

ELT072 – Introdução ao Controle Automático de Aeronaves

Bloco 2

Prof. Leo Torres

March, 2024

Conteúdo

- 1 Referenciais e Matrizes de Rotação**
- 2 Cinemática de Corpos Rígidos**
- 3 Dinâmica de Corpos Rígidos**
- 4 Modelo Matemático de uma Aeronave**
- 5 Bibliografia**

Section 1

Referenciais e Matrizes de Rotação

Referenciais em Engenharia Aeroespacial

- Como vimos anteriormente, há um número significativo de referenciais usados em Engenharia Aeroespacial. Alguns deles são:
 - 1 ECI (Earth-Centered-Inertial),
 - 2 ECEF (Earth-Centered Earth-Fixed),
 - 3 NED (North-East-Down) e seus derivados: TP (Tangent Plane) e LVLH (Local-Vertical Local-Horizontal),
 - 4 FRD (Forward-Right-Down),
 - 5 W (Wind),
 - 6 S (Stability), e
 - 7 RE (Referencial Estrutural).
- Essa profusão de referenciais se deve à facilidade de se representar certas grandezas vetoriais (posição, velocidade, aceleração, forças e momentos) em um dado referencial específico.
- Entretanto, precisamos saber representar a mesma grandeza vetorial em qualquer referencial para sermos capazes de relacioná-las.

Usando Diferentes Referenciais

Aqui vemos dois possíveis referenciais ortonormais, com a mesma origem, que podem ser usados para descrever o mesmo vetor $\vec{v}$:

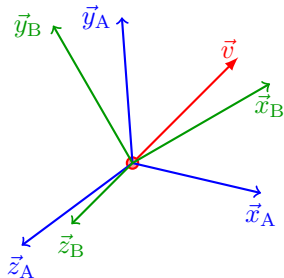
$$\vec{v} = v_{x,A} \vec{x}_A + v_{y,A} \vec{y}_A + v_{z,A} \vec{z}_A,$$

$$\vec{v} = v_{x,B} \vec{x}_B + v_{y,B} \vec{y}_B + v_{z,B} \vec{z}_B,$$

de modo que podemos definir

$$\mathbf{v}^A = \begin{bmatrix} v_{x,A} \\ v_{y,A} \\ v_{z,A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^B = \begin{bmatrix} v_{x,B} \\ v_{y,B} \\ v_{z,B} \end{bmatrix},$$

como as representações de $\vec{v}$ nos referenciais A e B , respectivamente.



Usando Diferentes Referenciais

Vamos definir “vetrizes”, i.e. matrizes de vetores [1]:

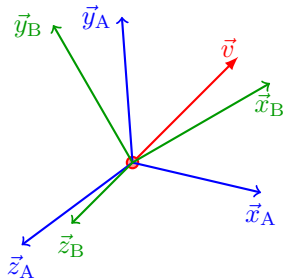
$$\vec{\mathcal{F}}_A = \begin{bmatrix} \vec{x}_A & \vec{y}_A & \vec{z}_A \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathcal{F}}_B = \begin{bmatrix} \vec{x}_B & \vec{y}_B & \vec{z}_B \end{bmatrix},$$

de modo que podemos dizer, de forma compacta, que

$$\vec{v} = \vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A = \begin{bmatrix} \vec{x}_A & \vec{y}_A & \vec{z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x,A} \\ v_{y,A} \\ v_{z,A} \end{bmatrix},$$

$$\vec{v} = \vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{v}^B = \begin{bmatrix} \vec{x}_B & \vec{y}_B & \vec{z}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x,B} \\ v_{y,B} \\ v_{z,B} \end{bmatrix}.$$



Matriz de Cossenos Diretores – DCM I

- Para relacionar as diferentes representações $\mathbf{v}^A$ e $\mathbf{v}^B$ do mesmo vetor $\vec{v}$, note que cada vetor em $\vec{\mathcal{F}}_B$ pode ser representado por uma combinação linear de vetores em $\vec{\mathcal{F}}_A$, isto é:

$$\vec{x}_B = C_{x,x,A/B} \vec{x}_A + C_{x,y,A/B} \vec{y}_A + C_{x,z,A/B} \vec{z}_A,$$

$$\vec{y}_B = C_{y,x,A/B} \vec{x}_A + C_{y,y,A/B} \vec{y}_A + C_{y,z,A/B} \vec{z}_A,$$

$$\vec{z}_B = C_{z,x,A/B} \vec{x}_A + C_{z,y,A/B} \vec{y}_A + C_{z,z,A/B} \vec{z}_A.$$

em que os coeficientes $C_{i,j,A/B}$, com $i,j \in \{x,y,z\}$, devem ser determinados para indicar como $\vec{\mathcal{F}}_B$ pode ser representada por $\vec{\mathcal{F}}_A$.

Matriz de Cossenos Diretores – DCM II

- Como os vetores que formam $\vec{\mathcal{F}}_A$ são ortogonais e têm norma unitária, conseguimos encontrar qualquer um dos coeficientes acima usando um produto interno apropriado. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 C_{y,z,A/B} &= \vec{z}_A^\top \vec{y}_B = \vec{z}_A^\top [C_{y,x,A/B} \vec{x}_A + C_{y,y,A/B} \vec{y}_A + C_{y,z,A/B} \vec{z}_A], \\
 &= C_{y,x,A/B} \vec{z}_A^\top \vec{x}_A + C_{y,y,A/B} \vec{z}_A^\top \vec{y}_A + C_{y,z,A/B} \vec{z}_A^\top \vec{z}_A, \\
 &= \|\vec{z}_A\| \|\vec{y}_B\| \cos(\theta_{z_A, y_B}) = \cos(\theta_{z_A, y_B}).
 \end{aligned}$$

Note que isto pode ser feito para se encontrar todos os coeficientes $C_{i,j,A/B}$, com $i,j \in \{x,y,z\}$. Portanto, todos os coeficientes são **cossenos** de ângulos entre um vetor do referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$ e outro vetor do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$.

