

ELT072 – Introdução ao Controle Automático de Aeronaves Bloco 4

Prof. Leo Torres

Abril, 2024

Conteúdo

1 Estabilidade Estática

2 Estabilidade Dinâmica

- Análise Linear Local
- Matriz de Sensibilidade Modal



Section 1

Estabilidade Estática



Section 2

Estabilidade Dinâmica

Estabilidade Dinâmica I

- Para analisar a **resposta dinâmica** da aeronave em torno de uma condição de equilíbrio de voo, vamos considerar o modelo completo de corpo rígido, porém desconsiderando as variáveis associadas às posições Norte e Leste, e lembrando que a altitude $h = -p_D$:

$$\begin{aligned}\dot{h} &= U \sin \theta - V \sin \phi \cos \theta - W \cos \phi \cos \theta, \\ \dot{\phi} &= P + Q \tan \theta \sin \phi + R \tan \theta \cos \phi, \\ \dot{\theta} &= Q \cos \phi - R \sin \phi, \\ \dot{\psi} &= Q(\sin \phi)/(\cos \theta) + R(\cos \phi)/(\cos \theta), \\ \dot{U} &= RV - QW + F_x/m, \\ \dot{V} &= -RU + PW + F_y/m, \\ \dot{W} &= QU - PV + F_z/m, \\ \Gamma \dot{P} &= J_{xz} [J_x - J_y + J_z] PQ + \\ &\quad - [J_z (J_z - J_y) + J_{xz}^2] QR + J_z M_x + J_{xz} M_z, \\ J_y \dot{Q} &= (J_z - J_x) PR - J_{xz} (P^2 - R^2) + M_y, \\ \Gamma \dot{R} &= [J_x (J_x - J_y) + J_{xz}^2] PQ + \\ &\quad - J_{xz} [J_x - J_y + J_z] QR + J_{xz} M_x + J_x M_z.\end{aligned}\tag{1}$$

Estabilidade Dinâmica II

- Alternativamente, usando V_T , α e β ao invés de U, V e W :

$$\begin{aligned}
 \dot{h} &= V_T (\cos \alpha \cos \beta \sin \theta - \sin \beta \sin \phi \cos \theta \\
 &\quad - \sin \alpha \cos \beta \cos \phi \cos \theta), \\
 \dot{\phi} &= P + Q \tan \theta \sin \phi + R \tan \theta \cos \phi, \\
 \dot{\theta} &= Q \cos \phi - R \sin \phi, \\
 \dot{\psi} &= Q(\sin \phi)/(\cos \theta) + R(\cos \phi)/(\cos \theta), \\
 \dot{V}_T &= \frac{1}{m} [T_{\text{prop}} \cos(\alpha + \alpha_T) \cos \beta - D] + g_1, \\
 \dot{\alpha} &= [-T_{\text{prop}} \sin(\alpha + \alpha_T) - L] / (m V_T \cos \beta) + \\
 &\quad g_3 / (V_T \cos \beta) + Q_W / (\cos \beta), \\
 \dot{\beta} &= [-T_{\text{prop}} \cos(\alpha + \alpha_T) \sin \beta - C] / (m V_T) \\
 &\quad + g_2 / (V_T) - R_W, \\
 \Gamma \dot{P} &= J_{xz} [J_x - J_y + J_z] PQ + \\
 &\quad - [J_z (J_z - J_y) + J_{xz}^2] QR + J_z M_x + J_{xz} M_z, \\
 J_y \dot{Q} &= (J_z - J_x) PR - J_{xz} (P^2 - R^2) + M_y, \\
 \Gamma \dot{R} &= [J_x (J_x - J_y) + J_{xz}^2] PQ + \\
 &\quad - J_{xz} [J_x - J_y + J_z] QR + J_{xz} M_x + J_x M_z.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Visão Geral do Problema I

- Note que as equações (1), ou equivalentemente (2), quando consideramos as expressões das Forças e Momentos (variáveis em cor azul), discutidas anteriormente, podem ser representadas por uma única equação vetorial do modelo completo:

$$\dot{\vec{x}} = F_c \left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{u} \right) \quad (3)$$

em que os estados (o vetor de estados) são:

