

Capítulo 3

Características Dinâmicas dos Instrumentos

3.1 Introdução

Os instrumentos de medição e atuadores são, antes de mais nada, sistemas dinâmicos que respondem às entradas desejadas, interferentes e modificantes, segundo um comportamento temporal específico (Fig.3.1).

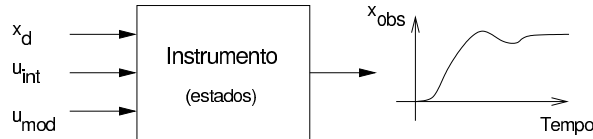


Figura 3.1: Os instrumentos de medição ou de atuação respondem dinamicamente às entradas.

De forma geral, um instrumento pode ser representado pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, x_d, u_{\text{int}}, u_{\text{mod}}); \\ x_{\text{obs}} &= h(x, x_d, u_{\text{int}}, u_{\text{mod}}); \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados do instrumento; $x_d \in \mathbb{R}$ a grandeza a ser medida; $u_{\text{int}} \in \mathbb{R}^p$ o vetor de entradas interferentes; $u_{\text{mod}} \in \mathbb{R}^q$ o vetor de entradas modificantes; $f(\cdot) : \mathbb{R}^{n+1+p+q} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função não linear que determina a evolução dos estados do instrumento; e $h(\cdot) : \mathbb{R}^{n+1+p+q} \rightarrow \mathbb{R}^n$

uma outra função não linear que estabelece o valor da variável observada x_{obs} como uma combinação das entradas e dos estados do instrumento.

A equação (3.1) representa um caso mais próximo da realidade, isto é, um instrumento dinâmico, não-linear, com entrada determinística x_d e entradas estocásticas u_{int} e u_{mod} .

As características de resposta temporal são especialmente importantes quando os instrumentos de medição e atuadores são utilizados em sistemas de controle.

Neste caso os instrumentos de medição e os atuadores devem responder à variação da grandeza medida e à variação no comando do operador, respectivamente, o mais rapidamente possível. Ou seja, espera-se que a velocidade de resposta dos componentes do sistema de instrumentação seja muito maior do que a velocidade de resposta do próprio processo. Caso isto não seja verdade, é preciso incluir o comportamento dinâmico dos sensores e atuadores na modelagem matemática do sistema de controle.

3.2 Análise via Linearização

A despeito da complexidade exibida na equação (3.1), é possível analisar o instrumento tomando-se um modelo matemático mais simplificado, obtido a partir da linearização de suas equações em torno de uma condição de equilíbrio. Para tanto, faz-se as seguintes hipóteses:

1. O instrumento será usado em condições operacionais tais que as perturbações são aproximadamente constantes, ou seja, $d(u_{\text{int}})/dt \approx 0$ e $d(u_{\text{mod}})/dt \approx 0^1$.
2. O instrumento encontra-se inicialmente em equilíbrio com o meio, isto é, para a condição:

$$\begin{cases} x & = x^*; \\ x_d & = x_d^*; \\ u_{\text{int}} & = u_{\text{int}}^*; \\ u_{\text{mod}} & = u_{\text{mod}}^*; \end{cases} \quad (3.2)$$

tem-se que:

$$\begin{cases} \dot{x} & = f(x^*, x_d^*, u_{\text{int}}^*, u_{\text{mod}}^*) = 0; \\ x_{\text{obs}}^* & = h(x^*, x_d^*, u_{\text{int}}^*, u_{\text{mod}}^*); \end{cases}$$

¹Note a semelhança desta hipótese com a condição de *controle estatístico* utilizada na calibração estática do instrumento.

Neste caso, pequenas variações da grandeza sendo medida $\delta x_d = x_d - x_d^*$, em torno da condição de equilíbrio do instrumento, produzirão pequenas variações $\delta x_{\text{obs}} = x_{\text{obs}} - x_{\text{obs}}^*$ que podem ser aproximadas por aquelas produzidas por um sistema dinâmico linear:

$$\begin{cases} \delta \dot{x} & \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_d - x_d^*); \\ \delta x_{\text{obs}} & \approx \frac{\partial h}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial h}{\partial x_d}(x_d - x_d^*); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \dot{x} & \approx A \delta x + B \delta x_d; \\ \delta x_{\text{obs}} & \approx C \delta x + D \delta x_d; \end{cases} \quad (3.3)$$

sendo $A = \frac{\partial f}{\partial x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B = \frac{\partial f}{\partial x_d} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C = \frac{\partial h}{\partial x} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $D = \frac{\partial h}{\partial x_d} \in \mathbb{R}$.

A aproximação acima foi obtida através da expansão em série de Taylor das funções $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$ em (3.1), em torno da condição de equilíbrio (3.2). Isto significa que ela será tão mais exata, quanto menores forem os desvios δx e δx_d ; sendo também afetada pelo grau de não-linearidade do instrumento (Fig.3.2).

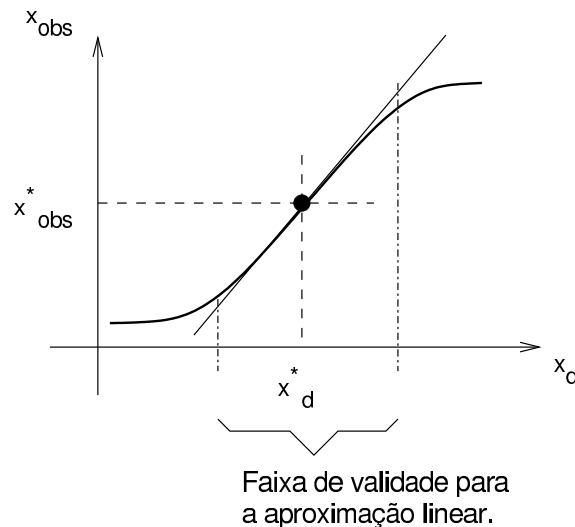


Figura 3.2: Ponto de equilíbrio sobre a curva característica estática de um instrumento. Este ponto representa uma condição de operação específica.

