Fundamentos de Controle Não Linear: Conceitos Matemáticos Importantes (em Progresso)

Leonardo A. B. Torres

PPGEE/UFMG

Março de 2023

1. Introdução à Topologia
   - Conjuntos Abertos e Fechados
2. Espaços Métricos
   - Conjuntos Limitados
3. Funções Contínuas
4. Espaços Vetoriais
   - Espaços Vetoriais Normados
   - Teorema dos Extremos ou Teorema de Weirstrass
   - Funções Lipschitz Contínuas
   - Funções Uniformemente Contínuas
5. Formas e Funções Quadráticas
6. Funções de Comparação
7. Lema da Comparação
8. Desigualdades Interessantes
9. Referências Bibliográficas

Section 1

Introdução à Topologia

Introdução à Topologia I

Topologia

A topologia $\mathcal{T}$ de um conjunto matemático abstrato X é uma coleção especial de subconjuntos de X que tem as seguintes propriedades:

1. Os conjuntos vazio e o conjunto universo pertencem à coleção: $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;
2. Uniões arbitrárias[a] de subconjuntos pertencem à coleção: $\bigcup_{\alpha} S_\alpha \in \mathcal{T}$;
3. Interseções finitas[b] de subconjuntos pertencem à coleção: $\bigcap_{k=1}^{N} S_k \in \mathcal{T}$;

[a] Finitas ou não, enumeráveis ou não.
[b] Portanto, enumeráveis.

Introdução à Topologia II

Definição (Espaço Topológico)

Se $\mathcal{T}$ é uma Topologia para X, então o par $(X,\mathcal{T})$ é um Espaço Topológico.

Exemplos de Espaços Topológicos:

- $X = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{T} = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a,b\}; \{a,b,c\}\}$.
- X um conjunto qualquer, e $\mathcal{T}$ a coleção de todos os subconjuntos de X, conhecida como *Topologia Discreta* de X.
- X um conjunto qualquer, e $\mathcal{T} = \{\emptyset; X\}$, conhecida como *Topologia Trivial* de X.
- $X \equiv \mathbb{R}$, e $\mathcal{T}$ é a coleção de todos os subconjuntos resultantes de uniões arbitrárias de intervalos da reta $B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, com a,b números reais arbitrários, ou $\pm\infty$. Esta é a topologia padrão para o conjunto dos números reais.

Conjuntos Abertos e Fechados

Definição (Conjunto Aberto)

Um subconjunto $S \subseteq X$ é aberto, se S pertence à topologia $\mathcal{T}$ sendo considerada. Isto é, para saber se um subconjunto é aberto, precisamos antes saber qual o Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$ sob consideração.

Definição (Conjunto Fechado)

Um subconjunto S é fechado, se o seu complemento em X

$$S^{\mathrm{c}} = X - S = \{x \in X; x \notin S\}$$

é um subconjunto aberto no Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$.

- Note que os subconjuntos $\emptyset$ e X são simultaneamente abertos e fechados em qualquer Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$. Portanto, **aberto não é o contrário de fechado**.

Vizinhanças de um Ponto

Definição (Vizinhança Aberta de um ponto x)

É qualquer conjunto aberto $U \subseteq X$, que contenha o ponto x; i.e. $x \in U$. O conjunto U é também chamado de *vizinhança aberta* de x.

- Em matemática é comum definir-se "Vizinhança de x" como qualquer subconjunto que contenha tanto x, quanto pelo menos uma vizinhança aberta de x. Nesse sentido, a Vizinhança não precisaria ser ela mesma um conjunto aberto.
- Entretanto, é muito comum encontrar-se a expressão "uma vizinhança $U \ni x$" em artigos científicos[1], no sentido de vizinhança *aberta* de x.
- Adotando prática similar, vamos nos referir a vizinhanças abertas de um ponto, associadas a um dado Espaço Topológico subjacente, como simplesmente "vizinhança de x".

[1] E, nesses casos, quando o Espaço Topológico não é explicitamente declarado, assume-se comumente um Espaço Topológico induzido pela norma Euclidiana.

Base de uma Topologia

Definição (Base de uma Topologia)

Se todos os conjuntos abertos de uma topologia $\mathcal{T}$ são formados pela união arbitrária de conjuntos de uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *base* para a topologia $\mathcal{T}$.

- Note que $\mathcal{B}$ não precisa satisfazer os requisitos para ser, ela mesma, uma topologia de X.
- Na definição da topologia padrão para $X \equiv \mathbb{R}$, usamos como Base a coleção de intervalos $B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, com a,$b \in \mathbb{R}$ e não necessariamente limitados.
- Pela definição acima, $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{T}$; i.e. todo elemento da coleção da Base é também um conjunto aberto.

Section 2

Espaços Métricos

Espaços Métricos I

Definição (Métrica em X)

Seja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função de pares de elementos do conjunto X, a qual toma valores no conjunto dos números reais. Essa função será uma Métrica em X, se, dados $x,y,z \in X$, tem-se

1. $d(x,x) = 0$;
2. $d(x,y) > 0$, $\forall x \neq y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetria);
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (desigualdade triangular).

- Para $X \equiv \mathbb{R}$, uma métrica usual é $d(x,y) = |x - y|$.
- Para $X \equiv \mathbb{R}^n$, a chamada métrica *Euclidiana* é $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.
- Para $X \equiv \mathbb{R}^n$, uma outra métrica é $d(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$.

Espaços Métricos II

Definição (Espaço Métrico)

Ao se definir para X uma Métrica específica, tem-se um Espaço Métrico denotado por (X,d).

- Para todo Espaço Métrico é possível definir-se uma Topologia induzida pela métrica:
  1. Defina "bola aberta de raio r, com centro em x" como sendo o subconjunto

$$B(x,r) = \{y \in X; d(x,y) < r\}.$$

  2. Considere como Base $\mathcal{B}$ para a topologia de X, a coleção formada por todas as possíveis bolas abertas de raios $r > 0$, e centros em quaisquer pontos $x \in X$.

Definição (Espaço Métrico com Topologia Padrão)

Um Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$, cuja topologia $\mathcal{T}$ tem como Base as bolas abertas definidas a partir de uma Métrica d, será chamado de Espaço Métrico com Topologia Padrão e denotado por $(X,d,\mathcal{T})$.

Conjuntos Limitados em Espaços Métricos

Definição (Conjunto Limitado)

Para $(X,d,\mathcal{T})$, um suconjunto $U \subseteq X$ é limitado se está contido em alguma bola de raio finito, isto é,

$$x \in U \quad \Rightarrow \quad x \in B(x_0,r);$$

em que $B(x_0,r) \equiv \{y \in X; d(x_0,y) < r\}$; e isso é verdade para algum $x_0 \in X$ e $r \in (0;+\infty)$.

Conjuntos Compactos

Para Espaços Métricos com Topologia Padrão $(X,d,\mathcal{T})$, demonstra-se, por meio do Teorema de Heine-Borel (ou do Teorema de Bolzano-Weierstrass no caso de sequências), que a definição mais geral de conjuntos compactos (vide Seção 11), para $X \subseteq \mathbb{R}^n$, é equivalente à definição a seguir.

Definição (Conjunto Compacto em $(X,d,\mathcal{T})$)

Um conjunto $S \subseteq X$ é Compacto, se, e somente se, ele é simultaneamente

1. Fechado; e
2. Limitado.

Ou, alternativamente, isto é equivalente à seguinte propriedade:

1. Toda sequência em S (finita ou não) tem uma subsequência cujo limite está em S. Em se tratando de sequências de pontos em S que são convergentes, as mesmas sempre convergirão para algum ponto em S.

Section 3

Funções Contínuas

Funções Contínuas

Considera-se Espaços Métricos com Topologia Padrão $(X,d_{\mathrm{x}},\mathcal{T}_{\mathrm{x}})$ e $(Y,d_{\mathrm{y}},\mathcal{T}_{\mathrm{y}})$. Para o caso geral, ver Seção 12.

Definição (Função Contínua no Ponto x_0)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$ é contínua no ponto x_0, com $y_0 = f(x_0)$, se dado $\epsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, sempre é possível encontrar $\delta > 0$ tal que

$$d_{\mathrm{x}}(x,x_0) < \delta \Rightarrow d_{\mathrm{y}}(y,y_0) < \epsilon,$$

em que, de forma geral, $\delta \equiv \delta(x_0,\epsilon)$.

Definição (Função Contínua)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$ é contínua, se é contínua em todo ponto $x \in X$ do seu domínio.

Section 4

Espaços Vetoriais

Norma

Definição (Norma)

Uma função (ou aplicação) $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$, de um Espaço Vetorial X sobre o corpo F ($F \equiv \mathbb{R}$ ou $F \equiv \mathbb{C}$) no conjunto dos números reais não negativos, a qual obedece às seguintes propriedades:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $\|x\| > 0$, $\forall x \neq 0$ (função definida positiva);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in F$ (função absolutamente homogênea);
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Exemplos de normas para $X \equiv \mathbb{R}^n$:

- Norma ℓ_2 ou Euclidiana: $\|x\| \equiv \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$;
- Norma ℓ_1: $\|x\| \equiv \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;
- Norma ℓ_∞ ou Norma do Máximo: $\|x\| = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.
- Norma ℓ_p: $\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

Espaços Vetoriais Normados I

Definição (Espaço Vetorial Normado)

Um Espaço Vetorial X, juntamente com a definição de uma Norma para os elementos de X, constitui um Espaço Vetorial Normado.

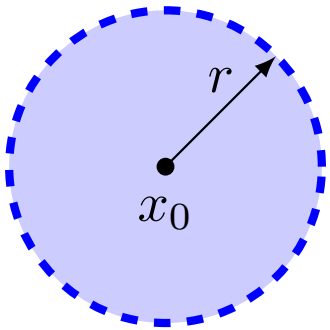
Em um Espaço Vetorial Normado pode-se definir uma Métrica (vide slide 6) a partir da Norma:

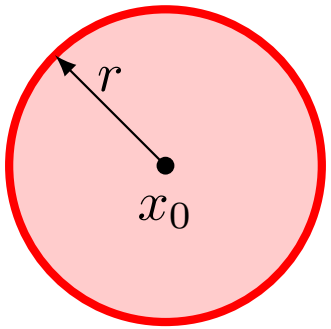
$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

- Com isto pode-se estabelecer um Espaço Topológico com topologia induzida pela métrica, obtida a partir da norma. Neste Espaço as "bolas abertas", que formam a Base da topologia, serão dadas por

$$B(x_0,r) = \{y \in X; \|y - x_0\| < r\}.$$

Espaços Vetoriais Normados II





$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$

$$\bar{B}(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

Figure: Exemplo de bola aberta e bola fechada no plano Euclidiano.

Funções Contínuas

No caso de Espaços Vetoriais Normados X e Y, com Topologias Padrão induzidas pelas respectivas Normas, pode-se especializar ainda mais a definição de Função Contínua.

Definição (Função Contínua no Ponto x_0)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$ é contínua no ponto x_0, com $y_0 = f(x_0)$, se dado $\epsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, sempre é possível encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|y - y_0\| < \epsilon,$$

em que, de forma geral, $\delta \equiv \delta(x_0,\epsilon)$.

Definição (Função Contínua)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$ é contínua, se é contínua em todo ponto $x \in X$ do seu domínio.

Teorema dos Extremos ou Teorema de Weierstrass

O teorema abaixo é frequentemente usado para se ter garantias de que *existem* os valores máximo e mínimo de funções contínuas definidas em conjuntos compactos.

