Fundamentos de Controle Não Linear: Sistemas Dinâmicos Não Lineares – Conceitos Fundamentais

Leonardo A. B. Tôrres

PPGEE/UFMG

Março de 2019

Nosso Objeto de Estudo I

Nesse curso iremos estudar sistemas dinâmicos descritos por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x,u), \\ y &= h(t,x,u), \end{aligned}$$

em que $x \equiv x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ são as variáveis de estado (variáveis internas, variáveis de memória, variáveis auxiliares), $u \equiv u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas (sinais que podem ser manipulados arbitrariamente), $y \equiv y(t) \in \mathbb{R}^p$ são sinais de saída, e $t \in [0, +\infty) \equiv \mathbb{R}^+$ é a variável tempo contínuo. Portanto, os sistemas serão:

- Definidos no tempo contínuo, $\forall t \geq 0$.
- De dimensão finita $(n < \infty)$.
- Descritos por meio de equações diferenciais ordinárias, usando Representações em Espaço de Estados.

Nosso Objeto de Estudo II

Interpretação escalar das equações vetoriais anteriores:

$$\dot{x} = f(t,x,u) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccl} \dot{x}_1 & = & f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_m), \\ \dot{x}_2 & = & f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_m), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n & = & f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_m), \end{array} \right.$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$; $f_i : \mathbb{R}^+ \times \{X \subseteq \mathbb{R}^n\} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; i.e. $x = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^\top$; $u_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$; i.e. $u = [u_1\ u_2\ \ldots\ u_m]^\top$. Similarmente,

$$y = h(t,x,u) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccl} y_1 & = & h_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_m), \\ y_2 & = & h_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_m), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_p & = & h_p(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_m), \end{array} \right.$$

em que $h_i : \mathbb{R}^+ \times \{X \subseteq \mathbb{R}^n\} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Nosso Objeto de Estudo III

Neste contexto, Sistemas Dinâmicos Lineares e Invariantes no Tempo – LTI – são apenas um caso bastante particular:

$$\underbrace{\begin{array}{rcl}\frac{dx}{dt} & = & f(t,x,u), \\ y & = & h(t,x,u),\end{array}}_{\text{Nonlinear/Generic}} \rightarrow \underbrace{\begin{array}{rcl}\frac{dx}{dt} & = & A(t)x + B(t)u, \\ y & = & C(t)x + D(t)u,\end{array}}_{\text{Linear Time-Varying (LTV)}} \rightarrow \underbrace{\begin{array}{rcl}\frac{dx}{dt} & = & Ax + Bu, \\ y & = & Cx + Du,\end{array}}_{\text{Linear Time-Invariant (LTI)}}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ são constantes.
E o caso é tão particular, que até se tem algo muito raro, em se tratando de sistemas de equações diferenciais: a expressão analítica da evolução dos estados ao longo do tempo, a partir de uma condição inicial x_0.

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

em que $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}At^2 + \frac{1}{3!}At^3 + \cdots$.

Nosso Objeto de Estudo IV

Ao longo do curso de *Fundamentos de Controle Não Linear*, iremos estudar a estabilidade de diferentes sistemas dinâmicos, em ordem crescente de complexidade:

1. Sistemas autônomos: $\dot{x} = f(x)$;
2. Sistemas não autônomos: $\dot{x} = f(t,x)$;
3. Sistemas perturbados:
    1. $\dot{x} = f(x) + g(t,x)$, $\|g(t,x)\| \leq \gamma\|x\|$, $\gamma \geq 0$;
    2. $\dot{x} = f(x) + g(t,x)$, $\|g(t,x)\| \leq \delta$, $0 \leq \delta < \infty$;
4. Sistemas com entradas limitadas: $\dot{x} = f(x,u)$, $\|u(t)\| \leq M_{\mathrm{u}}$, $0 \leq M_{\mathrm{u}} < \infty$;
5. Sistemas com entradas limitadas e saídas: $\dot{x} = f(x,u)$, $y = h(x,u)$, $\|u(t)\| \leq M_{\mathrm{u}}$, $0 \leq M_{\mathrm{u}} < \infty$.

Sistemas Dinâmicos Autônomos e Não-autônomos

- Quando existe uma Representação em Espaço de Estados para o sistema em que a variável tempo t não aparece explicitamente na equação dinâmica, dizemos que o sistema é *autônomo* ou *invariante no tempo*:

$$\dot{x} = f(x).$$

  Neste caso, a lei acima, que determina o futuro do estado, não muda com o tempo.