Na prática, a grande maioria dos instrumentos é projetada para exibir comportamento dinâmico aproximadamente linear em toda a faixa de valores de entrada x_d . Ou seja, a linearização (3.3) é válida para intervalos não desprezíveis de variação da entrada desejada, dos estados do instrumento e da saída observada.

Uma vez que os instrumentos podem ser modelados como sistemas lineares; tendo sempre em mente as restrições e hipóteses apontadas anteriormente; é possível utilizar todas as poderosas ferramentas matemáticas desenvolvidas para a análise deste tipo de sistema dinâmico (Haykin and Veen, 2000).

De fato, a linearização do instrumento mediante o desenvolvimento em (3.3), implica em ser possível descrever seu comportamento dinâmico usando uma equação diferencial linear ordinária com coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^n(\delta x_{\text{obs}})}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}(\delta x_{\text{obs}})}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d(\delta x_{\text{obs}})}{dt} + a_0 \delta x_{\text{obs}} = \quad (3.4)$$

$$b_p \frac{d^p(\delta x_d)}{dt^p} + b_{p-1} \frac{d^{p-1}(\delta x_d)}{dt^{p-1}} + \dots + b_1 \frac{d(\delta x_d)}{dt} + b_0 \delta x_d;$$

sendo que os coeficientes a_i , $0 \leq i \leq n$ e b_j , $0 \leq j \leq p$, são determinados a partir das matrizes A , B , C e D em (3.3), com $p \leq n$.

EXEMPLO ►

Considere o instrumento descrito pelo seguinte conjunto de equações diferenciais, onde as entradas interferentes e modificantes foram substituídas por seus valores numéricos constantes, uma vez que $d(u_{\text{int}})/dt \approx 0$ e $d(u_{\text{mod}})/dt \approx 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1^2 + 3x_2 + \text{sen}(x_d), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^2 + x_d, \\ x_{\text{obs}} &= x_1 + x_d^2. \end{cases}$$

Expandindo-se em série de Taylor as funções não lineares acima, em torno da condição de equilíbrio, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &\approx -(x_1^*)^2 + 3(x_2^*) + \text{sen}(x_d^*) + \\ &\quad -2x_1^*(x_1 - x_1^*) + 3(x_2 - x_2^*) + \cos(x_d^*)(x_d - x_d^*), \\ \dot{x}_2 &\approx x_1^* - (x_2^*)^2 + x_d^* + \\ &\quad (x_1 - x_1^*) - 2x_2^*(x_2 - x_2^*) + (x_d - x_d^*), \\ x_{\text{obs}} &= x_1^* + (x_d^*)^2 + (x_1 - x_1^*) + 2x_d^*(x_d - x_d^*). \end{cases}$$

sendo que, pela definição de condição de equilíbrio, $-(x_1^*)^2 + 3(x_2^*) + \text{sen}(x_d^*) = 0$, $x_1^* - (x_2^*)^2 + x_d^* = 0$ e $x_{\text{obs}}^* = x_1^* + (x_d^*)^2$.

Além disso, como x_1^* e x_2^* são constantes, $\dot{x}_1 = \delta \dot{x}_1$ e $\dot{x}_2 = \delta \dot{x}_2$. Portanto,

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1^* & 3 \\ 1 & -2x_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(x_d^*) \\ x_d^* \end{bmatrix} \delta x_d,$$

$$\delta x_{\text{obs}} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + 2(x_d^*) \delta x_d,$$

que está no mesmo formato da equação (3.3).



A ordem do instrumento é determinada pelo valor de n . Mesmo quando a linearização não é realizada, a ordem do instrumento corresponde ao número de estados necessários para descrever seu comportamento dinâmico.

Aplicando a transformada de Laplace (Haykin and Veen, 2000)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

a ambos os lados da equação (3.4), obtém-se a função de transferência do instrumento:

$$\begin{aligned} X_{\text{obs}} [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] &= \\ X_d [b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_1 s + b_0], & \\ G(s) = \frac{X_{\text{obs}}(s)}{X_d(s)} = \frac{b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, & \quad (3.5) \end{aligned}$$

sendo $X_{\text{obs}}(s) = \mathcal{L}\{\delta x_{\text{obs}}(t)\}$ e $X_d(s) = \mathcal{L}\{\delta x_d(t)\}$.

3.3 Resposta em Frequência

Um aspecto muito útil decorrente da análise linear de um instrumento é a informação obtida sobre a sensibilidade do mesmo a cada uma das componentes de frequência que constituem a variação do sinal de entrada desejada $\delta x_d(t)$.

Para ver isto, considere o seguinte caso especial:

$$\begin{aligned} \delta x_d(t) &= \cos(\omega t), \\ &= \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} X_d(s) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ X_d(s) &= X_d^1(s) + X_d^2(s) = \frac{1/2}{s - j\omega} + \frac{1/2}{s + j\omega}. \end{aligned}$$

A determinação da resposta temporal $\delta x_{\text{obs}}(t)$ do instrumento à variação cosenoidal (3.6) pode então ser obtida através da soma das respostas a cada uma das componentes $X_d^1(s)$ e $X_d^2(s)$, uma vez que se adotou o modelo linear para o instrumento e, portanto, é válida a aplicação do princípio da superposição:

$$\begin{aligned} X_{\text{obs}}^1(s) &= G(s)X_d^1(s), \\ &= G(s)\frac{1/2}{s-j\omega}, \\ G(s)\frac{1/2}{s-j\omega} &= \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{M_1}{s-j\omega}, \end{aligned}$$

sendo $N(s)/D(s)$ a transformada de Laplace da resposta natural do sistema e $M_1/(s-j\omega)$ a transformada de Laplace da resposta forçada. A constante $M_1 \in \mathbb{C}$ pode ser obtida fazendo-se:

$$\begin{aligned} M_1 &= \lim_{s \rightarrow j\omega} [G(s)X_d(s)](s-j\omega), \\ &= \lim_{s \rightarrow j\omega} G(s)\frac{1/2}{s-j\omega}(s-j\omega) \\ M_1 &= \frac{G(j\omega)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, considerando o instrumento estável, isto é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} \right\} = 0,$$

a variação forçada do sinal observado no instrumento, após o fim da resposta transitória, será:

$$\begin{aligned} \delta x_{\text{obs}}(t)|_{t \gg 0} &\approx \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{M_1}{s-j\omega} + \frac{M_1^*}{s+j\omega} \right\}, \\ &= M_1 e^{j\omega t} + M_1^* e^{-j\omega t} \\ &= M_1 e^{j\omega t} + (M_1 e^{j\omega t})^*, \\ &= 2\text{Re}\{M_1 e^{j\omega t}\} = 2\text{Re} \left\{ \frac{G(j\omega)}{2} e^{j\omega t} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x_{\text{obs}}(t)|_{t \gg 0} &= \text{Re}\{G(j\omega)e^{j\omega t}\}, \\ &= \text{Re}\{G(j\omega)\}\cos(\omega t) - \text{Im}\{G(j\omega)\}\text{sen}(\omega t), \end{aligned}$$

A expressão anterior pode ser expressa como:

$$\delta x_{\text{obs}}(t)|_{t \gg 0} = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi);$$

sendo $\phi = \text{atan}(\text{Im}\{G(j\omega)\}/\text{Re}\{G(j\omega)\})$.

Isto significa que a amplitude do sinal de saída do instrumento a uma entrada cossenoidal pode ser usada para estabelecer empiricamente a resposta em frequência do instrumento (Fig.3.3).



Figura 3.3: Obtenção prática da função de transferência de um instrumento linear (ou linearizado).

3.4 Classificação dos Instrumentos

Os instrumentos podem ser categorizados de acordo com o número de variáveis de estado necessárias para representar seu comportamento dinâmico.

3.4.1 Instrumentos de Ordem 0

São os instrumentos cujo tempo de reação é desprezível se comparado com as demais constantes de tempo do sistema de instrumentação e controle como um todo, incluindo as constantes de tempo do processo.

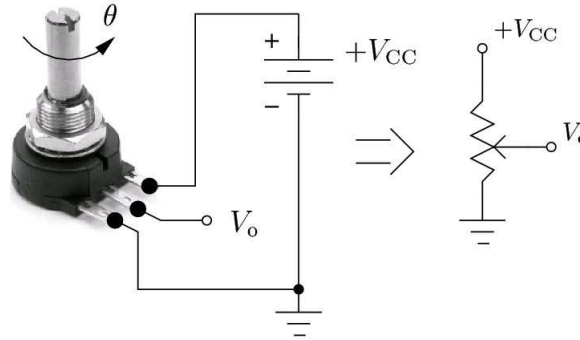
Neste caso estes instrumentos podem ser descritos por *equações algébricas* apenas, não havendo a necessidade de se estabelecer modelos dinâmicos complexos. Ou seja, somente a curva de calibração estática é suficiente para caracterizar completamente o instrumento:

$$x_{\text{obs}} = h(x_d, u_{\text{int}}, u_{\text{mod}}). \quad (3.7)$$

É importante notar que não há estados na equação (3.7), pois, segundo este modelo matemático, o instrumento responde instantaneamente às variações de x_d .

EXEMPLO ►

Medição de posição angular usando um potenciômetro de precisão.



3.4.2 Instrumentos de Ordem 1

Muitos instrumentos podem ser representados por equações diferenciais de 1ª ordem.

Além disso, como regra de “boa engenharia”, deve-se sempre buscar o modelo mais simples que representa adequadamente o comportamento de interesse do instrumento em questão. E isto pode ser obtido com um modelo de 1ª ordem em muitos casos.

A função de transferência do instrumento de 1ª ordem pode ser representada como:

$$G_1(s) = \frac{G_{dc}}{\tau s + 1}, \quad (3.8)$$

sendo τ a constante de tempo dominante do instrumento. O valor G_{dc} é o ganho estático do instrumento, isto é, sua sensibilidade. Isto pode ser visto calculando-se o valor em regime permanente da variação da saída observada para o caso de uma variação de x_d em degrau unitário:

$$\delta x_{obs}(t)|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[G_1(s) \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{G_{dc}}{\tau s + 1} \right] = G_{dc}.$$

Ou seja, a razão entre a variação final total δx_{obs} da saída e a variação final total δx_d da entrada é igual a G_{dc} .

Mais uma vez é importante notar que G_{dc} terá diferentes valores, dependendo do ponto de equilíbrio, caso o instrumento seja não linear.

Respostas a Entradas-padrão

1. Resposta ao Impulso:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) = \frac{G_{\text{dc}}}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (3.9)$$

Observação: $\delta x_{\text{obs}}(\tau) = 36,8\% (G_{\text{dc}}/\tau)$ e $\delta x_{\text{obs}}(5\tau) = 0,67\% (G_{\text{dc}}/\tau) \approx 0$.

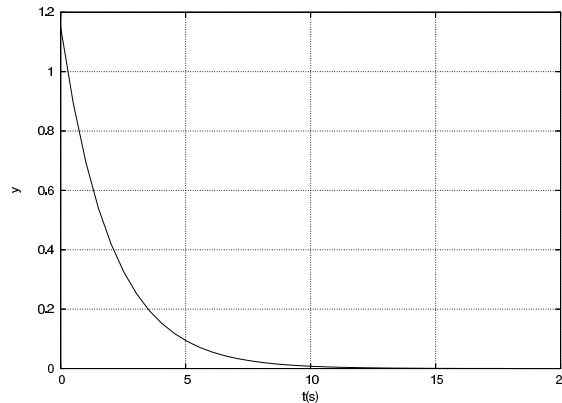


Figura 3.4: Resposta ao impulso de um instrumento de 1ª ordem.

