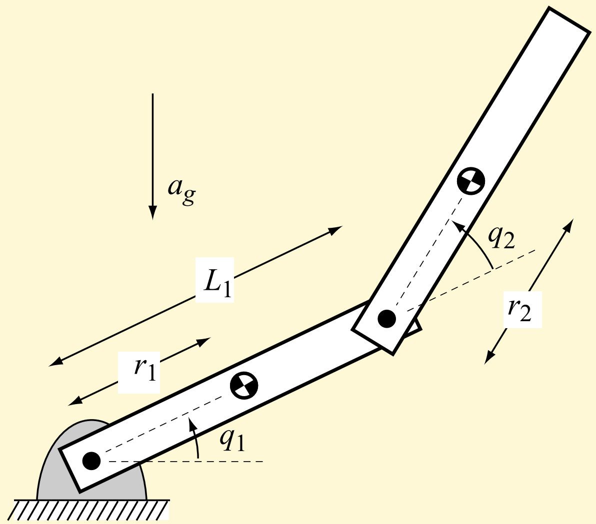
Introdução ao Controle de Mecanismos Robóticos

Leonardo A. B. Tôrres Guilherme Pereira

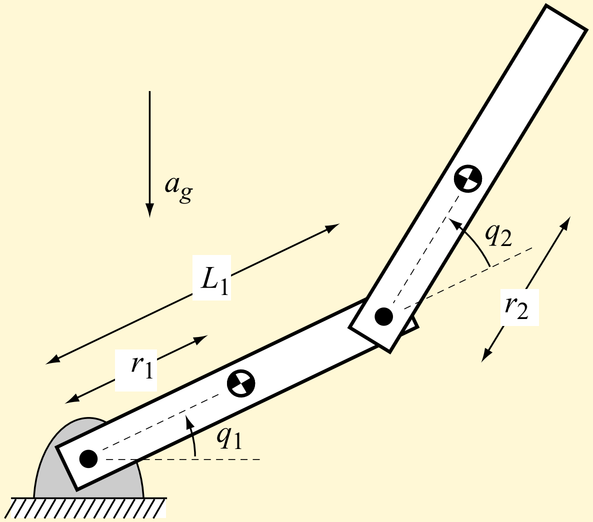
Maio, 2009.

Visão Geral do Problema

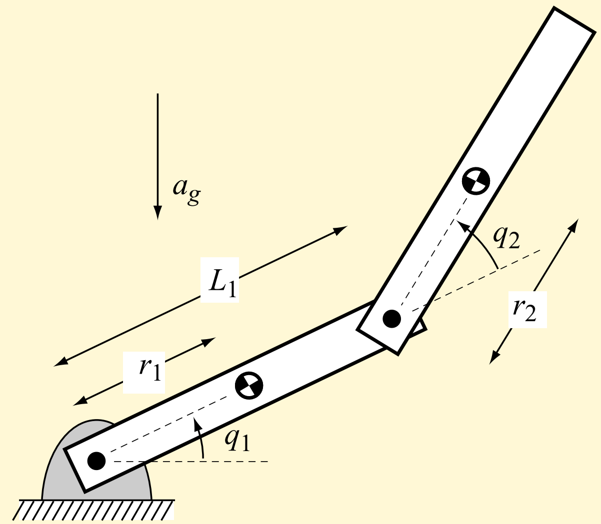
Considere o seguinte mecanismo robótico mostrado na “foto” abaixo. É possível determinar a configuração $\vec{q}$ do robô?



Considere o seguinte mecanismo robótico mostrado na "foto" abaixo. É possível determinar a configuração $\vec{q}$ do robô? **Sim**.

