Fundamentos de Controle Não Linear: Conceitos Matemáticos Importantes (em Progresso)

Leonardo A. B. Torres

PPGEE/UFMG

August 13, 2019

1. Introdução à Topologia
   - Conjuntos Abertos e Fechados
2. Espaços Métricos
   - Conjuntos Limitados
3. Funções Contínuas
4. Espaços Vetoriais
   - Espaços Vetoriais Normados
   - Teorema dos Extremos ou Teorema de Weirstrass
   - Funções Lipschitz Contínuas
   - Funções Uniformemente Contínuas
5. Formas e Funções Quadráticas
6. Funções de Comparação
7. Lema da Comparação
8. Desigualdades Interessantes
9. Referências Bibliográficas

Section 1

Introdução à Topologia

Introdução à Topologia I

Topologia

A topologia $\mathcal{T}$ de um conjunto matemático abstrato X é uma coleção especial de subconjuntos de X que tem as seguintes propriedades:

1. Os conjuntos vazio e o conjunto universo pertencem à coleção: $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;
2. Uniões arbitrárias[a] de subconjuntos pertencem à coleção: $\bigcup_{\alpha} S_\alpha \in \mathcal{T}$;
3. Interseções finitas[b] de subconjuntos pertencem à coleção: $\bigcap_{k=1}^{N} S_k \in \mathcal{T}$;

[a] Finitas ou não, enumeráveis ou não.
[b] Portanto, enumeráveis.

Introdução à Topologia II

Definition (Espaço Topológico)

Se $\mathcal{T}$ é uma Topologia para X, então o par $(X,\mathcal{T})$ é um Espaço Topológico.

Exemplos de Espaços Topológicos:

- $X = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{T} = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a,b\}; \{a,b,c\}\}$.
- X um conjunto qualquer, e $\mathcal{T}$ a coleção de todos os subconjuntos de X, conhecida como *Topologia Discreta* de X.
- X um conjunto qualquer, e $\mathcal{T} = \{\emptyset; X\}$, conhecida como *Topologia Trivial* de X.
- $X \equiv \mathbb{R}$, e $\mathcal{T}$ é a coleção de todos os subconjuntos resultantes de uniões arbitrárias de intervalos da reta $B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, com a,b números reais arbitrários, ou $\pm\infty$. Esta é a topologia padrão para o conjunto dos números reais.

Conjuntos Abertos e Fechados

Definition (Conjunto Aberto)

Um subconjunto $S \subseteq X$ é aberto, se S pertence à topologia $\mathcal{T}$ sendo considerada. Isto é, para saber se um subconjunto é aberto, precisamos antes saber qual o Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$ sob consideração.

Definition (Conjunto Fechado)

Um subconjunto S é fechado, se o seu complemento em X

$$S^{\mathrm{c}} = X - S = \{x \in X; x \notin S\}$$

é um subconjunto aberto no Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$.

- Note que os subconjuntos $\emptyset$ e X são simultaneamente abertos e fechados em qualquer Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$. Portanto, **aberto não é o contrário de fechado**.

Vizinhanças de um Ponto

Definition (Vizinhança Aberta de um ponto x)

É qualquer conjunto aberto $U \subseteq X$, que contenha o ponto x; i.e. $x \in U$. O conjunto U é também chamado de *vizinhança aberta* de x.

- Em matemática é comum definir-se "Vizinhança de x" como qualquer subconjunto que contenha tanto x, quanto pelo menos uma vizinhança aberta de x. Nesse sentido, a Vizinhança não precisaria ser ela mesma um conjunto aberto.
- Entretanto, é muito comum encontrar-se a expressão "uma vizinhança $U \ni x$" em artigos científicos[1], no sentido de vizinhança *aberta* de x.
- Adotando prática similar, vamos nos referir a vizinhanças abertas de um ponto, associadas a um dado Espaço Topológico subjacente, como simplesmente "vizinhança de x".

[1] E, nesses casos, quando o Espaço Topológico não é explicitamente declarado, assume-se comumente um Espaço Topológico induzido pela norma Euclidiana.

Base de uma Topologia

Definition (Base de uma Topologia)

Se todos os conjuntos abertos de uma topologia $\mathcal{T}$ são formados pela união arbitrária de conjuntos de uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *base* para a topologia $\mathcal{T}$.

- Note que $\mathcal{B}$ não precisa satisfazer os requisitos para ser, ela mesma, uma topologia de X.
- Na definição da topologia padrão para $X \equiv \mathbb{R}$, usamos como Base a coleção de intervalos $B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, com $a,b \in \mathbb{R}$ e não necessariamente limitados.
- Pela definição acima, $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{T}$; i.e. todo elemento da coleção da Base é também um conjunto aberto.

Section 2

Espaços Métricos

Espaços Métricos I

Definition (Métrica em X)

Seja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função de pares de elementos do conjunto X, a qual toma valores no conjunto dos números reais. Essa função será uma Métrica em X, se, dados $x,y,z \in X$, tem-se

1. $d(x,x) = 0$;
2. $d(x,y) > 0, \ \forall x \neq y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetria);
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (desigualdade triangular).

- Para $X \equiv \mathbb{R}$, uma métrica usual é $d(x,y) = |x - y|$.
- Para $X \equiv \mathbb{R}^n$, a chamada métrica *Euclidiana* é $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.
- Para $X \equiv \mathbb{R}^n$, uma outra métrica é $d(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$.