Matriz de Cossenos Diretores – DCM III

- De forma compacta, temos que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{x}_B & \vec{y}_B & \vec{z}_B \end{bmatrix}}_{\vec{F}_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{x}_A & \vec{y}_A & \vec{z}_A \end{bmatrix}}_{\vec{F}_A} \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{x}_A^\top \vec{x}_B & \vec{x}_A^\top \vec{y}_B & \vec{x}_A^\top \vec{z}_B \\ \vec{y}_A^\top \vec{x}_B & \vec{y}_A^\top \vec{y}_B & \vec{y}_A^\top \vec{z}_B \\ \vec{z}_A^\top \vec{x}_B & \vec{z}_A^\top \vec{y}_B & \vec{z}_A^\top \vec{z}_B \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Cossenos Diretores: } C_{A/B}}.$$

Note que podemos fazer a seguinte definição de “produto interno para vetrizes”:

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_A^\top \vec{x}_B & \vec{x}_A^\top \vec{y}_B & \vec{x}_A^\top \vec{z}_B \\ \vec{y}_A^\top \vec{x}_B & \vec{y}_A^\top \vec{y}_B & \vec{y}_A^\top \vec{z}_B \\ \vec{z}_A^\top \vec{x}_B & \vec{z}_A^\top \vec{y}_B & \vec{z}_A^\top \vec{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x}_A^\top \\ \vec{y}_A^\top \\ \vec{z}_A^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_B & \vec{y}_B & \vec{z}_B \end{bmatrix} = \vec{F}_A^\top \vec{F}_B,$$

e, portanto,

$$\vec{F}_B = \vec{F}_A \underbrace{\left(\vec{F}_A^\top \vec{F}_B \right)}_{C_{A/B}}.$$

Matriz de Cossenos Diretores – DCM IV

- Como resultado desta análise, vemos que

$$\vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A = \vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{v}^B \implies \vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A = \vec{\mathcal{F}}_A \left(\vec{\mathcal{F}}_A^\top \vec{\mathcal{F}}_B \right) \mathbf{v}^B,$$

$$\vec{\mathcal{F}}_A [\mathbf{v}^A] = \vec{\mathcal{F}}_A [C_{A/B} \mathbf{v}^B],$$

e, portanto,

$$\mathbf{v}^A = C_{A/B} \mathbf{v}^B$$

com

$$C_{A/B} = \begin{bmatrix} \vec{x}_A^\top \vec{x}_B & \vec{x}_A^\top \vec{y}_B & \vec{x}_A^\top \vec{z}_B \\ \vec{y}_A^\top \vec{x}_B & \vec{y}_A^\top \vec{y}_B & \vec{y}_A^\top \vec{z}_B \\ \vec{z}_A^\top \vec{x}_B & \vec{z}_A^\top \vec{y}_B & \vec{z}_A^\top \vec{z}_B \end{bmatrix} = \vec{\mathcal{F}}_A^\top \vec{\mathcal{F}}_B,$$

$$C_{A/B} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{x_A, x_B}) & \cos(\theta_{x_A, y_B}) & \cos(\theta_{x_A, z_B}) \\ \cos(\theta_{y_A, x_B}) & \cos(\theta_{y_A, y_B}) & \cos(\theta_{y_A, z_B}) \\ \cos(\theta_{z_A, x_B}) & \cos(\theta_{z_A, y_B}) & \cos(\theta_{z_A, z_B}) \end{bmatrix}.$$

Matriz de Cossenos Diretores – DCM V

- É também interessante notar que, seguindo nossa definição de “produto interno de vetrizes”, por causa do caráter ortonormal dos nossos referenciais temos que:

$$\vec{\mathcal{F}}_A^\top \vec{\mathcal{F}}_A = \begin{bmatrix} \vec{x}_A^\top \vec{x}_A & \vec{x}_A^\top \vec{y}_A & \vec{x}_A^\top \vec{z}_A \\ \vec{y}_A^\top \vec{x}_A & \vec{y}_A^\top \vec{y}_A & \vec{y}_A^\top \vec{z}_A \\ \vec{z}_A^\top \vec{x}_A & \vec{z}_A^\top \vec{y}_A & \vec{z}_A^\top \vec{z}_A \end{bmatrix} = \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de forma que outra dedução possível para a matriz de transformação $C_{A/B}$ da representação no referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$ para a representação no referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$ é:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A = \vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{v}^B, \\ \vec{\mathcal{F}}_A^\top \vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A &= \vec{\mathcal{F}}_A^\top \vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{v}^B, \\ \mathbf{v}^A &= C_{A/B} \mathbf{v}^B, \quad C_{A/B} = \vec{\mathcal{F}}_A^\top \vec{\mathcal{F}}_B. \end{aligned}$$

Matriz de Cossenos Diretores – DCM VI

- Além disso, seguindo os mesmos passos anteriores, mas trocando os papéis dos referenciais, e lembrando que o produto interno é comutativo (e.g. $\vec{x}_B^T \vec{x}_A = \vec{x}_A^T \vec{x}_B$), é claro que

$$\begin{aligned}
 C_{B/A} &= \vec{\mathcal{F}}_B^T \vec{\mathcal{F}}_A, \\
 &= \begin{bmatrix} \vec{x}_B^T \vec{x}_A & \vec{x}_B^T \vec{y}_A & \vec{x}_B^T \vec{z}_A \\ \vec{y}_B^T \vec{x}_A & \vec{y}_B^T \vec{y}_A & \vec{y}_B^T \vec{z}_A \\ \vec{z}_B^T \vec{x}_A & \vec{z}_B^T \vec{y}_A & \vec{z}_B^T \vec{z}_A \end{bmatrix}, \\
 &= (C_{A/B})^T.
 \end{aligned}$$

- Isto significa que, conhecida a Matriz de Cossenos Diretores $C_{A/B}$, basta tomar a sua transposta para se obter $C_{B/A}$.

Matriz de Cossenos Diretores – DCM VII

- Ao mesmo tempo, para todos os vetores coluna $\mathbf{v}^A, \mathbf{v}^B$, que representam o mesmo vetor $\vec{v}$ em diferentes referenciais, tem-se que

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^A &= C_{A/B} \mathbf{v}^B, \\ &= C_{A/B} (C_{B/A} \mathbf{v}^A) \quad \Rightarrow \quad C_{A/B} C_{B/A} = \mathbb{1},\end{aligned}$$

e, portanto,

$$C_{A/B}^{-1} = C_{B/A} = C_{A/B}^T.$$

Isto é, toda DCM tem uma inversa, e esta inversa é muito facilmente obtida como sendo a matriz transposta da DCM.