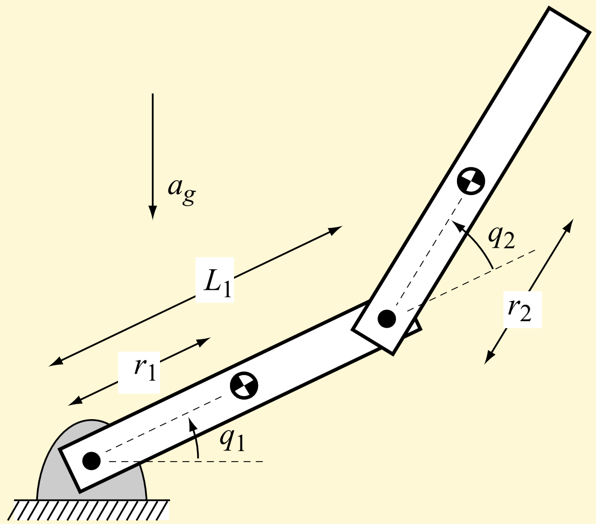


Considere o seguinte mecanismo robótico mostrado na "foto" abaixo. É possível determinar a configuração $\vec{q}$ do robô? **Sim**.



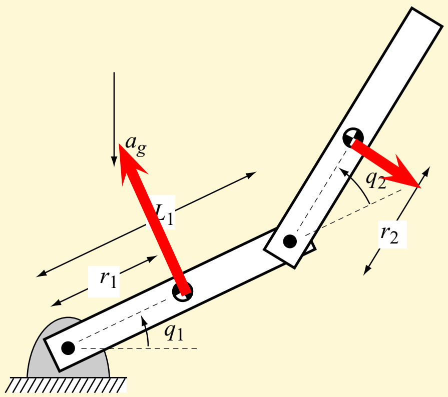
A partir desta "foto" seríamos capazes de dizer <u>como</u> o mecanismo robótico está se movendo?

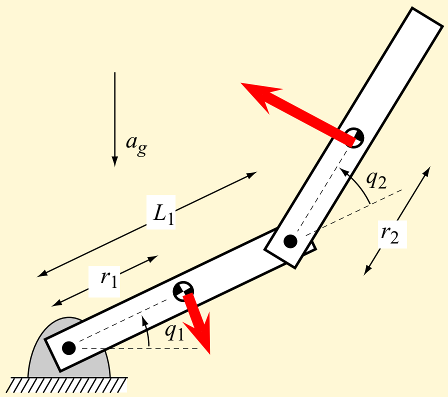
Considere o seguinte mecanismo robótico mostrado na "foto" abaixo. É possível determinar a configuração $\vec{q}$ do robô? **Sim**.



A partir desta "foto" seríamos capazes de dizer <u>como</u> o mecanismo robótico está se movendo? **Não**.

O que "falta" na figura anterior são as indicações de velocidade para cada parte do robô:





As velocidades das partes componentes, vistas como corpos rígidos, determinam qual será a **futura configuração**, a partir do conhecimento da configuração atual $\vec{q}$.

- Conhecer que configurações $\vec{q}$ um robô deve exibir para se locomover de $\vec{q}_{\mathsf{start}}$ até $\vec{q}_{\mathsf{goal}}$ é um problema de

$$\boxed{\text{Planejamento de Caminho}}$$

- Conhecer que configurações $\vec{q}(t)$ um robô deve exibir para se locomover de $\vec{q}_{\mathsf{start}}(t_0)$ até $\vec{q}_{\mathsf{goal}}(t_{\mathsf{f}})$, durante todo o tempo t, é um problema de

$$\boxed{\text{Planejamento de Trajetória}}$$

No planejamento de trajetórias estamos interessados em determinar a *velocidade* com a qual um caminho deve ser percorrido pelo robô. Para um mesmo caminho, podemos ter muitas diferentes trajetórias.

Velocidades e Acelerações

Podemos dizer, portanto que:

- Considerando que o robô pode ser descrito por uma configuração $\vec{q}$;
- Se conhecermos $\frac{d\vec{q}}{dt} = \dot{\vec{q}}(t)$, $\forall t$, poderemos prever quais serão todas as futuras configurações, durante todo o tempo t.

Podemos dizer, portanto que:

- Considerando que o robô pode ser descrito por uma configuração $\vec{q}$;
- Se conhecermos $\frac{d\vec{q}}{dt} = \dot{\vec{q}}(t)$, $\forall t$, poderemos prever quais serão todas as futuras configurações, durante todo o tempo t.

Entretanto, como conhecer $\dot{\vec{q}}(t)$, $\forall t$?