Teorema (Mínimo e Máximo de Funções Contínuas em Conjuntos Compactos)

Se K é um conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(x)$ é limitada e existem $x_1, x_2 \in K$ tais que

$$f(x_1) = \max_{x \in K} f(x), \quad f(x_2) = \min_{x \in K} f(x).$$

Isto é, $f(x)$ atinge seus valores máximo e mínimo em pontos do conjunto compacto K que é seu domínio.

Note que não se está afirmando que algum ponto de máximo, ou de mínimo, é único. Isto é, podem existir muitos máximos e mínimos, mesmo em número infinito (caso de uma função constante).

Funções Lipschitz Contínuas I

Dada uma função $f : \mathbb{R}^+ \times D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que

$$\dot{x} = f(t,x),$$

as definições usadas em [Khalil, 2002, Capítulo 3] podem ser listadas como:

Definição (Função Localmente Lipschitz)

A função $f(t,x)$ é **localmente** Lispchitz em x_0 se a desigualdade

$$\|f(t,x_\mathrm{a}) - f(t,x_\mathrm{b})\| \leq L_{x_0}\|x_\mathrm{a} - x_\mathrm{b}\|; \quad x_\mathrm{a},x_\mathrm{b} \in U; \quad \forall t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

é satisfeita para pontos $x_\mathrm{a}, x_\mathrm{b} \in U$ em uma vizinhança U de x_0, e para todo $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Por isso, a constante de Lipschitz pode depender do ponto x_0 em particular, mas é uniforme em relação ao tempo, ou seja, é a mesma para todo o intervalo de tempo I considerado.

Funções Lipschitz Contínuas II

Definição (Lipschitz em um conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$)

A função $f(t,x)$ é localmente Lipschitz para todo ponto $x_0 \in W$, com uma mesma constante L que não depende do ponto x_0, e também válida para todo $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Definição (Globalmente Lipschitz)

A função $f(t,x)$ é Lipschitz em $W \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Funções Lipschitz Contínuas III

Formas simples de se reconhecer Funções Lipschitz Contínuas:

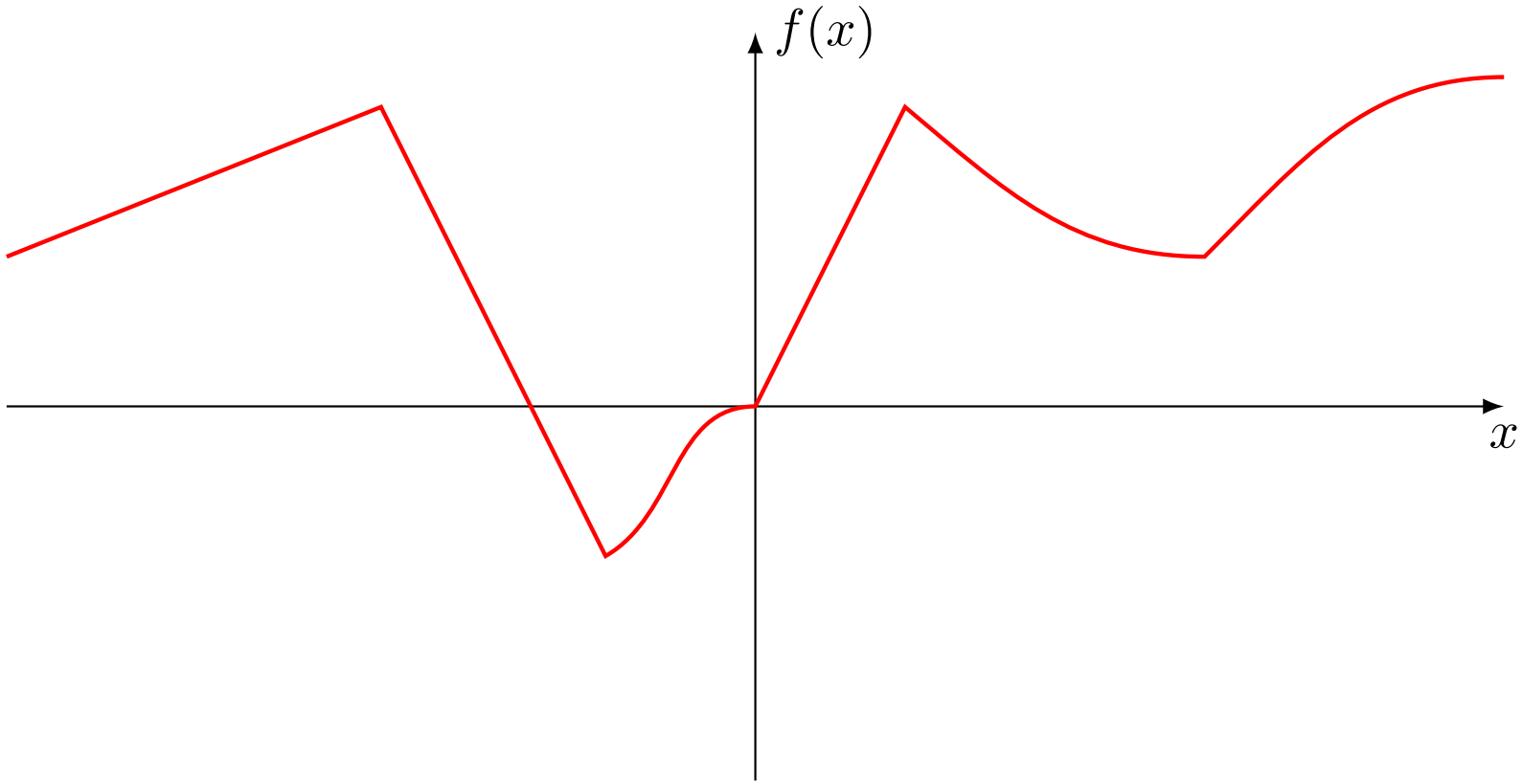
- **Ser uma função contínua é condição necessária** para ser Lipschitz.
- **Ser uma função contínua e diferenciável por partes, com derivadas limitadas, é condição suficiente** para ser Lipschitz. No caso em que $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, a norma da matriz Jacobiana deve ser limitada, isto é,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right\| \leq L < \infty,$$

em que L pode ser usada como constante de Lipschitz.

Funções Lipschitz Contínuas IV

Exemplo de função Lipschitz Contínua não-diferenciável (mas diferenciável por partes, com derivadas limitadas em cada parte):



Section 5

Formas e Funções Quadráticas

Matrizes Definidas e Semidefinidas I

1. **Matriz Definida Positiva**: Uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *definida positiva* se, e somente se, a função escalar $V(x) = x^\top P x$ é definida positiva, isto é

$$x^\top P x > 0, \forall x \neq 0.$$

2. **Matriz Semidefinida Positiva**: Uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *semidefinida positiva* se, e somente se, a função escalar

$$x^\top P x \geq 0, \forall x \neq 0.$$

Matrizes Definidas e Semidefinidas II

3. **Matriz Definida Negativa**: Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *definida negativa* se, e somente se, a função escalar

$$x^\top Q x < 0, \forall x \neq 0.$$

4. **Matriz Semidefinida Negativa**: Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *semidefinida negativa* se, e somente se, a função escalar

$$x^\top Q x \leq 0, \forall x \neq 0.$$

Matrizes Definidas e Semidefinidas III

Observações importantes sobre funções quadráticas do tipo

$$\phi(x) = x^\top P x.$$

1. Não há perda de generalidade ao se considerar apenas matrizes simétricas $P = P^\top$ na expressão de $\phi(x)$. Para ver isso, note que qualquer matriz P pode ser decomposta como

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(P + P^\top\right)}_{S\text{: Parte Simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(P - P^\top\right)}_{A\text{: Parte Anti-simétrica}}, \\ &= S + A. \qquad S = S^\top, \quad A = -A^\top. \end{aligned}$$

Mas a parte anti-simétrica não contribui para $\phi(x)$, pois, lembrando que $x^\top A x$ é uma função escalar, temos que

$$\begin{aligned} x^\top A x &= \left[x^\top A x\right]^\top = x^\top A^\top x, \\ &= -x^\top A x \quad \Rightarrow \quad x^\top A x = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Matrizes Definidas e Semidefinidas IV

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x^\top P x, \\ &= x^\top (S+A)\, x = x^\top S x + \cancelto{0}{x^\top A x}, \\ &= x^\top S x,\end{aligned}$$

e somente a componente simétrica $S = \frac{1}{2}\left(P + P^\top\right)$ contribui para se determinar o valor de $\phi(x) = x^\top P x$.

Matrizes Definidas e Semidefinidas V

2. Toda matriz simétrica definida positiva $P = P^\top$ tem autovalores reais e positivos:
   - Seja $v = \mathrm{Re}\{v\} + j\mathrm{Im}\{v\}$ um autovetor de P associado ao autovalor λ, e $v^* = \mathrm{Re}\{v\}^\top - j\mathrm{Im}\{v\}^\top$.
   - Neste caso:
   $$Pv = \lambda v,$$
   $$v^*Pv = \lambda v^*v = \lambda\|v\|^2.$$
   - Como $\{v^*Pv\}^* = v^*P^*v = v^*Pv$, sabemos que o escalar v^*Pv é um número real e, além disso, é um número real positivo, pois
   $$\left[\mathrm{Re}\{v\}^\top - j\mathrm{Im}\{v\}^\top\right] P\left[\mathrm{Re}\{v\} + j\mathrm{Im}\{v\}\right] =$$
   $$\mathrm{Re}\{v\}^\top P\,\mathrm{Re}\{v\} + \mathrm{Im}\{v\}^\top P\,\mathrm{Im}\{v\} > 0.$$
   - Portanto:
   $$\lambda\|v\|^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$
   $$\lambda\|v\|^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0.$$

Matrizes Definidas e Semidefinidas VI

3. Note que, como P é uma matriz real, e λ é um número real, conclui-se que:

$$Pv = \lambda v,$$
$$P\left[\mathrm{Re}\{v\} + j\mathrm{Im}\{v\}\right] = \lambda\left[\mathrm{Re}\{v\} + j\mathrm{Im}\{v\}\right],$$

$$P\,\mathrm{Re}\{v\} = \lambda\,\mathrm{Re}\{v\},$$
$$P\,\mathrm{Im}\{v\} = \lambda\,\mathrm{Im}\{v\},$$

e, portanto, sempre podemos escolher autovetores que são reais, usando a parte real ou a parte imaginária de um autovetor complexo como um novo autovetor real válido.

Matrizes Definidas e Semidefinidas VII

4. Lembre-se de que para cada autovetor v (por definição, $v \neq 0$), podemos associar um e somente um autovalor λ, pois:

$$Pv = \lambda_1 v, Pv = \lambda_2 v \Rightarrow 0 = (\lambda_1 - \lambda_2)v, v \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

5. No caso de matrizes reais e simétricas $P = P^\top$, podemos usar esse fato para mostrar que, dados quaisquer dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 de P, e correspondentes autovetores reais v_1 e v_2, temos que

$$Pv_1 = \lambda_1 v_1, \Rightarrow \quad \underbrace{v_2^\top P}_{\lambda_2 v_2^\top = v_2^\top P^\top} \quad v_1 = \lambda_1 v_2^\top v_1,$$

$$\lambda_2 v_2^\top v_1 = \lambda_1 v_2^\top v_1 \Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) v_2^\top v_1 = 0 \Leftrightarrow v_2^\top v_1 = 0.$$

Isto é, pares de autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais entre si, pois seu produto interno é nulo.

