Introdução ao Controle Automático de Aeronaves

Momentos Aerodinâmicos. Atmosfera Padrão. Equações nos eixos do Vento. Dinâmica Longitudinal.

Leonardo Tôrres

torres@cpdee.ufmg.br

Escola de Engenharia – Universidade Federal de Minas Gerais/EEUFMG

Momentos Aerodinâmicos

Os momentos aerodinâmicos são determinados de maneira independente das forças aerodinâmicas:

$$\bar{L} = \bar{q} S_{\rm w} b_{\rm w} C_l \qquad \text{Rolamento;}$$
$$M = \bar{q} S_{\rm w} \bar{c}_{\rm w} C_m \qquad \text{Arfagem;}$$
$$N = \bar{q} S_{\rm w} b_{\rm w} C_n \qquad \text{Guinada;}$$

Os coeficientes C_l, C_m e C_n possuem tabelas próprias.

Obs.: (i) De forma semelhante aos coeficientes das forças aerodinâmicas, as deflexões δ_e, δ_a e δ_r das superfícies de controle irão produzir alterações nestes coeficientes, conduzindo ao surgimento de acelerações angulares. (ii) Envergadura: $b_{\rm w}$. Corda média da asa $\bar{c}_{\rm w}$.

Momento/Torque Total

Para determinar o momento total atuando no veículo, é preciso considerar as seguintes parcelas:

$$\begin{aligned}\vec{T}_{\mathrm{ABC}} &= \underbrace{[\bar{L}, M, N]^\top}_{\text{Momentos aero.}} + \left[(\vec{r}_{\text{aero. ref}} - \vec{r}_{\text{C.G.}}) \times \underbrace{\vec{F}_{\text{aero}}}_{\text{Forcas aero.}}\right] + \\ &+ \underbrace{\vec{T}_{\text{thrust}}}_{\text{Momento tracao}}\end{aligned} \quad (1)$$

sendo que $\vec{r}_{\text{aero. ref}}$ corresponde ao ponto, na estrutura da aeronave, em relação ao qual se mediu, originalmente, os momentos aerodinâmicos e as forças aerodinâmicas. Ou seja, originalmente $\vec{r}_{\text{aero. ref}} = \vec{r}_{C.G.}$. Entretanto, como o C.G. pode mudar de lugar, as forças aerodinâmicas podem produzir momentos adicionais.

Momento da Força de Tração

O momento produzido pelo motor depende da posição do propulsor (hélice ou bocal do jato) em relação ao C.G.:

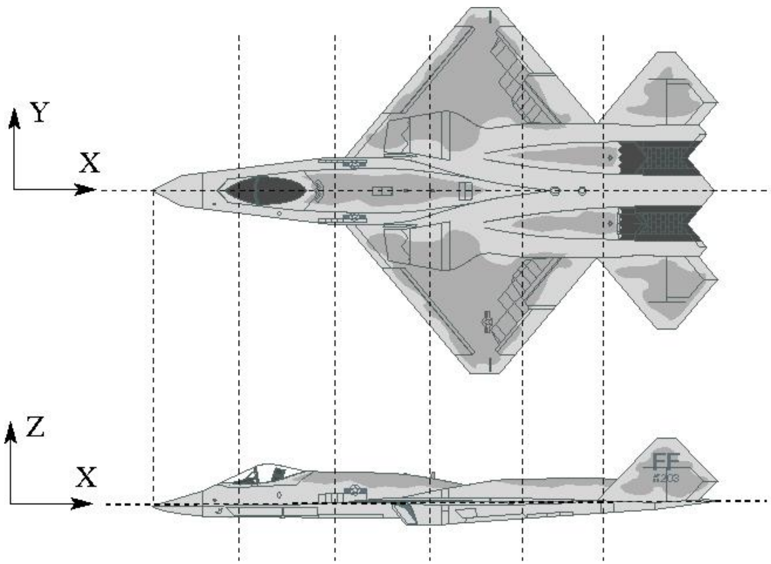
$$\vec{T}_{\text{thrust}} = (\vec{r}_{\text{motor}} - \vec{r}_{\text{C.G.}}) \times \vec{F}_{\text{thrust}}$$

Alguns casos:

- Motores abaixo do C.G. tendem a produzir momento de arfagem positivo.
- Motores no alto da empenagem vertical tendem a produzir momento de arfagem negativo.
- Em uma aeronave bimotor, a perda de um motor irá produzir momento de guinada.