Matrizes de Transformação: Interpretação

Uma outra interpretação muito interessante para cada coluna de uma Matriz de Cossenos Diretores:

$$C_{B/A} = \begin{bmatrix} \vec{x}_B^\top \vec{x}_A & \vec{x}_B^\top \vec{y}_A & \vec{x}_B^\top \vec{z}_A \\ \vec{y}_B^\top \vec{x}_A & \vec{y}_B^\top \vec{y}_A & \vec{y}_B^\top \vec{z}_A \\ \vec{z}_B^\top \vec{x}_A & \vec{z}_B^\top \vec{y}_A & \vec{z}_B^\top \vec{z}_A \end{bmatrix}$$

Matrizes de Transformação: Interpretação

Uma outra interpretação muito interessante para cada coluna de uma Matriz de Cossenos Diretores:

$$C_{B/A} = \begin{bmatrix} \vec{x}_B^\top \vec{x}_A & \vec{x}_B^\top \vec{y}_A & \vec{x}_B^\top \vec{z}_A \\ \vec{y}_B^\top \vec{x}_A & \vec{y}_B^\top \vec{y}_A & \vec{y}_B^\top \vec{z}_A \\ \vec{z}_B^\top \vec{x}_A & \vec{z}_B^\top \vec{y}_A & \vec{z}_B^\top \vec{z}_A \end{bmatrix}$$

Projeção de $\vec{x}_A$ na
base $\vec{\mathcal{F}}_B$.

Matrizes de Transformação: Interpretação

Uma outra interpretação muito interessante para cada coluna de uma Matriz de Cossenos Diretores:

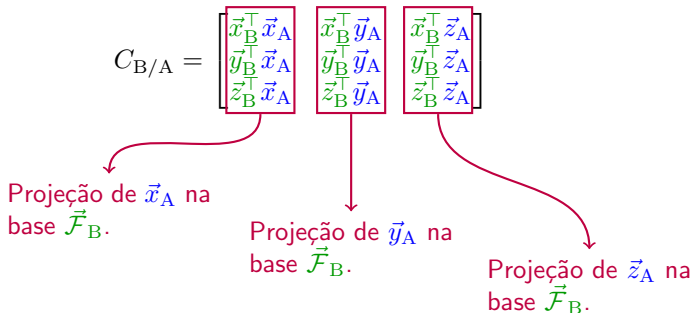
$$C_{B/A} = \begin{bmatrix} \vec{x}_B^\top \vec{x}_A & \vec{x}_B^\top \vec{y}_A & \vec{x}_B^\top \vec{z}_A \\ \vec{y}_B^\top \vec{x}_A & \vec{y}_B^\top \vec{y}_A & \vec{y}_B^\top \vec{z}_A \\ \vec{z}_B^\top \vec{x}_A & \vec{z}_B^\top \vec{y}_A & \vec{z}_B^\top \vec{z}_A \end{bmatrix}$$

Projeção de $\vec{x}_A$ na base $\vec{\mathcal{F}}_B$.

Projeção de $\vec{y}_A$ na base $\vec{\mathcal{F}}_B$.

Matrizes de Transformação: Interpretação

Uma outra interpretação muito interessante para cada coluna de uma Matriz de Cossenos Diretores:



Matrizes de Rotação I

- As matrizes de transformação entre referenciais ortonormais são, de fato, **Matrizes de Rotação**, pois os vetores dos referenciais mantêm entre si ângulos de 90° e as orientações relativas. Portanto, a única transformação possível é uma rotação em torno de algum eixo.
- Além disso, como todos os vetores de ambas as bases $\vec{\mathcal{F}}_A$ e $\vec{\mathcal{F}}_B$ têm norma unitária, note que a norma de um vetor qualquer $\vec{v}$, não importa em que referencial ele foi representado, continua a mesma:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|^2 &= \left\| \vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A \right\|^2 = \left(\vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A \right)^\top \left(\vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A \right), \\ &= \mathbf{v}^{A\top} \vec{\mathcal{F}}_A^\top \vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A = \mathbf{v}^{A\top} \mathbf{v}^A = \left\| \mathbf{v}^A \right\|^2.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|^2 &= \left\| \vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{v}^B \right\|^2 = \left(\vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{v}^B \right)^\top \left(\vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{v}^B \right), \\ &= \mathbf{v}^{B\top} \vec{\mathcal{F}}_B^\top \vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{v}^B = \mathbf{v}^{B\top} \mathbf{v}^B = \left\| \mathbf{v}^B \right\|^2.\end{aligned}$$

Matrizes de Rotação II

- Outra forma de se ver isso é:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}^B\|^2 &= \|C_{B/A}\boldsymbol{v}^A\|^2, \\ &= \boldsymbol{v}^{A\top} C_{B/A}^\top C_{B/A} \vec{\mathcal{F}}_A^\top, \\ &= \boldsymbol{v}^{A\top} \mathbb{1} \boldsymbol{v}^A, \\ \|\boldsymbol{v}^B\|^2 &= \|\boldsymbol{v}^A\|^2.\end{aligned}$$

Matrizes de Rotação III

- De fato, toda Matriz de Rotação R é tal que:

$$R^{\top} R = R R^{\top} = \mathbb{1},$$
$$\det\{R\} = +1.$$

- Matrizes que têm as propriedades acima pertencem ao **Grupo Especial de Matrizes Ortogonais** no espaço tridimensional, comumente denotado por $SO(3)$. Isto é, se R é uma matriz de rotação, então $R \in SO(3)$.

Matrizes de Rotação IV

- A palavra **grupo** tem um significado preciso em Matemática. Trata-se de um conjunto de elementos que:

- 1 Quando combinados usando uma operação binária (multiplicação de matrizes) produz um novo elemento do mesmo conjunto:

$$R_1, R_2 \in SO(3), \text{ então } R_1 R_2 = R_{12} \Rightarrow R_{12}^T R_{12} = (R_1 R_2)^T R_1 R_2 = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = R_2^T R_2 = \mathbb{1}.$$

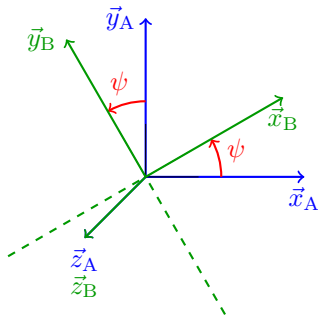
$$\det\{R_{12}\} = \det\{R_1 R_2\} = \det\{R_1\} \det\{R_2\} = +1. \text{ Portanto } R_{12} \in SO(3).$$

- 2 Existe um *elemento neutro* da operação binária: $\mathbb{1} \in SO(3)$.
- 3 Para todo elemento do grupo, existe um *elemento inverso*, isto é, se $R \in SO(3)$, existe $R_{\text{inv}} \in SO(3)$ tal que $RR_{\text{inv}} = R_{\text{inv}}R = \mathbb{1}$. Sabemos que $R_{\text{inv}} = R^T$, e que $R^T \in SO(3)$.
- 4 Associatividade: $R_1, R_2, R_3 \in SO(3)$. $R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2)R_3$.