Matrizes Definidas e Semidefinidas VIII

6. Quando se tem autovalores repetidos, poderia ser o caso de não se conseguir encontrar um conjunto L.I. de $m_\ell \geq 1$ autovetores para um dado autovalor λ_ℓ de multiplicidade $m_\ell \leq n$, e isso tornaria a matriz simétrica $P = P^\top$ não-diagonalizável.
7. Entretanto, para matrizes simétricas é sempre possível encontrar uma transformação de similaridade que diagonaliza a matriz:
   - 7.1 Suponha a existência de um autovetor $v_{11} \neq 0$ de P, isto é, $Pv_{11} = \lambda_1 v_{11}$, de multiplicidade m_1 qualquer, escolhido para ter norma unitária (o que é sempre possível).
   - 7.2 Monte a matriz $V_1 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{bmatrix}$, escolhendo $n-1$ vetores unitários $v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{1n}$ tais que, juntamente com v_{11}, formem uma base ortonormal de vetores. Isto é sempre possível: use o conhecido procedimento de Gram-Schmidt. Consequentemente, $V_1^\top V_1 = V_1 V_1^\top = \mathbb{1}_n$, com $\mathbb{1}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade.

Matrizes Definidas e Semidefinidas IX

7.3 Note que

$$
\begin{aligned}
PV_1 &= P\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pv_{11} & Pv_{12} & \cdots & Pv_{1n} \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & Pv_{12} & \cdots & Pv_{1n} \end{bmatrix}, \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{bmatrix}}_{V_1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & w_{12,1} & w_{13,1} & \cdots & w_{1n,1} \\ 0 & w_{12,2} & w_{13,2} & \cdots & w_{1n,2} \\ 0 & w_{12,3} & w_{13,3} & \cdots & w_{1n,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & w_{12,n} & w_{13,n} & \cdots & w_{1n,n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

em que os vetores coluna $w_{1j} = Pv_{1j}$, $j = 2, \ldots, n$. As primeiras componentes $w_{1j,1}$ de cada vetor w_{1j} são as projeções dos vetores resultantes Pv_{1j} na direção de v_{11}. Mas, como $P = P^\top$:

$$
w_{1j,1} = v_{11}^\top P v_{1j} = v_{11}^\top P^\top v_{1j} = \lambda_1 v_{11}^\top v_{1j} = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n.
$$

pois cada vetor $v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{1n}$ foi escolhido ortogonal a v_{11}.

Matrizes Definidas e Semidefinidas X

Portanto,

$$PV_1 = V_1 \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & w_{12,2} & \cdots & w_{1n,2} \\ 0 & w_{12,3} & \cdots & w_{1n,3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & w_{12,n} & \cdots & w_{1n,n} \end{array}\right].$$

Além disso, note que a submatriz resultante de dimensão $(n-1) \times (n-1)$ é simétrica, pois, para $j = 2, 3, \ldots, n$ e $k = 2, 3, \ldots, n$:

$$w_{1j,k} = v_{1k}^\top P v_{1j} = v_{1j}^\top P^\top v_{1k} = v_{1j}^\top P v_{1k} = w_{1k,j}.$$

Matrizes Definidas e Semidefinidas XI

Assim, conclui-se que

$$PV_1 = V_1 \underbrace{\left[\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & B = B^\top & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right]}_{P_1}.$$

E, tendo em vista que as colunas de V_1 são ortonormais e, portanto, L.I., existe $V_1^{-1} = V_1^\top$ tal que $P_1 = V_1^\top P V_1$, e P_1 tem os mesmos autovalores de P (transformação de similaridade que é também uma transformação de congruência).

Matrizes Definidas e Semidefinidas XII

7.4 Aplicando o mesmo processo à matriz simétrica B mostrada na expressão anterior, e assim sucessivamente, conclui-se que P pode ser diagonalizada depois de n passos.

7.5 Isto significa que, para matrizes simétricas, sempre é possível encontrar um conjunto de $m_\ell \geq 1$ autovetores L.I. associados a qualquer autovalor λ_ℓ da matriz, independentemente de sua multiplicidade $m_\ell \leq n$.

7.6 A partir deste conjunto de autovetores L.I., sempre podemos obter um outro conjunto ortonormal de autovetores, usando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt. Vetores associados a autovalores distintos, como visto anteriormente, já serão ortogonais entre si.

Matrizes Definidas e Semidefinidas XIII

8. Portanto, a partir do desenvolvimento anterior, toda matriz $P = P^\top$ simétrica definida positiva pode ser representada como um produto (Teorema da Decomposição Espectral):

$$P = U^\top \Lambda U,$$

em que $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, sendo $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, autovalores de P, que são números reais positivos; e $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz real *ortogonal*, isto é,

$$U^\top U = \mathbb{1}_n, \;\; UU^\top = \mathbb{1}_n, \quad \Leftrightarrow \quad U^{-1} = U^\top$$

sendo $\mathbb{1}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade. Isto significa que as colunas de U podem ser vistas como *autovetores* de norma unitária que são ortogonais entre si, isto é, $U = [u_1 \; u_2 \; \cdots \; u_n]$, com $u_i^\top u_j = 0$, se $i \neq j$, e $u_i^\top u_i = 1$.

Matrizes Definidas e Semidefinidas XIV

9 A partir do item anterior, e sem perda de generalidade considerando $P = P^\top$, podemos escrever que

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x^\top P x = x^\top \left(U^\top \Lambda U\right) x = \left(x^\top U^\top\right) \Lambda \left(Ux\right), \\ &= z \Lambda z, \\ &= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2,\end{aligned}$$

em que $z = Ux$ é uma transformação de coordenadas que preserva a norma dos vetores: $\|x\|^2 = \|z\|^2 = x^\top U^\top U x$. Considerando $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, temos que

$$\begin{aligned}\phi(x) &= x^\top P x, \\ &= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 \leq \lambda_n z_1^2 + \lambda_n z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2, \\ &\leq \lambda_n z^\top z, \\ &\leq \lambda_n x^\top x. \qquad \Rightarrow \qquad x^\top P x \leq \lambda_n x^\top x.\end{aligned}$$

Matrizes Definidas e Semidefinidas XV

De forma semelhante, também se consegue mostrar que $x^\top Px \geq \lambda_1 x^\top x$, e portanto,

$$\lambda_1 x^\top x \leq x^\top Px \leq \lambda_n x^\top x,$$

em que $\lambda_1 = \lambda_{\min}(P)$ é o menor autovalor de P, e $\lambda_n = \lambda_{\max}(P)$ é o maior autovalor de P:

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq x^\top Px \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2.$$

Section 6

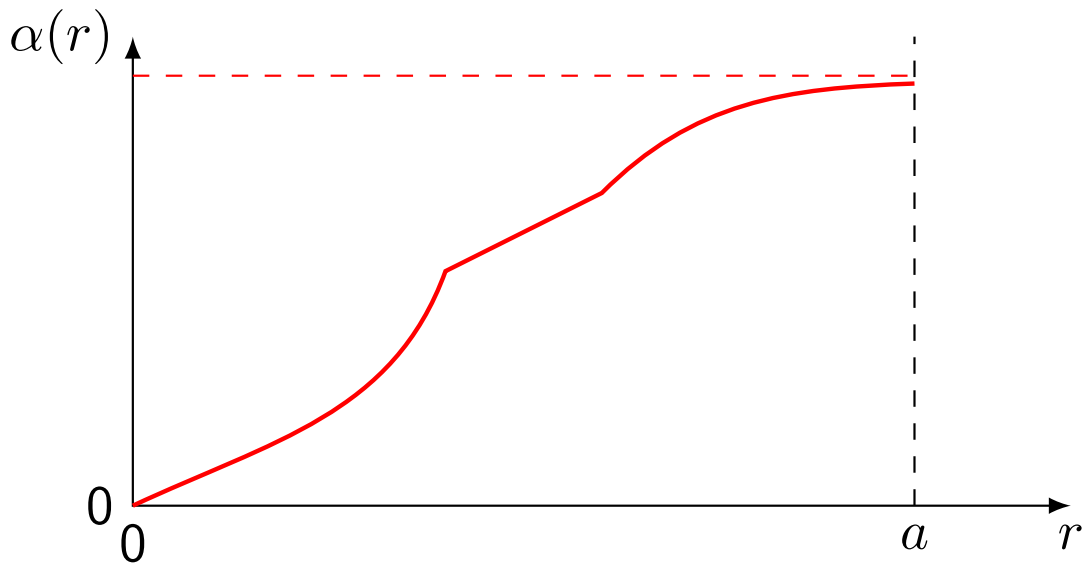
Funções de Comparação

Funções de Classe $\mathcal{K}$

Definição (Função de Classe $\mathcal{K}$)

Uma função $\alpha : [0, a) \to [0, +\infty)$ é de Classe $\mathcal{K}$, com $a \in \mathbb{R}^+$ limitado ou não, se satisfaz as seguintes propriedades [Khalil, 2002]:

1. é uma função contínua ($\alpha \in \mathcal{C}^0$);
2. $\alpha(0) = 0$, e é estritamente crescente: $r_1 < r_2 \Rightarrow \alpha(r_1) < \alpha(r_2)$.



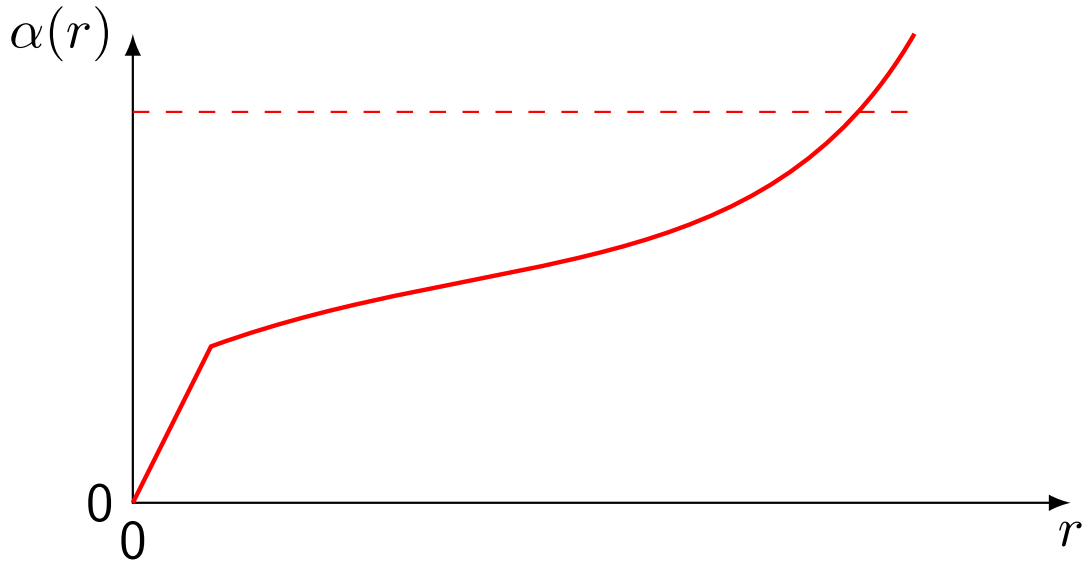
Funções de Classe $\mathcal{K}_\infty$

Definição (Função de Classe $\mathcal{K}_\infty$)

Uma função $\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é de Classe $\mathcal{K}_\infty$, se é uma função de Classe $\mathcal{K}$ e

$$\lim_{r \to +\infty} \alpha(r) \to +\infty.$$

Note que o domínio de uma função de classe $\mathcal{K}_\infty$ deve ser toda a semireta real.