Sistema de Coordenadas Estrutural

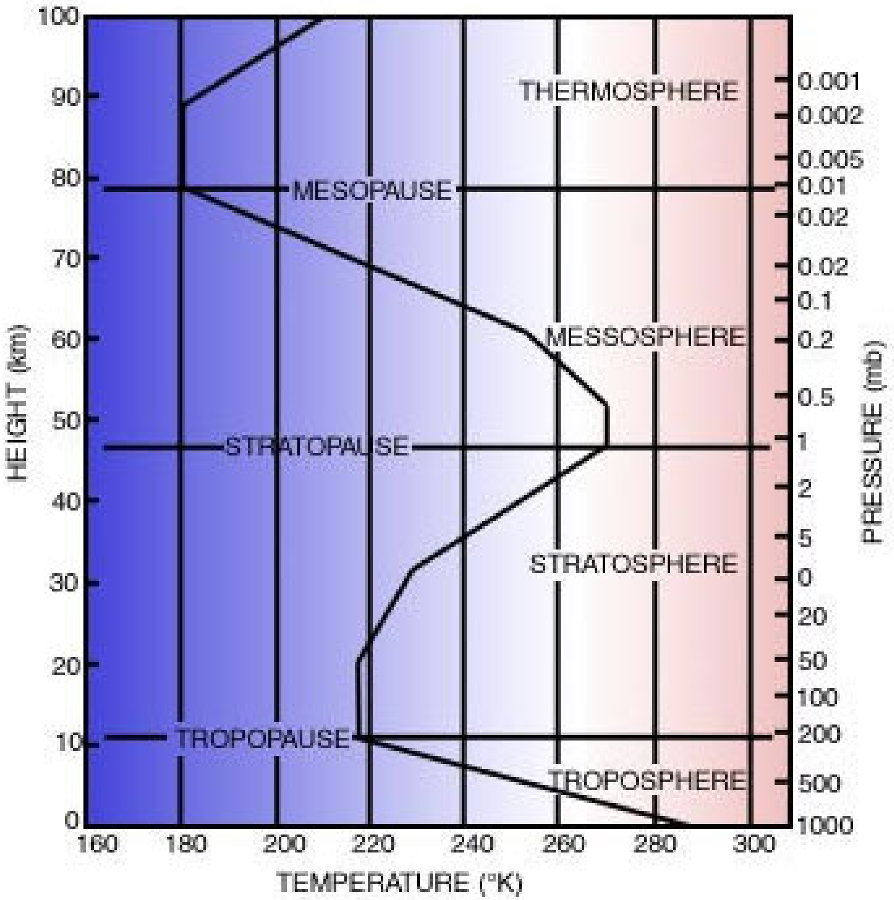
As posições do ponto de referência aerodinâmico $\vec{r}_{\text{aero. ref.}}$, do motor $\vec{r}_{\text{motor}}$, e do C.G. $\vec{r}_{\text{C.G.}}$ são representadas no *referencial estrutural*.



Note que a origem deste referencial não é importante, pois necessitamos apenas dos valores dos deslocamentos $(\vec{r}_{\text{aero. ref.}} - \vec{r}_{\text{C.G.}})$ e $(\vec{r}_{\text{motor}} - \vec{r}_{\text{C.G.}})$. Entretanto, é necessário multiplicar as coordenadas x e z por -1, para que o resultado seja corretamente representado no eixo ABC.