Matrizes de Rotação Padrão I

- Em Engenharia Aeroespacial é comum utilizarmos um conjunto de transformações padrão de rotação.
- Rotação em torno do eixo Z de ψ radianos:

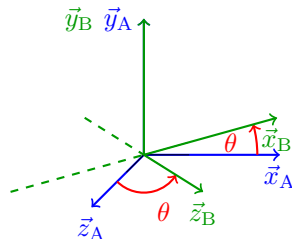
$$C_{B/A} = C_{z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Matrizes de Rotação Padrão II

- Rotação em torno do eixo Y de θ radianos:

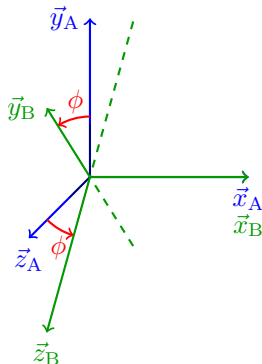
$$C_{B/A} = C_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$



Matrizes de Rotação Padrão III

- Rotação em torno do eixo X de ϕ radianos:

$$C_{B/A} = C_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}.$$



Matriz de Rotação $\text{tp} \mapsto \text{frd}$

A partir dos três ângulos de Euler definidos anteriormente, a Matriz de Rotação para a transformação de representações de vetores no referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{tp}}$ para o referencial do corpo $\vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}}$ é dada por

$$C_{\text{frd/tp}}(\phi, \theta, \psi) = C_{x, \phi} C_{y, \theta} C_{z, \psi},$$

em que, por convenção, consideramos $\psi \in (-\pi, \pi]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\phi \in (-\pi, \pi]$:

$$C_{\text{frd/tp}}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

As funções "seno" e "cosseno" foram abreviadas pelas letras "c" e "s", respectivamente.

Matriz de Rotação $tp \mapsto frd$ II

- Note que, a despeito da complexidade aparente da matriz $C_{frd/tp}$, como $C_{frd/tp} \in SO(3)$, sua inversa é simples de ser calculada:

$$C_{frd/tp}^{-1} = C_{tp/frd} = C_{frd/tp}^T.$$
- Além disso, dada a Matriz de Rotação $C_{frd/tp}$, sempre podemos calcular os ângulos de Euler a partir de seus elementos:

$$\begin{aligned}\phi &= \text{atan2}(c_{23}, c_{33}), \\ \theta &= -\text{asen}(c_{13}), \\ \psi &= \text{atan2}(c_{12}, c_{11}).\end{aligned}\tag{2}$$

em que c_{ij} é o elemento (i,j) da matriz $C_{frd/tp}$.

Matriz de Rotação $w \mapsto \text{frd}$

Usando as transformações de rotação padrão, mas agora considerando as transformações necessárias para se obter o referencial $\vec{\mathcal{F}}_w$ a partir do referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}}$, vemos que

$$C_{\text{frd}/w}(\alpha, \beta) = (C_{z, \beta} C_{y, (-\alpha)})^T = C_{y, \alpha} C_{z, (-\beta)},$$

$$C_{\text{frd}/w}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -c\alpha s\beta & -s\alpha \\ s\beta & c\beta & 0 \\ s\alpha c\beta & -s\alpha s\beta & c\alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

As funções “seno” e “cosseno” foram abreviadas pelas letras “c” e “s”, respectivamente.

Section 2

Cinemática de Corpos Rígidos

Derivadas Temporais de Vetores I

- Considere o vetor $\vec{v}(t)$, representado em um referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$:

$$\vec{v}(t) = v_{x,B}(t)\vec{x}_B(t) + v_{y,B}(t)\vec{y}_B(t) + v_{z,B}(t)\vec{z}_B(t).$$

- A derivada temporal de um vetor $\vec{v}(t)$ é outro vetor $\dot{\vec{v}}(t)$, que é definido por

$$\dot{\vec{v}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t},$$

e, evidentemente, isso nos leva a concluir que

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}(t) &= \dot{v}_{x,B}(t)\vec{x}_B + \dot{v}_{y,B}(t)\vec{y}_B + \dot{v}_{z,B}(t)\vec{z}_B \\ &\quad + v_{x,B}(t)\dot{\vec{x}}_B(t) + v_{y,B}(t)\dot{\vec{y}}_B(t) + v_{z,B}(t)\dot{\vec{z}}_B(t),\end{aligned}$$

onde estão incluídas as possíveis mudanças de direção (já que as magnitudes são constantes) dos vetores diretores do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$.

Derivadas Temporais de Vetores II

- Assim, vemos que há duas possibilidades para se considerar:

- Derivada temporal vista do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$, onde os vetores $\vec{x}_B$, $\vec{y}_B$ e $\vec{z}_B$ são constantes, e só a parte relativa às variações das componentes de $\mathbf{v}^B$ importam:

$${}^B\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{v}_{x,B}(t)\vec{x}_B + \dot{v}_{y,B}(t)\vec{y}_B + \dot{v}_{z,B}(t)\vec{z}_B = \vec{\mathcal{F}}_B\dot{\mathbf{v}}^B.$$

- Derivada temporal vista de outro referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$, em relação ao qual a orientação espacial do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$ está mudando ao longo do tempo:

$$\begin{aligned} {}^A\dot{\mathbf{v}}(t) &= \dot{v}_{x,B}(t)\vec{x}_B + \dot{v}_{y,B}(t)\vec{y}_B + \dot{v}_{z,B}(t)\vec{z}_B \\ &\quad + v_{x,B}(t)\dot{\vec{x}}_B(t) + v_{y,B}(t)\dot{\vec{y}}_B(t) + v_{z,B}(t)\dot{\vec{z}}_B(t), \\ &= \vec{\mathcal{F}}_B\dot{\mathbf{v}}^B + {}^A\dot{\vec{\mathcal{F}}}_B\mathbf{v}^B. \end{aligned}$$

Derivadas Temporais de Vetores III

- Mas qual o resultado de se calcular ${}^A \dot{\vec{F}}_B$?