1 $\vec{x} = [h \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad U \quad V \quad W \quad P \quad Q \quad R]^\top$, ou

2 $\vec{x} = [h \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad V_T \quad \alpha \quad \beta \quad P \quad Q \quad R]^\top$,

e as entradas (variáveis manipuladas) são:

$$\vec{u} = [\delta_e \quad \delta_a \quad \delta_r \quad \delta_t]^\top.$$

Visão Geral do Problema II

- Além disso, é usual representarmos os sinais medidos, que posteriormente serão usados pelos controladores automáticos em malha fechada, como

$$\vec{y} = H_c(\vec{x}, \vec{u}) \quad (4)$$

Por exemplo, se formos capazes de medir a pressão dinâmica $\bar{q}$ (e.g. usando um Tubo de Pitot), a velocidade angular de rolamento P (e.g. usando um girômetro), e a deflexão dos ailerons δ_a , então $\vec{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T \in \mathbb{R}^3$:

$$y_1 = H_1(\vec{x}, \vec{u}) = \frac{1}{2} \rho(h) V_T^2 = H_1(x_1, x_5),$$

$$y_2 = H_2(\vec{x}, \vec{u}) = P = H_2(x_8),$$

$$y_3 = H_3(\vec{x}, \vec{u}) = \delta_a = H_3(u_2).$$

Visão Geral do Problema III

- A presença de $\dot{\vec{x}}$ no lado direito de (3) se deve à possível dependência das forças e momentos aerodinâmicos de $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$, quando se quer capturar fenômenos aerodinâmicos transitórios.
- Para analisar a estabilidade dinâmica da aeronave, vamos considerar o comportamento dinâmico em torno de condições de equilíbrio de voo, a partir de aproximações lineares.

Subsection 1

Análise Linear Local

Condição de Voo de Equilíbrio I

- Por definição, a **Condição de Equilíbrio de Voo** (também conhecida como *condição de Trimagem*) corresponde a uma situação em que, com as entradas mantidas constantes, as variáveis de estado permanecem constantes, isto é, a partir de (3):

$$0 = F_c(\vec{x}^{\text{eq}}, 0, \vec{u}^{\text{eq}}) \quad (5)$$

em que

- 1 $\vec{x}^{\text{eq}}$ é o vetor de estados constante da condição de equilíbrio.
- 2 $\vec{u}^{\text{eq}}$ é o vetor de deflexões de superfícies e comando de tração constantes da condição de equilíbrio.

Condição de Voo de Equilíbrio II

- Note que (5) corresponde à resolução de um conjunto de equações algébricas não lineares, em que

$$\vec{x}^{\text{eq}} \in \mathbb{R}^n, \quad n = 10,$$

$$\vec{u}^{\text{eq}} \in \mathbb{R}^m, \quad m = 4,$$

e o número de equações é igual a n . Isto é, o número $n + m$ de variáveis a se determinar é maior do que o número n de equações que devem ser satisfeitas.

Condição de Voo de Equilíbrio III

- Portanto, o problema de encontrar uma condição de equilíbrio pode ter ou não uma solução, e se tiver solução, poderá haver infinitas soluções.

Para ver como isto é possível fisicamente, considere as situações-exemplo:

- Para uma mesma altitude, podemos ter um ângulo de ataque maior ou menor, com uma força propulsiva correspondente maior ou menor para vencer o arrasto, dependendo da velocidade V_T , isto é, a solução de (5) não é única.
- Para velocidade $V_T = 0$, e altitude $h = 1$ km, pode não ser possível manter a aeronave nesta condição de voo pairado (e.g. aeronave de asas fixas, com força propulsiva menor do que a força peso). Neste caso, portanto, não existiria solução para (5).