Espaços Métricos II

Definition (Espaço Métrico)

Ao se definir para X uma Métrica específica, tem-se um Espaço Métrico denotado por (X,d).

- Para todo Espaço Métrico é possível definir-se uma Topologia induzida pela métrica:
  1. Defina "bola aberta de raio r, com centro em x" como sendo o subconjunto
  $$B(x,r) = \{y \in X; d(x,y) < r\}.$$
  2. Considere como Base $\mathcal{B}$ para a topologia de X, a coleção formada por todas as possíveis bolas abertas de raios $r > 0$, e centros em quaisquer pontos $x \in X$.

Definition (Espaço Métrico com Topologia Padrão)

Um Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$, cuja topologia $\mathcal{T}$ tem como Base as bolas abertas definidas a partir de uma Métrica d, será chamado de Espaço Métrico com Topologia Padrão e denotado por $(X,d,\mathcal{T})$.

Conjuntos Limitados em Espaços Métricos

Definition (Conjunto Limitado)

Para $(X,d,\mathcal{T})$, um suconjunto $U \subseteq X$ é limitado se está contido em alguma bola de raio finito, isto é,

$$x \in U \quad \Rightarrow \quad x \in B(x_0,r);$$

em que $B(x_0,r) \equiv \{y \in X; d(x_0,y) < r\}$; e isso é verdade para algum $x_0 \in X$ e $r \in (0;+\infty)$.

Conjuntos Compactos

Para Espaços Métricos com Topologia Padrão $(X,d,\mathcal{T})$, demonstra-se, por meio do Teorema de Heine-Borel (ou do Teorema de Bolzano-Weierstrass no caso de sequências), que a definição mais geral de conjuntos compactos (vide Seção 11), para $X \subseteq \mathbb{R}^n$, é equivalente à definição a seguir.

Definition (Conjunto Compacto em $(X,d,\mathcal{T})$)

Um conjunto $S \subseteq X$ é Compacto, se, e somente se, ele é simultaneamente

1. Fechado; e
2. Limitado.

Ou, alternativamente, isto é equivalente à seguinte propriedade:

1. Toda sequência em S (finita ou não) tem uma subsequência cujo limite está em S. Em se tratando de sequências de pontos em S que são convergentes, as mesmas sempre convergirão para algum ponto em S.

Section 3

Funções Contínuas

Funções Contínuas

Considera-se Espaços Métricos com Topologia Padrão $(X,d_{\mathrm{x}},\mathcal{T}_{\mathrm{x}})$ e $(Y,d_{\mathrm{y}},\mathcal{T}_{\mathrm{y}})$. Para o caso geral, ver Seção 12.

Definition (Função Contínua no Ponto x_0)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$ é contínua no ponto x_0, com $y_0 = f(x_0)$, se dado $\epsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, sempre é possível encontrar $\delta > 0$ tal que

$$d_{\mathrm{x}}(x,x_0) < \delta \Rightarrow d_{\mathrm{y}}(y,y_0) < \epsilon,$$

em que, de forma geral, $\delta \equiv \delta(x_0,\epsilon)$.

Definition (Função Contínua)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$ é contínua, se é contínua em todo ponto $x \in X$ do seu domínio.

Section 4

Espaços Vetoriais

Norma

Definition (Norma)

Uma função (ou aplicação) $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$, de um Espaço Vetorial X sobre o corpo F ($F \equiv \mathbb{R}$ ou $F \equiv \mathbb{C}$) no conjunto dos números reais não negativos, a qual obedece às seguintes propriedades:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $\|x\| > 0$, $\forall x \neq 0$ (função definida positiva);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in F$ (função absolutamente homogênea);
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Exemplos de normas para $X \equiv \mathbb{R}^n$:

- Norma ℓ_2 ou Euclidiana: $\|x\| \equiv \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$;
- Norma ℓ_1: $\|x\| \equiv \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- Norma ℓ_∞ ou Norma do Máximo: $\|x\| = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.
- Norma ℓ_p: $\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

Espaços Vetoriais Normados I

Definition (Espaço Vetorial Normado)

Um Espaço Vetorial X, juntamente com a definição de uma Norma para os elementos de X, constitui um Espaço Vetorial Normado.

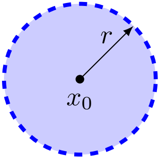
Em um Espaço Vetorial Normado pode-se definir uma Métrica (vide slide 6) a partir da Norma:

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

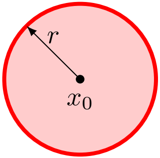
- Com isto pode-se estabelecer um Espaço Topológico com topologia induzida pela métrica, obtida a partir da norma. Neste Espaço as "bolas abertas", que formam a Base da topologia, serão dadas por

$$B(x_0,r) = \{y \in X; \|y - x_0\| < r\}.$$

Espaços Vetoriais Normados II



$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$



$$\bar{B}(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

Figure: Exemplo de bola aberta e bola fechada no plano Euclidiano.

Funções Contínuas

No caso de Espaços Vetoriais Normados X e Y, com Topologias Padrão induzidas pelas respectivas Normas, pode-se especializar ainda mais a definição de Função Contínua.