2. Resposta ao Degrau Unitário:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) = G_{\text{dc}} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (3.10)$$

Observação: $\delta x_{\text{obs}}(\tau) = 63,2\% G_{\text{dc}}$ e $\delta x_{\text{obs}}(5\tau) = 99,33\% G_{\text{dc}} \approx G_{\text{dc}}$.

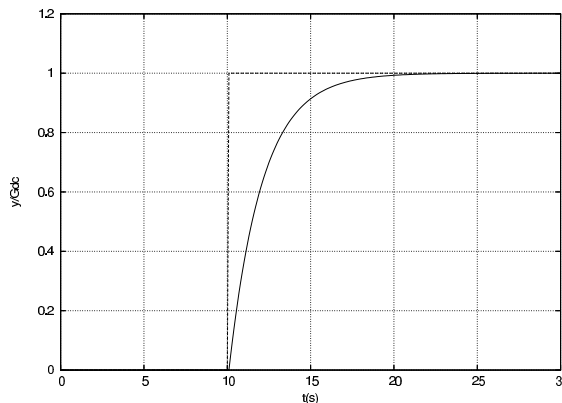


Figura 3.5: Resposta ao degrau de um instrumento de 1ª ordem.

3. Resposta à Rampa Unitária Terminada em $t = t_f$:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) \frac{1}{G_{\text{dc}}} = [t - \tau(1 - e^{-t/\tau})] - u_{t_f} [(t - t_f) - \tau(1 - e^{-(t-t_f)/\tau})], \quad (3.11)$$

sendo $u_{t_f} = 0$ para $t < t_f$, e $u_{t_f} = 1$ para $t \geq t_f$. Observação: Não há sobre-sinal (*overshoot*) no término da rampa.

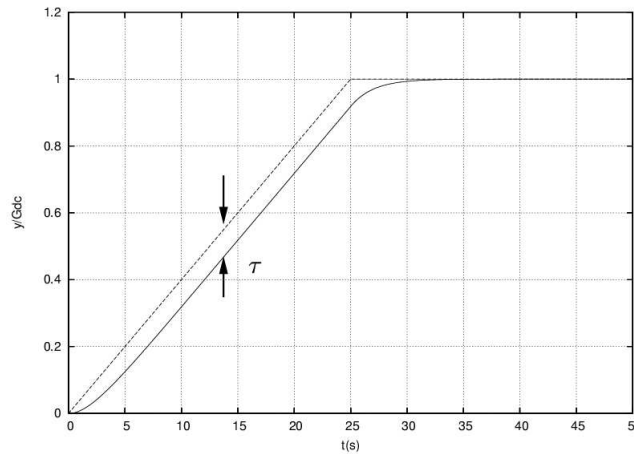


Figura 3.6: Resposta à rampa unitária terminada de um instrumento de 1^a ordem. Note que esta variação de entrada pode ser usada como sinal de teste para se determinar o valor de τ .

3.4.3 Instrumentos de Ordem 2

Os instrumentos de 2^a ordem têm seus comportamentos dinâmicos determinados por equações diferenciais contendo 2 variáveis de estado.

As funções de transferência destes instrumentos podem ser representadas como:

$$G(s) = \frac{G_{\text{dc}} \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (3.12)$$

sendo G_{dc} o ganho estático/sensibilidade do instrumento; ω_n a frequência natural não amortecida e ζ o fator de amortecimento.

Neste caso faz-se necessário distinguir 3 possibilidades:

1. Instrumento sobre-amortecido: $\zeta > 1$. O instrumento é lento e não exibe sobre-sinal. Pode ser modelado, em muitos casos, como um sistema de 1ª ordem com tempo morto (Seção 3.5). A função de transferência pode ser reescrita como:

$$G(s) = \frac{G_{dc}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)},$$

sendo que

$$\tau_1 = \left\{ \zeta \omega_n \left[1 - \sqrt{1 - 1/\zeta^2} \right] \right\}^{-1}, \quad (3.13)$$

$$\tau_2 = \left\{ \zeta \omega_n \left[1 + \sqrt{1 - 1/\zeta^2} \right] \right\}^{-1}. \quad (3.14)$$

2. Instrumento criticamente amortecido: $\zeta = 1$. O instrumento é mais rápido, mas ainda não exibe sobre-sinal. A função de transferência pode ser reescrita como:

$$G(s) = \frac{G_{dc}}{(\tau s + 1)^2},$$

sendo que

$$\tau = \frac{1}{\omega_n}. \quad (3.15)$$

3. Instrumento sub-amortecido: $\zeta < 1$. O instrumento responde ainda mais rapidamente, mas exibe sobre-sinal e oscilação amortecida de frequência $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ antes de alcançar a condição de regime permanente.

Respostas a Entradas-padrão: caso sobre-amortecido

1. Resposta ao Impulso:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) \frac{1}{G_{dc}} = \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)} [e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}]. \quad (3.16)$$

Observação: $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_{\text{obs}}(t) = 0$.

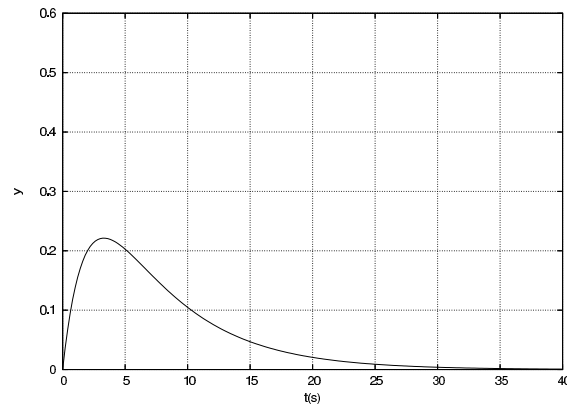


Figura 3.7: Resposta ao impulso de um instrumento de 2ª ordem sobre-amortecido.