Condição de Voo de Equilíbrio IV

Do ponto de vista computacional, a solução de (5) pode ser buscada por meio da resolução de um **Problema de Otimização**, com restrições de igualdade e de desigualdade associadas à condição de equilíbrio buscada:

$$(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}}) = \arg \min_{\vec{x}, \vec{u}} \|F_c(\vec{x}, 0, \vec{u})\|^2$$

S.t.: (e.g. voo reto e nivelado para altitude e velocidade escolhidas)

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \text{const.}, \\ \phi = 0, \\ -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}, \\ -\pi < \psi \leq \pi, \\ V_T = \text{const.}, \\ -\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}, \\ \beta = 0, \\ P = 0, Q = 0, R = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_e^{\min} \leq \delta_e \leq \delta_e^{\max}, \\ \delta_a^{\min} \leq \delta_a \leq \delta_a^{\max}, \\ \delta_r^{\min} \leq \delta_r \leq \delta_r^{\max}, \\ \delta_t^{\min} \leq \delta_t \leq \delta_t^{\max}. \end{array} \right.$$

Condição de Voo de Equilíbrio V

O problema de otimização apresentado no slide anterior pode ser resolvido usando uma série de algoritmos diferentes [2, 3, 4, 5], vários deles implementados em pacotes de cálculo numérico bem conhecidos, como

- MATLAB:
 - trim ([link](#)).
 - findop ([link](#)).
 - Steady State Manager.
- Python ([Control Systems Library](#)):
 - find_eqpt ([link](#)).

Condição de Voo de Equilíbrio VI

Uma vez determinada a condição de equilíbrio $(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}})$, a ela corresponderá um conjunto de sinais medidos, que também serão constantes ao longo do tempo, dados por:

$$\vec{y}^{\text{eq}} = H(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}}) \quad (6)$$

Análise Linear Local I

- Suponha que tenha sido encontrada uma condição de equilíbrio que satisfaça (5).
- Para analisar a estabilidade dinâmica da aeronave para pequenos desvios desta condição, vamos definir **variáveis “desvio da condição de equilíbrio”**:

$$\begin{aligned}\delta \vec{x} &= \vec{x} - \vec{x}^{\text{eq}}, \\ \delta \vec{u} &= \vec{u} - \vec{u}^{\text{eq}},\end{aligned}$$

de forma que, a evolução do desvio dos estados de sua condição de equilíbrio pode ser investigada a partir de

$$\frac{d}{dt}(\delta \vec{x}) = \frac{d}{dt}(\vec{x} - \vec{x}^{\text{eq}}) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}}.$$

Análise Linear Local II

- Portanto, a partir de (3), temos que

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{x}) = F_c \left(\delta\vec{x} + \vec{x}^{\text{eq}}, \frac{d}{dt}(\delta\vec{x}), \delta\vec{u} + \vec{u}^{\text{eq}} \right),$$

e isto nos permite usar a expansão em Série de Taylor da função vetorial $F_c(\cdot)$, truncando a mesma até os termos lineares, assumindo que $\delta\vec{x}$ e $\delta\vec{u}$ são pequenos desvios, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta\vec{x}) \approx F_c(\vec{x}^{\text{eq}}, 0, \vec{u}^{\text{eq}}) + \\ \left. \frac{\partial F_c}{\partial \vec{x}} \right|_{\text{eq}} \delta\vec{x} + \left. \frac{\partial F_c}{\partial \dot{\vec{x}}} \right|_{\text{eq}} \left[\frac{d}{dt}(\delta\vec{x}) \right] + \left. \frac{\partial F_c}{\partial \vec{u}} \right|_{\text{eq}} \delta\vec{u}. \end{aligned}$$