- Caso contrário, se

$$\dot{x} = f(t,x) \quad \text{ou} \quad \dot{x} = f(x,u(x,t)) \quad \text{ou} \quad \dot{x} = f(t,x,u(x)),$$

  diz-se que o sistema é *não-autônomo*.

Pontos de Equilíbrio e Linearização I

Definition (Pontos de Equilíbrio)

Dado um sistema dinâmico expresso por

$$\dot{x} = f(t,x),$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq t_0$, um ponto de equilíbrio x_{eq} desse sistema é um vetor constante tal que

$$\dot{x} = f(t,x_{\text{eq}}) = 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Portanto, se o estado inicial coincidir com um ponto ponto de equilíbrio, o estado não evoluirá, i.e. $x(t_0) = x_{\text{eq}} \Rightarrow x(t) = x_{\text{eq}}$, $\forall t \geq t_0$.

Pontos de Equilíbrio e Linearização II

Sem perda de generalidade, poderíamos sempre considerar que $x_{\mathrm{eq}} = 0$.

Para ver isso, suponha que $x_{\mathrm{eq}} \neq 0$. Neste caso podemos usar uma translação de coordenadas $z = x - x_{\mathrm{eq}}$ e escrever:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(t,x), \\
\dot{z} &= \dot{x} = f(t,z + x_{\mathrm{eq}}) \equiv \hat{f}(t,z);
\end{aligned}
$$

tal que $z_{\mathrm{eq}} = 0$ é um ponto de equilíbrio do novo sistema

$$\dot{z} = \hat{f}(t,z).$$

Pontos de Equilíbrio e Linearização III

Considerando que $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $h : X \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ são *funções diferenciáveis*; i.e. $f, h \in \mathcal{C}^1$; o comportamento Linear Local do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \\ y &= h(x,u), \end{aligned}$$

em torno de um ponto de equilíbrio, determinado por $x = x_{\text{eq}}$ e $u = u_{\text{eq}}$, pode ser obtido via expansão das funções não lineares $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$ em *Séries de Taylor*, com truncamento das séries nos termos de ordem 1:

$$\begin{aligned} f(x,u) &\approx f(x_{\text{eq}},u_{\text{eq}}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\text{eq}} \underbrace{(x - x_{\text{eq}})}_{\delta x} + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\text{eq}} \underbrace{(u - u_{\text{eq}})}_{\delta u}, \\ h(x,u) &\approx h(x_{\text{eq}},u_{\text{eq}}) + \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\text{eq}} \underbrace{(x - x_{\text{eq}})}_{\delta x} + \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{\text{eq}} \underbrace{(u - u_{\text{eq}})}_{\delta u}. \end{aligned}$$

Pontos de Equilíbrio e Linearização IV

Na expressão anterior, os termos correspondem a

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_{\text{eq}},u=u_{\text{eq}}} = A;
$$

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x=x_{\text{eq}},u=u_{\text{eq}}} = B;
$$

Pontos de Equilíbrio e Linearização V

e, similarmente,

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\mathrm{eq}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \frac{\partial h_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_{\mathrm{eq}},u=u_{\mathrm{eq}}} = C;$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{\mathrm{eq}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{u_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & \frac{\partial h_p}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x=x_{\mathrm{eq}},u=u_{\mathrm{eq}}} = D.$$

Note que as matrizes A, B, C e D são matrizes constantes, pois seus elementos são funções avaliadas em um ponto de equilíbrio específico em torno do qual a análise está sendo realizada.

Pontos de Equilíbrio e Linearização VI

Neste caso, reescrevendo a equação anterior, temos que

$$\begin{aligned}\dot{x} = f(x,u) &\approx f(x_{\mathrm{eq}},u_{\mathrm{eq}}) + A\delta x + B\delta u,\\ y = h(x,u) &\approx h(x_{\mathrm{eq}},u_{\mathrm{eq}}) + C\delta x + D\delta u.\end{aligned}$$

Reconhecendo que:

- $\frac{d}{dt}(\delta x) = \frac{d}{dt}(x - x_{\mathrm{eq}}) = \frac{d}{dt}(x) = \dot{x}$, pois x_{eq} é uma constante.
- Pela definição de ponto de equilíbrio: $f(x_{\mathrm{eq}},u_{\mathrm{eq}}) \equiv 0$.
- $\delta y = y - y_{\mathrm{eq}} = y - h(x_{\mathrm{eq}},u_{\mathrm{eq}})$.

