



Introdução ao Controle Automático de Aeronaves

Condições de Equilíbrio de Vôo. Linearização.

Leonardo Tôrres

`torres@cpdee.ufmg.br`

Escola de Engenharia – Universidade Federal de Minas Gerais/EEUFMG

Condições de Equilíbrio de Vôo

Para um sistema dinâmico não linear qualquer,

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u});$$

onde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^p$; é importante conhecer as condições em que o sistema se encontra em equilíbrio, isto é, em que situações, para entradas \vec{u} constantes, seus estados permanecem fixos em seus valores iniciais:

Condições de equilíbrio $\vec{x}_0 = \vec{x}^{\text{eq}}$ e $\vec{u}_0 = \vec{u}^{\text{eq}}$

$$\Rightarrow f(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}}) = 0.$$

e, portanto, $\dot{\vec{x}} = 0$.

Condições de Equilíbrio de Vôo

Para o caso do movimento longitudinal de uma aeronave, ignorando-se o efeito de ventos, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_T = \frac{1}{m} [F_T \cos(\alpha + \alpha_T) - D] - g_0 \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{\alpha} = \frac{1}{mV_T} [-F_T \sin(\alpha + \alpha_T) - L] + \frac{1}{V_T} g_0 \cos(\theta - \alpha) + Q; \\ \dot{\theta} = Q; \\ \dot{Q} = \frac{M_y}{J_{yy}}; \\ \dot{H} = V_T \sin(\theta - \alpha); \end{array} \right.$$

e lembrando que $L = L(V_T, \rho, \alpha, \delta_{\text{elev}}, \dots)$, $D = D(V_T, \rho, \alpha, \delta_{\text{elev}}, \dots)$,
 $M_y = M_y(V_T, \rho, \alpha, \delta_{\text{elev}}, \delta_{\text{th}}, \dots)$ e $F_T = F_T(\delta_{\text{th}}, V_T, \rho, \dots)$; podemos escrever:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} V_T \\ \alpha \\ \theta \\ Q \\ H \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} \delta_{\text{elev}} \\ \delta_{\text{th}} \end{bmatrix}$$

Condições de Equilíbrio de Vôo

Encontrar as condições de equilíbrio, para o movimento longitudinal, significa buscar os valores \vec{x}^{eq} , para uma dada entrada \vec{u}^{eq} , tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{m} [F_T^{eq} \cos(\alpha^{eq} + \alpha_T) - D^{eq}] - g_0 \sin(\theta^{eq} - \alpha^{eq}) \\ 0 = \frac{1}{mV_T^{eq}} [-F_T^{eq} \sin(\alpha^{eq} + \alpha_T) - L^{eq}] + \frac{1}{V_T^{eq}} g_0 \cos(\theta^{eq} - \alpha^{eq}) + Q^{eq}; \\ 0 = Q^{eq}; \\ 0 = \frac{M_y^{eq}}{J_{yy}}; \\ 0 = V_T^{eq} \sin(\theta^{eq} - \alpha^{eq}); \end{array} \right.$$

Como $V_T^{eq} \neq 0$ (o avião não está parado na pista!), da última equação deduz-se que:

$$\gamma^{eq} = \theta^{eq} - \alpha^{eq} = 0 \Rightarrow \theta^{eq} = \alpha^{eq}. \quad (1)$$

Da 3ª equação, deduz-se que:

$$Q^{eq} = 0. \quad (2)$$

Condições de Equilíbrio de Vôo

Além disso, da 4ª equação, tem-se que o momento total de arfagem deve se anular na condição de equilíbrio:

$$M_y^{\text{eq}} = 0; \quad (3)$$

isto é, $M_y^{\text{eq}} = m (V_T^{\text{eq}}, H^{\text{eq}}, \alpha^{\text{eq}}, \delta_{\text{elev}}^{\text{eq}}, \delta_{\text{th}}^{\text{eq}}) = 0$.

