

O Problema de Estabilidade Absoluta

Leonardo A. B. Tôrres

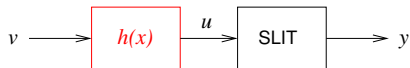
Julho de 2023

- 1 Sistemas Não Lineares: SLITs + Funções Não Lineares
- 2 Sistemas de Lur'e e o Problema de Estabilidade Absoluta
- 3 Passividade de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo
- 4 O Critério do Círculo
- 5 O Critério de Popov

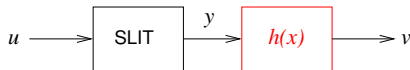
Sistemas de Hammerstein e de Wiener I

É comum encontrar sistemas não lineares resultantes da associação entre um Sistema Linear Invariante no Tempo – SLIT e uma função não linear. Duas classes bem conhecidas são os:

■ Sistemas de Hammerstein



■ Sistemas de Wiener

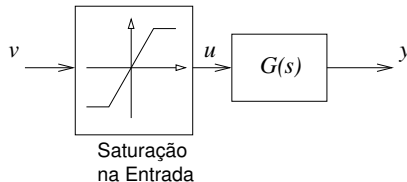


Em muitos casos as funções não lineares são *estáticas*, i.e. não mudam ao longo do tempo, mas são consideradas sempre *sem memória* (não são sistemas dinâmicos com estados internos). Nos casos acima, $h(\cdot)$ representa uma função não linear.

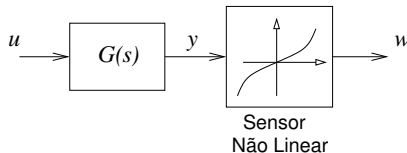
Sistemas de Hammerstein e de Wiener II

Por exemplo, dois casos típicos encontrados em controle são:

- Sistemas com saturação da variável manipulada (o que sempre acontece na prática):



- Sistemas em que se emprega um instrumento de medição com características estáticas não lineares:

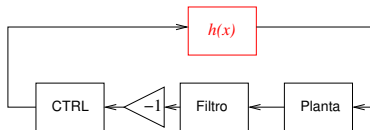


em

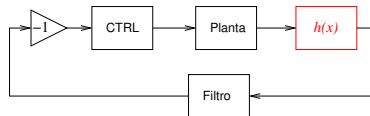
Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Quando consideramos a *Estabilidade Interna* de sistemas de controle em *Malha Fechada*, temos os seguintes casos:

Sistemas de Hammerstein



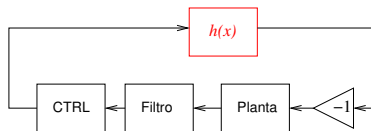
Sistemas de Wiener



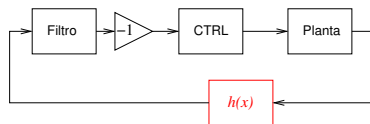
Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Quando consideramos a *Estabilidade Interna* de sistemas de controle em *Malha Fechada*, temos os seguintes casos:

Sistemas de Hammerstein



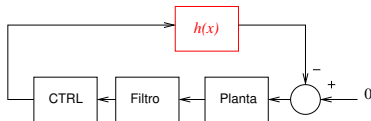
Sistemas de Wiener



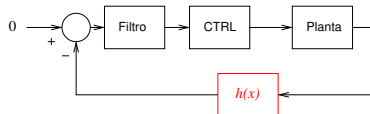
Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Quando consideramos a *Estabilidade Interna* de sistemas de controle em *Malha Fechada*, temos os seguintes casos:

Sistemas de Hammerstein



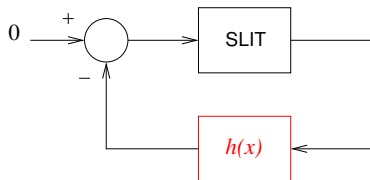
Sistemas de Wiener



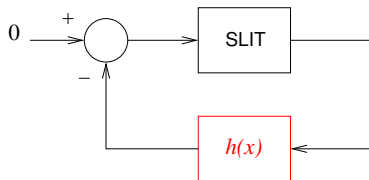
Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Quando consideramos a *Estabilidade Interna* de sistemas de controle em *Malha Fechada*, temos os seguintes casos:

Sistemas de Hammerstein



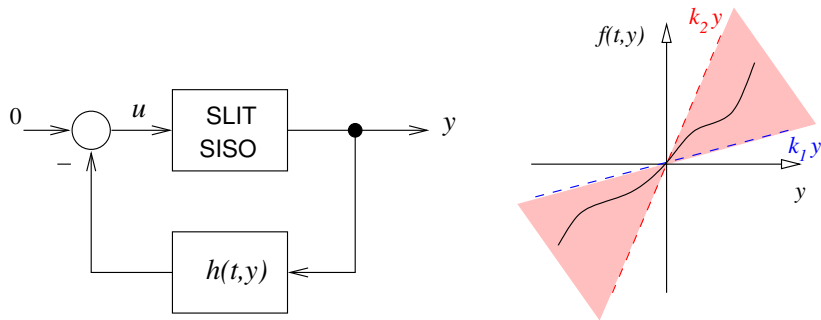
Sistemas de Wiener



Ou seja, ambos os casos conduzem ao **mesmo problema** de Análise de Estabilidade Interna.

Sistemas de Lur'e I

Um classe importante de problemas de controle é representada pelo chamado *Problema de Lur'e*, também conhecido como *Problema da Estabilidade Absoluta*, formulado em [3]:



Sistema de Lur'e e não-linearidade setorial.

Sistemas de Lur'e II

- Neste caso, a função não linear $h(t,y) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é sem memória, pode ser variante no tempo, e respeita as restrições:

$$\begin{aligned}k_1 y &\leq h(t,y) \leq k_2 y, & \text{para } y \geq 0, \\k_2 y &\leq h(t,y) \leq k_1 y, & \text{para } y < 0,\end{aligned}$$

que é equivalente a, para $k_2 - k_1 > 0$,

$$[k_2 y - h(t,y)][k_1 y - h(t,y)] \leq 0,$$

e diz-se que “a não linearidade h pertence ao setor $[k_1, k_2]$ ”, i.e.

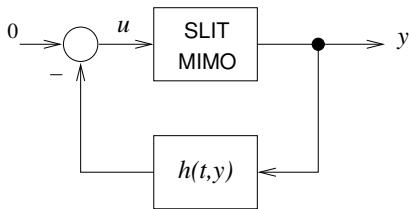
$$h \in [k_1, k_2].$$

Outras duas notações possíveis são:

- 1 $h \in [0, \infty] \iff y h(t,y) \geq 0.$
- 2 $h \in [k_1, \infty] \iff y[k_1 y - h(t,y)] \leq 0.$

Sistemas de Lur'e III

- Existe também o problema correlato, mais geral, mostrado na Figura abaixo.



SLIT MIMO e não-linearidade sem memória e variante no tempo.