Podemos ecrever finalmente que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta x) &\approx A\delta x + B\delta u,\\ \delta y &\approx C\delta x + D\delta u,\end{aligned} \tag{1}$$

Pontos de Equilíbrio e Linearização VII

Note que o sistema (1) representa um *Sistema Linear Invariante no Tempo* (SLIT), em relação às chamadas "variáveis desvio":

- Desvio do estado de equilíbrio: δx.
- Desvio da entrada de equilíbrio: δu.
- Desvio da saída observada na condição de equilíbrio: δy.

Neste contexto, é mais fácil entender o significado de "condições iniciais nulas". A propriedade de se ter "condições iniciais nulas", na *Análise Linear Local* de um sistema dinâmico não linear, indica que o sistema encontrava-se inicialmente em equilíbrio:

$$\delta x(t_0) = 0, \delta u(t_0) = 0 \text{ e } \delta y(t_0) = 0.$$

Pontos de Equilíbrio e Linearização VIII

Neste caso, podemos usar a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{\cdot\}$ para obter a Função de Transferência $G(s)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\delta y\} &= Y(s), \\
\mathcal{L}\{\delta u\} &= U(s), \\
Y(s) &= G(s)U(s), \\
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D,
\end{aligned}
$$

em que $s \in \mathbb{C}$, e $G(s)$ é uma matriz de funções racionais da variável escalar s (frequência complexa).

Sistemas Dinâmicos e o Princípio da Superposição

Os Sistemas Dinâmicos Não Lineares (SDNL) são estudados porque todos os sistemas **reais** são não lineares em alguma medida, isto é, **não obedecem** ao *Princípio da Superposição de Efeitos*.

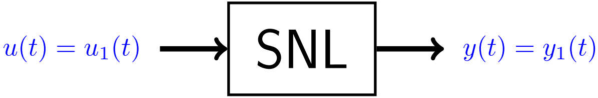


Figura: Sistema Não Linear genérico.

A Superposição de Efeitos é o resultado de se ter as seguintes propriedades simultaneamente satisfeitas:

- Aditividade: $u(t) = u_1(t) + u_2(t) \Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$;
- Homogeneidade: $u(t) = au_1(t) \Rightarrow y(t) = ay_1(t)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Sistemas Dinâmicos e o Princípio da Superposição

Os Sistemas Dinâmicos Não Lineares (SDNL) são estudados porque todos os sistemas **reais** são não lineares em alguma medida, isto é, **não obedecem** ao *Princípio da Superposição de Efeitos*.

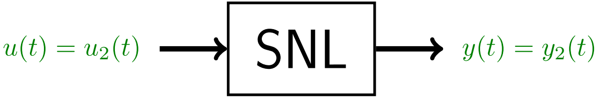


Figura: Sistema Não Linear genérico.

A Superposição de Efeitos é o resultado de se ter as seguintes propriedades simultaneamente satisfeitas:

- Aditividade: $u(t) = u_1(t) + u_2(t) \Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$;
- Homogeneidade: $u(t) = a u_1(t) \Rightarrow y(t) = a y_1(t)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Sistemas Dinâmicos e o Princípio da Superposição

Os Sistemas Dinâmicos Não Lineares (SDNL) são estudados porque todos os sistemas **reais** são não lineares em alguma medida, isto é, **não obedecem** ao *Princípio da Superposição de Efeitos*.

$$u(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{SNL}} \longrightarrow y(t) \neq a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

Figura: Sistema Não Linear genérico.

A Superposição de Efeitos é o resultado de se ter as seguintes propriedades simultaneamente satisfeitas:

- Aditividade: $u(t) = u_1(t) + u_2(t) \Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$;
- Homogeneidade: $u(t) = au_1(t) \Rightarrow y(t) = ay_1(t)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Princípio da Superposição

Note que, de acordo com essa definição, mesmo os Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT) apresentam comportamento "verdadeiramente linear", apenas se considerarmos condições iniciais apropriadas:

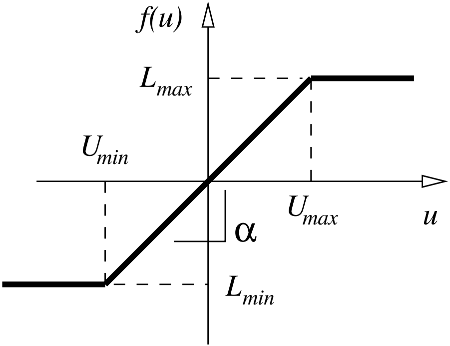
$$\mathrm{LTI} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = Ce^{At}x_0 + C\displaystyle\int_o^t e^{A(t-\tau)}Bu_1(\tau)d\tau + Du_1(t), \\ y_2(t) = Ce^{At}x_0 + C\displaystyle\int_o^t e^{A(t-\tau)}Bu_2(\tau)d\tau + Du_2(t), \end{cases}$$