Definition (Função Contínua no Ponto x_0)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$ é contínua no ponto x_0, com $y_0 = f(x_0)$, se dado $\epsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, sempre é possível encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|y - y_0\| < \epsilon,$$

em que, de forma geral, $\delta \equiv \delta(x_0,\epsilon)$.

Definition (Função Contínua)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$ é contínua, se é contínua em todo ponto $x \in X$ do seu domínio.

Teorema dos Extremos ou Teorema de Weierstrass

O teorema abaixo é frequentemente usado para se ter garantias de que *existem* os valores máximo e mínimo de funções contínuas definidas em conjuntos compactos.

Theorem (Mínimo e Máximo de Funções Contínuas em Conjuntos Compactos)

Se K é um conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(x)$ é limitada e existem $x_1, x_2 \in K$ tais que

$$f(x_1) = \max_{x \in K} f(x), \quad f(x_2) = \min_{x \in K} f(x).$$

Isto é, $f(x)$ atinge seus valores máximo e mínimo em pontos do conjunto compacto K que é seu domínio.

Note que não se está afirmando que algum ponto de máximo, ou de mínimo, é único. Isto é, podem existir muitos máximos e mínimos, mesmo em número infinito (caso de uma função constante).

Funções Lipschitz Contínuas I

Dada uma função $f : \mathbb{R}^+ \times D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que

$$\dot{x} = f(t,x),$$

as definições usadas em [Khalil, 2002, Capítulo 3] podem ser listadas como:

Definition (Função Localmente Lipschitz)

A função $f(t,x)$ é **localmente** Lispchitz em x_0 se a desigualdade

$$\|f(t,x_\mathrm{a}) - f(t,x_\mathrm{b})\| \leq L_{x_0}\|x_\mathrm{a} - x_\mathrm{b}\|; \quad x_\mathrm{a},x_\mathrm{b} \in U; \quad \forall t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

é satisfeita para pontos $x_\mathrm{a}, x_\mathrm{b} \in U$ em uma vizinhança U de x_0, e para todo $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Por isso, a constante de Lipschitz pode depender do ponto x_0 em particular, mas é uniforme em relação ao tempo, ou seja, é a mesma para todo o intervalo de tempo I considerado.

Funções Lipschitz Contínuas II

Definition (Lipschitz em um conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$)

A função $f(t, x)$ é localmente Lipschitz para todo ponto $x_0 \in W$, com uma mesma constante L que não depende do ponto x_0, e também válida para todo $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Definition (Globalmente Lipschitz)

A função $f(t,x)$ é Lipschitz em $W \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Funções Lipschitz Contínuas III

Formas simples de se reconhecer Funções Lipschitz Contínuas:

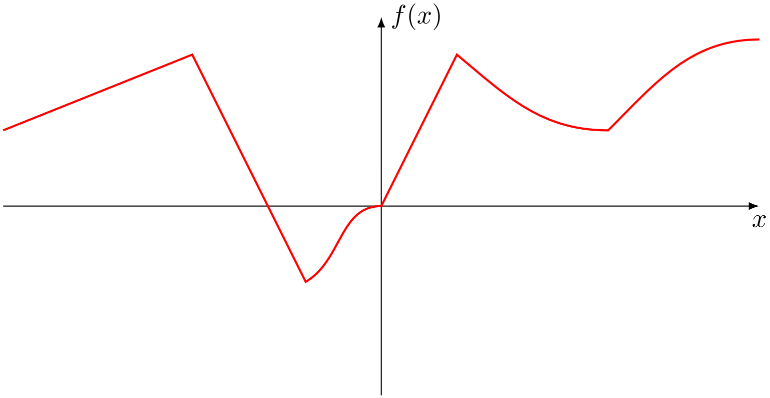
- **Ser uma função contínua é condição necessária** para ser Lipschitz.
- **Ser uma função contínua e diferenciável por partes, com derivadas limitadas, é condição suficiente** para ser Lipschitz. No caso em que $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, a norma da matriz Jacobiana deve ser limitada, isto é,

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| \leq L < \infty,$$

em que L pode ser usada como constante de Lipschitz.

Funções Lipschitz Contínuas IV

Exemplo de função Lipschitz Contínua não-diferenciável (mas diferenciável por partes, com derivadas limitadas em cada parte):



Section 5

Formas e Funções Quadráticas

Section 6

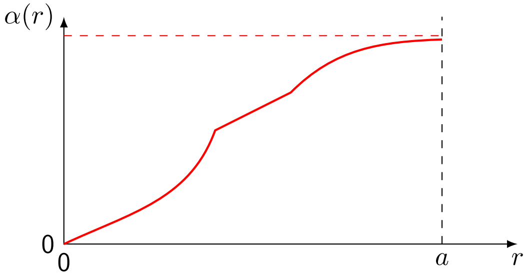
Funções de Comparação

Funções de Classe $\mathcal{K}$

Definition (Função de Classe $\mathcal{K}$)

Uma função $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, +\infty)$ é de Classe $\mathcal{K}$, com $a \in \mathbb{R}^+$ limitado ou não, se satisfaz as seguintes propriedades [Khalil, 2002]:

1. é uma função contínua ($\alpha \in \mathcal{C}^0$);
2. $\alpha(0) = 0$, e é estritamente crescente: $r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha(r_1) < \alpha(r_2)$.