A função não linear

$h(t,y) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^m$, obedece a

$$[K_2 y - h(t,y)]^\top [K_1 y - h(t,y)] \leq 0,$$

em que $K_2 - K_1 = K = K^\top > 0$ é definida positiva. Neste caso, dizemos que “a função h pertence ao setor $[K_1, K_2]$ ”, i.e.

$$h \in [K_1, K_2].$$

Outras duas notações possíveis são:

- $h \in [0, \infty] \iff y^\top h(t,y) \geq 0.$

- $h \in [K_1, \infty] \iff y^\top [K_1 y - h(t,y)] \leq 0.$

Sistemas de Lur'e IV

- No caso de não-linearidades setoriais multivariáveis, pode ser difícil encontrar as matrizes K_1 e K_2 da desigualdade anterior. Um resultado interessante é:

$$\begin{aligned}\|h(t,y) - Ly\| &\leq \gamma\|y\| \\ \Updownarrow \\ [K_2y - h(t,y)]^\top [K_1y - h(t,y)] &\leq 0,\end{aligned}$$

para

$$K_1 = L - \gamma I, \quad K_2 = L + \gamma I,$$

e $\gamma \geq 0$.

O Problema de Estabilidade Absoluta I

- A ideia é agrupar os elementos não lineares de uma malha de controle, separando-os da parcela linear.
- O desafio é, a partir do conhecimento dos limites setoriais da função não linear e das matrizes A, B, C, D que definem o SLIT (supondo uma realização mínima em Espaço de Estados, i.e. o par (A, B) é controlável e o par (C, A) é observável), obter condições suficientes para que a origem do Espaço de Estados seja um P.E. Globalmente Uniformemente Assintoticamente Estável. Este problema ficou conhecido como

O Problema de Estabilidade Absoluta

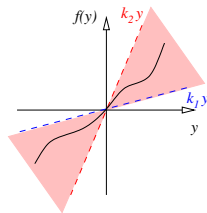
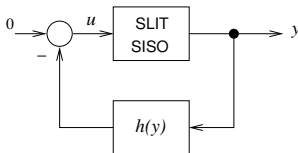
O Problema de Estabilidade Absoluta II

- No Problema de Estabilidade Absoluta o alvo é garantir um sistema de controle em malha fechada que seja *robustamente estável* (permaneça estável mesmo com a presença da não-linearidade setorial *desconhecida* e possivelmente *variante no tempo*).
- Outra aplicação de sistemas de Lur'e é no projeto de osciladores (e.g. osciladores eletrônicos usados em telecomunicações). Aqui o objetivo é precisamente o contrário do anterior: determinar em que condições o P.E. será instável, e haverá um ciclo-limite estável.

A Conjectura de Aizerman

Conjectura de Aizerman (1949)[1]

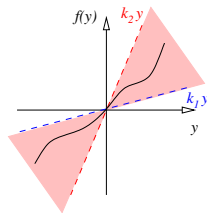
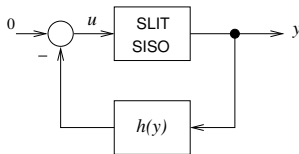
Se o sistema em malha fechada for estável para qualquer escolha de realimentação linear $u = -ky$, com $k_1 < k < k_2$, então será estável para qualquer função não linear $u = -f(y)$, com $k_1 y^2 \leq y f(y) \leq k_2 y^2$.



A Conjectura de Aizerman

Conjectura de Aizerman (1949)[1]

Se o sistema em malha fechada for estável para qualquer escolha de realimentação linear $u = -ky$, com $k_1 < k < k_2$, então será estável para qualquer função não linear $u = -f(y)$, com $k_1 y^2 \leq y f(y) \leq k_2 y^2$.

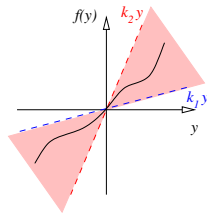
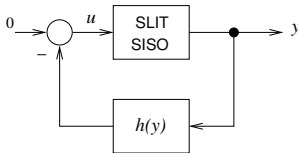


Contra-exemplos para $n = 2$ em 1952: **FALSA**.

A Conjectura de Kalman

Conjectura de Kalman (1957)[2]

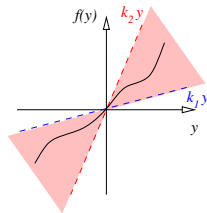
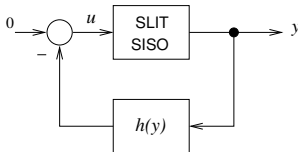
Se o sistema em malha fechada for estável para qualquer escolha de realimentação linear $u = -ky$, com $k_1 < k < k_2$, então será estável para qualquer função não linear $u = -f(y)$ tal que $k_1 \leq \frac{df}{dy} \leq k_2$.



A Conjectura de Kalman

Conjectura de Kalman (1957)[2]

Se o sistema em malha fechada for estável para qualquer escolha de realimentação linear $u = -ky$, com $k_1 < k < k_2$, então será estável para qualquer função não linear $u = -f(y)$ tal que $k_1 \leq \frac{df}{dy} \leq k_2$.



Contra-exemplos para $n = 3$ em 1958: **FALSA**.

Análise baseada na Teoria da Passividade

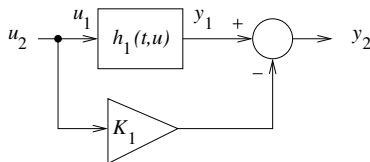
- Estratégias realmente efetivas para análise de estabilidade absoluta foram propostas valendo-se das propriedades de passividade dos sistemas envolvidos.
- Ideia central:
 - 1 Mostrar que a parte linear é estritamente passiva (SP), ou estritamente passiva pela saída e observável (OSP + ZSO).
 - 2 Mostrar que a não-linearidade setorial é passiva.
 - 3 Reconhecer que o SLIT e a não-linearidade setorial estão em realimentação negativa, o que produz um sistema assintoticamente estável em malha fechada (composição em realimentação de 2 sistemas passivos, um deles estritamente passivo).
- A abordagem acima ainda pode ser estendida para casos mais gerais (SLITs não passivos), usando um “truque” muito interessante: a construção de um **problema de estabilidade equivalente** usando as chamadas **Transformações de Laço**.

Transformações de Laço I

O problema de estabilidade absoluta pode ser estudado por meio de um problema equivalente, obtido usando as chamadas *Loop Transformations*.

Com elas, uma não-linearidade setorial pode ser “transformada” em uma não-linearidade pertencente ao setor $[0, \infty]$.

- **Transformação 1:** De $h_1(t, u_1) \in [K_1, K_2]$ para $h_2(t, u_2) \in [0, K_2 - K_1]$ via ação direta negativa (*negative feedforward*):



Transformações de Laço II

Demonstração.

Hipótese:

$$[K_2 u_1 - h_1(t, u_1)]^\top [K_1 u_1 - h_1(t, u_1)] \leq 0. \quad (1)$$

Do diagrama, tem-se que $u_2 = u_1$ e $y_2 = h_2(u_2) = h_1(u_2) - K_1 u_2$.
Portanto, $h_2(u_2) + K_1 u_2 = h_1(u_2)$. Substituindo em (1),

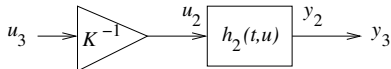
$$\begin{aligned} [K_2 u_2 - h_2(u_2) - K_1 u_2]^\top [\cancel{K_1 u_2} - h_2(u_2) - \cancel{K_1 u_2}] &\leq 0, \\ [(K_2 - K_1) u_2 - h_2(u_2)]^\top [-h_2(u_2)] &\leq 0 \Leftrightarrow h_2 \in [0, K], \end{aligned}$$

em que $K = K_2 - K_1$.