Se $Ce^{At}x_0 \neq 0$, então a saída devido à soma de duas entradas não corresponderá à soma das saídas devidas a cada uma das entradas:

$$y_1(t) + y_2(t) \neq Ce^{At}x_0 + C\int_o^t e^{A(t-\tau)}B\left[u_1(\tau) + u_2(\tau)\right]d\tau + D\left[u_1(\tau) + u_2(\tau)\right].$$

Não Linearidades Comuns I

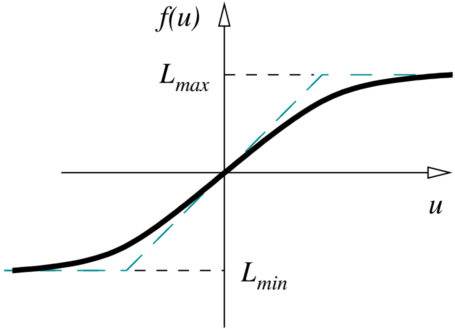
1. Saturação:



Todos os sistemas reais têm limites práticos para os valores de entrada e os de saída. A inclinação $\alpha = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{U_{\max} - U_{\min}}$.

Não Linearidades Comuns II

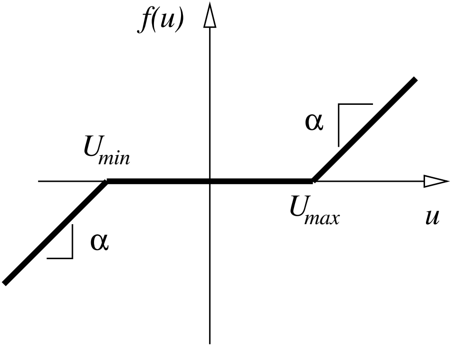
2. Saturação suave (função suave sigmoidal – "na forma de S"; i.e. com derivadas de todas as ordens, que aproxima a função de saturação):



Exemplo: $f(u) = L\tanh(ku)$. Obs.: esta aproximação é frequentemente utilizada quando a diferenciabilidade da função não linear é uma propriedade importante nas provas matemáticas.

Não Linearidades Comuns III

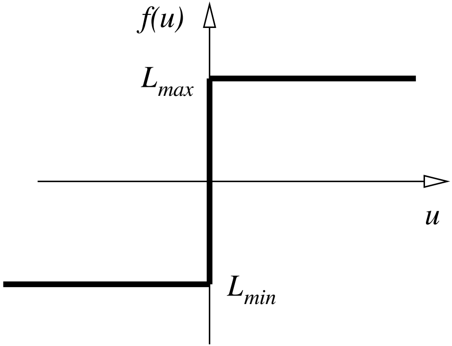
3. Zona Morta:



Observação interessante: $f_{\text{zona morta}}(u) = \alpha u - f_{\text{saturação}}(u)$.

Não Linearidades Comuns IV

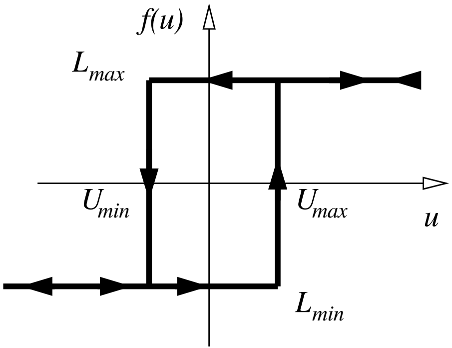
4. *On-Off* ou do tipo Relé:



Observação interessante: $f_{\text{relé}}(u) = f_{\text{saturação}}(u)$ quando $U_{\max} = U_{\min} = 0$, isto é, $\alpha \to \infty$, em que $\alpha = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{U_{\max} - U_{\min}}$.