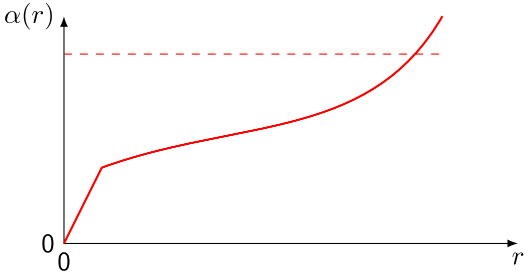
Funções de Classe $\mathcal{K}_\infty$

Definition (Função de Classe $\mathcal{K}_\infty$)

Uma função $\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é de Classe $\mathcal{K}_\infty$, se é uma função de Classe $\mathcal{K}$ e

$$\lim_{r \to +\infty} \alpha(r) \to +\infty.$$

Note que o domínio de uma função de classe $\mathcal{K}_\infty$ deve ser toda a semireta real.



Funções de Classe $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\infty$: propriedades I

- Se $\alpha \in \mathcal{K}$, então existe uma função inversa e ela também é de classe $\mathcal{K}$:

$$\alpha : [0, a) \to [0, +\infty) \in \mathcal{K} \;\; \Leftrightarrow \;\; \exists \alpha^{-1}, \alpha^{-1} : [0, \alpha(a)) \to [0, +\infty) \in \mathcal{K}.$$

- Se $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, então existe uma função inversa e ela também é de classe $\mathcal{K}_\infty$:

$$\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \in \mathcal{K}_\infty \;\; \Leftrightarrow \;\; \exists \alpha^{-1}, \alpha^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \in \mathcal{K}_\infty.$$

- A composição de duas funções de classe $\mathcal{K}$ produz uma função de classe $\mathcal{K}$:

$$\alpha_1(r_1), \alpha_2(r_2) \in \mathcal{K} \;\; \Rightarrow \;\; \alpha_1(\alpha_2(r)) \in \mathcal{K}.$$

- A composição de duas funções de classe $\mathcal{K}_\infty$ produz uma função de classe $\mathcal{K}_\infty$:

$$\alpha_1(r_1), \alpha_2(r_2) \in \mathcal{K}_\infty \;\; \Rightarrow \;\; \alpha_1(\alpha_2(r)) \in \mathcal{K}_\infty.$$

Funções de Classe $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\infty$: propriedades II

- Funções de classe $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{K}_\infty$, por serem estritamente crescentes, **preservam relações de ordem**, isto é, se $\alpha \in \mathcal{K}$ ou $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, então:

$$
\begin{aligned}
r_1 \le r_2 \quad &\Leftrightarrow \alpha(r_1) \le \alpha(r_2),\\
r_1 < r_2 \quad &\Leftrightarrow \alpha(r_1) < \alpha(r_2),
\end{aligned}
$$

- Além disso, dada a existência de função inversa da mesma classe, para o caso em que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ ou $\mathcal{K}_\infty$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(r_1) \le \alpha_2(r_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha_1^{-1}(\alpha_1(r_1)) \le \alpha_1^{-1}(\alpha_2(r_2)),\\
\alpha_1(r_1) \le \alpha_2(r_2) \quad &\Leftrightarrow \quad r_1 \le \alpha_1^{-1}(\alpha_2(r_2)).\\
\alpha_1(r_1) \le \alpha_2(r_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r_1)) \le \alpha_2^{-1}(\alpha_2(r_2)),\\
\alpha_1(r_1) \le \alpha_2(r_2) \quad &\Leftrightarrow \quad r_2 \ge \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r_1)).
\end{aligned}
$$

Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Lemma ([Khalil, 2002], Lema 4.3)

Seja $V : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua ($V \in \mathcal{C}^0$), e positiva definida; isto é, $V(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, com $V(0) = 0$; cujo domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ contém a origem $x = 0$. Seja $\bar{B}(0,r) \subseteq D$ uma bola fechada de raio $r > 0$. Então existem funções $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$, definidas em $[0,r]$, tais que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall x \in \bar{B}(0,r).$$

Se $D \equiv \mathbb{R}^n$, as funções α_1 e α_2 estarão definidas em $[0, +\infty)$ e as desigualdades acima serão válidas para $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, se $V(x)$ é radialmente ilimitada, então pode-se escolher que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$.

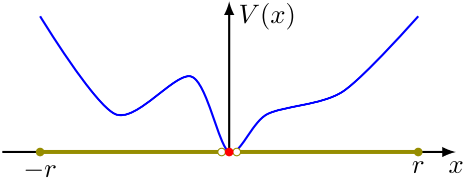
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



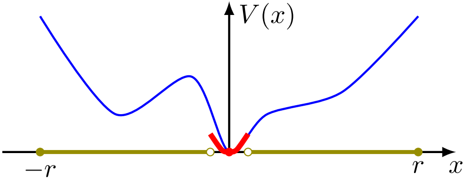
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



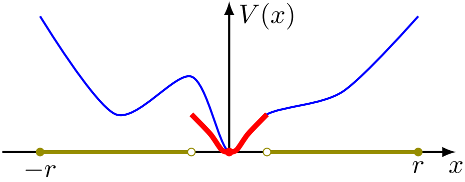
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



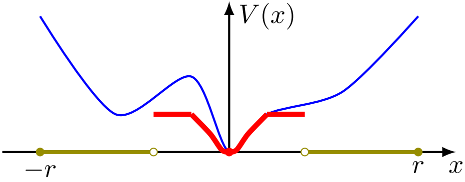
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