Transformações de Laço III

- **Transformação 2:** De $h_2(t, u_2) \in [0, K]$ para $h_3(t, u_3) \in [0, I]$, com $K > 0$, via inclusão de ganho:



Demonstração.

Hipótese:

$$[Ku_2 - h_2(t, u_2)]^\top [-h_2(t, u_2)] \leq 0. \quad (2)$$

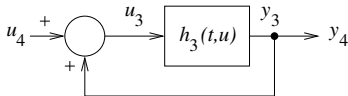
Do diagrama, tem-se que $y_3 = h_3(t, u_3) = y_2 = h_2(t, u_2)$ e $u_3 = Ku_2$. Substituindo em (2),

$$[u_3 - h_3(t, u_3)]^\top [-h_3(t, u_3)] \leq 0 \Leftrightarrow h_3 \in [0, I].$$



Transformações de Laço IV

- **Transformação 3:** De $h_3(t, u_3) \in [0, I]$ para $h_4(t, u_4) \in [0, \infty]$ via realimentação positiva (*positive feedback*):



Um aspecto importante é considerar que o sistema realimentado acima define um problema “bem-colocado” (*well-posed*), no sentido de que existe uma única solução y_4 , para cada u_4 , que satisfaz a relação $h_3(t, u_4 + y_4) = y_4$. E essa solução única pode ser representada como $y_4 = h_4(t, u_4)$.

Transformações de Laço V

Demonstração.

Partindo da existência da relação $y_4 = h_4(t, u_4)$, a outra hipótese é que:

$$[u_3 - h_3(t, u_3)]^\top [-h_3(t, u_3)] \leq 0. \quad (3)$$

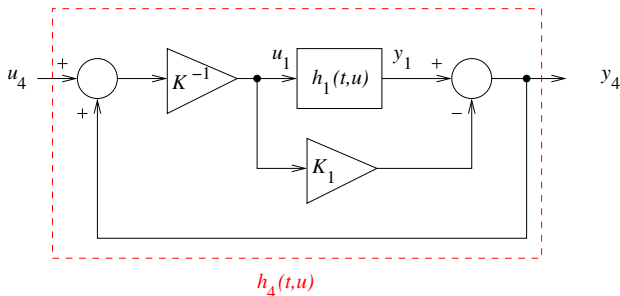
Do diagrama, tem-se que $y_3 = h_3(t, u_3) = y_4 = h_4(t, u_4)$ e $u_3 = u_4 + y_4$. Substituindo em (3),

$$\begin{aligned} [u_4 + \cancel{y_4} - \cancel{h_4(t, u_4)}]^\top [-h_4(t, u_4)] &\leq 0, \\ u_4^\top h_4(t, u_4) &\geq 0 \Leftrightarrow h_4 \in [0, \infty]. \end{aligned}$$



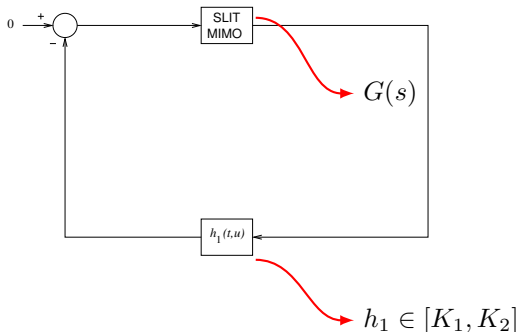
Transformações de Laço VI

Ao compormos as 3 transformações de laço anteriores, a partir de qualquer não linearidade setorial $h_1 \in [K_1, K_2]$, pode-se obter uma não linearidade $h_4 \in [0, \infty]$.



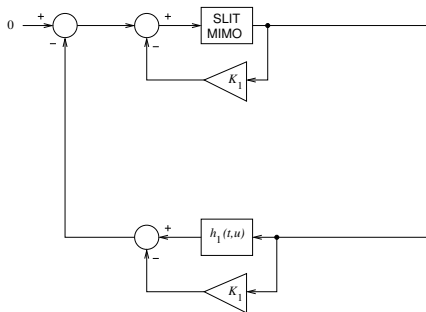
Estabilidade Absoluta: Transformações de Laço

Usando as transformações vistas anteriormente, pode-se considerar problemas de análise de estabilidade que são, de fato, equivalentes:



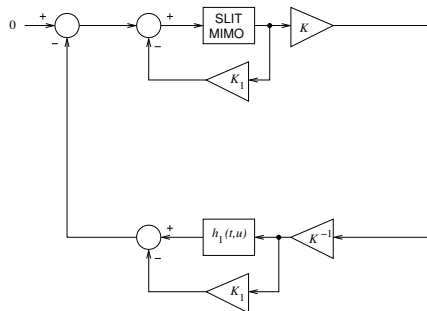
Estabilidade Absoluta: Transformações de Laço

Usando as transformações vistas anteriormente, pode-se considerar problemas de análise de estabilidade que são, de fato, equivalentes:



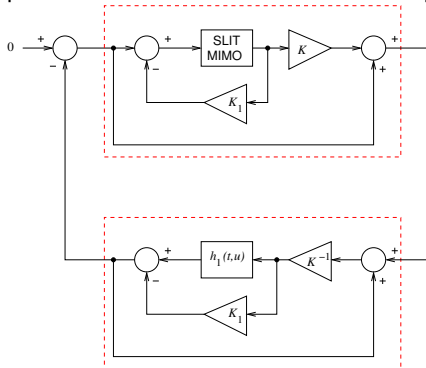
Estabilidade Absoluta: Transformações de Laço

Usando as transformações vistas anteriormente, pode-se considerar problemas de análise de estabilidade que são, de fato, equivalentes:



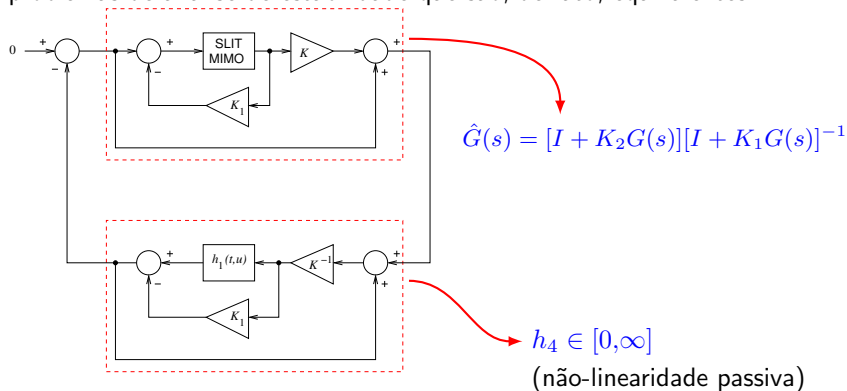
Estabilidade Absoluta: Transformações de Laço