Não Linearidades Comuns V

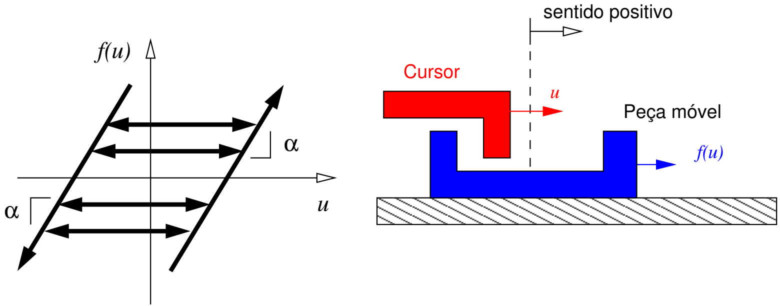
5. Relé com Histerese:



Note que é necessária mais uma variável de "memória" para se conseguir determinar quando haverá a transição do valor negativo para o positivo e vice-versa.

Não Linearidades Comuns VI

6. Folga (*backlash*):

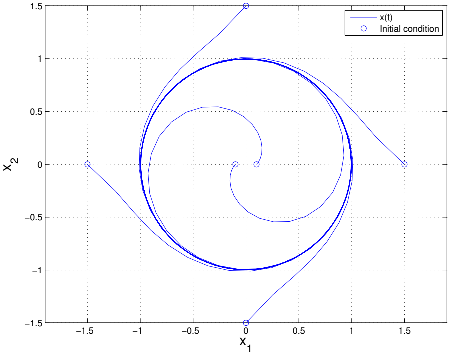


Muito comum em sistemas mecânicos em que são empregadas engrenagens e outros acoplamentos entre partes móveis.

Comportamentos Exclusivamente Não Lineares

- Oscilações periódicas sustentadas (ou Ciclos-limite).

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1-r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \\ \\ x_1 &= r\cos(\theta), \\ x_2 &= r\sin(\theta). \end{cases} \Rightarrow$$



Stable Limit-Cycle

Não importa a condição inicial, o sistema sempre irá exibir uma oscilação periódica com a mesma amplitude e frequência em regime permanente.

Comportamentos Exclusivamente Não Lineares

- Escape em tempo finito.

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = -1.$$

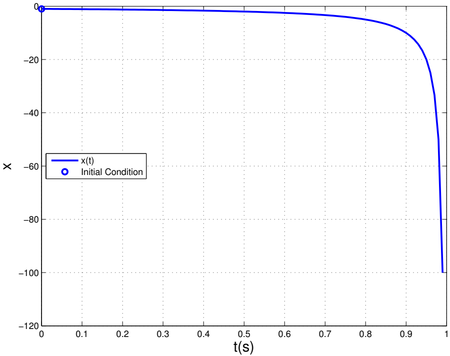
$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{t-1},$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 1} x(t) = -\infty.$$

MATLAB: `Warning: Failure at t=9.999964e-01. Unable to meet integration tolerances without reducing the step size below the smallest value allowed (1.776357e-15) at time t.`

`> In ode45 at 309`

Um dos sinais do sistema diverge (vai para $\pm\infty$) em um intervalo de tempo finito. Por exemplo, isso também ocorre para toda família de sistemas $\dot{x} = cx^m$, $c > 0$, $m > 1$, com m ímpar, para toda condição inicial $x(0) \neq 0$.



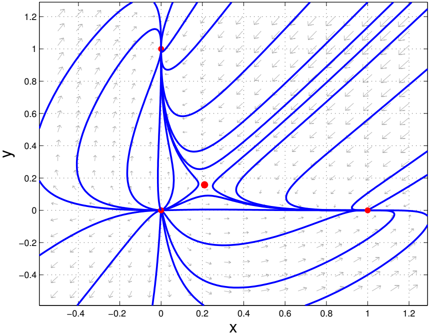
Finite Escape Time

Comportamentos Exclusivamente Não Lineares

- Múltiplas regiões de atração

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0{,}4x(1 - x - 5y), \\ \dot{y} &= 0{,}6y(1 - y - 4x). \end{cases} \Rightarrow$$

Múltiplos comportamentos em regime permanente, dependendo da condição inicial. Neste exemplo, tem-se 2 pontos de equilíbrio estáveis: $(0; 1)$ ou $(1; 0)$. Uma espécie prevalece sobre a outra, dependendo da condição inicial.