Para entender isto, considere que cada vetor diretor em $\vec{F}_B$ pode mudar apenas sua orientação em relação a $\vec{F}_A$ ao longo do tempo, não sua magnitude. Além disso, $\vec{x}_B$, $\vec{y}_B$ e $\vec{z}_B$ mantêm a ortogonalidade entre si durante todo o tempo, pois estão rigidamente ligados entre si formando um triedro direito. Portanto:

$$\dot{\vec{x}}_B = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{x}_B,$$

$$\dot{\vec{y}}_B = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{y}_B,$$

$$\dot{\vec{z}}_B = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{z}_B,$$

em que, por definição, $\vec{\omega}_{B/A}$ é o vetor velocidade angular do referencial $\vec{F}_B$ em relação ao referencial $\vec{F}_A$. De forma compacta:

$${}^A \dot{\vec{F}}_B = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{F}_B.$$

Derivadas Temporais de Vetores IV

- Note que a forma compacta faz sentido, pois:

$$\begin{aligned} {}^A \dot{\vec{F}}_B \mathbf{v}^B &= v_{x,B}(t) \dot{\vec{x}}_B(t) + v_{y,B}(t) \dot{\vec{y}}_B(t) + v_{z,B}(t) \dot{\vec{z}}_B(t), \\ &= v_{x,B}(t) (\vec{\omega}_{B/A} \times \vec{x}_B) + v_{y,B}(t) (\vec{\omega}_{B/A} \times \vec{y}_B) + \\ &\quad + v_{z,B}(t) (\vec{\omega}_{B/A} \times \vec{z}_B), \\ &= \vec{\omega}_{B/A} \times [v_{x,B}(t) \vec{x}_B(t) + v_{y,B}(t) \vec{y}_B(t) + v_{z,B}(t) \vec{z}_B(t)], \\ {}^A \dot{\vec{F}}_B \mathbf{v}^B &= \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{F}_B \mathbf{v}^B. \end{aligned}$$

Derivadas Temporais de Vetores V

- Combinando este resultado com os anteriores, temos que

$$\begin{aligned}
 {}^A\dot{\vec{v}}(t) &= \vec{\mathcal{F}}_B \dot{\vec{v}}^B + {}^A\dot{\vec{\mathcal{F}}}_B \vec{v}^B, \\
 &= \underbrace{\vec{\mathcal{F}}_B \dot{\vec{v}}^B}_{{}^B\dot{\vec{v}}(t)} + \vec{\omega}_{B/A} \times \underbrace{\vec{\mathcal{F}}_B \vec{v}^B}_{\vec{v}(t)}.
 \end{aligned}$$

Teorema do Transporte I

Theorem (Teorema do Transporte)

A derivada temporal de um vetor $\vec{v}$ como vista de um referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$, representada por ${}^A\dot{\vec{v}}(t)$, é dada por:

$${}^A\dot{\vec{v}}(t) = {}^B\dot{\vec{v}}(t) + \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{v}(t) \quad (4)$$

em que ${}^B\dot{\vec{v}}(t)$ é a derivada temporal do vetor $\vec{v}$ como vista do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$, e $\vec{\omega}_{B/A}$ é o vetor velocidade angular do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$ em relação ao referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$.

- É importante notar que a equação (4) é uma equação vetorial, em que os vetores não estão representados em nenhum referencial em particular, apesar de os referenciais $\vec{\mathcal{F}}_A$ e $\vec{\mathcal{F}}_B$ serem mencionados.

Teorema do Transporte II

- Para operacionalizar a equação (4), precisamos representar todas as grandezas vetoriais em um único referencial. Usando a distributividade do produto vetorial e da soma de vetores, podemos escrever que:

$$\begin{aligned} {}^A\dot{\vec{v}}(t) &= \vec{\mathcal{F}}_B \dot{\vec{v}}^B + \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{\mathcal{F}}_B \vec{v}^B, \\ &= \vec{\mathcal{F}}_B \dot{\vec{v}}^B + \vec{\mathcal{F}}_B \omega_{B/A}^B \times \vec{\mathcal{F}}_B \vec{v}^B, \\ &= \vec{\mathcal{F}}_B \dot{\vec{v}}^B + \vec{\mathcal{F}}_B \left(\omega_{B/A}^B \times \vec{v}^B \right), \\ &= \vec{\mathcal{F}}_B \left(\underbrace{\dot{\vec{v}}^B + \omega_{B/A}^B \times \vec{v}^B}_{{}^A\dot{\vec{v}}^B} \right). \end{aligned}$$

Teorema do Transporte III

- Portanto, com todos os vetores representados no referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$, temos finalmente que:

$${}^A\dot{\mathbf{v}}^B = \dot{\mathbf{v}}^B + \boldsymbol{\omega}_{B/A}^B \times \mathbf{v}^B \quad (5)$$

em que ${}^A\dot{\mathbf{v}}^B$ é a representação, no referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$, da derivada temporal do vetor $\vec{v}(t)$, como vista a partir do referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$; e $\boldsymbol{\omega}_{B/A}^B$ é a representação no referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$ da velocidade angular do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$ em relação ao referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$.

Além disso, note que $\dot{\mathbf{v}}^B = {}^B\dot{\mathbf{v}}^B$, isto é, $\dot{\mathbf{v}}^B$ é igual à representação, no referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$, da derivada temporal do vetor $\vec{v}$ como vista a partir do mesmo referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$.

Teorema do Transporte IV

- A importância da expressão (5) para nós é que com ela seremos capazes de calcular a derivada temporal da velocidade da aeronave em relação a um referencial inercial $\vec{\mathcal{F}}_A$, e todas as grandezas estarão representadas no referencial do corpo $\vec{\mathcal{F}}_B$ (que não é inercial).