Funções de Classe $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\infty$: propriedades I

- Se $\alpha \in \mathcal{K}$, então existe uma função inversa e ela também é de classe $\mathcal{K}$:

$$\alpha : [0, a) \to [0, +\infty) \in \mathcal{K} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha^{-1}, \alpha^{-1} : [0, \alpha(a)) \to [0, +\infty) \in \mathcal{K}.$$

- Se $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, então existe uma função inversa e ela também é de classe $\mathcal{K}_\infty$:

$$\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \in \mathcal{K}_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha^{-1}, \alpha^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \in \mathcal{K}_\infty.$$

- A composição de duas funções de classe $\mathcal{K}$ produz uma função de classe $\mathcal{K}$:

$$\alpha_1(r_1), \alpha_2(r_2) \in \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1(\alpha_2(r)) \in \mathcal{K}.$$

- A composição de duas funções de classe $\mathcal{K}_\infty$ produz uma função de classe $\mathcal{K}_\infty$:

$$\alpha_1(r_1), \alpha_2(r_2) \in \mathcal{K}_\infty \quad \Rightarrow \quad \alpha_1(\alpha_2(r)) \in \mathcal{K}_\infty.$$

Funções de Classe $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\infty$: propriedades II

- Funções de classe $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{K}_\infty$, por serem estritamente crescentes, **preservam relações de ordem**, isto é, se $\alpha \in \mathcal{K}$ ou $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, então:

$$\begin{aligned} r_1 \leq r_2 &\Leftrightarrow \alpha(r_1) \leq \alpha(r_2), \\ r_1 < r_2 &\Leftrightarrow \alpha(r_1) < \alpha(r_2), \end{aligned}$$

- Além disso, dada a existência de função inversa da mesma classe, para o caso em que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ ou $\mathcal{K}_\infty$, tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha_1(r_1) \leq \alpha_2(r_2) &\Leftrightarrow \alpha_1^{-1}(\alpha_1(r_1)) \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(r_2)), \\ \alpha_1(r_1) \leq \alpha_2(r_2) &\Leftrightarrow r_1 \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(r_2)). \\ \alpha_1(r_1) \leq \alpha_2(r_2) &\Leftrightarrow \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r_1)) \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_2(r_2)), \\ \alpha_1(r_1) \leq \alpha_2(r_2) &\Leftrightarrow r_2 \geq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r_1)). \end{aligned}$$

Funções de Classe $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\infty$: propriedades III

- Uma última propriedade interessante, que nos remete a uma espécie de "desigualdade triangular" (não é este o caso):

$$\alpha \in \mathcal{K}, \quad r_1, r_2 \in [0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad \alpha(r_1 + r_2) \leq \alpha(2r_1) + \alpha(2r_2).$$

Prova:

$$\text{Se } r_1 > r_2 \Rightarrow \alpha(r_1 + r_2) \leq \alpha(r_1 + r_1) = \alpha(2r_1) \geq 0,$$
$$\text{Se } r_2 > r_1 \Rightarrow \alpha(r_1 + r_2) \leq \alpha(r_2 + r_2) = \alpha(2r_2) \geq 0,$$
$$\therefore \quad \alpha(r_1 + r_2) \leq \alpha(2r_1) + \alpha(2r_2).$$

Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Lema ([Khalil, 2002], Lema 4.3)

Seja $V : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua ($V \in \mathcal{C}^0$), e definida positiva; isto é, $V(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, com $V(0) = 0$; cujo domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ contém a origem $x = 0$. Seja $\bar{B}(0,r) \subseteq D$ uma bola fechada de raio $r > 0$. Então existem funções $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$, definidas em $[0,r]$, tais que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall x \in \bar{B}(0,r).$$

Se $D \equiv \mathbb{R}^n$, as funções α_1 e α_2 estarão definidas em $[0, +\infty)$ e as desigualdades acima serão válidas para $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, se $V(x)$ é radialmente ilimitada, então pode-se escolher que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$.

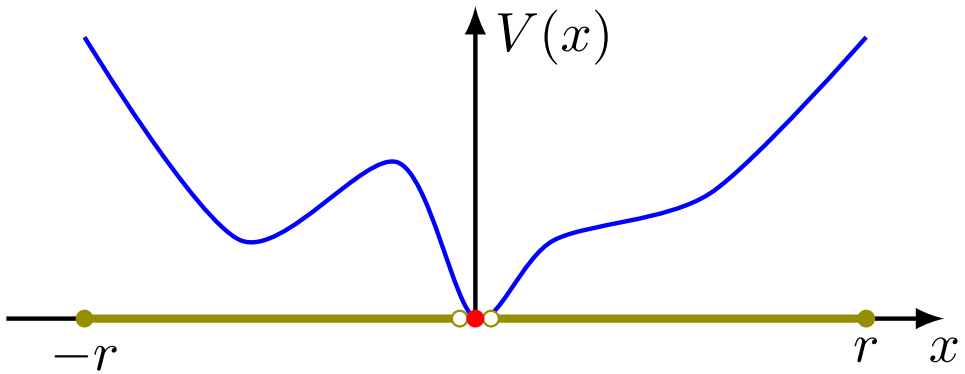
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



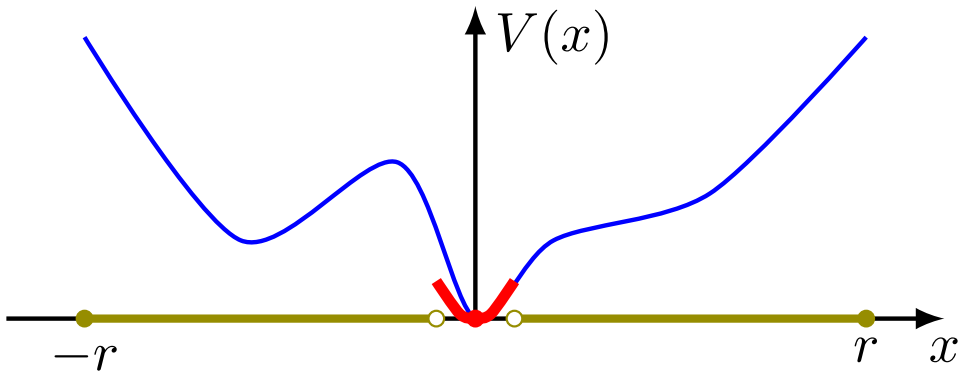
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



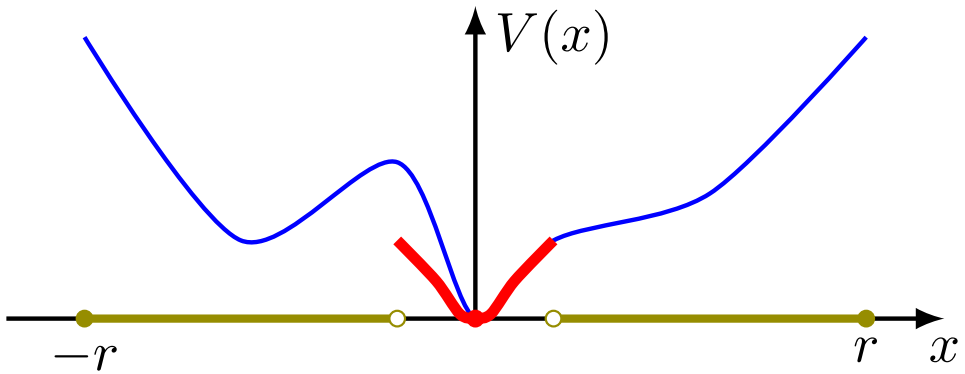
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



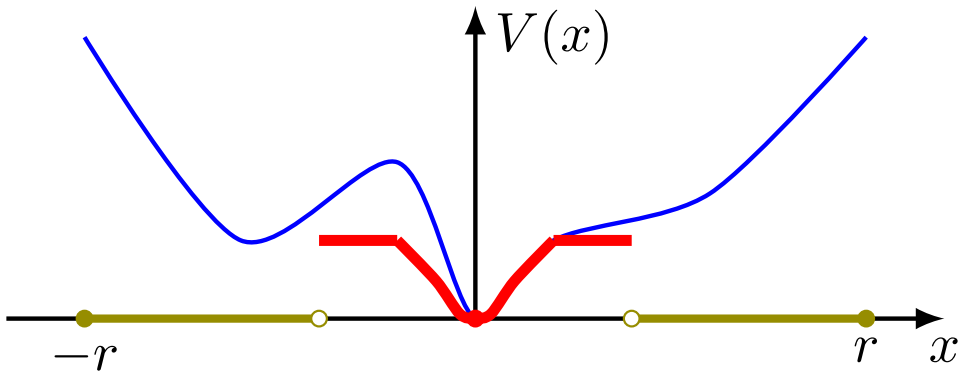
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



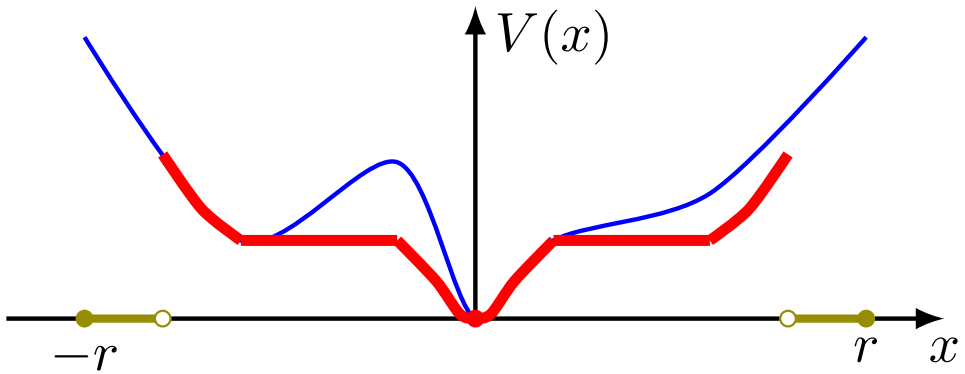
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



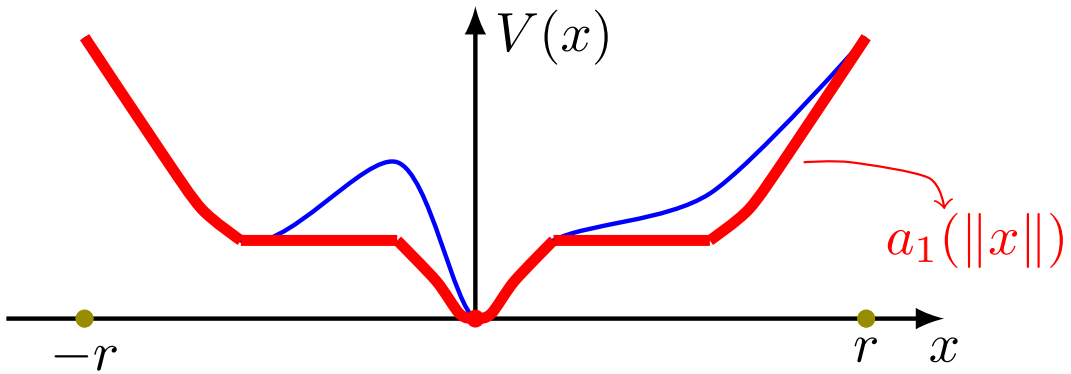
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

Abaixo apresenta-se um esboço da prova do lema anterior:

- Inicialmente, considere a construção da seguinte função auxiliar:

$$a_1(\|x\|) = \inf_{\{\|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(z).$$

Como $V(z) \in \mathcal{C}^0$, e o ínfimo está sendo buscado em uma região compacta (o anel fechado $\|x\| \leq \|z\| \leq r$), pelo Teorema de Weierstrass, os extremos (de fato, o máximo e o mínimo) de uma função contínua em um domínio compacto sempre existem, e $a_1(\|x\|)$ está bem definida para $0 \leq \|x\| \leq r$. Graficamente:



Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- É possível mostrar que $a_1(\|x\|)$ é uma função contínua, definida positiva, e não-decrescente (não é estritamente crescente), e ainda, por construção,

$$a_1(\|x\|) \leq V(x).$$

- A partir de $a_1(\|x\|)$ podemos obter uma função $\alpha_1(\|x\|) \in \mathcal{K}$, como mostrado a seguir.

Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- Para se obter uma função $\alpha_1(\|x\|) \in \mathcal{K}$ a partir da função $a_1(\|x\|)$, pode-se recorrer a diferentes técnicas. Por exemplo, pode-se escolher:

$$\alpha_1(\|x\|) = \frac{\|x\|}{r} a_1(\|x\|), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r,$$

como função estritamente crescente, definida positiva, contínua, e tal que $\alpha_1(\|x\|) < a_1(\|x\|), \forall \|x\| < r$. Outra possibilidade seria:

$$\alpha_1(\|x\|) = \lambda \left[a_1(\|x\|)\right] + (1-\lambda)\left[k a_1(\|x\|)\right], \quad 0 \leq k < 1,$$

em que $\lambda = \frac{\|x\|}{r}$, para $0 \leq \|x\| \leq r$. Trata-se da combinação convexa de $a_1(\|x\|)$ e de sua cópia "atenuada" $k a_1(\|x\|)$.

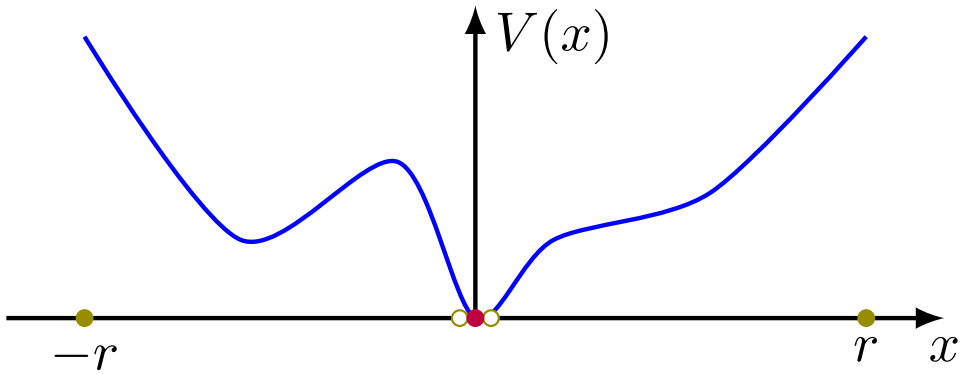
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



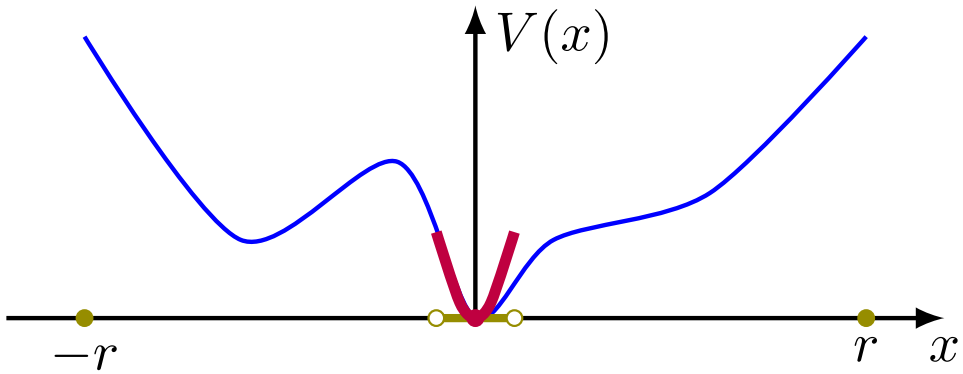
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



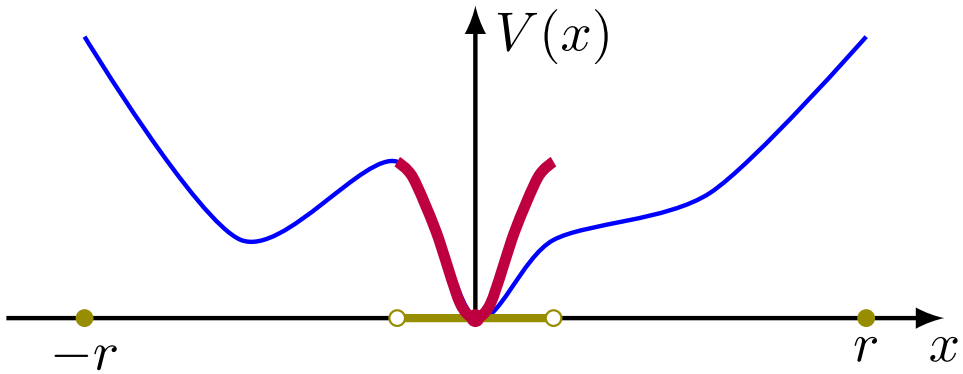
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



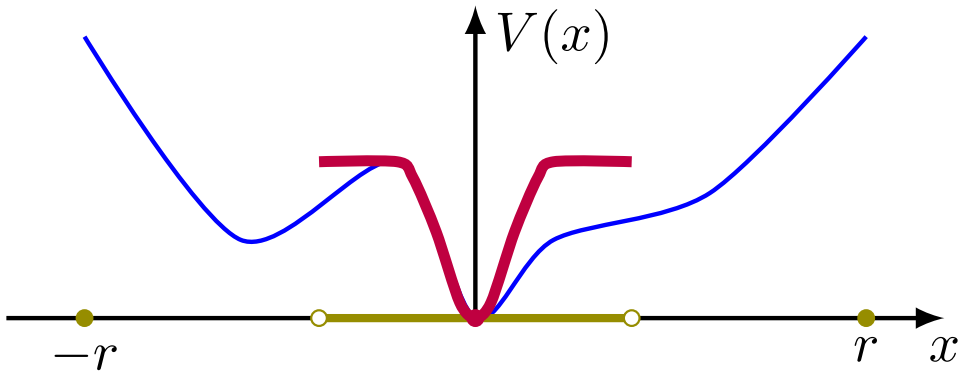
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



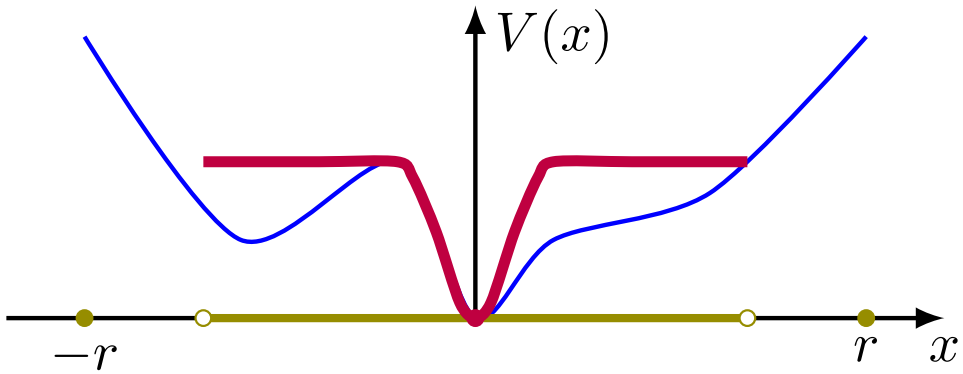
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



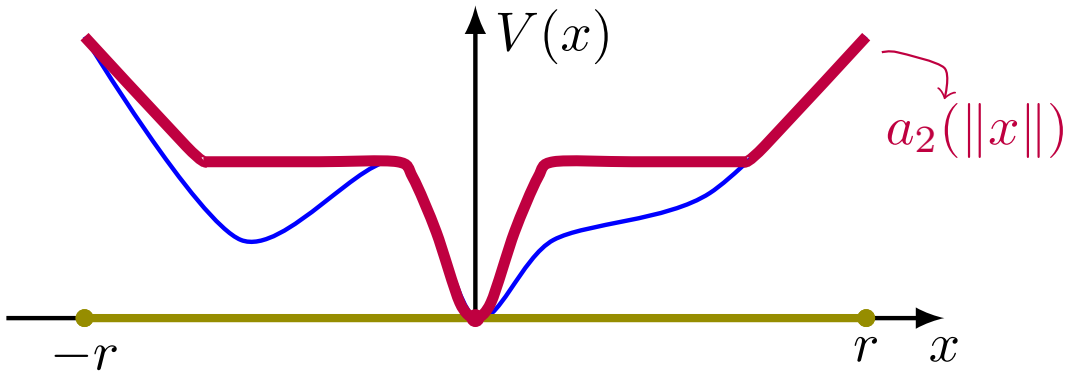
Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- De maneira similar, pode-se definir uma função auxiliar

$$a_2(\|x\|) = \sup_{\{\|z\| \leq \|x\|\}} V(z),$$

que será definida positiva, contínua, e não decrescente, enquanto satisfaz

$$a_2(\|x\|) \geq V(x), \quad \forall 0 \leq \|x\| \leq r.$$



Funções Definidas Positivas e Funções de Classe $\mathcal{K}$

- Para se obter uma função $\alpha_2(\|x\|) \in \mathcal{K}$, pode-se sugerir a seguinte combinação convexa entre $a_2(\|x\|)$ e a uma cópia "amplificada" dela mesma:

$$\alpha_2(\|x\|) = (1-\lambda)\left[a_2(\|x\|)\right] + (\lambda)\left[k a_2(\|x\|)\right], \quad k > 1,$$

em que $\lambda = \frac{\|x\|}{r}$, para $0 \leq \|x\| \leq r$.