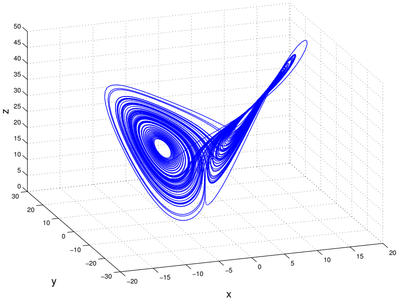
Competing Species

Comportamentos Exclusivamente Não Lineares

- Oscilações não-periódicas sustentadas, com dependência sensível às condições iniciais: Caos.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & 10(y-x), \\ \dot{y} & = & x(28-z)-y, \\ \dot{z} & = & xy-\frac{8}{3}z. \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

"Qual seria a influência do bater de asas de uma borboleta no Brasil em tempestades em Nova York?"



Lorenz System: Chaotic Attractor

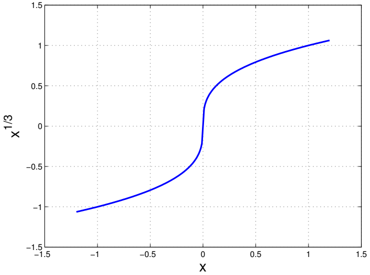
Existência e Unicidade de Soluções I

Sob certas condições, há uma e somente uma trajetória (solução) para um conjunto de equações diferenciais com uma determinada condição inicial. Entretanto, tais condições nem sempre são satisfeitas. Por exemplo, note que

$$\dot{x} = f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x(0) = 0,$$

tem 2 possíveis soluções, igualmente válidas: $x(t) \equiv 0$, e $x(t) = \left(\frac{4}{3}t\right)^{3/4}$.

Gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Note que $\lim_{x\to 0} \frac{df}{dx}(x) \to \infty$ e, portanto, não é diferenciável em $x = 0$, apesar de ser uma função contínua.



Existência e Unicidade de Soluções II

Theorem (Existência e Unicidade Locais: Condições Suficientes)

Seja $f(t,x)$ uma função contínua por partes em t, e **localmente** *Lipschitz em x. Então existe algum valor real $\delta > 0$ tal que a equação difirencial*

$$\dot{x} = f(t,x),$$

com $x(t_0) = x_0$ tem uma única solução no intervalo de tempo $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

Contínua por partes em t significa que há um número finito de descontinuidades isoladas em $f(t,x)$, para cada x fixado, e $t \in [t_0, t_1]$.

Existência e Unicidade de Soluções III

Theorem (Existência e Unicidade Globais: Condições Suficientes)

Seja $f(t,x)$ *uma função contínua por partes em* t, *e* **globalmente** *Lipschitz em relação a* x. *Então a solução da equação difirencial*

$$\dot{x} = f(t,x),$$

com $x(t_0) = x_0$ *existe e é única no intervalo de tempo* $t \in [t_0, t_1]$.

Existência e Unicidade de Soluções IV

O que é a propriedade de ser “Lipschitz contínua”?

- Ser localmente Lispchitz em x significa que,

$$\|f(t,x_{\mathrm{a}}) - f(t,x_{\mathrm{b}})\| \leq L_{x_0}\|x_{\mathrm{a}} - x_{\mathrm{b}}\|, \quad \forall x_{\mathrm{a}}, x_{\mathrm{b}} \in \bar{\mathcal{B}}_r(x_0), \forall t \in [t_0, t_1],$$

  sendo $\bar{\mathcal{B}}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, e $0 < L_{x_0} < \infty$ a chamada constante de Lipschitz, que neste caso é um valor válido somente na vizinhança da condição inicial, vizinhança esta definida pelo conjunto $\bar{\mathcal{B}}_r(x_0)$.

- Ser globalmente Lipschitz em x significa que

$$\|f(t,x_{\mathrm{a}}) - f(t,x_{\mathrm{b}})\| \leq L\|x_{\mathrm{a}} - x_{\mathrm{b}}\|, \quad \forall x_{\mathrm{a}}, x_{\mathrm{b}} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1],$$

  sendo $0 < L < \infty$ a constante de Lipschitz válida $\forall x_{\mathrm{a}}, x_{\mathrm{b}} \in \mathbb{R}^n$.

Existência e Unicidade de Soluções V

$$\mathcal{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$

$$\bar{\mathcal{B}}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

Figura: Bolas aberta e fechada no plano Euclidiano. Estas definições podem ser facilmente estendidas para $\mathbb{R}^n \equiv$ espaço Euclidiano n-dimensional.