2. Resposta ao Degrau Unitário:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) \frac{1}{G_{\text{dc}}} = 1 + \frac{\tau_2}{(\tau_1 - \tau_2)} e^{-t/\tau_2} - \frac{\tau_1}{(\tau_1 - \tau_2)} e^{-t/\tau_1} \quad (3.17)$$

Observação: $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_{\text{obs}}(t) = G_{\text{dc}}$

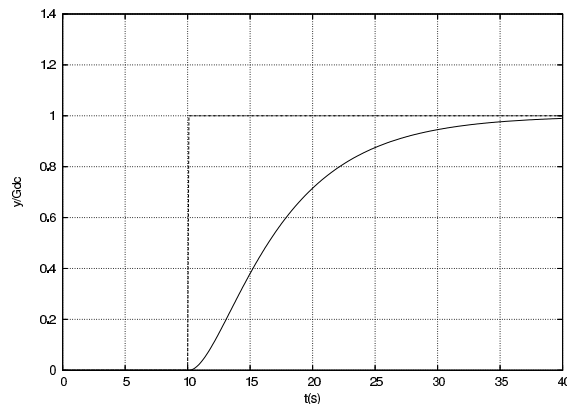


Figura 3.8: Resposta ao degrau de um instrumento de 2ª ordem sobre-amortecido. Note que o início da resposta é caracterizada por derivada crescente, ao contrário dos sistemas de 1ª ordem.

3. Resposta à Rampa Unitária terminada em $t = t_f$:

A resposta $x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t)$ à rampa unitária pode ser escrita como:

$$\delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t) \frac{1}{G_{\text{dc}}} = t - \frac{\tau_2^2}{(\tau_1 - \tau_2)} [e^{-t/\tau_2} - 1] + \frac{\tau_1^2}{(\tau_1 - \tau_2)} [e^{-t/\tau_1} - 1]. \quad (3.18)$$

Observação: Para $t \gg (\tau_1 + \tau_2)$, $\delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t) \approx G_{\text{dc}}[t - (\tau_1 + \tau_2)]$.

Para a rampa unitária terminada em $t = t_f$, tem-se que:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) = \delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t) - u_{t_f} [\delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t - t_f)], \quad (3.19)$$

sendo $u_{t_f} = 0$ para $t < t_f$, e $u_{t_f} = 1$ para $t \geq t_f$.

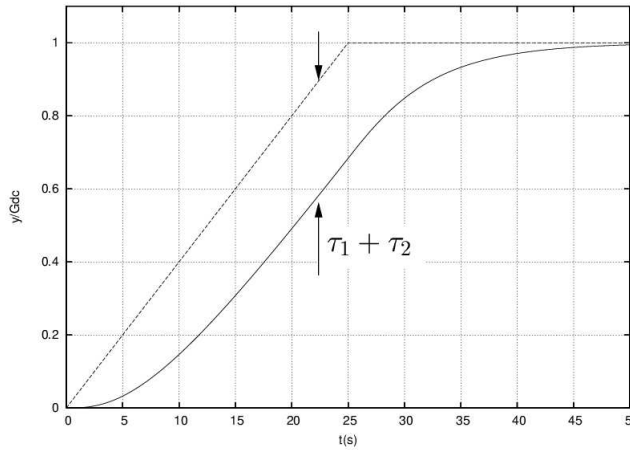


Figura 3.9: Resposta à rampa unitária terminada de um instrumento de 2ª ordem sobre-amortecido.

Respostas a Entradas-padrão: caso criticamente amortecido

1. Resposta ao Impulso:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) \frac{1}{G_{\text{dc}}} = \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau}. \quad (3.20)$$

Observação: $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_{\text{obs}}(t) = 0$.

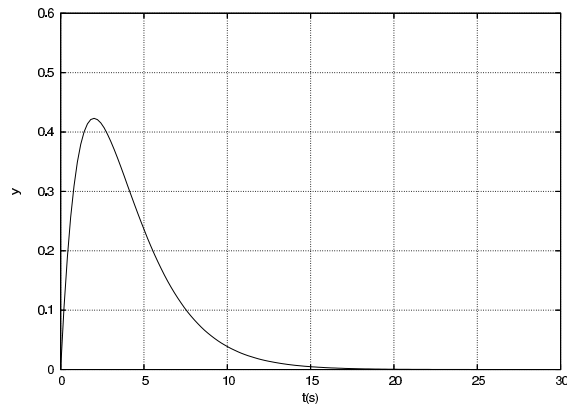


Figura 3.10: Resposta ao impulso de um instrumento de 2ª ordem criticamente amortecido.

2. Resposta ao Degrau Unitário:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) \frac{1}{G_{\text{dc}}} = 1 + e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (3.21)$$

Observação: $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_{\text{obs}}(t) = G_{\text{dc}}$

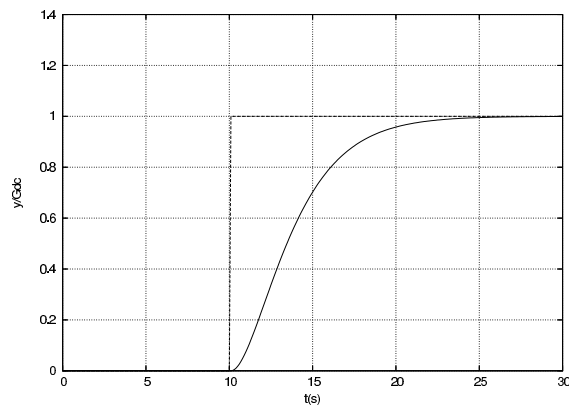


Figura 3.11: Resposta ao degrau de um instrumento de 2ª ordem criticamente amortecido.

3. Resposta à Rampa Unitária terminada em $t = t_f$:

A resposta $x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t)$ à rampa unitária pode ser escrita como:

$$\delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t) \frac{1}{G_{\text{dc}}} = t - 2\tau[1 - e^{-t/\tau}] + te^{-t/\tau}. \quad (3.22)$$

Observação: Para $t \gg \tau$, $\delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t) \approx G_{\text{dc}}[t - 2\tau]$.