Análise Linear Local III

- Portanto, a partir de (3), temos que

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{x}) = F_c \left(\delta\vec{x} + \vec{x}^{\text{eq}}, \frac{d}{dt}(\delta\vec{x}), \delta\vec{u} + \vec{u}^{\text{eq}} \right),$$

e isto nos permite usar a expansão em Série de Taylor da função vetorial $F_c(\cdot)$, truncando a mesma até os termos lineares, assumindo que $\delta\vec{x}$ e $\delta\vec{u}$ são pequenos desvios, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta\vec{x}) \approx & \cancel{F_c(\vec{x}^{\text{eq}}, 0, \vec{u}^{\text{eq}})} \overset{0 \text{ (por definição)}}{+} \\ & \underbrace{\left. \frac{\partial F_c}{\partial \vec{x}} \right|_{\text{eq}}}_{\bar{A}} \delta\vec{x} + \underbrace{\left. \frac{\partial F_c}{\partial \dot{\vec{x}}} \right|_{\text{eq}}}_{\bar{E}} \left[\frac{d}{dt}(\delta\vec{x}) \right] + \underbrace{\left. \frac{\partial F_c}{\partial \vec{u}} \right|_{\text{eq}}}_{\bar{B}} \delta\vec{u}. \end{aligned}$$

Análise Linear Local IV

- Consequentemente,

$$\underbrace{(\mathbb{1} - \bar{E})}_E \frac{d}{dt} (\delta \vec{x}) \approx \bar{A} \delta \vec{x} + \bar{B} \delta \vec{u},$$
$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{x}) \approx \underbrace{(E^{-1} \bar{A})}_A \delta \vec{x} + \underbrace{(E^{-1} \bar{B})}_B \delta \vec{u},$$

e tem-se um **Modelo Linear e Invariante no Tempo** para descrever como o desvio da Condição de Voo de Equilíbrio evolui ao longo do tempo:

$$\frac{d}{dt} (\delta \vec{x}) \approx A \delta \vec{x} + B \delta \vec{u} \quad (7)$$

Análise Linear Local V

De forma semelhante, considerando os valores constantes de equilíbrio para os sinais medidos dados por (6), podemos escrever que

$$\begin{aligned}\delta \vec{y} &= \vec{y} - \vec{y}^{\text{eq}}, \\ &= H_c(\vec{x}, \vec{u}) - \vec{y}^{\text{eq}}, \\ &\approx \underbrace{H_c(\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}^{\text{eq}})}_C + \underbrace{\frac{\partial H_c}{\partial \vec{x}} \bigg|_{\text{eq}}}_{D} \delta \vec{x} + \underbrace{\frac{\partial H_c}{\partial \vec{u}} \bigg|_{\text{eq}}}_{D} \delta \vec{u} - \vec{y}^{\text{eq}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta \vec{y} \approx C \delta \vec{x} + D \delta \vec{u} \quad (8)$$

Análise Linear Local VI

Algumas observações:

- 1 Note que se supôs que a matriz $E = \mathbb{1} - \bar{E}$ seja invertível. Isto é razoável para aeronaves, pois é comum ter-se $\bar{E} \approx 0$, de modo que $E \approx \mathbb{1}$.
- 2 As matrizes constantes obtidas anteriormente são dadas por:

$$\left. \frac{\partial F_c}{\partial \vec{x}} \right|_{\text{eq}} = \bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{c,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{c,1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{c,1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_{c,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{c,2}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{c,2}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{c,n}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{c,n}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{c,n}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$\vec{x} = \vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u} = \vec{u}^{\text{eq}}$

Análise Linear Local VII

$$\left. \frac{\partial F_c}{\partial \vec{u}} \right|_{\text{eq}} = \bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{c,1}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{c,1}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_{c,1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_{c,2}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{c,2}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_{c,2}}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{c,n}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{c,n}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_{c,n}}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\vec{x}=\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}=\vec{u}^{\text{eq}}} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

$$\left. \frac{\partial F_c}{\partial \dot{\vec{x}}} \right|_{\text{eq}} = \bar{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{c,1}}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_{c,1}}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial F_{c,1}}{\partial \dot{x}_n} \\ \frac{\partial F_{c,2}}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_{c,2}}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial F_{c,2}}{\partial \dot{x}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{c,n}}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_{c,n}}{\partial \dot{x}_2} & \cdots & \frac{\partial F_{c,n}}{\partial \dot{x}_n} \end{bmatrix}_{\vec{x}=\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}=\vec{u}^{\text{eq}}} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Análise Linear Local VIII