Usando as transformações vistas anteriormente, pode-se considerar problemas de análise de estabilidade que são, de fato, equivalentes:



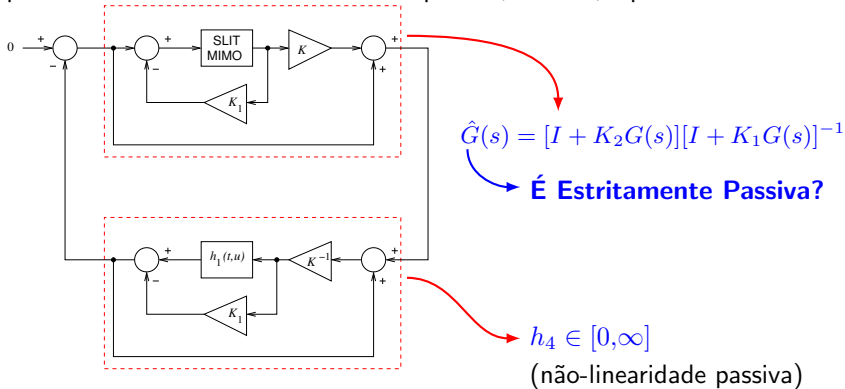
Estabilidade Absoluta: Transformações de Laço

Usando as transformações vistas anteriormente, pode-se considerar problemas de análise de estabilidade que são, de fato, equivalentes:



Estabilidade Absoluta: Transformações de Laço

Usando as transformações vistas anteriormente, pode-se considerar problemas de análise de estabilidade que são, de fato, equivalentes:



Passividade Estrita de $\hat{G}(s)$

- A investigação da passividade de $\hat{G}(s)$ é facilitada pelo fato de se poder relacionar dois conceitos importantes, em se tratando de SLITs:
 - 1 **Passividade Estrita:** depende do conhecimento de uma função de armazenamento, tal que o SLIT seja SP ou OSP + ZSO em relação à taxa de fornecimento $s(u,y) = u^T y$.
 - 2 **Positividade Real Estrita:** pode ser verificada no domínio da frequência, ou a partir do conhecimento de uma realização mínima (A,B,C,D) para o SLIT.

Teorema (Passividade Estrita e Positividade Real Estrita)

Um SLIT é estritamente passivo se, e somente se, sua Função de Transferência é Estritamente Real Positiva.

Funções de Transferência Reais Positivas I

Definição (Funções de Transferência Reais Positivas – SISO)

- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, e é real $\forall s \in \mathbb{R}^+$.
- 2 $\operatorname{Re}\{G(s)\} \geq 0$, sempre que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$.

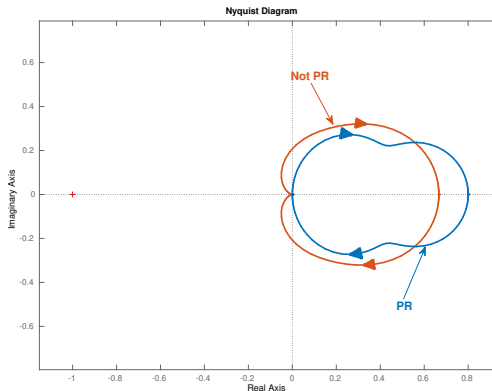
Alternativamente (mais fácil de testar):

- 1 $G(s)$ é uma função racional de s que é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, i.e. não tem polos no semiplano direito aberto do plano complexo.
- 2 $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \geq 0$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$ que não seja um polo de $G(j\omega)$.
- 3 Qualquer polo $j\omega$ é um polo simples, e o seu resíduo correspondente é não-negativo, i.e. $\lim_{s \rightarrow j\omega} [(s - j\omega)G(s)] \geq 0$.

Deduz-se, portanto, que, se $G(s)$ é PR, então a FT não tem polos no semiplano direito aberto do plano complexo, sua parte imaginária é nula para valores reais e positivos de s , e sua parte real é positiva para valores de s fora do eixo real e no semiplano direito aberto.

Funções de Transferência Reais Positivas II

- No caso SISO, como $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ (tal que $j\omega$ não é um polo), isso significa que o **Diagrama de Nyquist de $G(s)$** precisa estar completamente contido no semiplano direito do Plano Imagem:



Funções de Transferência Reais Positivas III

- Consequentemente, uma condição necessária para que a FT seja Real Positiva (*Positive Real*) é que

$$-90^\circ \leq \arg\{G(j\omega)\} \leq +90^\circ,$$

e, portanto, o grau relativo da FT (diferença entre a ordem do denominador e a ordem do numerador) deve ser $r \leq 1$, pois o ângulo da função racional $G(j\omega)$ quando $\omega \rightarrow \infty$ é igual a $(-90^\circ)r$.

Funções de Transferência Reais Positivas IV

Definição (Funções de Transferência Reais Positivas – MIMO)

- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, i.e. nenhum elemento de $G(s)$ tem polos no semiplano direito aberto do plano complexo.
- 2 $G(s)$ é uma matriz real, sempre que $s \in \mathbb{R}^+$;
- 3 $G(s) + G^*(s) \geq 0$, sempre que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$.

Alternativamente (mais fácil de testar):

- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, cujos elementos são funções racionais de s , i.e. nenhum elemento de $G(s)$ tem polos no semiplano direito aberto do plano complexo.
- 2 $G(j\omega) + G^*(j\omega) \geq 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, em que $j\omega$ não é um polo de $G(j\omega)$;
- 3 Qualquer polo $j\omega$ de qualquer elemento de $G(s)$ é um polo simples e a matriz resíduo correspondente $R = \lim_{s \rightarrow j\omega} [(s - j\omega)G(s)]$ é semidefinida positiva e Hermitiana.

Funções de Transferência Reais Positivas V

Além disso, é possível verificar se uma dada $G(s)$ é Real Positiva a partir do conhecimento de uma realização mínima (A,B,C,D) :

Lema (Real Positivo)

A representação em espaço de estados (A,B,C,D) , mínima, de um SLIT; i.e. assumindo-se o par (A,B) controlável, e o par (C,A) observável; é Real Positiva se, e somente se, existe uma matriz $P = P^\top > 0$, e matrizes quaisquer L e W de dimensões apropriadas, tal que

$$\begin{aligned}PA + A^\top P &= -L^\top L, \\ PB &= C^\top - L^\top W, \\ W^\top W &= D + D^\top.\end{aligned}$$

Funções de Transferência Reais Positivas VI

Alternativamente, pode-se verificar a factibilidade da desigualdade matricial linear (*Linear Matrix Inequality* – LMI) abaixo:

Lema (Real Positivo usando LMI)

A representação em espaço de estados (A,B,C,D) , mínima, de um SLIT; i.e. assumindo-se o par (A,B) controlável, e o par (C,A) observável; é Real Positiva se, e somente se, existe uma matriz $P = P^\top > 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB - C^\top \\ B^\top P - C & -(D + D^\top) \end{bmatrix} \leq 0.$$

A relação entre os dois lemas pode ser deduzida, observando-se que as igualdades anteriores conduzem a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB - C^\top \\ B^\top P - C & -(D + D^\top) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L^\top \\ W^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & W \end{bmatrix} \leq 0.$$

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas I

Definição (Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas)

Uma Função de Transferência $G(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é **Estritamente** Real Positiva se, e somente se, $G(s - \epsilon)$ é Real Positiva para algum valor real $\epsilon > 0$.