Atmosfera

A atmosfera da terra é composta por diversas camadas:



Atmosfera - Troposfera

As forças aerodinâmicas estão suscetíveis a variações atmosféricas. As principais variáveis a serem observadas na *troposfera* (até 11km acima do nível do mar, onde voam os aviões) são:

1. Densidade do ar ρ;
2. Velocidade do som (efeitos de compressibilidade) a;
3. Pressão estática $P_{\rm stat}$;
4. Temperatura $T_{\rm atm}$.

Para lidar com essas variações ao longo de toda a superfície da terra (diferentes climas e condições atmosféricas), definiu-se a chamada *atmosfera padrão*.

Atmosfera Padrão

O modelo para a troposfera:

$$
\begin{aligned}
T &= T_0 + cH; \\
P &= P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{-g}{cR}}; \\
\rho &= \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{-g}{cR}-1}; \\
a &= \sqrt{\gamma R T};
\end{aligned}
$$

sendo $T_0 =$ 288,15$\mathrm{K}(15^o\mathrm{C})$, $P_0 = 101325\mathrm{N/m}^2$, $g =$ 9,801$\mathrm{m/s}^2$, $\rho_0 =$ 1,225$\mathrm{kg/m}^3$, $c =$ -0,0065$\mathrm{K/m}$, $R =$ 287,04$\mathrm{J/kg/K}$ e $\gamma =$ 1,4.

H é a altura em relação ao nível do mar, em metros.

Efeitos de Compressibilidade

Uma importante variável a ser observada para quantificar efeitos de compressibilidade no escoamento do ar, em torno do veículo, é o chamado *número de Mach* M:

$$M = \frac{V_T}{a}$$

sendo que:

$M < 1 \Rightarrow$	Regime subsônico;
$M > 1 \Rightarrow$	Regime supersônico;
0,8 $< M <$ 1,3 $\Rightarrow$	Regime transônico;
$M > 5 \Rightarrow$	Regime hipersônico.

Obs.: (i) M muda a medida em que nos elevamos na atmosfera, mesmo para velocidade V_T constante! (ii) Efeitos de compressibilidade do ar já são facilmente detectáveis em regime transônico.

Velocidade no Referencial do Vento

A velocidade $\vec{v}$ do avião em relação ao solo pode ser expressa de duas maneiras:

$$\vec{v}_{\mathrm{ABC}} = [U;\, V;\, W] \;\; \mathrm{e} \;\; \vec{v}_{\mathrm{W}} = [V_T;\, 0;\, 0]$$

sendo que $\vec{v}_{\mathrm{ABC}} = S\,\vec{v}_{\mathrm{W}} = R_{\mathrm{W2ABC}}\,\vec{v}_{\mathrm{W}}$, e:

$$S = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta & -\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta & -\mathrm{s}\alpha \\ \mathrm{s}\beta & \mathrm{c}\beta & 0 \\ \mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta & -\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta & \mathrm{c}\alpha \end{bmatrix}$$

logo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U & = & V_T \cos(\alpha)\cos(\beta); \\ V & = & V_T \sin(\beta); \\ W & = & V_T \sin(\alpha)\cos(\beta) \end{array} \right. \qquad (2)$$

Velocidade no Referencial do Vento

De forma semelhante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_T & = & \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \\ \alpha & = & \mathrm{atan2}\left(\frac{W}{U}\right); \\ \beta & = & \mathrm{asen}\left(\frac{V}{V_T}\right); \end{array} \right. \qquad (3)$$

E esta velocidade coincide com a velocidade da aeronave em relação a atmosfera, se considerarmos que a atmosfera está parada em relação ao solo $\Rightarrow$
<u>não há ventos</u>.