Para a rampa unitária terminada em $t = t_f$, tem-se que:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) = \delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t) - u_{t_f}[\delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t - t_f)], \quad (3.23)$$

sendo $u_{t_f} = 0$ para $t < t_f$, e $u_{t_f} = 1$ para $t \geq t_f$.

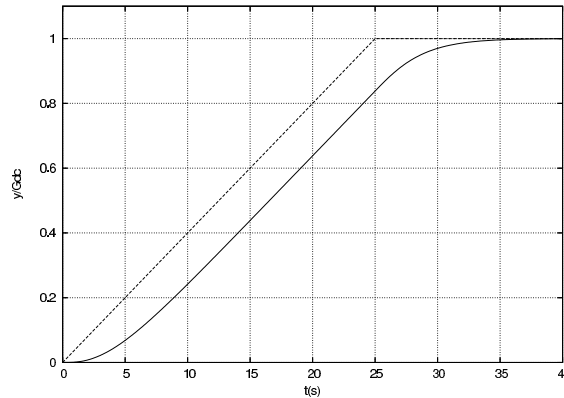


Figura 3.12: Resposta à rampa unitária terminada de um instrumento de 2ª ordem criticamente amortecido.

Respostas a Entradas-padrão: caso sub-amortecido.

1. Resposta ao Impulso:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) \frac{1}{G_{\text{dc}}} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen} \left[\left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t \right]. \quad (3.24)$$

Observação: $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_{\text{obs}}(t) = 0$.

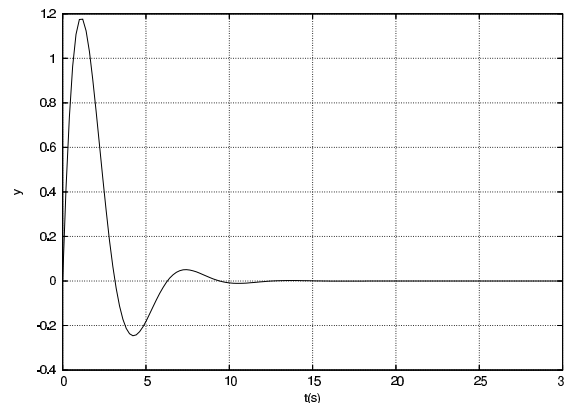


Figura 3.13: Resposta ao impulso de um instrumento de 2ª ordem sub-amortecido.

2. Resposta ao Degrau Unitário:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) \frac{1}{G_{\text{dc}}} = \quad (3.25)$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen} \left[\left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) t + \phi \right],$$

sendo que

$$\phi = \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right).$$

Observação: $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_{\text{obs}}(t) = G_{\text{dc}}$

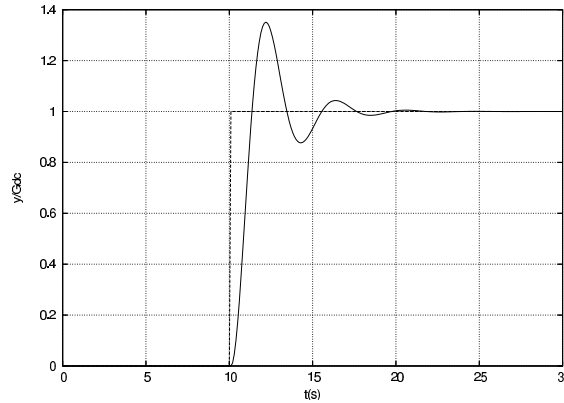


Figura 3.14: Resposta ao degrau de um instrumento de 2^a ordem sub-amortecido.

3. Resposta à Rampa Unitária terminada em $t = t_f$:

A resposta $x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t)$ à rampa unitária pode ser escrita como:

$$\delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t) = \int_0^t \delta x_{\text{obs}}^{\text{rd}}(t') dt', \quad (3.26)$$

sendo $\delta x_{\text{obs}}^{\text{rd}}(x)$ a resposta temporal mostrada na equação (3.25).

Para a rampa unitária terminada em $t = t_f$, tem-se que:

$$\delta x_{\text{obs}}(t) = \delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t) - u_{t_f} [\delta x_{\text{obs}}^{\text{ru}}(t - t_f)], \quad (3.27)$$

sendo $u_{t_f} = 0$ para $t < t_f$, e $u_{t_f} = 1$ para $t \geq t_f$.

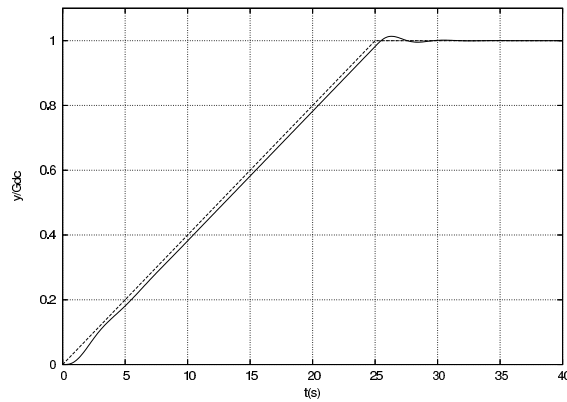


Figura 3.15: Resposta à rampa unitária terminada de um instrumento de 2ª ordem sub-amortecido.

3.5 Tempo Morto

Um comportamento dinâmico bastante comum em Instrumentação Industrial é o atraso puro de tempo, ou *tempo morto*. Há várias situações em que o atuador ou medidor começam a reagir às entradas desejadas somente após um intervalo de tempo finito $\theta > 0$ (Fig.3.16).