A partir desta definição, as definições anteriores podem ser reescritas, conforme mostrado a seguir.

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas II

Definição (Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas – Caso SISO)

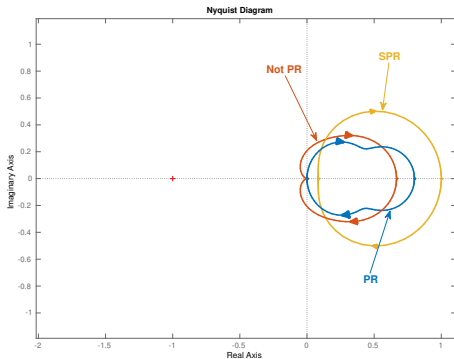
- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, e $G(s)$ é real $\forall s \in \mathbb{R}^+$. Deduz-se, portanto, que todos os polos estão estritamente no semiplano esquerdo.
- 2 $\operatorname{Re}\{G(s)\} > 0$, sempre que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$.

Alternativamente (mais fácil de testar):

- 1 $G(s)$ é uma função racional de s que é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, i.e. todos os polos estão estritamente no semiplano esquerdo.
- 2 $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in [0, \infty)$;
- 3 $G(\infty) > 0$ ou, se $G(\infty) = 0$, deve-se ter $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0$.

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas III

- Se o Diagrama de Nyquist estiver contido no semiplano direito do Plano Imagem, e nunca tocar o eixo imaginário; i.e. $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in [0, \infty) \cup +\infty$; pode-se deduzir que a FT é Estritamente Real Positiva (*Strictly Positive Real*) – SPR :



Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas IV

Definição (Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas – Caso MIMO)

- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} \geq 0$, i.e. todos os elementos de $G(s)$ tem polos estritamente no semiplano esquerdo.
- 2 $G(s)$ é uma matriz real, sempre que $s \in \mathbb{R}^+$;
- 3 $G(s) + G^*(s) > 0$, sempre que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$.

Equivalentemente (mais fácil de testar):

- 1 $G(s)$ é analítica para $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, i.e. todos os elementos de $G(s)$ tem polos estritamente no semiplano esquerdo.
- 2 $G(j\omega) + G^*(j\omega) > 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$;
- 3 $G(\infty) + G^*(\infty) > 0$ ou, se $G(\infty) + G^*(\infty) = 0$, deve-se ter $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{2(n-r)} \det[G(j\omega) + G^*(j\omega)] > 0$, sendo n o número de linhas e colunas de $G(s)$ e r é o posto da matriz $[G(\infty) + G^*(\infty)]$.

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas V

Além disso, é possível verificar se uma dada $\hat{G}(s)$ é Estritamente Real Positiva a partir do conhecimento de uma realização mínima (A,B,C,D) :

Lema (Kalman-Yakubovich-Popov)

A representação em espaço de estados (A,B,C,D) , mínima, de um SLIT; i.e. assumindo-se o par (A,B) controlável, e o par (C,A) observável; é Estritamente Real Positiva (SPR – Strictly Positive Real) se, e somente se, existe uma matriz $P = P^\top > 0$, uma constante $\epsilon > 0$, e matrizes quaisquer L e W de dimensões apropriadas, tal que

$$PA + A^\top P = -L^\top L - \epsilon P,$$

$$PB = C^\top - L^\top W,$$

$$W^\top W = D + D^\top.$$

Funções de Transferência Estritamente Reais Positivas VI

Alternativamente, pode-se verificar a factibilidade da desigualdade matricial linear (*Linear Matrix Inequality* – LMI) abaixo:

Lema (KYP usando LMI)

Um SLIT $\hat{G}(s)$ com representação em espaço de estados mínima (A, B, C, D) ; i.e. o par (A, B) é controlável, e o par (C, A) é observável; é Estritamente Real Positivo se, e somente se, existe uma matriz $P = P^\top > 0$, e um valor real $\epsilon > 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P - \epsilon P & PB - C^\top \\ B^\top P - C & -(D + D^\top) \end{bmatrix} \leq 0.$$

Observe que as igualdades anteriores conduzem a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P - \epsilon P & PB - C^\top \\ B^\top P - C & -(D + D^\top) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L^\top \\ W^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & W \end{bmatrix} \leq 0.$$

O Critério do Círculo I

- O Critério do Círculo é um método para análise de estabilidade de sistemas não lineares que podem ser representados como um SLIT em realimentação negativa com uma não linearidade sem memória e possivelmente variante no tempo.
- Por meio de *Transformações de Laço*, investiga-se se o problema equivalente de estabilidade corresponde à composição em realimentação de um SLIT estritamente passivo com uma não-linearidade setorial passiva.

O Critério do Círculo II

Teorema (Critério do Círculo)

Um sistema composto por um SLIT, dado por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

em realimentação negativa com uma não linearidade setorial

$$h \in [K_1, K_2], \quad K_2 - K_1 = K = K^\top > 0,$$

será globalmente uniformemente assintoticamente estável se

$$\hat{G}(s) = [I + K_2 G(s)][I + K_1 G(s)]^{-1}$$

for uma função de transferência Estritamente Real Positiva.

O Critério do Círculo – Caso SISO I

- Se $G(s)$ é um sistema SISO, usando $K_2 = \beta$ e $K_1 = \alpha$, com $\beta - \alpha > 0$, tem-se que

$$\hat{G}(s) = \frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)}.$$

- Três casos podem ser considerados:

- 1 $\beta > \alpha > 0$;
- 2 $\beta > \alpha = 0$;
- 3 $\beta > 0 > \alpha$.

O Critério do Círculo – Caso SISO II

1 Caso $\beta > \alpha > 0$:

Uma vez que $\alpha > 0$, podemos escrever que

$$\hat{G}(s) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left[\frac{\frac{1}{\beta} + G(s)}{\frac{1}{\alpha} + G(s)} \right].$$

Note que, se $G(j\omega) = x + jy$ (coordenadas x e y usadas para se traçar Diagramas de Nyquist de $G(s)$), então

$$\begin{aligned}\hat{G}(j\omega) &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\frac{1}{\beta} + x + jy}{\frac{1}{\alpha} + x + jy}, \\ \hat{G}(j\omega) &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\left(\frac{1}{\beta} + x + jy\right) \left(\frac{1}{\alpha} + x - jy\right)}{\left(\frac{1}{\alpha} + x\right)^2 + y^2}.\end{aligned}\tag{4}$$

O Critério do Círculo – Caso SISO III

Como $\hat{G}(s)$ tem que ser um sistema estritamente estável (todos os polos estritamente no semiplano esquerdo), usando o Critério de Nyquist para avaliar se há raízes da equação característica

$$\frac{1}{\alpha} + G(s) = 0$$

no semiplano direito **fechado**, queremos que não exista $\omega \in \mathbb{R}$, tal que $s = j\omega$ seja uma raiz da equação acima e, portanto,

$$(\operatorname{Re} \{G(j\omega)\}; \operatorname{Im} \{G(j\omega)\}) = (x; y) \neq \left(-\frac{1}{\alpha}; 0\right), \quad (5)$$

isto é, o Diagrama de Nyquist de $G(s)$ não passa exatamente pelo ponto $(-1/\alpha; 0)$, mas pode haver necessidade de enlacá-lo ou não, dependendo se $G(s)$ tem ou não polos no semiplano direito.