Velocidade no Referencial do Vento

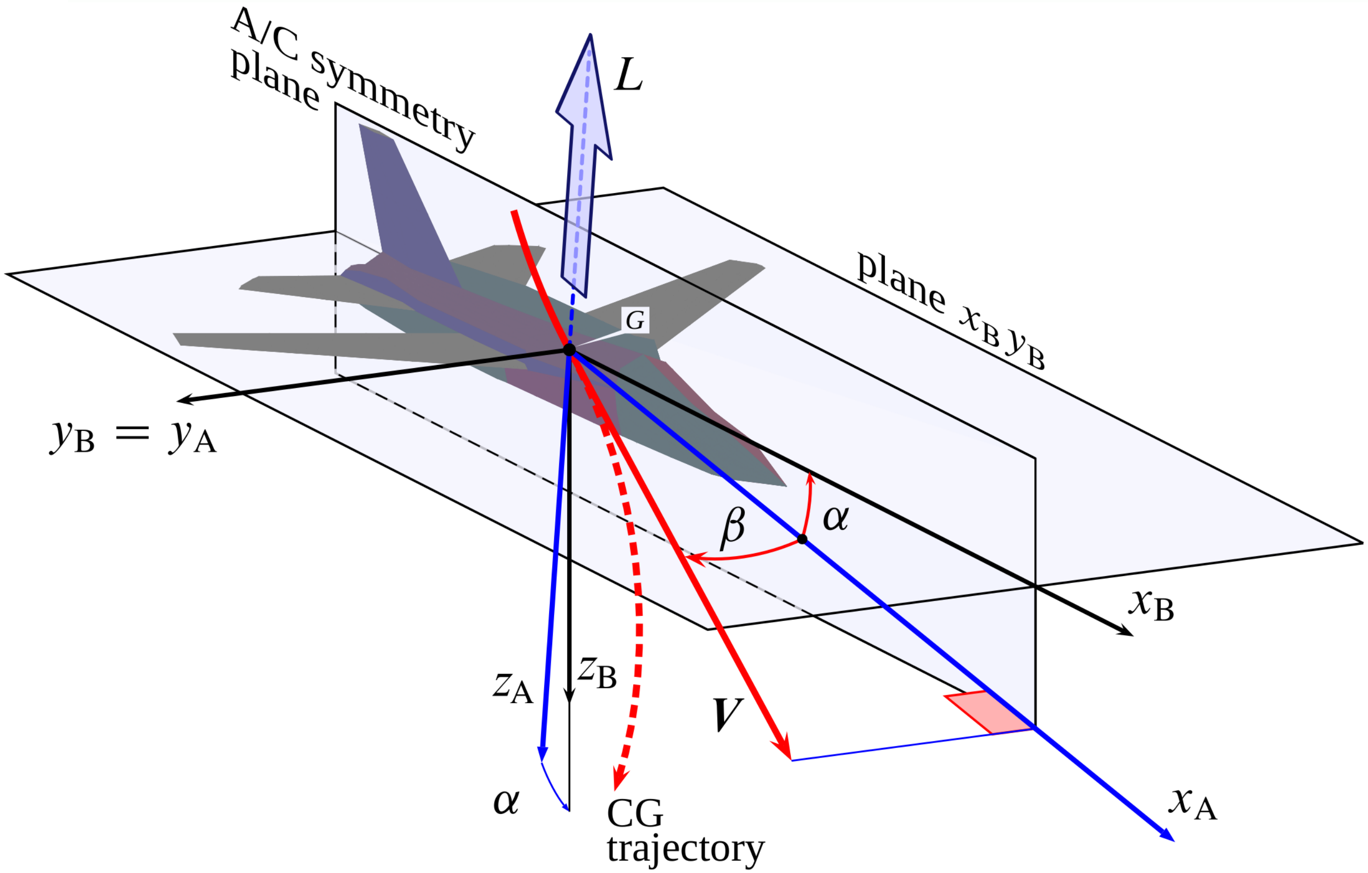


Figura do Manual de Referência da biblioteca JSBSim.

Velocidade do Avião em Relação a Atmosfera

Entretanto, como incluir o efeito de ventos nas direções Norte (N), Leste (E) e Descendente (D)?