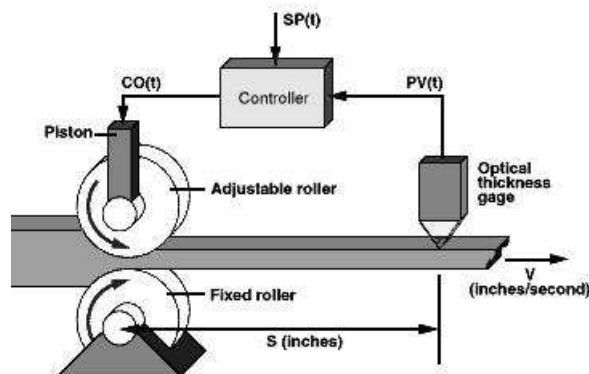


Figura 3.16: Laminação de chapas de aço. Exemplo típico de inevitável presença de atraso puro de tempo entre medição e atuação. A espessura da chapa só é medida θ segundos após a atuação dos cilindros de laminação.

Isto significa que as equações diferenciais que descrevem o comportamento

do instrumento podem ser escritas como (compare com a equação 3.1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), x_d(t-\theta), u_{\text{int}}(t), u_{\text{mod}}(t)); \\ x_{\text{obs}}(t) &= h(x(t), x_d(t-\theta), u_{\text{int}}(t), u_{\text{mod}}(t)); \end{cases} \quad (3.28)$$

Note que as entradas desejadas só afetam o instrumento quando $t \geq \theta$.

Nestes casos, a função de transferência obtida, usando-se o procedimento descrito anteriormente, é acrescida do termo $e^{-\theta s}$, isto é:

$$G_{\theta}(s) = e^{-\theta s} G(s), \quad (3.29)$$

sendo $G(s)$ a função de transferência de um instrumento idêntico, mas que não apresenta atraso puro de tempo.

3.5.1 Aproximações de alta ordem

Existem diferentes maneiras de se aproximar o termo $e^{-\theta s}$, referente ao atraso puro de tempo, por uma função de transferência racional estritamente própria. Isto é feito sempre que esta aproximação conduzir a simplificações matemáticas vantajosas na análise do instrumento ou no projeto de controle como um todo.

Uma primeira tentativa seria:

$$\begin{aligned} G_{\theta}(s) &= e^{-\theta s}, \\ &= \frac{1}{e^{\theta s}} = \frac{1}{1 + \theta s + \theta^2 \frac{s^2}{2!} + \theta^3 \frac{s^3}{3!} + \dots}, \\ G_{\theta}(s) &\approx \frac{1}{1 + \theta s + \theta^2 \frac{s^2}{2!} + \dots + \theta^n \frac{s^n}{n!}}, \end{aligned}$$

Entretanto, esta abordagem só pode ser utilizada para aproximações de até 4^a ordem, uma vez que a função de transferência apresenta pólos no semi-plano positivo para ordens superiores.

Uma outra abordagem para se aproximar a função transcendental $e^{-\theta s}$ por uma função racional, contendo somente pólos, é obtida através do seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} e &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}; \\ e^{-\theta s} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\tau s/x}. \end{aligned}$$

Fazendo $x = \theta s/n$, tem-se que:

$$G_{\theta}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\theta s}{n} \right)^{-n},$$

e, portanto,

$$G_{\theta}(s) \approx \frac{1}{\left(\frac{\theta}{n}s + 1 \right)^n}, \quad (3.30)$$

sendo n a ordem escolhida e θ o atraso puro de tempo. De acordo com esta expressão, verifica-se que quanto maior n , melhor será a aproximação (Fig.3.17).

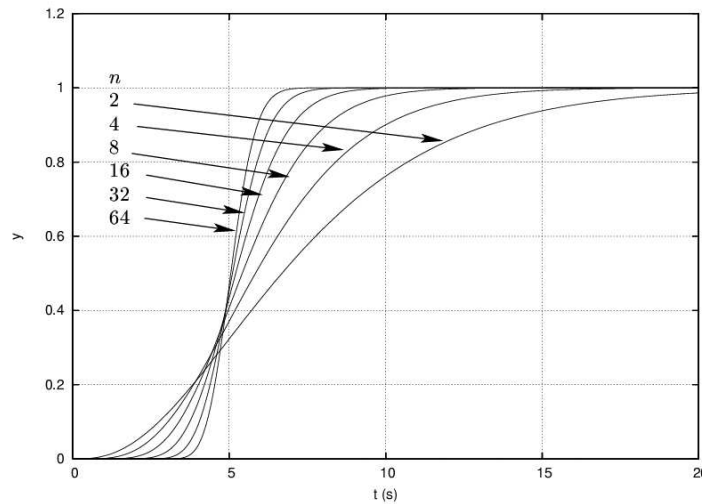


Figura 3.17: Aproximação de alta ordem para $\theta = 5s$.

3.5.2 A aproximação de Padé

Uma ferramenta muito útil na simplificação de modelos matemáticos representados por funções de transferência é a aproximação de Padé.

Esta aproximação consiste em se obter uma função racional $G_{m,n}(s)$ de menor ordem que exiba uma resposta temporal bastante semelhante àquela obtida a partir da função de transferência original:

$$G(s) \approx G_{m,n}(s),$$

$$G_{m,n}(s) = G_{dc} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 s + 1} \quad (3.31)$$

Isto é feito garantindo-se que os valores das funções $G(s)$ e $G_{m,n}(s)$ e de suas derivadas sucessivas em relação a s , no ponto $s = 0$, são iguais:

$$\begin{aligned} G(0) &= G_{m,n}(0), \\ G'(0) &= G'_{m,n}(0), \\ G''(0) &= G''_{m,n}(0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ou seja, a aproximação de Padé é útil não somente para aproximar atrasos puros de tempo, mas também para simplificar quaisquer funções de transferência de alta ordem.