Da 1ª equação, conclui-se que a força de tração para frente deve se equilibrar com o arrasto produzido:

$$F_T^{\text{eq}} \cos(\alpha^{\text{eq}} + \alpha_T) = D^{\text{eq}}; \quad (4)$$

E a partir da 2ª equação, conclui-se que a força total para cima deve se equilibrar com a força peso da aeronave:

$$mg_0 = F_T^{\text{eq}} \text{sen}(\alpha^{\text{eq}} + \alpha_T) + L^{\text{eq}} \quad (5)$$

Condições de Equilíbrio de Vôo

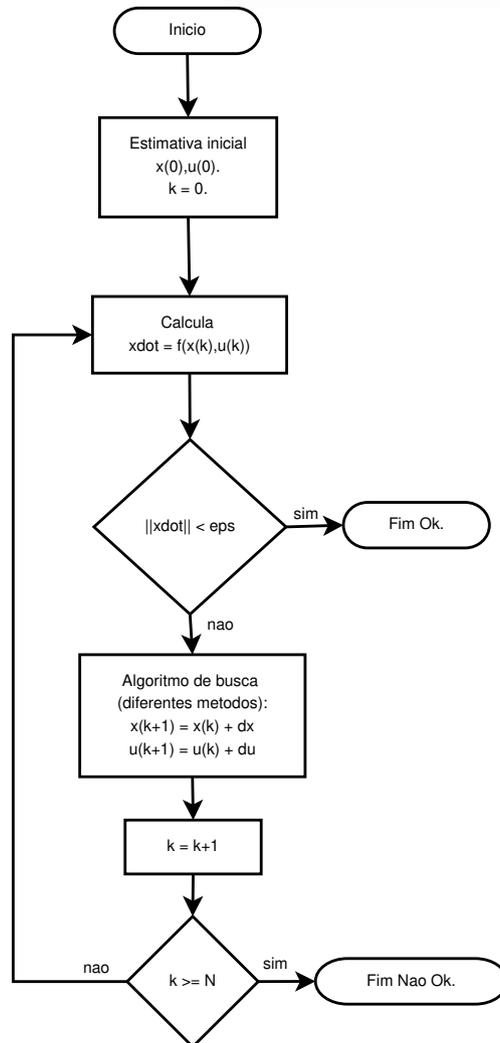
No caso do movimento longitudinal, podemos imaginar o seguinte problema prático:

Dadas a altitude H^{eq} e a velocidade V_T^{eq} , encontre o ângulo de arfagem θ^{eq} , e os comandos de profundor δ_{elev}^{eq} e de tração δ_{th}^{eq} que permitem que o avião voe em linha reta (altitude constante) e com asas niveladas.

No problema acima, os estados V_T^{eq} , Q^{eq} e H^{eq} já são conhecidos. E como $\theta^{eq} = \alpha^{eq}$, é preciso determinar somente mais o estado θ^{eq} , além de duas entradas de comando. Portanto, há 3 variáveis a determinar e 3 equações não lineares: (3), (4) e (5); a serem satisfeitas.

Usar métodos de otimização!

Condições de Equilíbrio de Vôo



Como podem ser obtidas numericamente, via MATLAB:

1. Desenhar o diagrama de simulação do sistema, incluindo símbolos de “*input ports*” e “*output ports*” para marcar as entradas e as saídas, respectivamente.
2. Usar a função `trim` do MATLAB: essa função irá executar procedimento semelhante ao algoritmo mostrado no fluxograma ao lado. Os estados e as entradas serão variados até que se encontrem $\vec{x}^{eq}, \vec{u}^{eq}$ tais que $\|f(\vec{x}^{eq}, \vec{u}^{eq})\| < \epsilon \approx 0$.

Estabilidade em torno do Equilíbrio

Em Eng. Aeronáutica há 2 tipos de estabilidade:

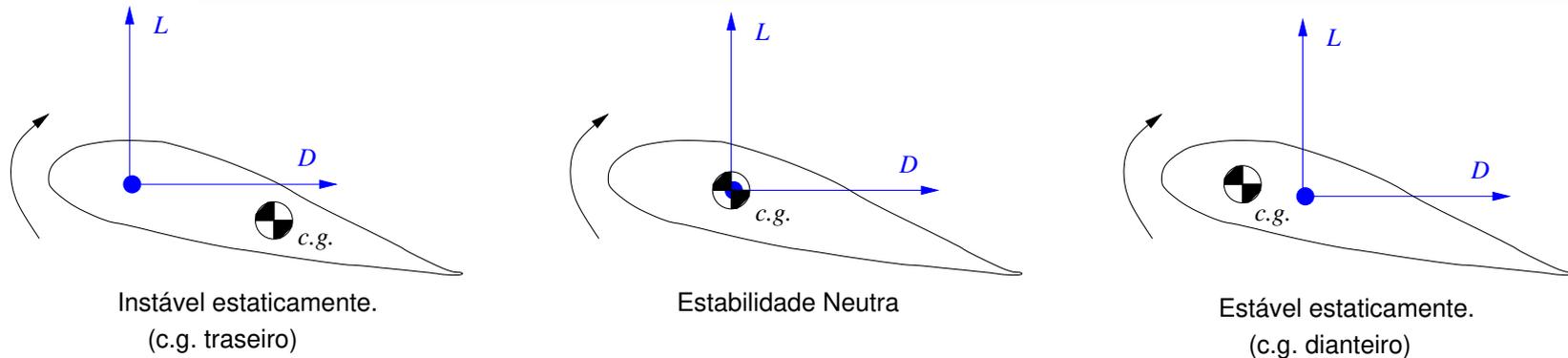
⑥ Estabilidade Estática

1. Estaticamente Estável: uma pequena alteração na condição de equilíbrio conduz a uma imediata *tendência* a retornar para a condição de equilíbrio. Isto é, as forças e momentos surgem com direções e sentidos que apontam para o retorno à condição de equilíbrio.
2. Estabilidade Neutra: uma pequena alteração na condição de equilíbrio permanece indefinidamente.
3. Estaticamente Instável: uma pequena alteração na condição de equilíbrio produz forças e momentos com direções e sentidos que impedem o retorno à condição de equilíbrio, causando divergência.

⑥ Estabilidade Dinâmica (comportamento dinâmico linear local)

1. Estável: autovalores (pólos) no semi-plano esquerdo do plano complexo.
2. Marginalmente Estável: autovalores simples com parte real nula.
3. Instável: existência de autovalores com parte real positiva, ou autovalores de multiplicidade > 1 e parte real nula.

Estabilidade em torno do Equilíbrio



Instabilidade Estática \Rightarrow Instabilidade Dinâmica.

Estabilidade Estática \nRightarrow Estabilidade Dinâmica.

Comportamento Linear Local

Para determinar a estabilidade dinâmica de uma aeronave, para uma dada condição de equilíbrio, é preciso analisar o *Comportamento Linear Local*.

O que é isto?

Resp.: É o comportamento dinâmico das variáveis de estado, ao longo do tempo, após uma pequena perturbação em torno da condição de equilíbrio. Exemplo: sabendo que para $\delta_{\text{elev}}^{\text{eq}}(0) = 12,3^\circ$, $\theta^{\text{eq}} = 2,3^\circ$, como evoluirá $\theta(t)$, ao longo do tempo, para uma mudança em degrau no comando de profundor tal que $\delta_{\text{elev}}(t) = 13,3^\circ$, para $t > 0$?

Como podemos analisar o comportamento linear local?

Resp.: Através da linearização das equações do sistema dinâmico em torno da condição de equilíbrio.

Análise Dinâmica via Linearização

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= f(\vec{x}, \vec{u}); \\ \Delta \vec{x} &= \vec{x} - \vec{x}^{\text{eq}}; \\ \Delta \vec{u} &= \vec{u} - \vec{u}^{\text{eq}}; \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Delta \vec{x}) &= \frac{d}{dt}(\vec{x} - \vec{x}^{\text{eq}}) = \frac{d}{dt}(\vec{x}) \\ &= f(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}}) + \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right]_{\vec{x}^{\text{eq}}; \vec{u}^{\text{eq}}} \Delta \vec{x} + \left[\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \right]_{\vec{x}^{\text{eq}}; \vec{u}^{\text{eq}}} \Delta \vec{u} + \dots\end{aligned}$$

Como, por definição, $f(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}}) = 0$, tem-se que:

$$\frac{d}{dt}(\Delta \vec{x}) \approx A(\Delta \vec{x}) + B(\Delta \vec{u}).$$

sendo $A = \left[\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right]_{\vec{x}^{\text{eq}}; \vec{u}^{\text{eq}}}$ e $B = \left[\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \right]_{\vec{x}^{\text{eq}}; \vec{u}^{\text{eq}}}$.