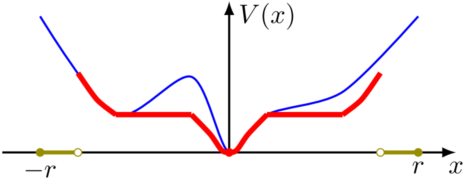
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



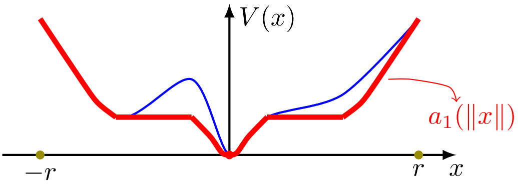
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- É possível mostrar que $a_1(\|x\|)$ é uma função contínua, definida positiva, e não-decrescente (não é estritamente crescente), e ainda, por construção,

$$a_1(\|x\|) \leq V(x).$$

- A partir de $a_1(\|x\|)$ podemos obter uma função $\alpha_1(\|x\|) \in \mathcal{K}$, como mostrado a seguir.

Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- Para se obter uma função $\alpha_1(\|x\|) \in \mathcal{K}$ a partir da função $a_1(\|x\|)$, pode-se recorrer a diferentes técnicas. Por exemplo, pode-se escolher:

$$\alpha_1(\|x\|) = \frac{\|x\|}{r} a_1(\|x\|), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r,$$

como função estritamente crescente, definida positiva, contínua, e tal que $\alpha_1(\|x\|) < a_1(\|x\|), \forall \|x\| < r$. Outra possibilidade seria:

$$\alpha_1(\|x\|) = \lambda \left[a_1(\|x\|) \right] + (1 - \lambda) \left[k a_1(\|x\|) \right], \quad 0 \leq k < 1,$$

em que $\lambda = \frac{\|x\|}{r}$, para $0 \leq \|x\| \leq r$. Trata-se da combinação convexa de $a_1(\|x\|)$ e de sua cópia "atenuada" $k a_1(\|x\|)$.

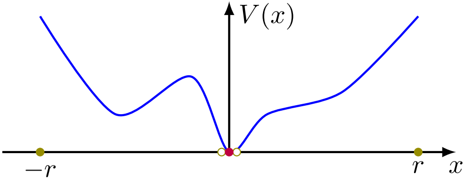
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



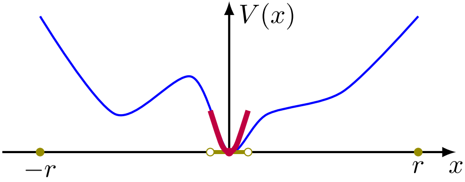
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



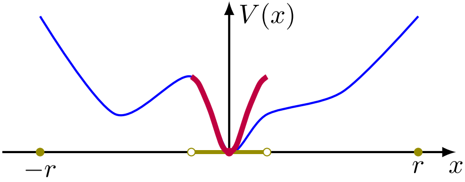
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



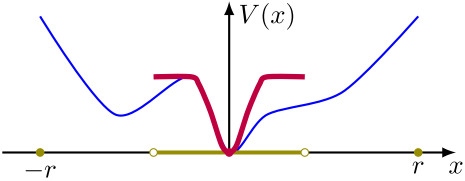
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



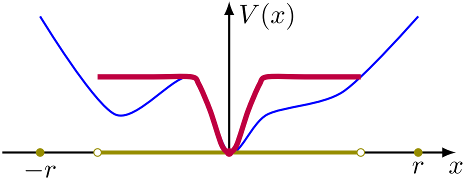
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



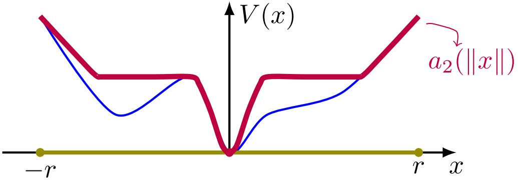
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- Para se obter uma função $\alpha_2(\|x\|) \in \mathcal{K}$, pode-se sugerir a seguinte combinação convexa entre $a_2(\|x\|)$ e a uma cópia "amplificada" dela mesma:

$$\alpha_2(\|x\|) = (1-\lambda)\left[a_1(\|x\|)\right] + (\lambda)\left[ka_1(\|x\|)\right], \quad k > 1,$$

em que $\lambda = \frac{\|x\|}{r}$, para $0 \leq \|x\| \leq r$.

Decrescent Functions

- No caso de funções $V(t,x)$ definidas positivas, continuamente diferenciáveis, mas **variantes no tempo**, não se tem garantias de que seja possível encontrar $\alpha_2(\|x\|) \geq V(t,x)$, $\forall t \geq 0$ e $\forall x \in [0; r]$.
  Compare estes casos:
  1. $V(t,x) = x_1^2 + x_2^2 + t$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \geq 0$.
  2. $V(t,x) = (x_1^2 + x_2^2)(2 + \sin t)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \geq 0$.
- Quando é possível encontrar uma função contínua e definida positiva $W(x)$ (não precisa ser de classe $\mathcal{K}$), tal que