$$\left. \frac{\partial H_c}{\partial \vec{x}} \right|_{\text{eq}} = C = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{c,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial H_{c,1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial H_{c,1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial H_{c,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial H_{c,2}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial H_{c,2}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{c,p}}{\partial x_1} & \frac{\partial H_{c,p}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial H_{c,p}}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\vec{x}=\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}=\vec{u}^{\text{eq}}} \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

$$\left. \frac{\partial H_c}{\partial \vec{u}} \right|_{\text{eq}} = D = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{c,1}}{\partial u_1} & \frac{\partial H_{c,1}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial H_{c,1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial H_{c,2}}{\partial u_1} & \frac{\partial H_{c,2}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial H_{c,2}}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{c,p}}{\partial u_1} & \frac{\partial H_{c,p}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial H_{c,p}}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\vec{x}=\vec{x}^{\text{eq}}, \vec{u}=\vec{u}^{\text{eq}}} \in \mathbb{R}^{p \times m}.$$

Análise Linear Local IX

- 3 Todas as derivadas parciais necessárias para se obter as matrizes $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{E}$, C e D são elas mesmas funções dos estados e das entradas, mas estamos interessados somente nos seus valores especificamente na Condição de Voo sob análise, isto é, quando $\vec{x} = \vec{x}^{eq}$ e $\vec{u} = \vec{u}^{eq}$. Por isso as matrizes são constantes.
- 4 É possível obter o Modelo Linear Local, formado por (7) e (8), por meio de procedimentos numéricos que estimem as derivadas parciais na condição de equilíbrio:
 - No MATLAB, por exemplo, é possível linearizar um sistema dinâmico não linear que esteja representado no ambiente Simulink, usando a ferramenta “[Model Linearizer](#)”. Para saber mais sobre o algoritmo usado pelo MATLAB, veja [este artigo](#).
 - Em Python, existe a biblioteca [Python Control Systems Toolbox](#), que contém a função “[linearize](#)”.

Modelo Linear Local: Resposta Temporal I

- A partir da equação (7), que descreve como os desvios da Condição de Voo de Equilíbrio evoluem aproximadamente ao longo do tempo, sabemos que (verifique que esta é a solução da equação):

$$\delta \vec{x}(t) \approx e^{At} \delta \vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta \vec{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (9)$$

em que $\delta \vec{x}(0)$ é o desvio inicial da Condição de Voo de Equilíbrio, e a matriz resultante da operação exponencial é dada por:

$$e^{At} = \mathbb{1} + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots \quad (10)$$

Modelo Linear Local: Resposta Temporal II

- Note que a exponencial de matriz acima é uma generalização da definição usual para uma variável escalar. Isto é, para $At = at \in \mathbb{R}$:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots$$

- De fato, a exponencial de matriz conta com as seguintes propriedades “esperadas” (cuidado, nem todas as propriedades são tão semelhantes):

1 $e^{At}|_{t=0} = e^{(0_{n \times n})} = \mathbb{1}.$

2 $[e^{At}]^{-1} = e^{-At} \Leftrightarrow e^{At}e^{-At} = e^{-At}e^{At} = \mathbb{1}.$

3 $\frac{d}{dt}(e^{At}) = A + A^2t + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^kt^{k-1} + \cdots = Ae^{At} = e^{At}A.$

Modelo Linear Local: Resposta Temporal III

- A partir da expressão (9), podemos determinar a evolução dos desvios dos sinais medidos de seus valores de equilíbrio, usando (8), para todo $t \geq 0$:

$$\delta \vec{y}(t) \approx C e^{At} \delta \vec{x}(0) + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \delta \vec{u}(\tau) d\tau + D \delta \vec{u} \quad (11)$$

Note que, considerando a resposta ao impulso para condições iniciais nulas como $\mathcal{H}(t) = C e^{At} B + D \delta_{\text{dirac}}(t)$, a expressão acima corresponde à

$$\delta \vec{y}(t) \approx C e^{At} \delta \vec{x}(0) + \mathcal{H}(t) * \delta \vec{u}(t),$$

em que $*$ representa a operação de convolução de dois sinais.