A Matriz Produto Vetorial I

- Considere dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e a operação “produto vetorial” entre eles:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{a}^B \right) \times \left(\vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{b}^B \right) = \vec{\mathcal{F}}_B \left(\mathbf{a}^B \times \mathbf{b}^B \right).$$

- Note que:

$$\mathbf{a}^B \times \mathbf{b}^B = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^B \times \mathbf{b}^B = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{a}}^B \mathbf{b}^B.$$

A Matriz Produto Vetorial II

- Portanto, podemos definir uma operação que cria, a partir da representação v^B de um vetor, a chamada **Matriz Produto Vetorial**:

$$v^B = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \mapsto \tilde{v}^B = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A Matriz Produto Vetorial III

- Observe que a matrix $\tilde{\mathbf{v}}^B$ é anti-simétrica, isto é,

$$\tilde{\mathbf{v}}^B = -\left(\tilde{\mathbf{v}}^B\right)^{\top},$$

e que, naturalmente,

$$\tilde{\mathbf{v}}^B \mathbf{v}^B = \mathbf{v}^B \times \mathbf{v}^B = \mathbf{0}.$$

A Matriz Produto Vetorial IV

- Além disso,

$$\mathbf{a}^B \times \mathbf{b}^B = C_{B/A} \left(\mathbf{a}^A \times \mathbf{b}^A \right),$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^B \mathbf{b}^B = C_{B/A} \tilde{\mathbf{a}}^A \mathbf{b}^A,$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^B \mathbf{b}^B = C_{B/A} \tilde{\mathbf{a}}^A C_{A/B} \mathbf{b}^B,$$

e, portanto,

$$\tilde{\mathbf{a}}^B = C_{B/A} \tilde{\mathbf{a}}^A C_{B/A}^\top \quad (7)$$

A Matriz Produto Vetorial V

- Observe que, usando (6), podemos reescrever (5) usando apenas operações usuais (soma e produto) de matrizes e vetores:

$${}^A\dot{\mathbf{v}}^B = \dot{\mathbf{v}}^B + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^B \mathbf{v}^B,$$

em que

$$\boldsymbol{\omega}_{B/A}^B = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^B = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix}.$$

Cinemática de Rotação: Matriz de Rotação I

- Considere um vetor qualquer $\vec{v}$ fixo/constante no referencial $\mathcal{F}_B$ – referencial este que gira em relação a um referencial $\mathcal{F}_A$. Sabemos que:

$$\vec{v} = \vec{\mathcal{F}}_A \mathbf{v}^A = \vec{\mathcal{F}}_B \mathbf{v}^B \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v}^A = C_{A/B} \mathbf{v}^B.$$

Cinemática de Rotação: Matriz de Rotação II

- Portanto, considerando apenas as representações do vetor nos diferentes referenciais, vemos que

$$\dot{\mathbf{v}}^A = \dot{C}_{A/B} \mathbf{v}^B + C_{A/B} \dot{\mathbf{v}}^B = \dot{C}_{A/B} \mathbf{v}^B. \quad (8)$$

- Ao mesmo tempo, usando a expressão (5) referente ao Teorema do Transporte,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}^A &= C_{A/B} \left({}^A \dot{\mathbf{v}}^B \right), \\ \dot{\mathbf{v}}^A &= C_{A/B} \left[\dot{\mathbf{v}}^B + \boldsymbol{\omega}_{B/A}^B \times \mathbf{v}^B \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Cinemática de Rotação: Matriz de Rotação III

- Comparando (8) e (9), e usando a Matriz Produto Vetorial, vemos que

$$\left(\dot{C}_{A/B}\right) \mathbf{v}^B = \left(C_{A/B} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^B\right) \mathbf{v}^B,$$

para qualquer vetor constante $\mathbf{v}^B$. Portanto:

$$\dot{C}_{A/B} = C_{A/B} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^B.$$

- Por outro lado, transpondo as matrizes na equação acima:

$$\dot{C}_{A/B}^T = \left(C_{A/B} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^B\right)^T = \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^B\right)^T C_{A/B}^T = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B/A}^B C_{B/A}.$$

Cinemática de Rotação: Matriz de Rotação IV

- Lembrando que $\dot{C}_{A/B}^T = \dot{C}_{B/A}$, finalmente podemos escrever que

$$\dot{C}_{B/A} = -\tilde{\omega}_{B/A}^B C_{B/A} \quad (10)$$

e esta equação mostra como os 9 elementos da matriz de rotação $C_{B/A}$ mudam ao longo do tempo, dependendo da velocidade angular do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$ em relação ao referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$.

Cinemática de Rotação: Ângulos de Euler I

- Alternativamente à expressão (10), representando 9 equações diferenciais (pois $C_{B/A}$ tem 9 elementos), podemos relacionar a mudança de orientação espacial de um corpo rígido ao longo do tempo, devido a sua velocidade angular não nula, com as derivadas temporais dos ângulos de Euler.

Cinemática de Rotação: Ângulos de Euler II

- As contribuições de cada uma das variações $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ para a velocidade angular do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$ em relação ao referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$, ocorrem em diferentes referenciais intermediários associados à sequência de rotações necessárias para se obter $\vec{\mathcal{F}}_B$ a partir de $\vec{\mathcal{F}}_A$:

$$\omega_{B/A}^B = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_{x,\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_{x,\phi} C_{y,\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

onde as transformações padrão foram utilizadas seguindo a sequência 3-2-1: $C_{B/A} = C_{x,\phi} C_{y,\theta} C_{z,\psi}$.

Cinemática de Rotação: Ângulos de Euler III

- A equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

e, no caso em que $\cos \theta \neq 0$, a relação acima pode ser invertida, de forma que

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (11)$$

Cinemática de Rotação: Ângulos de Euler IV

- Definindo $\Phi = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$, a equação acima pode ser reescrita de forma compacta como

$$\dot{\Phi} = H(\Phi) \omega_{B/A}^B, \quad (12)$$

onde

$$H(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix}.$$

Desta maneira, enquanto a condição $\cos \theta \neq 0$ se mantiver verdadeira, podemos representar a evolução da orientação espacial do corpo rígido usando apenas 3 equações diferenciais.