$$V(t,x) \leq W(x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

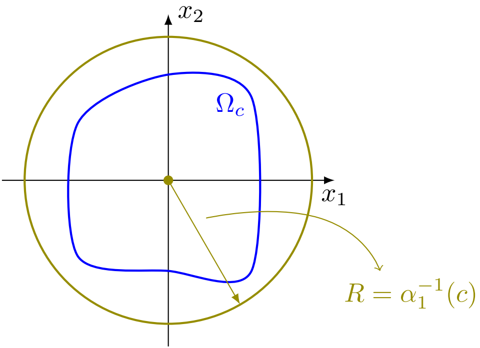
  dizemos, em Inglês, que $V(t,x)$ é uma *Decrescent Function*.
- Por outro lado, não há dificuldades em se encontrar $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x)$, com $\alpha_1(\|x\|) \in \mathcal{K}$, pois basta modificar ligeiramente a função auxiliar para

$$a_1(\|x\|) = \min_{\{t \geq 0;\ \|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(t,z).$$

Importância das Funções de Classe $\mathcal{K}$

A importância das propriedades e fatos associados às classes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\infty$ de funções está em se poder estabelecer relações do tipo:

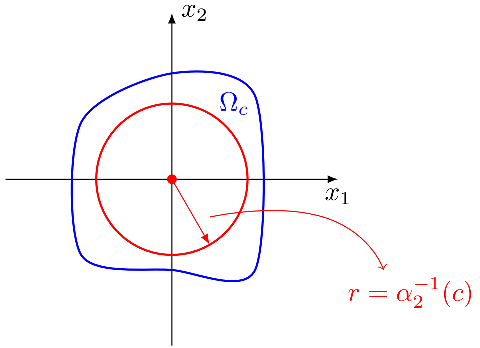
$$\begin{cases} x \in \Omega_c, \quad \Omega_c = \{x \in X; V(x) \le c\}, \\ \alpha_1(\|x\|) \le V(x) \le \alpha_2(\|x\|), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|x\| \le \alpha_1^{-1}(c).$$



Importância das Funções de Classe $\mathcal{K}$

A importância das propriedades e fatos associados às classes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\infty$ de funções está em se poder estabelecer relações do tipo:

$$\begin{cases} \alpha_1(\|x\|) \le V(x) \le \alpha_2(\|x\|), \\ \|x\| \le \alpha_2^{-1}(c), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in \Omega_c, \quad \Omega_c = \{x \in X; V(x) \le c\}.$$



Funções de Classe $\mathcal{KL}$

Definition (Função de Classe $\mathcal{KL}$)

Uma função $\beta : [0, a) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ é de Classe $\mathcal{KL}$, se, ao se fixar o argumento $s = s_0$ em $\beta(r,s_0)$, obtém-se uma função de Classe $\mathcal{K}$ em relação a r; e, ao se fixar o argumento $r = r_0$ em $\beta(r_0,s)$, obtém-se uma função contínua e decrescente (não-crescente) em relação a s, e que converge para zero quando $s \to \infty$:

- $\beta(r,s_0) \in \mathcal{K}$, para todo $s_0 \in \mathbb{R}^+$ constante.

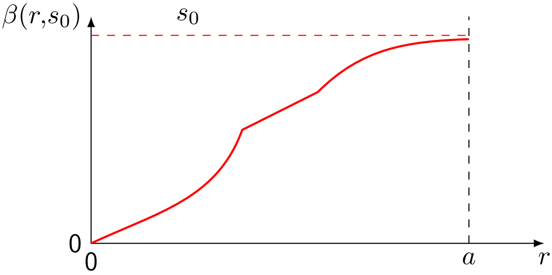
e, também, com $r_0 \in [0, a)$,

- $s_1 < s_2 \Rightarrow \beta(r_0, s_1) \geq \beta(r_0, s_2)$, para todo $r_0 \in \mathbb{R}^+$ constante.
- $\lim_{s\to+\infty} \beta(r_0, s) = 0$, para todo $r_0 \in \mathbb{R}^+$ constante.

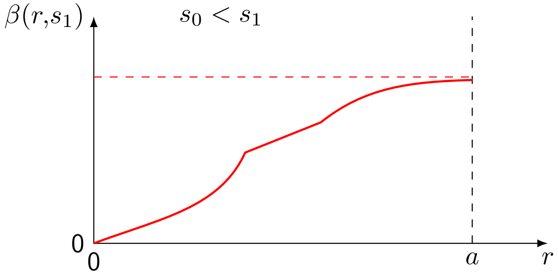
Exemplos:

- Decaimento exponencial: $\beta(r,s) = re^{-2s}\|x(0)\|$.
- $\beta(r,s) = \frac{r}{3rs+1}$.

