[M,D] = eig(A);
```

sendo M a matriz desejada.
A matriz S_{M} será:

$$S_{\mathrm{M}} = \mathrm{real}\left\{M \odot \{M^{\top}\}^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}4999 & 0{,}4999 \\ 0{,}5000 & 0{,}5000 & -0{,}0000 & -0{,}0000 \\ -0{,}0001 & -0{,}0001 & 0{,}5001 & 0{,}5001 \\ 0{,}5000 & 0{,}5000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix}.$$

O operador “real” foi usado por questões numéricas, para se obter apenas a parte real do cálculo. Isto é, se não houvesse imprecisões numéricas, isto não seria necessário.

Exemplo: F-16

Interpretação do Resultado: matriz S_{M}

$$
\begin{array}{rcccc}
\Delta V_{\mathrm{T}} \rightarrow & 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}4999 & 0{,}4999 \\
\Delta \alpha \rightarrow & 0{,}5000 & 0{,}5000 & -0{,}0000 & -0{,}0000 \\
\Delta \theta \rightarrow & -0{,}0001 & -0{,}0001 & 0{,}5001 & 0{,}5001 \\
\Delta Q \rightarrow & 0{,}5000 & 0{,}5000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\
. & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
. & \lambda_1^{\text{per.c.}} & \lambda_2^{\text{per.c.}} & \lambda_3^{\text{fug}} & \lambda_4^{\text{fug}}
\end{array}
$$

Portanto:

- O modo período curto é o modo dinâmico mais importante para explicar as variações de ângulo de ataque $\Delta\alpha$ e de velocidade angular de arfagem ΔQ ao longo do tempo;
- E o modo fugóide é o modo dinâmico mais importante para explicar as variações de velocidade ΔV_{T} e de ângulo de arfagem $\Delta\theta$.