EXEMPLO ►

Considere o seguinte caso em que o instrumento é caracterizado por duas constantes de tempo diferentes:

$$G(s) = \frac{2}{(10s + 1)(s + 1)} = \frac{2}{10s^2 + 11s + 1}.$$

Uma delas ($\tau_1 = 10s$) é dominante, pois seu efeito será observado por mais tempo na resposta do instrumento. Podemos propor a seguinte aproximação:

$$G(s) \approx G_{1,1}(s) = 2 \frac{b_0s + 1}{a_0s + 1}.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} 2 \frac{b_0s + 1}{a_0s + 1} &\approx 2 \frac{1}{10s^2 + 11s + 1}, \\ (b_0s + 1)(10s^2 + 11s + 1) &\approx a_0s + 1, \\ (10b_0)s^3 + (11b_0 + 10)s^2 + (b_0 + 11)s + 1 &\approx a_0s + 1. \end{aligned}$$

Derivando sucessivamente em relação a s ambos os lados da equação acima, e fazendo-se $s = 0$ a cada passo, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} b_0 + 11 &= a_0, \\ 2(11b_0 + 10) &= 0, \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima tem-se que

$$G(s) = \frac{2}{10s^2 + 11s + 1} \approx 2 \frac{-0,909s + 1}{10,09s + 1}.$$

◀

Para o caso de $G(s) = e^{-\theta s}$, os coeficientes na equação (3.31) podem ser determinados analiticamente:

$$b_k = (-\theta)^k \left[\frac{(m+n-k)!}{(m+n)!k!} \right] \frac{m!}{(m-k)!},$$

$$k = 0, 1, \dots, m.$$

$$a_k = \theta^k \left[\frac{(m+n-k)!}{(m+n)!k!} \right] \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$k = 0, 1, \dots, n.$$

EXEMPLO ►

Aproximações de Padé para o atraso puro de tempo $G(s) = e^{-\theta s}$:

$$G_{0,1}(s) = \frac{1}{\theta s + 1},$$

$$G_{1,1}(s) = \frac{-\theta s + 2}{\theta s + 2},$$

$$G_{1,2}(s) = \frac{-2\theta s + 6}{\theta^2 s^2 + 4\theta s + 6},$$

$$G_{2,2}(s) = \frac{\theta^2 s^2 - 6\theta s + 12}{\theta^2 s^2 + 6\theta s + 12}$$

◀

3.5.3 O Preditor de Smith

A presença de atraso puro de tempo na instrumentação de um processo em malha fechada pode conduzir o mesmo à instabilidade.

Por exemplo, se durante o tempo em que um instrumento de medição não responde à variação da grandeza sendo controlada, o controlador continuar acionando o atuador para produzir uma modificação desta grandeza, isto pode levar a saturação dos elementos finais de controle e a oscilações indesejadas.

Posto isto, vê-se que instrumentos com atraso puro de tempo devem ser evitados sempre que possível.

Entretanto, supondo que existe um atraso puro de tempo inerente ao processo, que não pode ser removido, é possível empregar a técnica conhecida como *preditor de Smith* para minimizar os efeitos do tempo morto (Fig.3.18).

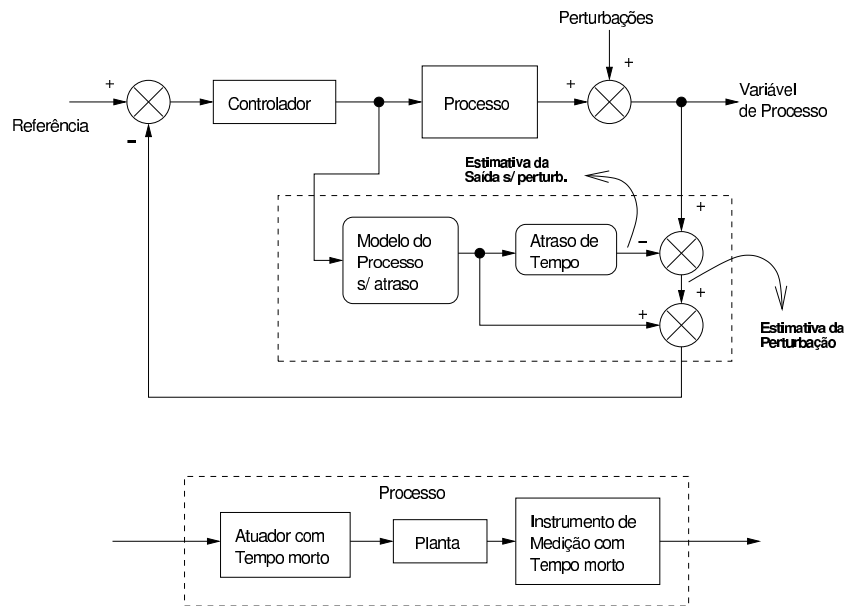


Figura 3.18: Preditor de Smith. Note que a instrumentação foi incluída no bloco “Processo”.

A técnica consiste em se obter um modelo dinâmico do processo que não contenha o atraso puro de tempo. Entretanto, este modelo deve ser fidedigno ao processo, ou seja, ele deve apresentar as mesmas constantes de tempo, coeficientes de amortecimento, frequências naturais, etc.

A partir do modelo obtido, e conhecendo-se o valor do tempo morto, é possível implementar a solução mostrada na Fig.3.18. Considere a aplicação de uma variação em degrau no sinal de referência. Através da utilização do modelo sem atraso do processo a ser controlado, é possível obter instantaneamente os valores esperados para a saída da planta, ignorando propositalmente o efeito do tempo morto. Quando o processo começar a responder, a resposta real da planta não será realimentada, uma vez que ela é eliminada no primeiro ponto de soma do laço de realimentação. Ou seja, se o modelo do processo for perfeito, o sistema irá controlar, na verdade, o modelo sem atraso e, paralelamente, atuará sobre o processo real.

Um ponto importante é a verificação de que as perturbações externas na saída da planta não deixam de ser incluídas na malha fechada. Além disso, quaisquer erros de modelagem cometidos poderão ser vistos como perturbações externas aditivas na saída do processo.