Decrescent Functions

- No caso de funções $V(t,x)$ definidas positivas, continuamente diferenciáveis, mas **variantes no tempo**, não se tem garantias de que seja possível encontrar $\alpha_2(\|x\|) \geq V(t,x)$, $\forall t \geq 0$ e $\forall x \in [0; r]$.
  Compare estes casos:
  1. $V(t,x) = x_1^2 + x_2^2 + t$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \geq 0$.
  2. $V(t,x) = (x_1^2 + x_2^2)(2 + \sin t)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \geq 0$.
- Quando é possível encontrar uma função contínua e definida positiva $W(x)$ (não precisa ser de classe $\mathcal{K}$), tal que

$$V(t,x) \leq W(x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

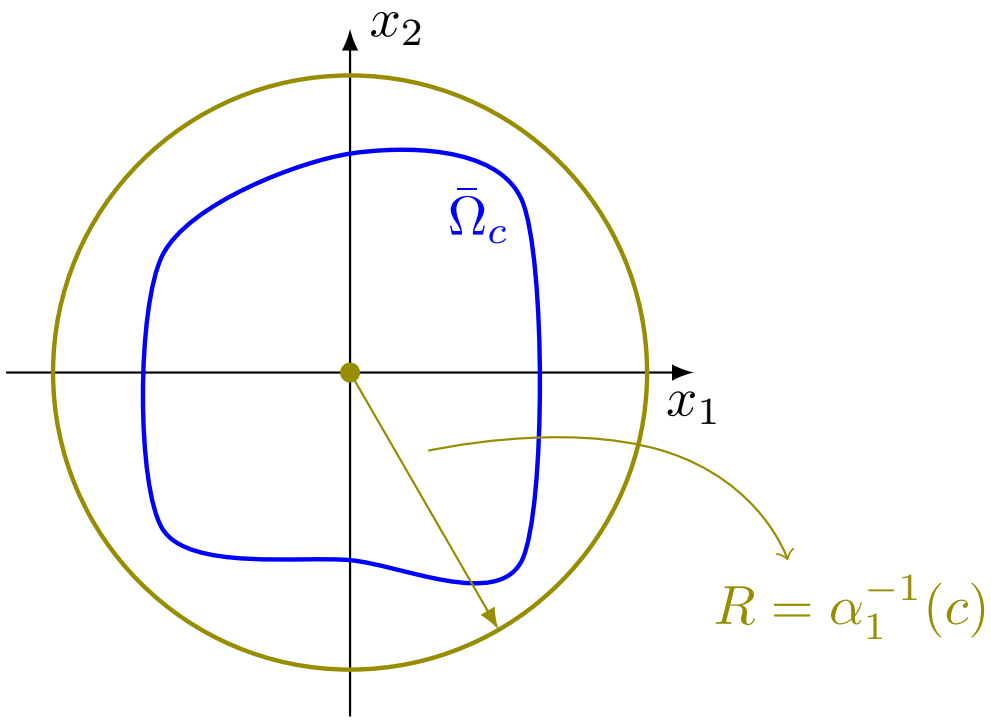
  dizemos, em Inglês, que $V(t,x)$ é uma *Decrescent Function*.
- Por outro lado, não há dificuldades em se encontrar $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x)$, com $\alpha_1(\|x\|) \in \mathcal{K}$, pois basta modificar ligeiramente a função auxiliar para

$$a_1(\|x\|) = \min_{\{t \geq 0;\ \|x\| \leq \|z\| \leq r\}} V(t,z).$$

Importância das Funções de Classe $\mathcal{K}$

A importância das propriedades e fatos associados às classes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\infty$ de funções está em se poder estabelecer relações do tipo:

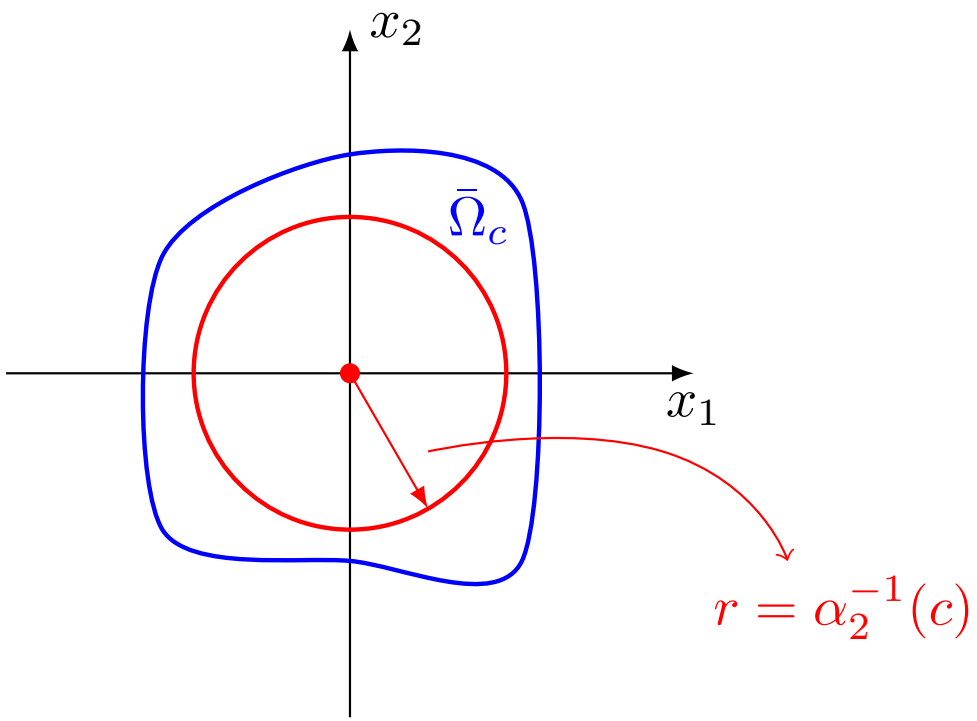
$$\begin{cases} x \in \bar{\Omega}_c, \quad \bar{\Omega}_c = \{x \in X; V(x) \leq c\}, \\ \alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \alpha_1^{-1}(c).$$



Importância das Funções de Classe $\mathcal{K}$

A importância das propriedades e fatos associados às classes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\infty$ de funções está em se poder estabelecer relações do tipo:

$$\begin{cases} \alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \\ \|x\| \leq \alpha_2^{-1}(c), \end{cases} \Rightarrow \quad x \in \bar{\Omega}_c, \quad \bar{\Omega}_c = \{x \in X; V(x) \leq c\}.$$



Funções de Classe $\mathcal{KL}$

Definição (Função de Classe $\mathcal{KL}$)

Uma função $\beta : [0, a) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ é de Classe $\mathcal{KL}$, se, ao se fixar o argumento $s = s_0$ em $\beta(r,s_0)$, obtém-se uma função de Classe $\mathcal{K}$ em relação a r; e, ao se fixar o argumento $r = r_0$ em $\beta(r_0,s)$, obtém-se uma função contínua e decrescente (não-crescente) em relação a s, e que converge para zero quando $s \to \infty$:

- $\beta(r,s_0) \in \mathcal{K}$, para todo $s_0 \in \mathbb{R}^+$ constante.

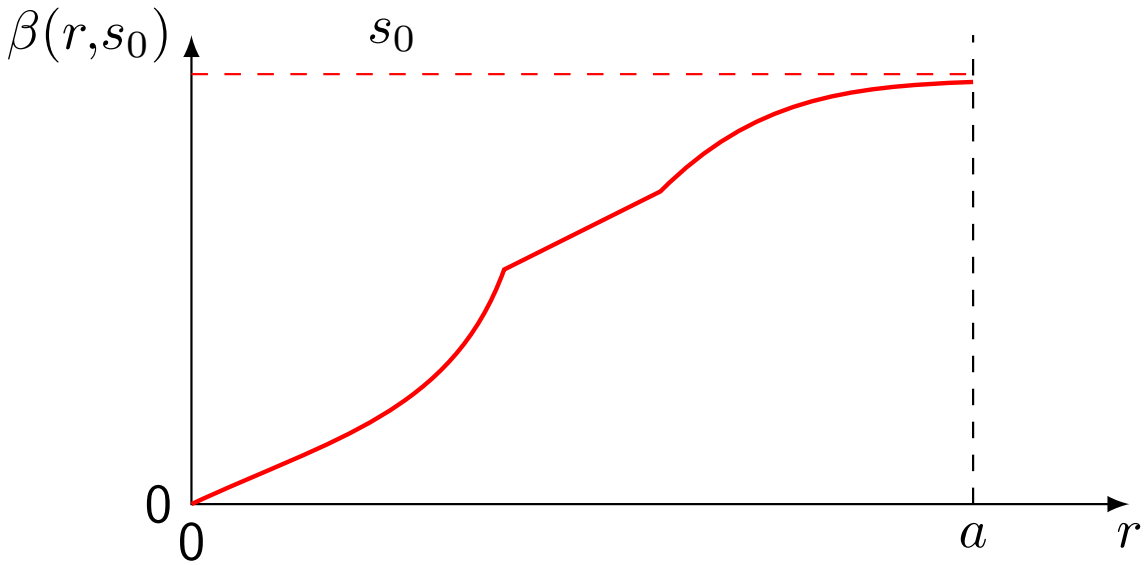
e, também, com $r_0 \in [0, a)$,

- $s_1 < s_2 \Rightarrow \beta(r_0, s_1) \geq \beta(r_0, s_2)$, para todo $r_0 \in \mathbb{R}^+$ constante.
- $\lim_{s \to +\infty} \beta(r_0, s) = 0$, para todo $r_0 \in \mathbb{R}^+$ constante.

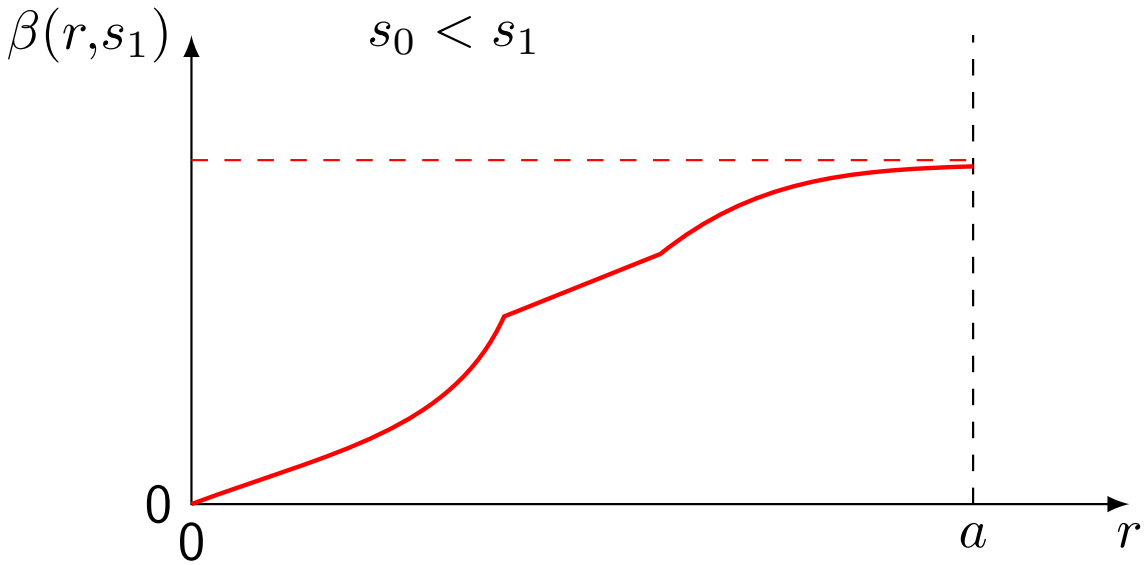
Exemplos:

- Decaimento exponencial: $\beta(r,s) = re^{-2s}\|x(0)\|$.
- $\beta(r,s) = \frac{r}{3rs+1}$.