Neste caso, a velocidade do avião em relação ao solo $\vec{v}_{\mathrm{ABC}}$ será diferente da velocidade do avião em relação a atmosfera $\vec{v}\,'_{\mathrm{ABC}}$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathrm{ABC}} &= \vec{v}\,'_{\mathrm{ABC}} + \vec{W}_{\mathrm{ABC}} \Rightarrow \\ \vec{v}\,'_{\mathrm{ABC}} &= \vec{v}_{\mathrm{ABC}} - R_{\mathrm{NED2ABC}}\vec{W}_{\mathrm{NED}},\end{aligned}$$

sendo $\vec{W}_{\mathrm{NED}}$ um vetor de novas <u>entradas</u> no modelo, que correspondem às velocidades da atmosfera em relação ao solo:

$$\vec{W}_{\mathrm{NED}} = \begin{bmatrix} W_{\mathrm{N}} \\ W_{\mathrm{E}} \\ W_{\mathrm{D}} \end{bmatrix}.$$

Velocidade do Avião em Relação a Atmosfera

No cômputo das forças e momentos que agem sobre a aeronave, deve-se utilizar a velocidade

$$\vec{v}\,'_{\mathrm{ABC}} = \begin{bmatrix} U\,' \\ V\,' \\ W\,' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} - R_{\mathrm{NED2ABC}} \begin{bmatrix} W_{\mathrm{N}} \\ W_{\mathrm{E}} \\ W_{\mathrm{D}} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

bem como nos cálculos de intensidade e direção do escoamento de ar usados para se determinar as forças e momentos aerodinâmicos, deve-se considerar a presença de ventos:

$$\vec{v}\,'_{\mathrm{W}} = \begin{bmatrix} V'_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V'_T = \sqrt{(U\,')^2 + (V\,')^2 + (W\,')^2} \\ \alpha' = \operatorname{atan2}\left(\frac{W\,'}{U\,'}\right); \\ \beta' = \operatorname{asen}\left(\frac{V\,'}{V_T}\right); \end{cases} \tag{5}$$

Note que tanto $\vec{v}_{\mathrm{ABC}}$, quanto $\vec{v}_{\mathrm{W}}$ representam a velocidade de translação da aeronave em relação ao solo. Os efeitos da atmosfera em movimento aparecerão no cálculo das forças e momentos aerodinâmicos ao se considerar V'_T, α' e β' (ou U', V' e W'), ao invés de V_T, α e β (ou U, V e W).

Eqs. de Translação – Eixos do Vento

Como as forças aerodinâmicas têm um papel determinante na dinâmica de uma aeronave, é interessante escrever as equações de translação nos eixos do Vento. Multiplicando ambos os lados da equação das forças pela matriz de rotação $S^\top = R_{\mathrm{ABC2W}}$, e lembrando que $\vec{v}_{\mathrm{W}} = \begin{bmatrix} V_T & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$:

$$\begin{aligned}
S^\top \dot{\vec{v}}_{\mathrm{ABC}} &= -(S^\top \vec{\omega}_{\mathrm{ABC}}) \times (S^\top \vec{v}_{\mathrm{ABC}}) + \frac{1}{m} S^\top \vec{F}_{\mathrm{ABC}}, \\
S^\top (\dot{S}\vec{v}_{\mathrm{W}} + S\dot{\vec{v}}_{\mathrm{W}}) &= -\vec{\omega}_{\mathrm{W}} \times \vec{v}_{\mathrm{W}} + \frac{1}{m}\vec{F}_{\mathrm{W}}, \\
S^\top \dot{S}\vec{v}_{\mathrm{W}} + \dot{\vec{v}}_{\mathrm{W}} &= -\vec{\omega}_{\mathrm{W}} \times \vec{v}_{\mathrm{W}} + \frac{1}{m}\vec{F}_{\mathrm{W}},
\end{aligned}$$

em que $\vec{\omega}_{\mathrm{W}} = S^\top \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\mathrm{W}} \\ Q_{\mathrm{W}} \\ R_{\mathrm{W}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\, c\alpha c\beta + Q\, s\beta + R\, s\alpha c\beta \\ -P\, c\alpha s\beta + Q\, c\beta - R\, s\alpha s\beta \\ -P\, s\alpha + R\, c\alpha \end{bmatrix}$.