Velocidades e Acelerações

Podemos dizer, portanto que:

- Considerando que o robô pode ser descrito por uma configuração $\vec{q}$;
- Se conhecermos $\frac{d\vec{q}}{dt} = \dot{\vec{q}}(t)$, $\forall t$, poderemos prever qual será a trajetória.

Entretanto, como conhecer $\dot{\vec{q}}(t)$, $\forall t$?

1. $\vec{u}(t) \rightarrow \dot{\vec{q}} \Rightarrow$ velocidades são diretamente arbitradas;
2. $\vec{u}(t) \rightarrow \ddot{\vec{q}} \Rightarrow$ acelerações/forças são arbitradas.

Supondo que $\vec{u}(t)$ é um vetor de sinais de entrada (i.e. sinais que podem ser arbitrados por um agente externo), temos as duas maneiras acima.

Podemos dizer, portanto que:

- Considerando que o robô pode ser descrito por uma configuração $\vec{q}$;
- Se conhecermos $\frac{d\vec{q}}{dt} = \dot{\vec{q}}(t)$, $\forall t$, poderemos prever qual será a trajetória.

Entretanto, como conhecer $\dot{\vec{q}}(t)$, $\forall t$?

1. $\vec{u}(t) \rightarrow \dot{\vec{q}} \Rightarrow$ velocidades são diretamente arbitradas;
2. $\vec{u}(t) \rightarrow \ddot{\vec{q}} \Rightarrow$ acelerações/forças são arbitradas.

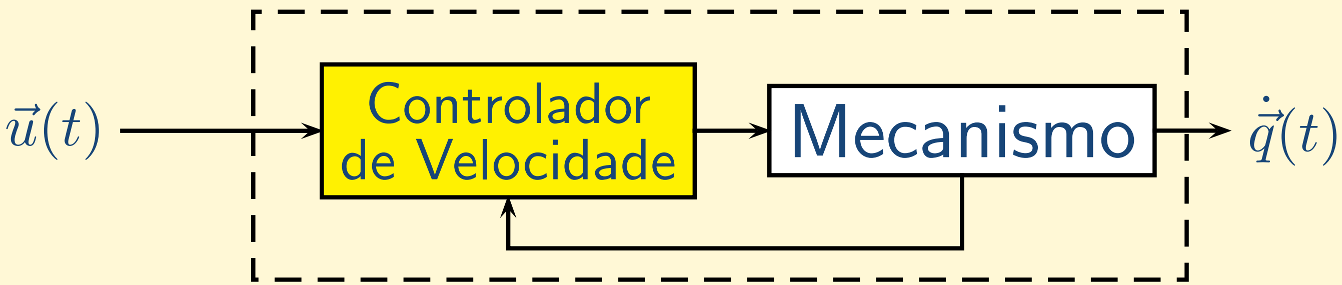
Supondo que $\vec{u}(t)$ é um vetor de sinais de entrada (i.e. sinais que podem ser arbitrados por um agente externo), temos as duas maneiras acima.

Caso 1: Controle via Imposição de Velocidades

- Quando se considera que a velocidade $\dot{\vec{q}}(t)$ pode ser imposta arbitrariamente, conclui-se que podem surgir forças muito grandes que seriam exercidas sobre o robô (*infinitas* se variações descontínuas de velocidade pudessem ocorrer)!

Caso 1: Controle via Imposição de Velocidades

- Quando se considera que a velocidade $\dot{\vec{q}}(t)$ pode ser imposta arbitrariamente, conclui-se que podem surgir forças muito grandes que seriam exercidas sobre o robô (*infinitas* se variações descontínuas de velocidade pudessem ocorrer)!
- Tais forças são de fato aplicadas sobre o robô por um sistema de controle de mais baixo nível, que tem como referência o sinal desejado de velocidade:



Caso 1: Controle via Imposição de Velocidades

- Caso essas forças possam ser exercidas, e.g. em robôs de pequenas dimensões e de pequena massa, essa aproximação é tolerável e bastante útil para simplificar o problema de obtenção das equações matemáticas que descrevem o movimento do robô.