Section 3

Dinâmica de Corpos Rígidos

Centro de Massa I

Quando investigamos um corpo composto por muitos pontos materiais, um conceito muito útil é o de **posição do centro de massa**:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \cdots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \right) = \frac{1}{m_{\text{total}}} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right),$$

onde m_i é a massa do i -ésimo ponto material, e $\vec{r}_i$ é a sua posição. Definindo $\vec{r}_{i/\text{cm}} = \vec{r}_i - \vec{r}_{\text{cm}}$, vemos que

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{i/\text{cm}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \right)}_{m_{\text{total}}} \vec{r}_{\text{cm}} = 0.$$

Centro de Massa II

De forma similar, calculando as derivadas das posições dos pontos materiais, vistas de um Referencial Inercial $\vec{\mathcal{F}}_A$, tem-se que a **velocidade do centro de massa** é dada por

$${}^A \left[\frac{d}{dt} (\vec{r}_{\text{cm}}) \right] = \vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{m_{\text{total}}} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right),$$

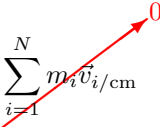
com $\vec{v}_i = {}^A \left[\frac{d}{dt} (\vec{r}_i) \right]$, e, consequentemente, como $\vec{v}_{i/\text{cm}} = \vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}}$,

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{i/\text{cm}} = 0.$$

Momento Linear Total I

O conceito de Centro de Massa (c.m.) é instrumental para a aplicação das Leis de Newton.

Considere o Momento Linear Total de um conjunto de pontos materiais, com respeito a um Referencial Inercial, definido por

$$\begin{aligned}\vec{\ell}_{\text{total}} &= \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i, \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{v}_{i/\text{cm}}), \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{v}_{\text{cm}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{i/\text{cm}} = m_{\text{total}} \vec{v}_{\text{cm}}.\end{aligned}$$


Momento Linear Total II

Usando a 2ª lei de Newton, a derivada temporal do Momento Linear Total como vista de um Referencial Inercial $\vec{\mathcal{F}}_A$ é dada por

$$^A \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{\ell}_{\text{total}} \right) \right] = \sum_{i=1}^N {}^A \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{\ell}_i \right) \right] = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i,$$

onde $\vec{f}_i$ é a força resultante, aplicada em cada i -ésimo ponto material, e que pode ser escrita como a contribuição das forças internas impostas por outros pontos materiais, e possivelmente de uma força externa aplicada àquele elemento de massa, tal que

$$\vec{f}_i = \underbrace{\vec{f}_{1/i} + \vec{f}_{2/i} + \cdots + \vec{f}_{N/i}}_{\text{Forças internas agindo no ponto material } i} + \underbrace{\vec{f}_{\text{ext}/i}}_{\text{Força Externa}}.$$

Momento Linear Total III

Da 3ª lei de Newton, sabemos que a força $\vec{f}_{j/i}$ que o j -ésimo ponto material exerce sobre a i -ésima partícula é tal que

$$\vec{f}_{j/i} = -\vec{f}_{i/j}.$$

Portanto, na derivada temporal do Momento Linear Total, a contribuição das forças internas desaparece:

$$^A \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{\ell}_{\text{total}} \right) \right] = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i = \cdots + \cancel{\vec{f}_{j/i}} + \cdots + \cancel{\vec{f}_{i/j}} + \cdots = \sum_{i=1}^N \vec{f}_{\text{ext}/i},$$

e somente as contribuições das forças externas permanecem.

Momento Linear Total IV

Em resumo, temos que

$$\vec{\ell}_{\text{total}} = m_{\text{total}} \vec{v}_{\text{cm}} \quad (13)$$

$$^A \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{\ell}_{\text{total}} \right) \right] = \sum_{i=1}^N \vec{f}_{\text{ext}/i} \quad (14)$$

A derivada temporal do Momento Linear Total de um conjunto de pontos materiais, como vista de um Referencial Inercial $\vec{\mathcal{F}}_A$, é igual à soma das forças externas aplicadas sobre os pontos materiais.

Equação Dinâmica das Forças I

A partir das equações (13) e (14), para uma força externa total

$$\sum_{i=1}^N \vec{f}_{\text{ext}/i} = \vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}} \left(\mathbf{F}^{\text{frd}} \right),$$

podemos escrever, no caso de uma aeronave em que *a massa total não muda ao longo do tempo*, e considerando que o Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{tp}$ é *Inercial*, que:

$$\begin{aligned} \vec{\ell}_{\text{total}} = \vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}} (m \mathbf{v}^{\text{frd}}) &\Rightarrow {}^{\text{tp}} \left[\frac{d}{dt} (m \mathbf{v}^{\text{frd}}) \right] = \mathbf{F}^{\text{frd}}, \\ &\Rightarrow \overset{0}{\cancel{m}} (\mathbf{v}^{\text{frd}}) + m ({}^{\text{tp}} \dot{\mathbf{v}}^{\text{frd}}) = \mathbf{F}^{\text{frd}}, \\ &\Rightarrow {}^{\text{tp}} \dot{\mathbf{v}}^{\text{frd}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}^{\text{frd}}. \end{aligned}$$

Equação Dinâmica das Forças II

Usando o Teorema do Transporte (5), vemos que a expressão anterior é igual a

$${}^{\text{tp}}\dot{\mathbf{v}}^{\text{frd}} = \dot{\mathbf{v}}^{\text{frd}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \times \mathbf{v}^{\text{frd}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}^{\text{frd}},$$

e, usando a Matriz Produto Vetorial (6), finalmente temos que

$$\dot{\mathbf{v}}^{\text{frd}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \mathbf{v}^{\text{frd}} + \frac{1}{m} \mathbf{F}^{\text{frd}} \quad (15)$$

Momento Angular e Torque

Dentre as contribuições de Euler para a Mecânica dos Corpos Rígidos, os seguintes conceitos podem ser destacados:

- **Momento Angular:** uma extensão da ideia de Momento Linear, dado por

$$\vec{h}_p = \vec{r}_p \times \vec{\ell}_p = \vec{r}_p \times [m\vec{v}_p] = \vec{r}_p \times m \left[{}^A \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_p \right) \right],$$

onde $\vec{\mathcal{F}}_A$ é um Referencial Inercial, e $\vec{r}_p$ é o vetor posição de um ponto material em relação a um ponto de referência e, portanto, o Momento Angular depende da definição de um ponto de referência.

- **Torque:** uma extensão da ideia de força, dado por:

$$\vec{\tau}_p = \vec{r}_p \times \vec{f},$$

que também depende da definição de um ponto de referência.