Eqs. de Translação – Eixos do Vento

É possível mostrar que:

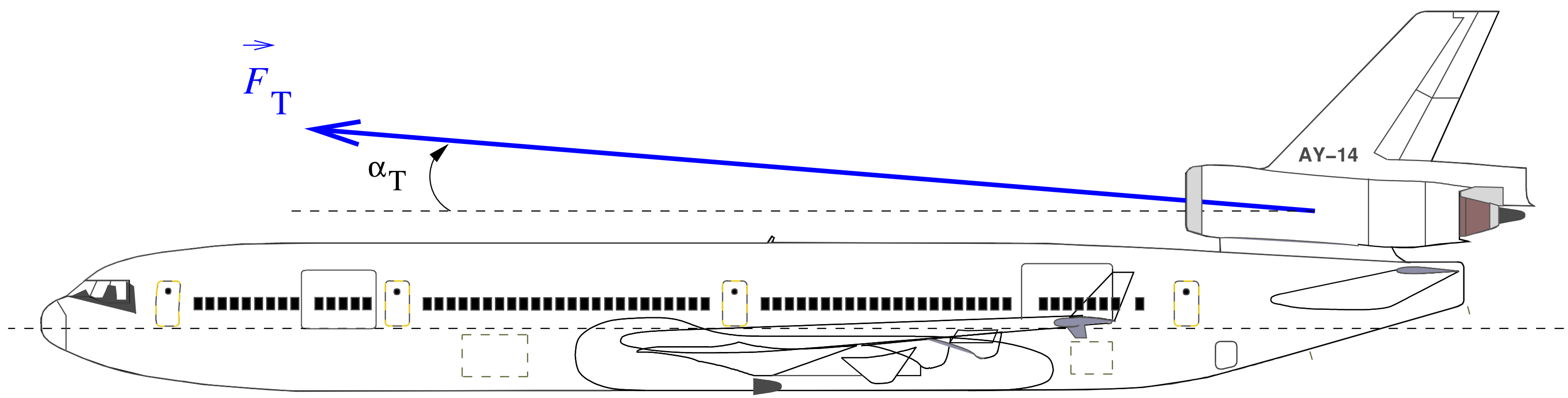
$$S^\top \dot{S} \vec{v}_\mathrm{W} + \dot{\vec{v}}_\mathrm{W} = \begin{bmatrix} \dot{V}_T \\ \dot{\beta} V_T \\ \dot{\alpha} V_T \ \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Além disso, lembrando que $B = R_\mathrm{NED2ABC}$, tem-se

$$\vec{F}_\mathrm{W} \ = \ \underbrace{\begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix}}_{\vec{F}_\mathrm{Aero.}} + S^\top B \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m g_0 \end{bmatrix}}_{\vec{F}_\mathrm{Peso}} + S^\top \underbrace{\begin{bmatrix} F_T \cos\alpha_\mathrm{T} \\ 0 \\ -F_T \mathrm{sen} \alpha_\mathrm{T} \end{bmatrix}}_{\vec{F}_\mathrm{propulsao}}.$$

Eqs. de Translação – Eixos do Vento

Na equação anterior, assumiu-se que a força propulsiva está contida no plano $x - z$ do eixo ABC, inclinada em relação ao eixo x de um ângulo α_{T}:



Eqs. de Translação – Eixos do Vento

Combinando as expressões anteriores, obtém-se

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{V}_T & = & \frac{1}{m}\left[F_T\cos(\alpha+\alpha_{\mathrm{T}})\cos\beta - D\right] + g_1; \\ \dot{\beta} & = & \frac{1}{mV_T}\left[-F_T\cos(\alpha+\alpha_{\mathrm{T}})\mathrm{sen}\beta - C\right] + \frac{g_2}{V_T} - R_{\mathrm{W}}; \\ \dot{\alpha} & = & \frac{1}{mV_T\cos\beta}\left[-F_T\mathrm{sen}(\alpha+\alpha_{\mathrm{T}}) - L\right] + \frac{g_3}{V_T\cos\beta} + \frac{Q_{\mathrm{W}}}{\cos\beta}; \end{array}\right. \tag{6}$$

sendo

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = S^\top B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 \end{bmatrix};$$

onde $g_0 = 9{,}806 \mathrm{m/s^2}$.
E, como visto anteriormente,

$$R_W = -P\, s\alpha + R\, c\alpha, \quad \Rightarrow \quad R_W = 0, \text{ se } P = R = 0,$$

$$Q_W = -P\, c\alpha s\beta + Q\, c\beta - R\, s\alpha s\beta \quad \Rightarrow \quad Q_W = Q, \text{ se } \beta = 0.$$

Eqs. de Translação – Eixos ABC

Note que as equações anteriores são apenas uma reformulação das equações para a aceleração em relação ao referencial inercial usando a velocidade representada no referencial do corpo, dadas por:

$$\begin{cases} \dot{U} &= RV - QW + \frac{F_x}{m}, \\ \dot{V} &= -RU + PW + \frac{F_y}{m}, \\ \dot{W} &= QU - PV + \frac{F_z}{m}. \end{cases}$$

em que

$$\vec{F}_{\mathrm{ABC}} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = S \underbrace{\begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix}}_{\vec{F}_{\mathrm{Aero.}}} + B \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m g_0 \end{bmatrix}}_{\vec{F}_{\mathrm{Peso}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} F_T \cos \alpha_{\mathrm{T}} \\ 0 \\ -F_T \mathrm{sen} \alpha_{\mathrm{T}} \end{bmatrix}}_{\vec{F}_{\mathrm{propulsao}}}.$$

A diferença é que se usou (V_T, α, β) em lugar de (U, V, W) como representação da velocidade da aeronave em relação ao solo.

Movimento Longitudinal

As equações (6) podem ser consideravelmente simplificadas para um caso especial em que:

- A força lateral é nula $C = 0$;
- Não há derrapagem $\beta = 0$;
- As asas estão niveladas $\phi = 0$;
- Não há momento de rolamento e a velocidade angular $P = 0$;
- Não há momento de guinada e a velocidade angular $R = 0$.

Ou seja, toda a dinâmica da aeronave se manifesta somente no plano XZ do referencial ABC: a aeronave pode somente subir, descer, cabrar ($\dot{\theta} > 0$) e picar ($\dot{\theta} < 0$).

Diz-se que as equações irão representar o Movimento Longitudinal.

Movimento Longitudinal

Fazendo $\psi = 0$ (aeronave apontada para o norte), para fins de simplificação, podemos escrever:

1. $\dot{\beta} = 0$ (e $\beta = 0$);
2. $S^\top = R_{(-\alpha)} = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 & s\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\alpha & 0 & c\alpha \end{bmatrix}$ e $B = R_{(\theta)} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$
3. Portanto,

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = S^\top B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 \end{bmatrix} = g_0 \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}(\theta - \alpha) \\ 0 \\ \cos(\theta - \alpha) \end{bmatrix}; \gamma = \theta - \alpha$$

4. Além disso,

$$\vec{\omega}_{\mathrm{W}} = S^\top \begin{bmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{\mathrm{W}} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_{\mathrm{W}} = Q.$$

Movimento Longitudinal

As equações (6) podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \dot{V}_T & = & \frac{1}{m}\left[F_T \cos(\alpha + \alpha_{\mathrm{T}}) - D\right] - g_0 \operatorname{sen}(\theta - \alpha) \\ \dot{\alpha} & = & \frac{1}{mV_T}\left[-F_T \operatorname{sen}(\alpha + \alpha_{\mathrm{T}}) - L\right] + \frac{1}{V_T} g_0 \cos(\theta - \alpha) + Q. \end{cases} \tag{7}$$

Além disso, as equações cinemática e dinâmica de rotação se reduzem a:

$$\begin{cases} \dot{\theta} & = & Q; \\ \dot{Q} & = & \frac{M_y}{J_{yy}}; \end{cases} \tag{8}$$

sendo que M_y é o momento total de arfagem (aerodinâmico + devido à tração, conforme equação (1)); e J_{yy} é o momento de inércia em torno do eixo Y do referencial ABC.