O Critério do Círculo – Caso SISO IV

Usando a expressão (4), e assumindo (5), para que $\hat{G}(s)$ seja SPR, com $(\beta/\alpha) > 0$, tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{\hat{G}(j\omega)\right\} &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left[\left(\frac{1}{\beta} + x\right) \left(\frac{1}{\alpha} + x\right) + y^2\right] > 0, \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\beta} + x\right) \left(\frac{1}{\alpha} + x\right) + y^2 > 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha} + x\right) + \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\alpha}\right)\right] \left[\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha} + x\right) - \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\alpha}\right)\right] + y^2 &> 0, \\ \left(x + \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\alpha}\right)^2 + y^2 &> 0,\end{aligned}$$

O Critério do Círculo – Caso SISO V

Portanto, o Diagrama de Nyquist construído a partir de $G(j\omega) = x + jy$ deve ser tal que

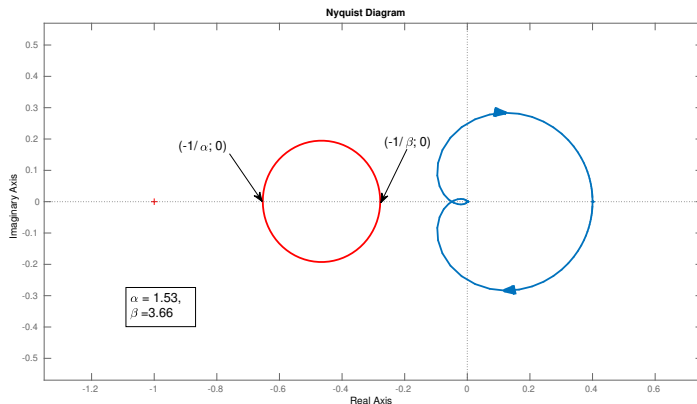
$$\left[x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \right]^2 + y^2 > \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \right]^2. \quad (6)$$

A expressão (6) significa que o Diagrama de Nyquist não pode “entrar” no círculo:

- Centro: $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$;
- Raio: $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$;

mostrado na próxima figura como um **círculo vermelho**.

O Critério do Círculo – Caso SISO VI



O Critério do Círculo – Caso SISO VII

2 Caso $\beta > \alpha = 0$:

Neste caso

$$\hat{G}(s) = 1 + \beta G(s),$$

e, para que $\hat{G}(s)$ seja estritamente estável, $G(s)$ não pode ter nenhum polo no semiplano direito fechado. Assim, para que $\hat{G}(s)$ seja SPR, com $\beta > 0$, e assumindo que $G(j\omega) = x + jy$, tem-se que

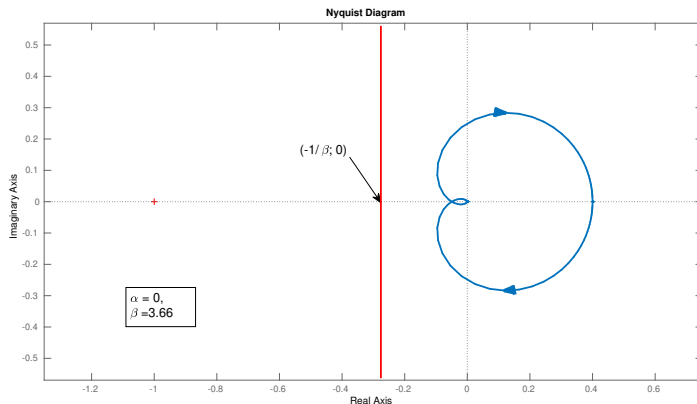
$$\operatorname{Re} \left\{ \hat{G}(j\omega) \right\} = 1 + \beta \operatorname{Re} \{ G(j\omega) \} = 1 + \beta x > 0.$$

Logo

$$x > -1/\beta,$$

e o Diagrama de Nyquist de $G(s)$ não pode tocar a reta mostrada na próxima figura em **vermelho**.

O Critério do Círculo – Caso SISO VIII



O Critério do Círculo – Caso SISO IX

3 Caso $\beta > 0 > \alpha$:

Similarmente ao que foi feito no caso 1 anterior, como $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$,

$$\hat{G}(s) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left[\frac{\frac{1}{\beta} + G(s)}{\frac{1}{\alpha} + G(s)} \right].$$

Para que $\hat{G}(s)$ seja SPR, com $(\beta/\alpha) < 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \hat{G}(j\omega) \right\} &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left[\left(\frac{1}{\beta} + x\right) \left(\frac{1}{\alpha} + x\right) + y^2 \right] > 0, \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\beta} + x\right) \left(\frac{1}{\alpha} + x\right) + y^2 < 0. \end{aligned}$$

O Critério do Círculo – Caso SISO X

Portanto,

$$\left[\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha} + x \right) + \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\alpha} \right) \right] \left[\left(\frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha} + x \right) - \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\alpha} \right) \right] + y^2 < 0,$$
$$\left(x + \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\alpha} \right)^2 + y^2 < 0,$$

E o Diagrama de Nyquist construído a partir de $G(j\omega) = x + jy$ deve ser tal que

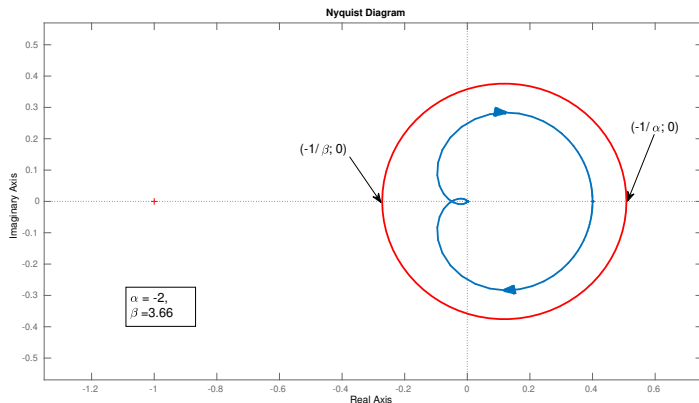
$$\left[x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \right]^2 + y^2 < \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \right]^2. \quad (7)$$

A expressão (6) significa que o Diagrama de Nyquist deve estar dentro do círculo:

- Centro: $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$;
- Raio: $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$.

Um exemplo está mostrado na próxima figura como um **círculo vermelho**.