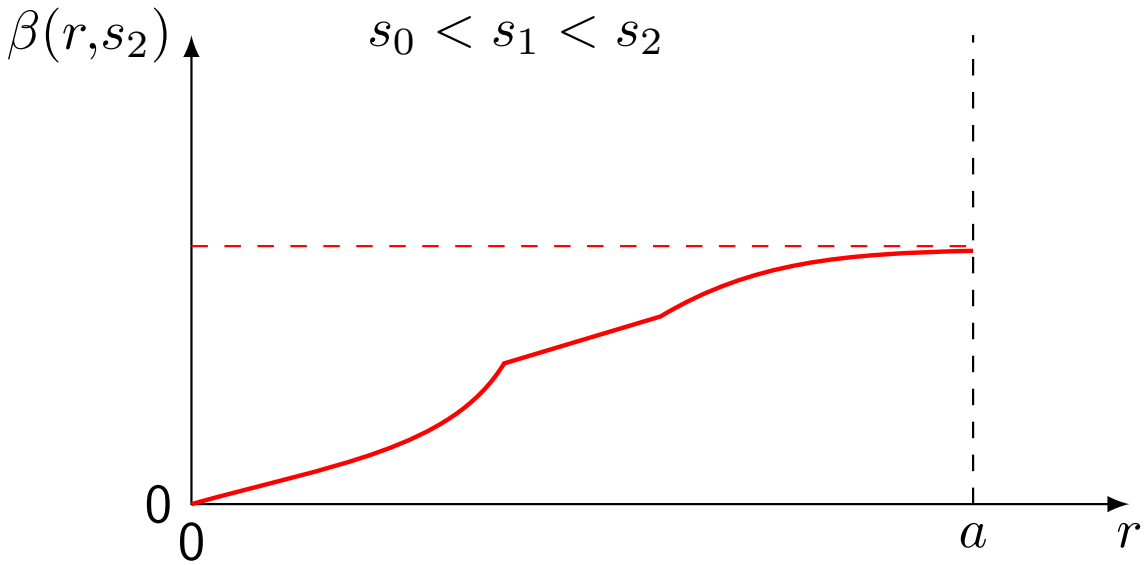
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



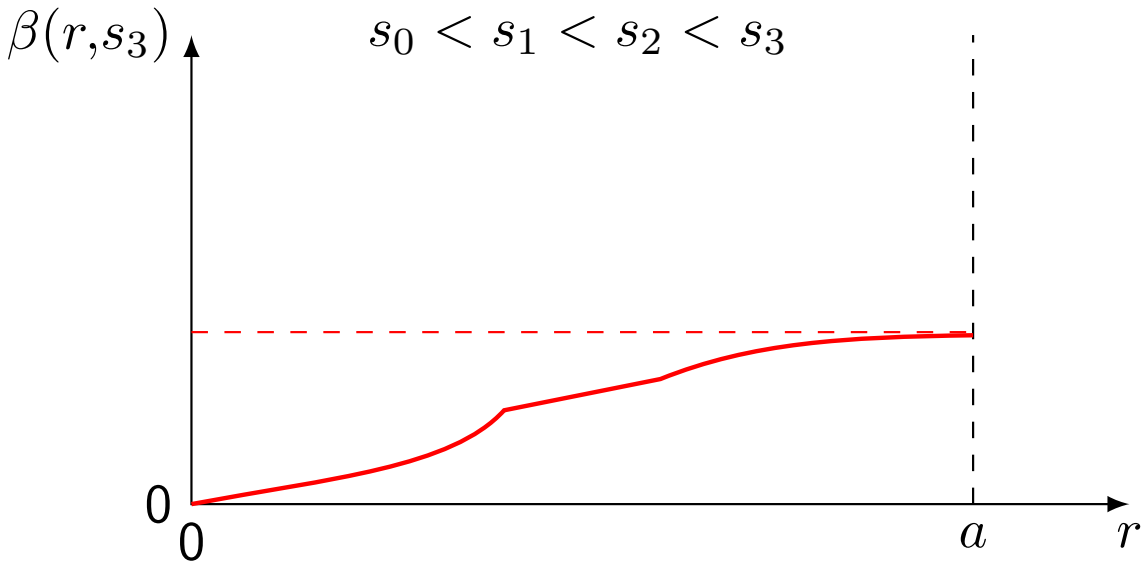
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



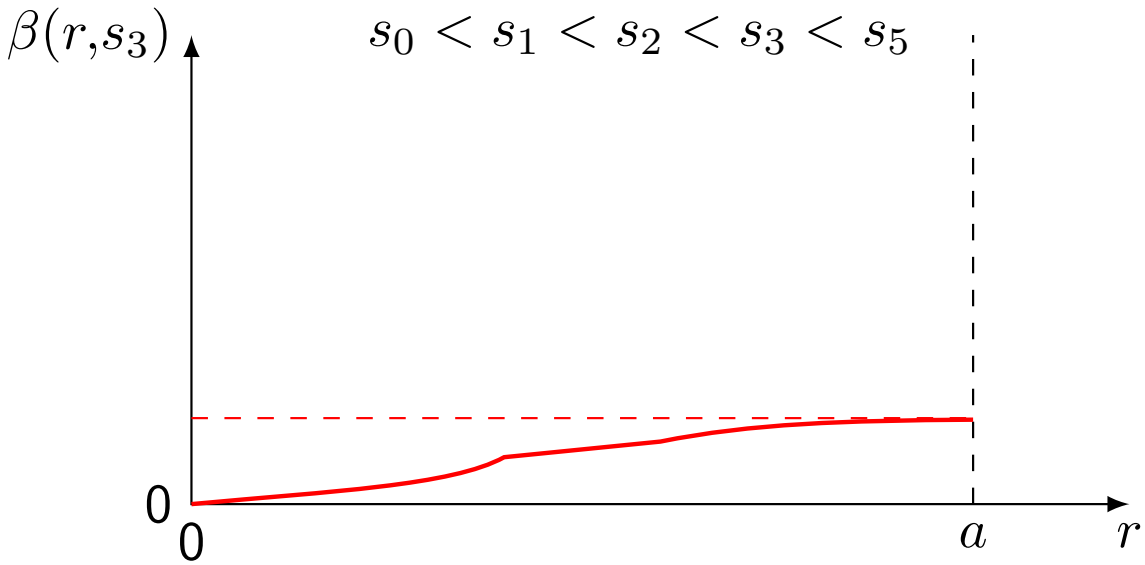
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



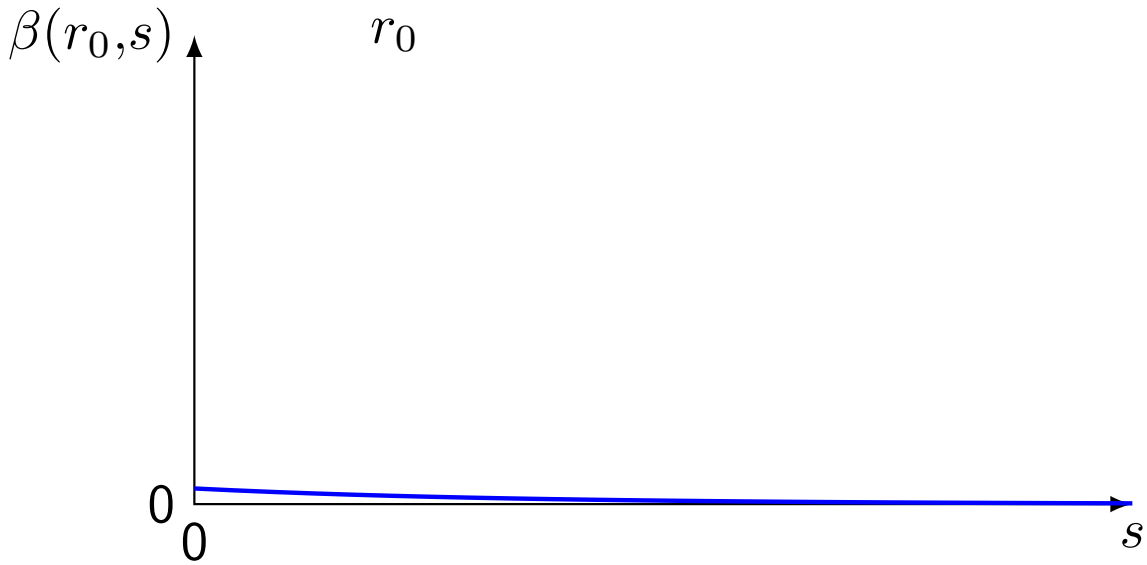
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



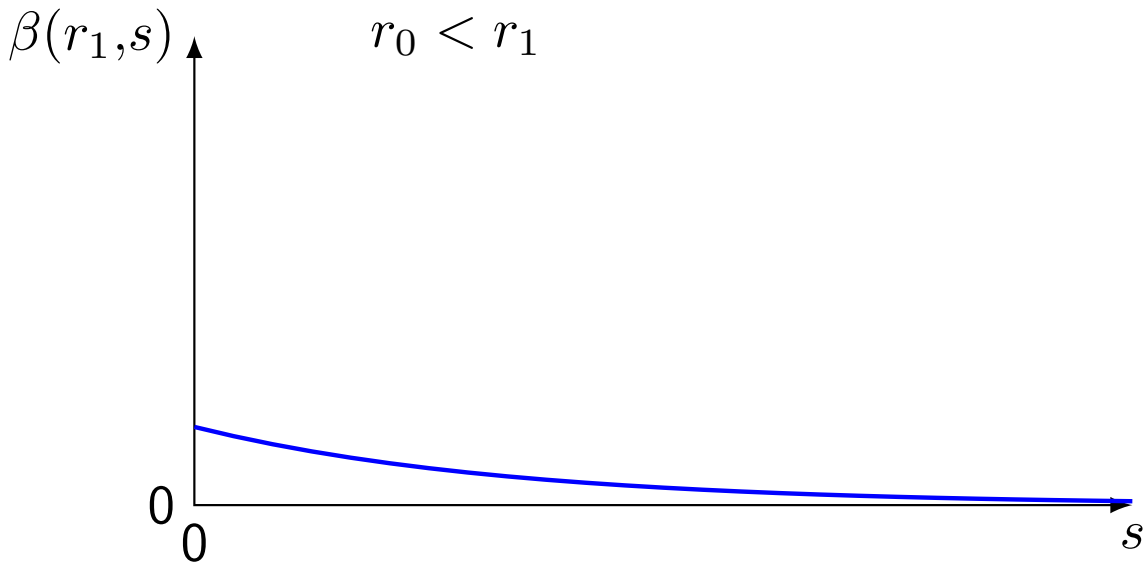
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



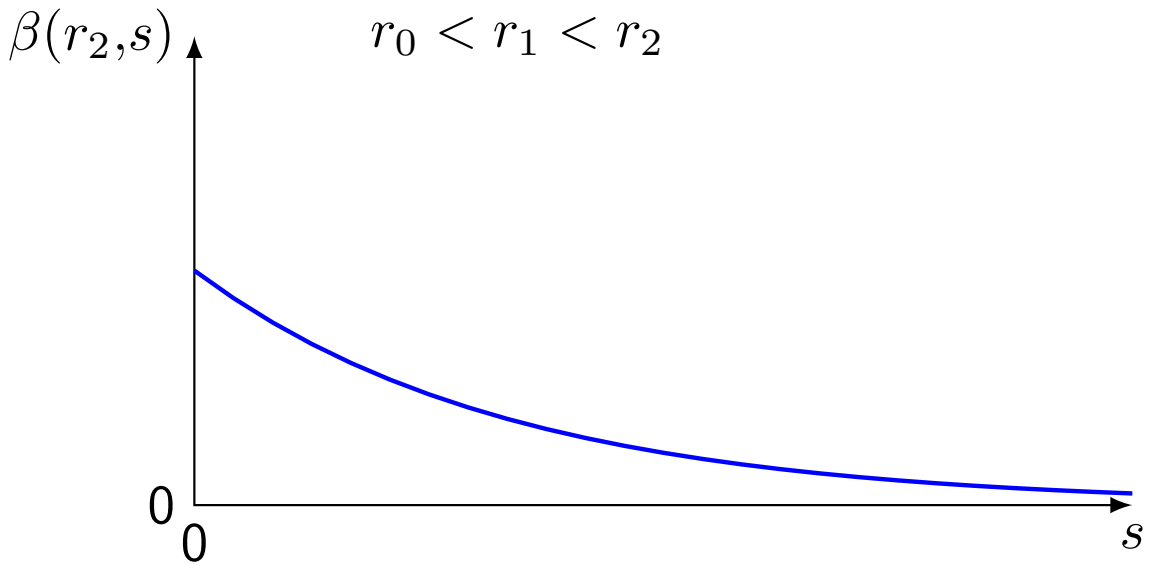
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