Análise de Estabilidade I

- Observe que o desvio $\delta\vec{x}(t)$ em (9) pode convergir para um valor constante ou divergir, dependendo das características da matriz A , devido à exponencial em (10):

- Se $\delta\vec{u}(t) = 0$, então

$$\delta\vec{x}(t) \approx e^{At} \delta\vec{x}(0),$$

e a exponencial determinará a convergência ou divergência da **resposta natural** da aeronave a partir de desvios iniciais não nulos da condição de equilíbrio: $\delta\vec{x}(0) \neq 0$.

- Se $\delta\vec{x}(0) = 0$ e $\delta\vec{u}(t)$ é uma variação de amplitude limitada (e.g. um degrau, ou um pulso), então

$$\delta\vec{x}(t) \approx e^{At} \left[\int_0^t e^{-A\tau} B \delta\vec{u}(\tau) d\tau \right],$$

e a exponencial determinará a divergência ou convergência da **resposta forçada** da aeronave.

Análise de Estabilidade II

- Para ver isto com mais clareza, vamos considerar um caso mais simples em que a matriz A seja diagonalizável, isto é,

$$AV = V\Lambda \quad \Leftrightarrow \quad A = V\Lambda V^{-1},$$

em que

- A matriz Λ é formada pelos **autovalores** de A :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n.$$

- A matriz V tem como suas colunas os **autovetores** de A :

$$V = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n], \quad \vec{v}_i \in \mathbb{C}^n, i = 1, 2, \dots, n.$$

Análise de Estabilidade III

- A equação $AV = V\Lambda$ é equivalente a:

$$A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix},$$
$$A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sendo a última expressão uma consequência direta da definição de autovalores λ_i e de seus correspondentes autovetores $\vec{v}_i$.

Análise de Estabilidade IV

- Neste caso, ao assumirmos que é possível encontrar um conjunto de n autovetores L.I. (Linearmente Independentes), a matriz V^{-1} existe (pois $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem n colunas L.I.), e temos que

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

$$A^2 = V\Lambda V^{-1}V\Lambda V^{-1} = V\Lambda^2 V^{-1},$$

$$A^3 = A^2 A = V\Lambda^2 V^{-1}V\Lambda V^{-1} = V\Lambda^3 V^{-1},$$

$$\vdots$$

$$A^k = V\Lambda^k V^{-1}.$$

Análise de Estabilidade V

Portanto, a expressão (10) da exponencial de matriz se torna

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathbb{1} + V\Lambda tV^{-1} + \frac{1}{2}V\Lambda^2 t^2 V^{-1} + \dots \\ &= V \left[\mathbb{1} + \Lambda t + \frac{1}{2}\Lambda^2 t^2 + \dots \right] V^{-1}, \\ e^{At} &= V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V^{-1}, \end{aligned}$$

de forma que $e^{At} \rightarrow 0$ se todos os autovalores de A tiverem parte real negativa (pois $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ nesse caso, para cada $\lambda_i \in \mathbb{C}$). Se algum autovalor tiver parte real positiva, $\|e^{At}\| \rightarrow \infty$.



Análise de Estabilidade VI

Embora esse seja um caso em particular, quando a matriz A é diagonalizável (bastante comum, diga-se de passagem), é possível mostrar que a conclusão abaixo é geral para todo caso:

- **A Aeronave será estável**, no sentido de que desvios $\delta \vec{x}(t)$ dos estados de sua Condição de Equilíbrio de Voo convergirão para zero quando $\delta \vec{u}(t) = 0$, ou convergirão para valores constantes para desvios da entrada de equilíbrio $\delta \vec{u}(t) \neq 0$ limitados em amplitude, **se todos os autovalores da matriz A tiverem parte real estritamente negativa**.
- **Se algum autovalor de A tiver parte real positiva, a Aeronave será instável** naquela Condição de Voo de Equilíbrio.