Análise Dinâmica via Linearização

De forma semelhante, supondo que as variáveis medidas \vec{y} do sistema, obedecem a:

$$\vec{y} = h(\vec{x}, \vec{u});$$

e que $\vec{y}^{\text{eq}} = h(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}})$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{y} &= \vec{y} - \vec{y}^{\text{eq}}; \\ &= \left\{ h(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}}) + \left[\frac{\partial h}{\partial \vec{x}} \right]_{\vec{x}^{\text{eq}}; \vec{u}^{\text{eq}}} \Delta \vec{x} + \left[\frac{\partial h}{\partial \vec{u}} \right]_{\vec{x}^{\text{eq}}; \vec{u}^{\text{eq}}} \Delta \vec{u} + \dots \right\} - \vec{y}^{\text{eq}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta \vec{y} \approx C(\Delta \vec{x}) + D(\Delta \vec{u})$$

$$\text{sendo } C = \left[\frac{\partial h}{\partial \vec{x}} \right]_{\vec{x}^{\text{eq}}; \vec{u}^{\text{eq}}} \text{ e } D = \left[\frac{\partial h}{\partial \vec{u}} \right]_{\vec{x}^{\text{eq}}; \vec{u}^{\text{eq}}}.$$

Linearização Numérica

Usando o diagrama de simulação implementado para um dado sistema dinâmico, com entradas, estados e saídas, é possível obter as matrizes A, B, C e D numericamente. Basta seguir os passos abaixo:

1. Encontrar as condições de equilíbrio \vec{x}^{eq} e \vec{u}^{eq} do sistema.
2. Mantendo $\vec{x} = \vec{x}^{\text{eq}}$ e $\vec{u} = \vec{u}^{\text{eq}}$, tome a variável de estado j , $j = 1, 2, 3, \dots, n$, e perturbe-a de $\pm\Delta x_j$, tal que:

$$\vec{x} + \Delta\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1^{\text{eq}} \\ x_2^{\text{eq}} \\ \vdots \\ x_j^{\text{eq}} \pm \Delta x_j \\ x_{j+1}^{\text{eq}} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow f(\vec{x} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) \\ f_2(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) \\ \vdots \\ f_j(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) \\ f_{j+1}(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) \end{bmatrix}$$

Linearização Numérica

3. A coluna j da matriz A poderá ser então obtida, usando o conceito de aproximação de derivadas por diferença finita, isto é:

$$\begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_j \\ \partial f_2 / \partial x_j \\ \vdots \\ \partial f_j / \partial x_j \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial x_j \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} (f_1(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) - f_1(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}})) / \Delta x_j \\ (f_2(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) - f_2(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}})) / \Delta x_j \\ \vdots \\ (f_j(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) - f_j(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}})) / \Delta x_j \\ \vdots \\ (f_n(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}}) - f_n(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}})) / \Delta x_j \end{bmatrix}$$

Como $f_i(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, a derivada parcial da função $f_i(\cdot)$ em relação a x_j pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\vec{x}^{\text{eq}} + \Delta\vec{x}, \vec{u}^{\text{eq}})}{\Delta x_j}$$

Evolução do Desvio $\Delta\vec{x}(t)$

Combinando as expressões anteriores, podemos escrever de maneira compacta:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\Delta\vec{x}) & \approx A(\Delta\vec{x}) + B(\Delta\vec{u}), \\ \Delta\vec{y} & \approx C(\Delta\vec{x}) + D(\Delta\vec{u}) \end{cases}$$

Observe que se partirmos da condição de equilíbrio $\vec{x}(0) = \vec{x}^{\text{eq}}$, a condição inicial do sistema linear acima será $\Delta\vec{x}(0) = 0$. De maneira geral, a solução do sistema linear pode ser obtida como:

$$t \geq 0 \Rightarrow \Delta\vec{x}(t) = e^{At}(\Delta\vec{x}(0)) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(\Delta\vec{u}(\tau)) d\tau$$

que mostra como o *desvio* $\Delta\vec{x}$ evoluirá ao longo do tempo, devido a variação $\Delta\vec{u}$ da entrada, em torno da entrada de equilíbrio.

Evolução do Desvio $\Delta\vec{y}(t)$

As variações $\Delta\vec{y}$ das saídas serão, para $t \geq 0$:

$$\Delta\vec{y}(t) = C\Delta\vec{x}(t) + D\Delta\vec{u},$$

$$\Delta\vec{y}(t) = Ce^{At}(\Delta\vec{x}(0)) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(\Delta\vec{u}(\tau))d\tau + D(\Delta\vec{u}(t)).$$

Portanto, as matrizes A, B, C e D determinarão unicamente o comportamento dinâmico linear local do desvio de uma dada condição de equilíbrio.