O Critério do Círculo – Caso SISO XI



O Critério de Popov I

- Considere um Problema de Estabilidade Absoluta tal que:
 - O SLIT tem grau relativo $r \geq 1$.
 - A função estática não linear é invariante no tempo e “desacoplada”:

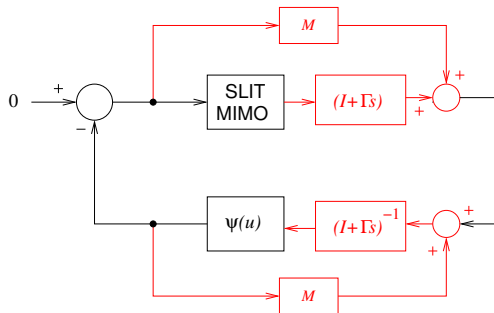
$$\psi(u) = \begin{bmatrix} \psi_1(u_1) \\ \psi_2(u_2) \\ \vdots \\ \psi_m(u_m) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \psi_1(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \psi_2(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \psi_m(u_1, u_2, \dots, u_m) \end{bmatrix}$$

- Cada componente da função $\psi(u)$ pertence ao setor:

$$\psi_i(u_i) \in [0; k_i], \quad k_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

O Critério de Popov II

- Como o grau relativo do SLIT é $r \geq 1$, pode-se obter um problema de estabilidade equivalente ao problema de estabilidade absoluta original, via introdução de sistemas dinâmicos (e seus correspondentes inversos) chamados de “multiplicadores de Popov”:

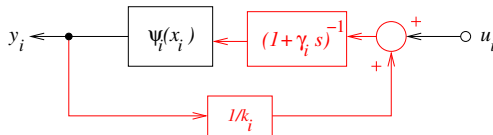


$$M = \text{diag}\left\{\begin{array}{l} 1/k_1, \\ 1/k_2, \\ \dots, \\ 1/k_m \end{array}\right\},$$

$$(I + \Gamma s) = \text{diag}\left\{\begin{array}{l} 1 + \gamma_1 s, \\ 1 + \gamma_2 s, \\ \dots, \\ 1 + \gamma_m s \end{array}\right\}$$

O Critério de Popov III

- Dadas as características do problema (não linearidade desacoplada e multiplicador diagonal), na realimentação negativa surgem m sistemas não lineares Σ_i , *desacoplados*, do tipo:



A dinâmica de cada um destes sistemas pode ser representada como

$$\Sigma_i : \begin{cases} \gamma_i \dot{x}_i = -x_i + u_i + \frac{1}{k_i} \psi_i(x_i), \\ y_i = \psi_i(x_i). \end{cases}$$

O Critério de Popov IV

- Cada sistema Σ_i é passivo, como pode ser comprovado pelo uso da seguinte Função de Armazenamento, válida (semidefinida positiva) se $\gamma_i > 0$:

$$V_i(x_i) = \gamma_i \int_0^{x_i} \psi_i(\sigma) d\sigma.$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &= \gamma_i \psi_i(x_i) \dot{x}_i = \psi_i(x_i) \left[-x_i + u_i + \frac{1}{k_i} \psi_i(x_i) \right], \\ &= u_i \underbrace{\psi_i(x_i)}_{y_i} - x_i \psi_i(x_i) + \frac{1}{k_i} \psi_i^2(x_i).\end{aligned}$$

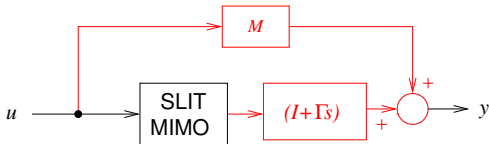
$$\text{Cond. setor: } [0x_i - \psi_i(x_i)] [k_i x_i - \psi_i(x_i)] \leq 0,$$

$$\Rightarrow -x_i \psi_i(x_i) + \frac{1}{k_i} \psi_i^2(x_i) \leq 0.$$

$$\Rightarrow \dot{V}_i \leq u_i y_i.$$

O Critério de Popov V

- Já o SLIT equivalente



pode ser representado em Espaço de Estados a partir da representação mínima (A, B, C, D) do sistema original, observando que o grau relativo $r \geq 1$:

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= M + (I + \Gamma s)G(s) = M + (I + \Gamma s) \left[C(sI - A)^{-1}B + \cancel{D}^0 \right] \\ &= M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma s [C(sI - A)^{-1}B],\end{aligned}$$

em que $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$.

O Critério de Popov VI

Como $s \in \mathbb{C}$ é um escalar,

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma s [C(sI - A)^{-1}B], \\ &= M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma C s(sI - A)^{-1}B, \\ &= M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma C(A + sI - A)(sI - A)^{-1}B, \\ &= M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma CA(sI - A)^{-1}B + \Gamma CB, \\ &= (C + \Gamma CA)(sI - A)^{-1}B + M + \Gamma CB,\end{aligned}$$

tal que

$$\hat{G}(s) \equiv (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}) = (A, B, C + \Gamma CA, M + \Gamma CB).$$

- Entretanto, para que seja possível usar o resultado de análise de estabilidade baseada em passividade (o Lema de KYP), precisamos garantir que $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ seja uma realização mínima de $\hat{G}(s)$.

O Critério de Popov VII

- Claramente o par $(\hat{A}, \hat{B}) = (A, B)$ é controlável, partindo da hipótese de que (A, B, C, D) é uma realização mínima para $G(s)$.
- No caso do par $(\hat{C}, \hat{A}) = (C + \Gamma C A, A)$ precisamos ser mais cuidadosos. A observabilidade pode ser verificada usando diferentes critérios matematicamente equivalentes como, por exemplo, o critério PBH – Popov-Belevitch-Hautus:

O par (C, A) é observável se, e somente se, nenhum autovetor de A pertencer ao Espaço Nulo de C , isto é, $Cv_j \neq 0$, para todo autovetor v_j de A : $Av_j = \lambda_j v_j$.

O Critério de Popov VIII

Logo:

$$\begin{aligned}\text{Observabilidade: } Av_j = \lambda_j v_j &\Rightarrow (C + \Gamma C A)v_j \neq 0, \\ &Cv_j + \Gamma C \lambda_j v_j \neq 0, \\ &(I + \lambda_j \Gamma)Cv_j \neq 0.\end{aligned}$$

Uma vez que $Cv_j \neq 0$ por hipótese (o par (C, A) é observável), para garantir que a última expressão seja verdadeira a matriz $(I + \lambda_j \Gamma)$ deve ser invertível, o que é conseguido fazendo

$$1 + \lambda_j \gamma_i \neq 0, \forall i \in 1, 2, \dots, m; j \in 1, 2, \dots, n:$$

$$\det\{I + \lambda_j \Gamma\} = \det \left\{ \begin{bmatrix} 1 + \lambda_j \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_j \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda_j \gamma_m \end{bmatrix} \right\} \neq 0.$$

O Critério de Popov IX

- Portanto, o método de Popov para determinação da estabilidade absoluta, consiste em:
 - 1 Obter $\hat{G}(s) = (A, B, [C + \Gamma CA], [M + \Gamma CB])$, em que $M = \text{diag}\{1/k_1, 1/k_2, \dots, 1/k_m\}$, usando valores $\gamma_i > 0$ para formar $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$. Os valores γ_i devem satisfazer $1 + \lambda_j \gamma_i \neq 0, \forall i \in 1, 2, \dots, m; j \in 1, 2, \dots, n$.
 - 2 E, como feito para o Critério do Círculo, testar se $\hat{G}(s)$ é Estritamente Real Positiva, possivelmente usando uma LMI associada ao Lema de KYP.