Existência e Unicidade de Soluções VI

Note que a propriedade de ser Lispchitz (localmente ou globalmente em x) é muito importante para se ter garantias de existência e unicidade de soluções. Algumas informações importantes sobre esse aspecto são:

1. Função **Localmente Lipschitz** em relação a x: a desigualdade

$$\|f(t,x_{\mathrm{a}}) - f(t,x_{\mathrm{b}})\| \leq L_{x_0}\|x_{\mathrm{a}} - x_{\mathrm{b}}\|$$

   é satisfeita para valores em torno do ponto x_0, para cada t e, por isso, a constante de Lipschitz pode depender do ponto x_0 em particular, mas não depende de t (é uniforme em relação à t).

2. Função **Lipschitz em um conjunto** $W \subseteq \mathbb{R}^n$: a função é localmente Lipschitz para todo ponto $x_0 \in W$, com uma mesma constante L que não depende do ponto x_0.

3. Função **Globalmente Lipschitz**: função Lipschitz em $W \equiv \mathbb{R}^n$.

Existência e Unicidade de Soluções VII

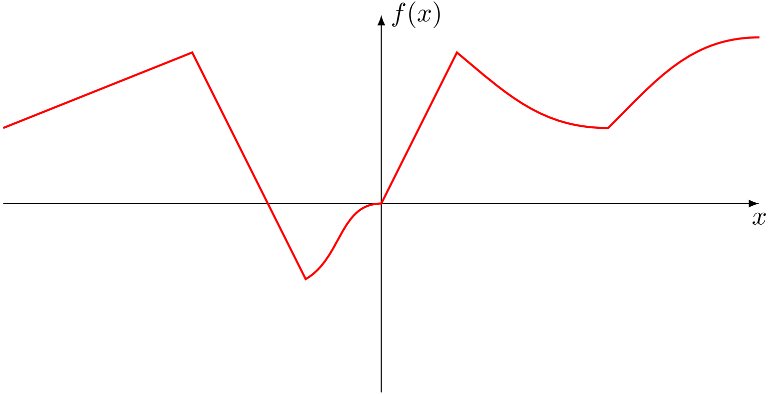
Além disso, deve-se observar que:

- **Ser uma função contínua é condição necessária** para ser localmente Lipschitz.
- **Ser uma função contínua, e diferenciável por partes, com derivadas limitadas em todo o domínio, é condição suficiente** para ser globalmente Lipschitz. No caso em que $x \in \mathbb{R}^n$, a norma[1] da matriz Jacobiana associada ao campo vetorial $f(x)$ deve ser limitada, isto é,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| < \infty.$$

Existência e Unicidade de Soluções VIII

Exemplo de função Lipschitz Contínua não-diferenciável (mas diferenciável por partes, com derivadas limitadas em cada parte):



Existência e Unicidade de Soluções IX

Theorem (Existência e Unicidade Globais: Condições Suficientes usando Conjuntos Compactos Invariantes)

Seja $f(t,x)$ uma função contínua por partes em t, e **localmente** *Lipschitz em relação a x. Seja W um subconjunto compacto de D, tal que $x_0 \in W$, e sabe-se, de alguma forma, que todas as possíveis soluções de*

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

não podem deixar o conjunto W. Então existe uma única solução que é definida $\forall t \geq t_0$.

- No contexto de um Espaço Euclidiano, compacto $\equiv$ limitado () e fechado.
- Aqui se usou o resultado de poder se mostrar que $f(t,x)$ é Lipschitz no conjunto compacto W, se for localmente Lipschitz em $D \supset W$.

Existência e Unicidade de Soluções X

Uma alternativa:

- Pode-se estudar a existência das soluções de EDOs de uma maneira alternativa, investigando a existência e evolução no tempo de limitantes superiores para as normas das soluções procuradas.
- Se for possível mostrar que a norma da solução é limitada durante certo intervalo de tempo, mostra-se que a solução existe durante esse intervalo de tempo.
- Investigar a evolução do limitante superior da norma pode ser mais fácil do que investigar a evolução dos estados na EDO original, pois esse limitante é um escalar, e pode-se fazer uso do chamado *Lema da Comparação*.

[1] Norma Euclidiana, ou outra norma equivalente.