Para encontrarmos um conjunto auto-contido de equações diferenciais, é preciso incluir a equação de evolução da altitude H, pois as forças L e D, e o momento M dependem da densidade do ar e, portanto, da altitude.

Movimento Longitudinal

A equação de variação da altitude pode ser escrita a partir da equação cinemática que relaciona a variação de posição da aeronave com sua velocidade em relação ao solo:

$$\dot{\vec{p}}_{\mathrm{NED}} = B^{\top}\vec{v}_{\mathrm{ABC}}.$$

Lembrando que $\beta = 0$, tem-se:

$$\vec{v}_{\mathrm{ABC}} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_T \cos\alpha \\ 0 \\ V_T \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow B^{\top}\vec{v}_{\mathrm{ABC}} = \begin{bmatrix} V_T \cos(\theta-\alpha) \\ 0 \\ -V_T \operatorname{sen}(\theta-\alpha) \end{bmatrix}.$$

Logo, a variação da posição vertical (sentido de crescimento para baixo) pode ser escrita como:

$$\dot{p}_D = -V_T \operatorname{sen}(\theta-\alpha). \tag{9}$$

Movimento Longitudinal

Como a altitude é contabilizada no sentido contrário ao sentido de crescimento do eixo Z do referencial NED, devemos multiplicar a equação (9) por -1 para obtermos:

$$\dot{H} = V_T \mathrm{sen}\,(\theta - \alpha). \tag{10}$$

A dinâmica longitudinal pode então ser representada por somente 5 equações diferenciais:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dot{V}_T & = & \frac{1}{m}\left[F_T\cos(\alpha+\alpha_{\mathrm{T}}) - D\right] - g_0\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha) \\ \dot{\alpha} & = & \frac{1}{mV_T}\left[-F_T\mathrm{sen}(\alpha+\alpha_{\mathrm{T}}) - L\right] + \frac{1}{V_T}g_0\,\cos(\theta-\alpha) + Q; \\ \dot{\theta} & = & Q; \\ \dot{Q} & = & \frac{M_y}{J_{yy}}; \\ \dot{H} & = & V_T\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha); \end{array}} \tag{11}$$

sendo que $\gamma = (\theta - \alpha)$ é o ângulo de trajetória de vôo.

Modelo Longitudinal: Incorporação de Ventos

Como visto anteriormente, nas equações (11) a presença de rajadas de vento, ou qualquer outro deslocamento de ar atmosférico em relação ao solo, pode ser incorporada computando-se as forças e momentos aerodinâmicos usando-se as variáveis V_T' e α':

$$\begin{aligned} V_T' &= \sqrt{(U')^2 + (V')^2 + (W')^2} \\ \alpha' &= \operatorname{atan2}\left(\frac{W'}{U'}\right); \end{aligned}$$

em que

$$\begin{bmatrix} U' \\ V' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_T\cos(\alpha) \\ 0 \\ V_T\sin(\alpha) \end{bmatrix} - R_{NED2ABC}\begin{bmatrix} W_N \\ 0 \\ W_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_T\cos(\alpha) - W_N\cos(\theta) + W_D\sin(\theta) \\ 0 \\ V_T\sin(\alpha) - W_N\sin(\theta) - W_D\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Note que para a análise do movimento longitudinal se considera que não existem ventos que levariam $\beta \neq 0$, i.e. há somente ventos verticais e horizontais, e não há ventos laterais (*cross winds*).