Análise de Estabilidade VII

- É importante notar que, **caso algum autovalor de A tenha parte real zero**, mesmo que todos os outros autovalores de A tenham parte real negativa, a linearização do comportamento dinâmico da Aeronave não será suficiente para determinar a estabilidade da Condição de Voo de Equilíbrio, do ponto de vista teórico.

Entretanto, em geral esse caso é tratado como uma situação tão indesejada quanto a de instabilidade garantida pela existência de um autovalor com parte real positiva, tendo em vista a falta de garantia de estabilidade para o comportamento linear local.



Subsection 2

Matriz de Sensibilidade Modal

Autovalores: Modos de Resposta

- Note que a matriz de autovetores V associada aos autovalores da matriz A ,

$$V = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n], \quad \vec{v}_i \in \mathbb{C}^n, i = 1, 2, \dots, n,$$

supondo que é possível encontrar n autovetores L.I., pode ser usada para se obter uma representação bastante interessante da dinâmica linear local:

$$\delta \vec{x} = V \vec{z}, \quad \vec{z} = V^{-1} \delta \vec{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{z}} \approx V^{-1} \frac{d}{dt} (\delta \vec{x}), \\ \approx V^{-1} A \delta \vec{x} + V^{-1} B \delta \vec{u}, \\ \approx V^{-1} A V \vec{z} + V^{-1} B \delta \vec{u}. \end{cases}$$

Como $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = V^{-1} A V$, isto significa que

$$\dot{\vec{z}} \approx \Lambda \vec{z} + V^{-1} B \vec{u} \quad (12)$$

Section 3

Apêndice

Prova da expressão para a resposta de um SLIT I

Vamos mostrar que, se

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{x}) \approx A\delta\vec{x} + B\delta\vec{u}, \quad \delta\vec{x}(0) = \delta\vec{x}_0,$$

então

$$\delta\vec{x}(t) \approx e^{At}\delta\vec{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta\vec{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

- 1** Para $t = 0$, veja que $\delta\vec{x}(0) = e^{A \cdot 0}\delta\vec{x}_0 = \mathbb{1}\delta\vec{x}_0 = \delta\vec{x}_0$.
- 2** Considere que $\delta\vec{x}(t)$ pode ser escrita como

$$\delta\vec{x}(t) \approx e^{At}\delta\vec{x}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B \delta\vec{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Prova da expressão para a resposta de um SLIT II

A partir da expressão anterior, a derivada temporal da resposta satisfaz:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta\vec{x}(t)) &\approx Ae^{At}\delta\vec{x}_0 + Ae^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B \delta\vec{u}(\tau) d\tau \\ &\quad + e^{At} [e^{-At} B \delta\vec{u}(t)], \\ &\approx A\delta\vec{x}(t) + B\vec{u}(t).\end{aligned}$$

E, portanto, a resposta apresentada é a solução da equação diferencial $\frac{d}{dt}(\delta\vec{x}) \approx A\delta\vec{x} + B\delta\vec{u}$, com $\delta\vec{x}(0) = \delta\vec{x}_0$.

Section 4

Bibliografia

Bibliografia I



Wayne Durham.

Aircraft flight dynamics and control.

John Wiley & Sons, Ltd., 2013.



R. Fletcher.

Practical Methods of Optimization: Unconstrained Optimization,
volume 1.

John Wiley & Sons, 1980.



R. Fletcher.

Practical Methods of Optimization: Constrained Optimization,
volume 2.

John Wiley & Sons, 1981.

Bibliografia II



William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery.

Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing.
Cambridge University Press, 2002.



Jaime A. Ramírez, Felipe Campelo, Frederico G. Guimarães, Lucas S. Batista, and Ricardo H. C. Takahashi.

ELE037 Otimização: Notas de Aula.
online, 2018.
([link](#)).



Brian L. Stevens, Frank L. Lewis, and Eric N. Johnson.

Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems.
John Wiley & sons, Inc., 2016.