O Lema da Comparação I

Lemma (Lema da Comparação, versão simplificada)

Suponha que se conheça a solução da EDO **escalar**

$$\dot{u} = g(t,u), \quad u(t_0) = u_0 \in W \subseteq \mathbb{R}, \quad t \in [t_0,T),$$

em que $g(t,u)$ é contínua em t, e Lipschitz em $W \subseteq \mathbb{R}$ em relação a u, sendo $[t_0, T)$ o intervalo maximal de existência da solução, a qual não abandona o conjunto $W \subseteq \mathbb{R}$, i.e. $u(t) \in W$, $\forall t \in [t_0,T)$.
Neste caso, se uma outra variável escalar $v(t)$ satisfizer, $\forall v \in W \subseteq \mathbb{R}$,

$$\frac{dv}{dt} = h(t,v) \leq g(t,v), \quad v(t_0) \leq u_0, \quad t \in [t_0,T),$$

então,

$$v(t) \leq u(t), \quad \forall t \in [t_0,T).$$

O Lema da Comparação II

- **Exemplo de utilização.** Considere o sistema:

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

A solução existe e é única em algum intervalo $[0, t_1)$, pois $f(x)$ é localmente Lipschitz em torno da condição inicial. Mas podemos provar que a solução existe para todo $t \geq 0$, apesar de $f(x)$ não ser globalmente Lipschitz:

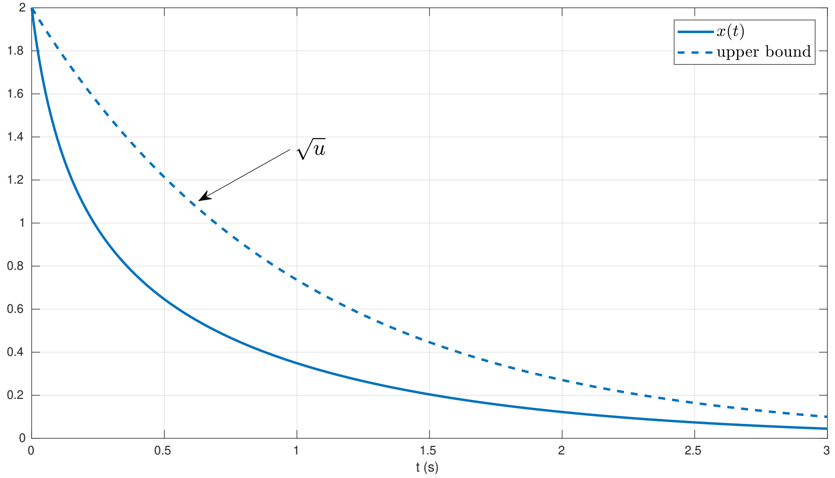
$$v = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 2x\dot{x} = -2x^2 - 2x^4, \quad \frac{dv}{dt} \leq -2v,$$
$$\dot{u} = -2u, \quad u(0) = u_0 = (x_0)^2 \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^{-2t}u_0.$$

E, pelo Lema da Comparação, sabemos que $v(t) \leq u(t)$. Portanto,

$$v(t) \leq u(t) \quad \Rightarrow \quad x^2(t) \leq e^{-2t}(x_0)^2 \quad \Rightarrow \quad |x(t)| \leq e^{-t}|x_0|,$$

e concluímos que a solução de (2) é definida e limitada $\forall t \geq 0$.

O Lema da Comparação III



Referências Bibliográficas

Khalil, H. K. (2002).
Nonlinear Systems.
Prentice Hall, third edition.

Slotine, J.-J. and Li, W. (1990).
Applied Nonlinear Control.
Prentice Hall.

Vidyasagar, M. (1993).
Nonlinear Systems Analysis.
Prentice-Hall International, Inc., second edition.

Mais sobre o Lema da Comparação I

- Em [Khalil, 2002] mostra-se o caso mais geral do *Lema da Comparação* em que $v(t)$ não precisa ser uma função diferenciável, i.e. não está definida $\frac{dv}{dt}$ em todo ponto.
- A condição a ser satisfeita é que sua *derivada superior à direita*, ou derivada de Dini superior à direita, deve ser tal que $D^+v(t) \leq g(t,v(t))$, sendo que

$$D^+v(t) = \limsup_{\delta \to 0^+} \left[\frac{v(t+\delta) - v(t)}{\delta} \right],$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \sup_{|\delta|<\epsilon,\ \delta \neq 0} \left[\frac{v(t+\delta) - v(t)}{\delta} \right] \right\}.$$

Se $v(t)$ é uma função diferenciável, tem-se que

$$D^+v(t^*) = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t^*}.$$

Mais sobre o Lema da Comparação II

- Novamente, se formos capazes de obter a solução de $\dot{u} = g(t,u)$, sendo que

$$D^+v \leq g(t,v)$$

é satisfeita durante o intervalo de existência da solução $u(t)$, então ainda teremos

$$v(t) \leq u(t).$$