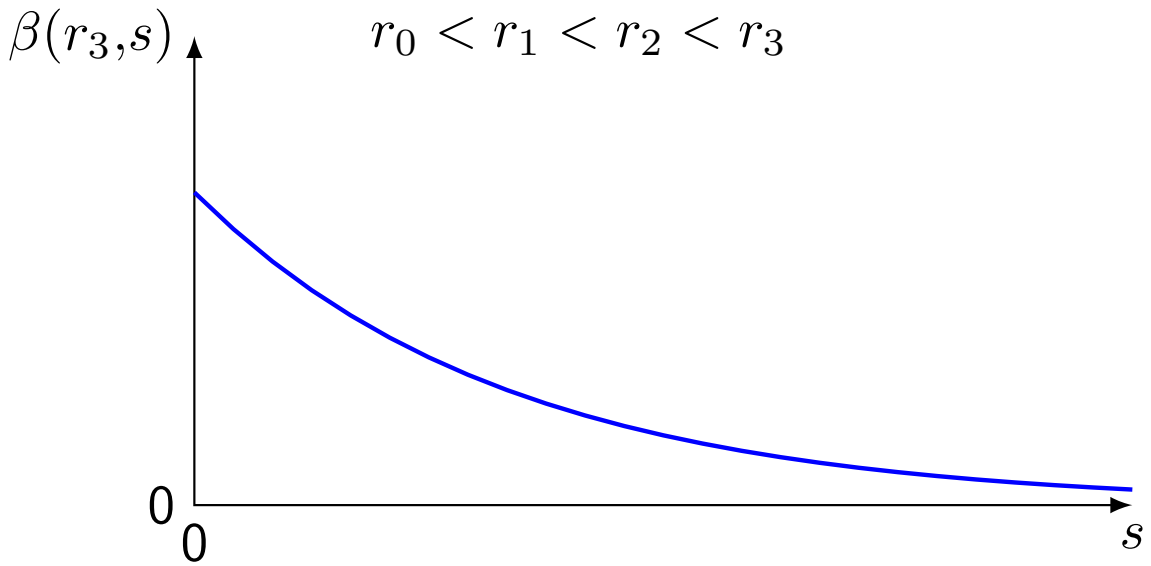
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



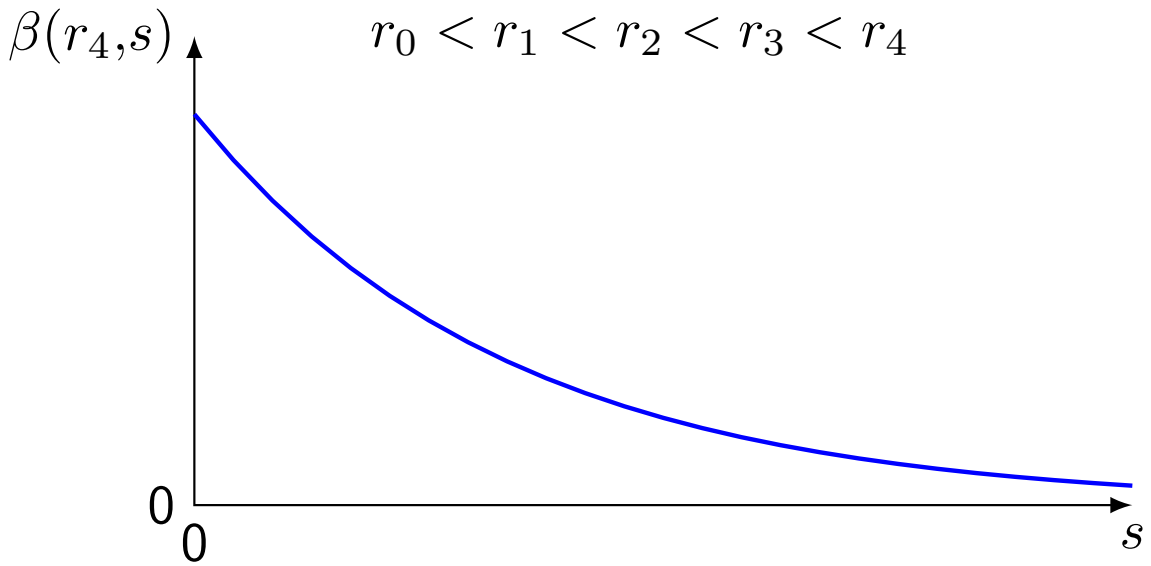
Funções de Classe $\mathcal{KL}$



Funções de Classe $\mathcal{KL}$



Funções de Classe $\mathcal{KL}$



Funções de Classe $\mathcal{KL}$: Resultado Importante

Lema ([Khalil, 2002], Lema 4.4, pág. 145)

Considere a seguinte equação diferencial ordinária, escalar, e correspondente a um sistema autônomo:

$$\dot{z} = -\alpha(z), \quad z(t_0) = z_0,$$

em que $\alpha \in \mathcal{K}$, está definida no intervalo $[0, r)$, e tem a propriedade adicional de ser Localmente Lipschitz. Neste caso, para todo $z_0 \in [0, r)$, a EDO acima tem solução $z(t)$ definida $\forall t \geq t_0$. Além disso,

$$z(t) = \sigma(z_0, t - t_0),$$

onde $\sigma(\cdot,\cdot)$ é uma função de classe $\mathcal{KL}$ definida em $[0, r) \times [0, +\infty)$.

Section 7

Lema da Comparação

O Lema da Comparação I

Pode-se estudar a existência das soluções de EDOs, investigando a existência e evolução no tempo de limitantes superiores para as normas das soluções procuradas. Para isso, pode-se usar o lema abaixo.

Lema (Lema da Comparação, versão simplificada)

Suponha que a função escalar diferenciável $v(t)$ *satisfaça*

$$\frac{dv}{dt} \leq g(t,v), \quad v(t_0) \leq u_0, \quad \forall v \in W, \quad t \in [t_0,T),$$

sendo $g(t,v)$ *contínua em* t *e Lipschitz em* W*, em que* $[t_0, T)$ *é o intervalo maximal de existência da solução de*

$$\dot{u} = g(t,u), \quad u(t_0) = u_0,$$

supondo que $u(t) \in W$, $\forall t \geq t_0$*. Então,*

$$v(t) \leq u(t), \quad \forall t \in [t_0,T).$$

O Lema da Comparação II

- Em [Khalil, 2002] mostra-se o caso mais geral em que $v(t)$ não precisa ser uma função diferenciável. A condição a ser satisfeita é que sua *derivada superior à direita*, ou derivada de Dini superior à direita, deve ser tal que $D^+v(t) \leq g(t,v(t))$, sendo que

$$D^+v(t) = \limsup_{\delta \to 0^+} \left[\frac{v(t+\delta) - v(t)}{\delta} \right],$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \sup_{|\delta| < \epsilon,\, \delta \neq 0} \left[\frac{v(t+\delta) - v(t)}{\delta} \right] \right\}.$$

Se $v(t)$ é uma função diferenciável, tem-se que

$$D^+v(t^*) = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t^*}.$$

O Lema da Comparação III

- **Exemplo de utilização**. Considere o sistema:

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x, \quad x(0) = x_0.$$

A solução existe e é única em algum intervalo $[0, t_1)$, pois $f(x)$ é localmente Lipschitz em torno da condição inicial. Mas podemos provar que a solução existe para todo $t \geq 0$, apesar de $f(x)$ não ser globalmente Lipschitz:

$$v = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 2x\dot{x} = -2x^2 - 2x^4, \quad \frac{dv}{dt} \leq -2v,$$
$$\dot{u} = -2u, \quad u(0) = u_0 = (x_0)^2 \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^{-2t}u_0.$$

Portanto, pelo Lema da Comparação,

$$v(t) \leq u(t) \quad \Rightarrow \quad x^2(t) \leq e^{-2t}(x_0)^2 \quad \Rightarrow \quad |x(t)| \leq e^{-t}|x_0|,$$

e a solução é definida e limitada $\forall t \geq 0$.

Section 8

Desigualdades Interessantes

Desigualdades Interessantes I

- Cauchy-Schwarz:

$$|x^\top y| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplos de utilização:

$$|4x_1 + 3x_2| \leq 5\|x\|,$$
$$|3x_2| \leq 3\|x\|,$$
$$|x_1 + 2x_2 - 3x_3| \leq \sqrt{14}\|x\|.$$

Prova rápida: $x^\top y = \|x\|\|y\| \cos\theta$, e $|\cos\theta| \leq 1$.

Desigualdades Interessantes II

- Dado $x = [x_1, x_2]^\top$:

$$x_1 x_2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

Prova rápida: $2x_1x_2 = -(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow 2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$.

Desigualdades Interessantes III

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|.$$

Prova rápida: $a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2$.

Section 9

Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

Khalil, H. K. (2002).
Nonlinear Systems.
Prentice Hall, third edition.

Slotine, J.-J. and Li, W. (1990).
Applied Nonlinear Control.
Prentice Hall.

Vidyasagar, M. (1993).
Nonlinear Systems Analysis.
Prentice-Hall International, Inc., second edition.

Section 10

Espaços de Hausdorff

Espaços de Hausdorff

Definição (Espaço de Hausdorff)

Um Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$ no qual é possível "separar pontos", encontrando para quaisquer dois pontos distintos $x \neq y$ vizinhanças $U_x \ni x$ e $U_y \ni y$ que não se tocam; i.e. tais que $U_x \cap U_y \equiv \emptyset$; é chamado de *Espaço de Hausdorff*.

Section 11

Conjuntos Compactos: caso geral

Conjuntos Compactos: caso geral I

Definição (Cobertura Aberta)

Uma Cobertura Aberta $\mathcal{C}$ de um subconjunto $S \subseteq X$, em relação ao Espaço Topológico $(X,\mathcal{T})$, é qualquer coleção de conjuntos abertos tais que a união dos mesmos contém (ou cobre) S:

$$\mathcal{C} \equiv \{C_\alpha\}, C_\alpha \in \mathcal{T}, \quad S \subseteq \bigcup_\alpha C_\alpha.$$

Definição (Subcobertura Aberta Finita)

Uma Subcobertura Aberta Finita é uma coleção *finita* de elementos de uma Cobertura Aberta, cuja união também contém (ou cobre) S:

$$\mathcal{C}_\mathrm{s} \equiv \{C_k\}, C_k \in \mathcal{C}, k = 1,2,\ldots,n < \infty, \quad S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} C_k.$$

Conjuntos Compactos: caso geral II

Definição (Conjunto Compacto)

Um conjunto $S \subseteq X$ é Compacto, se toda Cobertura Aberta de S possuir uma Subcobertura Aberta Finita.

Section 12

Funções Contínuas: caso geral

Funções Contínuas: caso geral

Definição (Função Contínua)

Uma função (ou aplicação) $f : X \to Y$, de um Espaço Topológico $(X,\mathcal{T}_{\mathrm{x}})$ em outro Espaço Topológico $(Y,\mathcal{T}_{\mathrm{y}})$, é *contínua*, se para todo conjunto aberto $V \subseteq Y$, o conjunto Imagem Inversa de V, definido por

$$f^{-1}(V) = \{x \in X; f(x) \in V\},$$

é um conjunto aberto de X; i.e. $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathrm{x}}$.

- Note que a continuidade da função depende intrinsecamente das topologias definidas nos conjuntos domínio X e contra-domínio Y.