Caso 1: Controle via Imposição de Velocidades

- Caso essas forças possam ser exercidas, e.g. em robôs de pequenas dimensões e de pequena massa, essa aproximação é tolerável e bastante útil para simplificar o problema de obtenção das equações matemáticas que descrevem o movimento do robô.
- Isto é, tal aproximação é válida desde que a dinâmica de convergência da malha de controle de velocidade seja muito mais rápida do que as variações na velocidade desejada $\dot{\vec{q}}_{\mathsf{d}}(t)$:

$$\boxed{\dot{\vec{q}}(t) \approx \dot{\vec{q}}_{\mathsf{d}}(t)}$$

Caso 1: Controle via Imposição de Velocidades

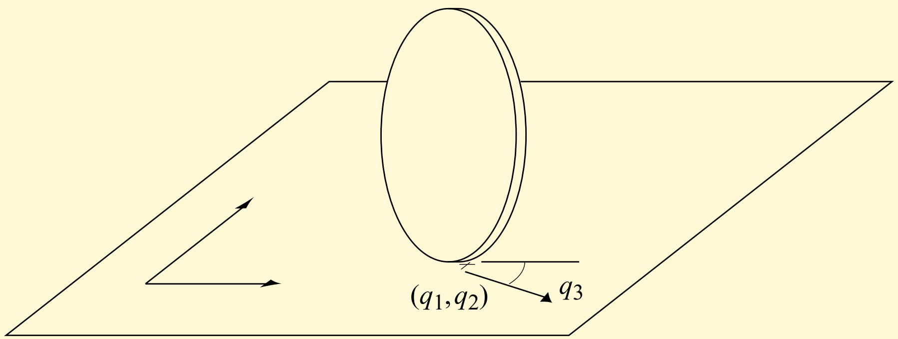
- Caso essas forças possam ser exercidas, e.g. em robôs de pequenas dimensões e de pequena massa, essa aproximação é tolerável e bastante útil para simplificar o problema de obtenção das equações matemáticas que descrevem o movimento do robô.
- Isto é, tal aproximação é válida desde que a dinâmica de convergência da malha de controle de velocidade seja muito mais rápida do que as variações na velocidade desejada $\dot{\vec{q}}_{\mathsf{d}}(t)$:

$$\boxed{\dot{\vec{q}}(t) \approx \dot{\vec{q}}_{\mathsf{d}}(t)}$$

- Nesse caso, simples relações *cinemáticas* são suficientes para se estudar o comportamento dinâmico do robô.

Caso 1: Controle via Imposição de Velocidades

- Exemplo (Uniciclo):



$$\begin{cases} \dot{q}_1 &= u_1 \cos(q_3); \\ \dot{q}_2 &= u_1 \mathrm{sen}(q_3); \\ \dot{q}_3 &= u_2. \end{cases}$$

Sendo $\vec{q}(t) = [q_1 \; q_2 \; q_3]^\top$ a configuração do robô, e $\vec{u}(t) = [u_1 \; u_2]^\top$.

Caso 2: Controle via Imposição de Forças e Torques

- No caso mais realista, em que se considera o uso de atuadores que conduzirão a aplicação direta de forças e torques ao robô, é preciso considerar relações não apenas cinemáticas, mas também *dinâmicas* (que dependem da distribuição de massa).

Caso 2: Controle via Imposição de Forças e Torques

- No caso mais realista, em que se considera o uso de atuadores que conduzirão a aplicação direta de forças e torques ao robô, é preciso considerar relações não apenas cinemáticas, mas também *dinâmicas* (que dependem da distribuição de massa).
- Neste caso, para se obter o modelo matemático é preciso lançar mão das formulações de:

1. Newton-Euler

$$\boxed{\vec{u} = m\vec{a}}$$

2. Euler-Lagrange

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \vec{q}}}$$

Espaço de Configurações $\times$Espaço de Estados

Modelagem Matemática no Espaço de Estados

Um possível conjunto, de tamanho mínimo, de variáveis necessárias para se descrever o movimento do robô ao longo do tempo, a partir do conhecimento do vetor de sinais externos $\vec{u}$ que atuam sobre o mecanismo, é chamado de

$$\boxed{\vec{x} \equiv \textbf{Vetor de Variáveis de Estado}}$$

O vetor de estados pode ser visto como um conjunto de números que caracteriza o estado energético do sistema dinâmico. No caso de robótica, as configurações $\vec{q}$ (energia potencial associada), e suas variações temporais $\dot{\vec{q}}$ (energia cinética), serão valores freqüentemente utilizados.