O Critério de Popov X

- No caso SISO:

$$\hat{G}(s) = 1/k + (1 + \gamma s)G(s),$$

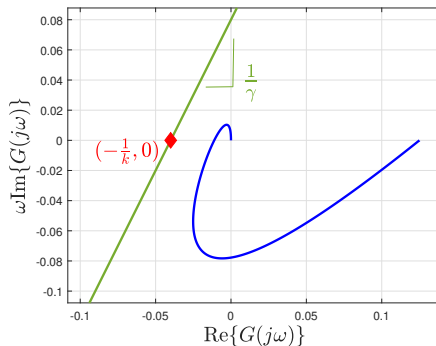
para algum $\gamma > 0$, com $\gamma \neq -\frac{1}{p_j}$, sendo p_j algum polo real de $G(s)$. Além disso, a condição SPR implica que $G(s)$ precisa ser BIBO estável (todos os polos estritamente no semiplano esquerdo), e

$$\operatorname{Re}\{\hat{G}(j\omega)\} = 1/k + \underbrace{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}_X - \gamma \underbrace{\omega \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}_Y > 0,$$

$$\Rightarrow Y < \frac{1}{\gamma} \left(X + \frac{1}{k} \right), \quad X = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\}, Y = \omega \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}.$$

em que X e Y são as coordenadas dos pontos da curva traçada no chamado “Diagrama de Popov”, similar, mas distinto do Diagrama de Nyquist.

O Critério de Popov XI



A curva do Diagrama de Popov (em azul) deve estar abaixo da reta verde. A passagem por zero da reta (ponto vermelho) é determinada pelo setor da não linearidade estática, enquanto sua inclinação $\gamma > 0$ pode ser arbitrariamente escolhida, desde que $\gamma \neq -\frac{1}{p_j}$, com p_j algum polo real de $G(s)$.

Apêndice

Obtenção do Sistema $\hat{G}(s)$ I

As transformações de laço usadas para se obter um problema de estabilidade equivalente ao problema de estabilidade absoluta original, mostradas no slide 21, conduzem a um novo Sistema Linear Invariante no Tempo – SLIT, o sistema $\hat{G}(s)$:

- 1 Considere o efeito da realimentação negativa, supondo que ela está bem-colocada:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (8)$$

$$U(s) = \hat{U}(s) - K_1 Y(s), \quad (9)$$

de modo que, considerando a nova entrada exógena $\hat{U}(s)$ e a mesma saída $Y(s)$, teremos

$$Y(s) = \bar{G}(s) \hat{U}(s).$$

Obtenção do Sistema $\hat{G}(s)$ II

- 2 Para ver como se obtém duas diferentes maneiras de se expressar $\bar{G}(s)$, considere:

2.1 Substituindo $U(s)$ na expressão para $Y(s)$:

$$\begin{aligned} Y &= G [\hat{U} - K_1 Y] \Rightarrow Y = G\hat{U} - GK_1 Y, \\ [I + GK_1] Y &= G\hat{U}, \\ Y(s) &= [I + GK_1]^{-1} G \hat{U}(s). \end{aligned}$$

2.2 Substituindo a $Y(s)$ na expressão para $U(s)$:

$$\begin{aligned} U &= \hat{U} - K_1 [GU], \\ [I + K_1 G] U &= \hat{U} \Rightarrow U = [I + K_1 G]^{-1} \hat{U}, \\ Y = GU &\Rightarrow Y(s) = G [I + K_1 G]^{-1} \hat{U}(s). \end{aligned}$$

Obtenção do Sistema $\hat{G}(s)$ III

- 3** O resultado anterior também pode ser visto como uma aplicação de uma regra conhecida como *push-through rule*:

$$\bar{G}(s) = [I + G(s)K_1]^{-1}G(s) = G(s)[I + K_1G(s)]^{-1}.$$

Para mostrar que isso é verdade, considere que

$$\begin{aligned} G + GK_1G &= G + GK_1G, \\ G(I + K_1G) &= (I + GK_1)G, \\ (I + GK_1)^{-1}G &= G(I + K_1G)^{-1}, \end{aligned}$$

desde que existam $(I + GK_1)^{-1}$ e $(I + K_1G)^{-1}$.

Obtenção do Sistema $\hat{G}(s)$ IV

A existência de $(I + GK_1)^{-1}$ também garante a existência de $(I + K_1G)^{-1}$, pois $\det\{I + GK_1\} = \det\{I + K_1G\}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & -K_1 \\ G & I \end{bmatrix}}_M = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ G & I \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I + GK_1 \end{bmatrix}}_{Q_1} \underbrace{\begin{bmatrix} I & -K_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_R,$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I & -K_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} I + K_1G & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{Q_2} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ G & I \end{bmatrix}}_P,$$

e $\det\{M\} = \det\{PQ_1R\} = \det\{RQ_2P\}$. Portanto,
 $\det\{P\}\det\{Q_1\}\det\{R\} = \det\{R\}\det\{Q_2\}\det\{P\}$, with
 $\det\{P\} = \det\{R\} = 1$
 $\Leftrightarrow \det\{Q_1\} = \det\{Q_2\} \Leftrightarrow \det\{I + GK_1\} = \det\{I + K_1G\}.$

Obtenção do Sistema $\hat{G}(s)$ V

4 Finalmente, podemos escrever que

$$Y(s) = [I + G(s)K_1]^{-1}G(s)\hat{U}(s) = G(s)[I + K_1G(s)]^{-1}\hat{U}(s),$$

$$\hat{Y}(s) = KY(s) + \hat{U}(s), \quad K = K_2 - K_1,$$

$$\hat{Y}(s) = \{KG(s)[I + K_1G(s)]^{-1} + I\} \hat{U}(s),$$

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= KG(s)[I + K_1G(s)]^{-1} + I \\ &= KG(s)[I + K_1G(s)]^{-1} + [I + K_1G(s)][I + K_1G(s)]^{-1}, \\ &= [KG + I + K_1G][I + K_1G]^{-1},\end{aligned}$$

$$\hat{G}(s) = [I + K_2G][I + K_1G]^{-1}.$$

Referências Bibliográficas I



M. A. Aizerman.

On a problem related to global stability of dynamic systems.

Uspehi Mat. Nauk, (4):187–188, 1949.

In Russian.



R. E. Kalman.

Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems.

Trans. of ASME, 79(3):553–566, 1957.



Anatolij Isaakovič Lur'e.

Some nonlinear problems in the theory of automatic control.

Her Majesty's Stationery Office, London, 1957.

Translated from the original in Russian, 1951.