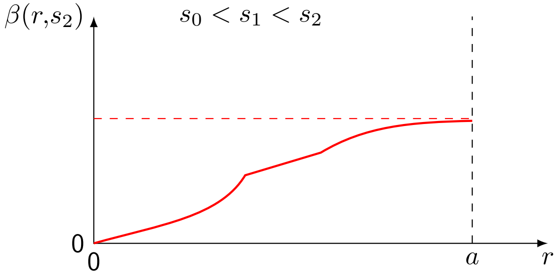
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



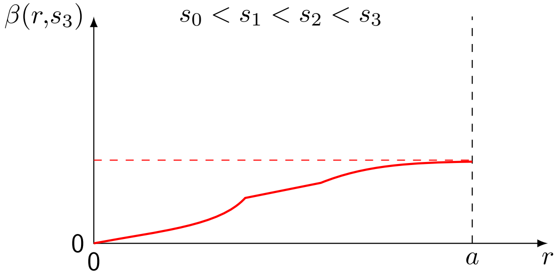
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



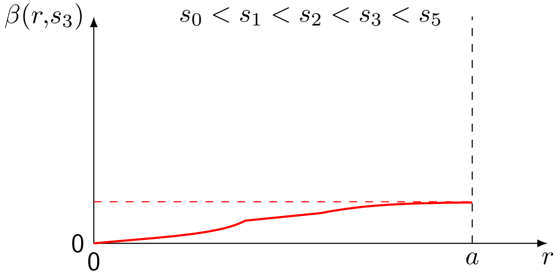
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



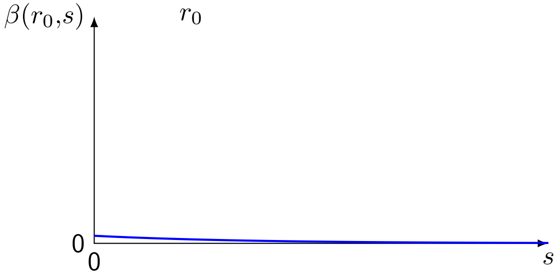
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



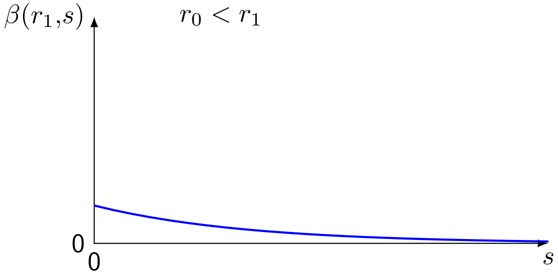
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



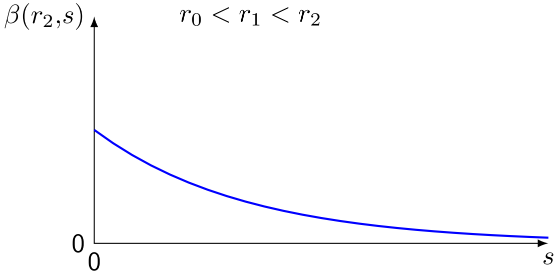
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



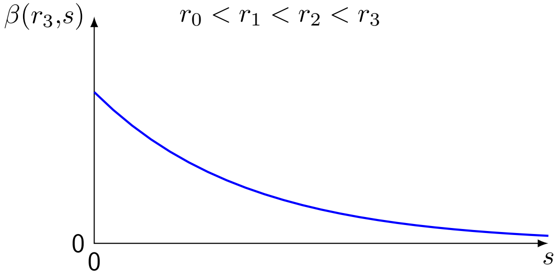
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



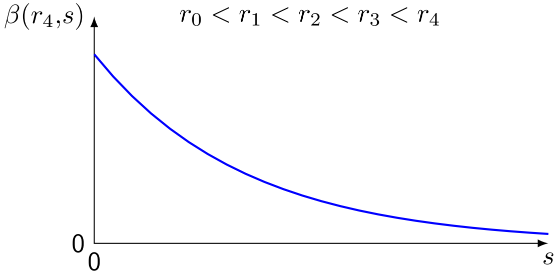
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



Funções de Classe $\mathcal{KL}$



Funções de Classe $\mathcal{KL}$



Funções de Classe $\mathcal{KL}$: Resultado Importante

Lemma ([Khalil, 2002], Lema 4.4, pág. 145)

Considere a seguinte equação diferencial ordinária, escalar, e correspondente a um sistema autônomo:

$$\dot{z} = -\alpha(z), \quad z(t_0) = z_0,$$

em que $\alpha \in \mathcal{K}$, está definida no intervalo $[0, r)$, e tem a propriedade adicional de ser Localmente Lipschitz. Neste caso, para todo $z_0 \in [0, r)$, a EDO acima tem solução $z(t)$ definida $\forall t \geq t_0$. Além disso,

$$z(t) = \sigma(z_0, t - t_0),$$

onde $\sigma(\cdot,\cdot)$ é uma função de classe $\mathcal{KL}$ definida em $[0, r) \times [0, +\infty)$.

Section 7

Lema da Comparação

O Lema da Comparação I

Pode-se estudar a existência das soluções de EDOs, investigando a existência e evolução no tempo de limitantes superiores para as normas das soluções procuradas. Para isso, pode-se usar o lema abaixo.

Lemma (Lema da Comparação, versão simplificada)

Suponha que a função escalar diferenciável $v(t)$ *satisfaça*

$$\frac{dv}{dt} \leq g(t,v), \quad v(t_0) \leq u_0, \quad \forall v \in W, \quad t \in [t_0,T),$$

sendo $g(t,v)$ *contínua em* t *e Lipschitz em* W*, em que* $[t_0, T)$ *é o intervalo maximal de existência da solução de*

$$\dot{u} = g(t,u), \quad u(t_0) = u_0,$$

supondo que $u(t) \in W$*,* $\forall t \geq t_0$*. Então,*

$$v(t) \leq u(t), \quad \forall t \in [t_0,T).$$

O Lema da Comparação II

- Em [Khalil, 2002] mostra-se o caso mais geral em que $v(t)$ não precisa ser uma função diferenciável. A condição a ser satisfeita é que sua *derivada superior à direita*, ou derivada de Dini superior à direita, deve ser tal que $D^+v(t) \leq g(t,v(t))$, sendo que

$$\begin{aligned} D^+v(t) &= \limsup_{\delta \to 0^+} \left[\frac{v(t+\delta) - v(t)}{\delta} \right], \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \sup_{|\delta|<\epsilon,\ \delta \neq 0} \left[\frac{v(t+\delta) - v(t)}{\delta} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Se $v(t)$ é uma função diferenciável, tem-se que

$$D^+v(t^*) = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t^*} .$$

O Lema da Comparação III

- **Exemplo de utilização**. Considere o sistema:

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x, \quad x(0) = x_0.$$

A solução existe e é única em algum intervalo $[0, t_1)$, pois $f(x)$ é localmente Lipschitz em torno da condição inicial. Mas podemos provar que a solução existe para todo $t \geq 0$, apesar de $f(x)$ não ser globalmente Lipschitz:

$$v = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 2x\dot{x} = -2x^2 - 2x^4, \quad \frac{dv}{dt} \leq -2v,$$

$$\dot{u} = -2u, \quad u(0) = u_0 = (x_0)^2 \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^{-2t}u_0.$$

Portanto, pelo Lema da Comparação,

$$v(t) \leq u(t) \quad \Rightarrow \quad x^2(t) \leq e^{-2t}(x_0)^2 \quad \Rightarrow \quad |x(t)| \leq e^{-t}|x_0|,$$

e a solução é definida e limitada $\forall t \geq 0$.

Section 8

Desigualdades Interessantes

Desigualdades Interessantes I

- Cauchy-Schwarz:

$$|x^\top y| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplos de utilização:

$$\begin{aligned}
&|4x_1 + 3x_2| \leq 5\|x\|, \\
&|3x_2| \leq 3\|x\|, \\
&|x_1 + 2x_2 - 3x_3| \leq \sqrt{14}\|x\|.
\end{aligned}$$

Prova rápida: $x^\top y = \|x\|\|y\| \cos\theta$, e $|\cos\theta| \leq 1$.

Desigualdades Interessantes II

- Dado $x = [x_1, x_2]^\top$:

$$x_1 x_2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

Prova rápida: $2x_1x_2 = -(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow 2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$.

Section 9

Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

Khalil, H. K. (2002).
Nonlinear Systems.
Prentice Hall, third edition.

Slotine, J.-J. and Li, W. (1990).
Applied Nonlinear Control.
Prentice Hall.

Vidyasagar, M. (1993).
Nonlinear Systems Analysis.
Prentice-Hall International, Inc., second edition.

Section 10

Espaços de Hausdorff

Espaços de Hausdorff

Definition (Espaço de Hausdorff)

Um Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$ no qual é possível "separar pontos", encontrando para quaisquer dois pontos distintos $x \neq y$ vizinhanças $U_x \ni x$ e $U_y \ni y$ que não se tocam; i.e. tais que $U_x \cap U_y \equiv \emptyset$; é chamado de *Espaço de Hausdorff*.

- Usando a topologia induzida pela métrica, e lembrando que todo elemento da Base $\mathcal{B}$ é aberto, e que para toda Métrica $d(x,y) > 0, \forall x \neq y$, conclui-se que todo Espaço Métrico com essa topologia é um Espaço de Hausdorff. Basta usar bolas abertas centradas, cada uma delas, nos pontos distintos x,y, e com raios apropriados, como vizinhanças de cada um dos pontos.

Section 11

Conjuntos Compactos: caso geral

Conjuntos Compactos: caso geral I

Definition (Cobertura Aberta)

Uma Cobertura Aberta $\mathcal{C}$ de um subconjunto $S \subseteq X$, em relação ao Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$, é qualquer coleção de conjuntos abertos tais que a união dos mesmos contém (ou cobre) S:

$$\mathcal{C} \equiv \{C_\alpha\}, C_\alpha \in \mathcal{T}, \quad S \subseteq \bigcup_\alpha C_\alpha.$$

Definition (Subcobertura Aberta Finita)

Uma Subcobertura Aberta Finita é uma coleção *finita* de elementos de uma Cobertura Aberta, cuja união também contém (ou cobre) S:

$$\mathcal{C}_\mathrm{s} \equiv \{C_k\}, C_k \in \mathcal{C}, k = 1,2,\ldots,n < \infty, \quad S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} C_k.$$

Conjuntos Compactos: caso geral II

Definition (Conjunto Compacto)

Um conjunto $S \subseteq X$ é Compacto, se toda Cobertura Aberta de S possuir uma Subcobertura Aberta Finita.

Section 12

Funções Contínuas: caso geral

Funções Contínuas: caso geral

Definition (Função Contínua)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$, de um Espaço Topológico $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{x}})$ em outro Espaço Topológico $(Y, \mathcal{T}_{\mathrm{y}})$, é *contínua*, se para todo conjunto aberto $V \subseteq Y$, o conjunto Imagem Inversa de V, definido por

$$f^{-1}(V) = \{x \in X; f(x) \in V\},$$

é um conjunto aberto de X; i.e. $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathrm{x}}$.

- Note que a continuidade da função depende intrinsecamente das topologias definidas nos conjuntos domínio X e contra-domínio Y.