Modelagem Matemática no Espaço de Estados

Da definição acima, conclui-se que para se conhecer o movimento completo de um robô, é preciso explicitar-se as equações que determinam a evolução de um dado conjunto de variáveis de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= f(\vec{x}, \vec{u}), \\ \vec{y} &= h(\vec{x}, \vec{u}), \end{aligned} \tag{1}$$

sendo $\vec{u}$ o vetor de entradas; e $\vec{y}$ o vetor de saídas; e $f(\cdot,\cdot)$ é chamado de *campo vetorial* do sistema dinâmico. Usualmente tem-se o caso particular:

$$\vec{y} = h(\vec{x}).$$

Modelagem Matemática no Espaço de Estados

Existem infinitos possíveis conjuntos de variáveis de estado. Para ver isso, basta verificar que qualquer conjunto

$$\vec{z} = \Phi(x),$$

sendo $\Phi(\cdot)$ uma função invertível e suave (um difeomorfismo), pode ser usado para o mesmo propósito. Por exemplo, dado um conjunto de variáveis de estado, combinações lineares dessas variáveis podem ser usadas como estados, isto é:

$$\vec{z} = P\vec{x},$$

para o caso em que P é invertível.

Modelagem Matemática no Espaço de Estados

As equações dinâmicas, no caso em que $\vec{z} = \Phi(x)$, tornam-se:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{z}} &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{x}}\right)\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{x}} \underbrace{\left[f\left(\Phi^{-1}(\vec{z}),\vec{u}\right)\right]}_{\dot{\vec{x}}}; \\ \vec{y} &= h\left(\Phi^{-1}(\vec{z}),\vec{u}\right); \end{aligned}$$

sendo $\partial\Phi/\partial\vec{x}$ a matriz Jacobiana do difeomorfismo. Essas equações podem ser reescritas de forma compacta como:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{z}} &= f_\Phi(\vec{z},\vec{u}); \\ \vec{y} &= h_\Phi(\vec{z},\vec{u}). \end{aligned} \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) são ditas *equivalentes*, pois representam o <u>mesmo</u> comportamento dinâmico.

O Espaço de Estados em Robótica

No caso particular de sistemas mecânicos:

- Quando se considera apenas as equações cinemáticas do mecanismo (supõe-se ser possível arbitrar diretamente as velocidades), o Espaço de Estados X é igual a variedade diferenciável representada pelo Espaço de Configurações $\mathcal{Q}$:

$$\boxed{\dim\{X\} = \dim\{\mathcal{Q}\}}$$

Neste caso $X \equiv \mathcal{Q}$.

No caso particular de sistemas mecânicos:

- Quando se considera as equações dinâmicas do mecanismo (não é possível arbitrar diretamente as velocidades, mas sim as forças e torques), o Espaço de Estados X é diferente do Espaço de Configurações $\mathcal{Q}$. De fato:

$$\boxed{\dim\{X\} > \dim\{\mathcal{Q}\}}$$

  Pois torna-se necessário incluir as velocidades como estados do sistema[1].

[1] Neste caso $X \equiv T\mathcal{Q}$, sendo $T\mathcal{Q}$ o chamado *Fibrado Tangente* à variedade de configurações $\mathcal{Q}$.

O Espaço de Estados em Robótica

- Uma conclusão importante é que o Espaço de Estados X é, em ambos os casos, uma *variedade diferenciável*.
- Portanto, os elementos de X podem ser vistos como pontos em um espaço abstrato, localmente difeomórfico ao Espaço Euclidiano de dimensão igual ao número n de estados necessários para descrever o movimento do robô ao longo do tempo.

A próxima etapa, a ser enfrentada a seguir, é o estabelecimento de métodos formais para obtenção das equações (1), no Espaço de Estados X, a partir da representação do robô no Espaço de Configurações Q.