Momento Angular Total I

O Momento Angular Total de um corpo rígido, visto como uma coleção de N pontos materiais rigidamente conectados uns aos outros, pode ser computado como a soma de todos os Momentos Angulares de seus pontos materiais:

$$\vec{H}_o = \sum_{i=1}^N \vec{h}_{i/o} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/o} \times m_i \vec{v}_{i/o}$$

onde $\vec{v}_{i/o} = {}^A \left(\frac{d\vec{r}_{i/o}}{dt} \right)$, e $\vec{r}_{i/o}$ é o vetor posição do ponto material i com respeito ao ponto de referência o .

Momento Angular Total II

Quando escolhemos o Centro de Massa – c.m. como o ponto de referência, podemos calcular a derivada temporal do Momento Angular Total $\vec{H}_{\text{cm}}$ quando vista de um Referencial Inercial $\vec{\mathcal{F}}_A$:

$$\begin{aligned}
 {}^A \left(\frac{d\vec{H}_{\text{cm}}}{dt} \right) &= \sum_{i=1}^N \vec{v}_{i/\text{cm}} \times m_i \vec{v}_{i/\text{cm}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times m_i {}^A \left(\frac{d}{dt} \vec{v}_{i/\text{cm}} \right), \\
 &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times m_i {}^A \left(\frac{d}{dt} \vec{v}_i \right) - \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times m_i {}^A \left(\frac{d}{dt} \vec{v}_{\text{cm}} \right), \\
 &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times m_i {}^A \left(\frac{d}{dt} \vec{v}_i \right) - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{i/\text{cm}} \right)}_{\vec{f}_i} \times {}^A \left(\frac{d}{dt} \vec{v}_{\text{cm}} \right).
 \end{aligned}$$

(2a Lei de Newton)

Momento Angular Total III

Portanto,

$$^A \left(\frac{d\vec{H}_{\text{cm}}}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{f}_i.$$

Nesta última expressão, $\vec{f}_i$ é a força resultante agindo no i -ésimo ponto material, a qual pode ser escrita como a soma das contribuições de forças internas entre pontos materiais e possivelmente uma força externa aplicada àquele ponto material em particular, tal que

$$\vec{f}_i = \underbrace{\vec{f}_{1/i} + \vec{f}_{2/i} + \cdots + \vec{f}_{N/i}}_{\text{Forças internas agindo no ponto material } i} + \underbrace{\vec{f}_{\text{ext}/i}}_{\text{Força externa}}.$$

Momento Angular Total IV

De acordo com a 3ª lei de Newton, para cada força interna $\vec{f}_{j/i}$ agindo na i -ésima partícula, haverá uma força $\vec{f}_{i/j} = -\vec{f}_{j/i}$ agindo na j -ésima partícula de massa pontual, de modo que

$$\begin{aligned} {}^A \left(\frac{d\vec{H}_{\text{cm}}}{dt} \right) &= \cdots + \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{f}_{j/i} + \cdots + \vec{r}_{j/\text{cm}} \times \vec{f}_{i/j} + \cdots, \\ &= \cdots + \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{f}_{j/i} + \cdots - \vec{r}_{j/\text{cm}} \times \vec{f}_{j/i} + \cdots, \\ &= \cdots + (\vec{r}_{i/\text{cm}} - \vec{r}_{j/\text{cm}}) \times \vec{f}_{j/i} + \cdots \end{aligned}$$

Assumindo que a força interna $\vec{f}_{j/i}$ da j -ésima partícula age sobre a i -ésima partícula ao longo da direção do vetor de posição relativa $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_{i/\text{cm}} - \vec{r}_{j/\text{cm}}$, tem-se que

$$(\vec{r}_{i/\text{cm}} - \vec{r}_{j/\text{cm}}) \times \vec{f}_{j/i} = 0.$$

Momento Angular Total V

A partir desta hipótese, vemos que

$$^A \left(\frac{d\vec{H}_{\text{cm}}}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{f}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{f}_{\text{ext}/i}.$$

$$^A \left(\frac{d\vec{H}_{\text{cm}}}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{f}_{\text{ext}/i} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{\text{ext}} \quad (16)$$

A derivada temporal, vista de um Referencial Inercial $\vec{\mathcal{F}}_A$, do Momento Angular Total em relação ao c.m. é igual à soma dos torques externos aplicados, calculados em relação ao c.m.

Momento Angular e Tensor de Inércia I

O Momento Angular Total de um corpo rígido, com referência a seu c.m., considerando a velocidade dos pontos materiais observada de um Referencial Inercial $\vec{\mathcal{F}}_A$, pode ser calculado como:

$$\begin{aligned}\vec{H}_{\text{cm}} &= \sum_{i=1}^N \vec{h}_{i/\text{cm}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times m_i \vec{v}_{i/\text{cm}}, \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{h}_{i/\text{cm}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times m_i {}^A \left(\frac{d\vec{r}_{i/\text{cm}}}{dt} \right), \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_{i/\text{cm}} \times m_i [\vec{\omega}_{B/A} \times \vec{r}_{i/\text{cm}}].\end{aligned}$$

onde $\vec{\omega}_{B/A}$ é a velocidade angular do referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$ em relação ao referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$, e o Teorema do Transporte foi usado no último passo:

$${}^A \dot{\vec{r}}_{i/\text{cm}}(t) = \cancel{{}^B \dot{\vec{r}}_{i/\text{cm}}(t)}^0 + \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{r}_{i/\text{cm}}.$$

Momento Angular e Tensor de Inércia II

A expressão anterior pode ainda ser reescrita como

$$\vec{H}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^N -m_i \vec{r}_{i/\text{cm}} \times [\vec{r}_{i/\text{cm}} \times \vec{\omega}_{\text{B/A}}],$$

a qual conduz à seguinte representação do Momento Angular Total no Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{B}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{cm}}^{\text{B}} &= \sum_{i=1}^N \left\{ -m_i \mathbf{r}_{i/\text{cm}}^{\text{B}} \times \left[\mathbf{r}_{i/\text{cm}}^{\text{B}} \times \boldsymbol{\omega}_{\text{B/A}}^{\text{B}} \right] \right\}, \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ -m_i \tilde{\mathbf{r}}_{i/\text{cm}}^{\text{B}} \left[\tilde{\mathbf{r}}_{i/\text{cm}}^{\text{B}} \boldsymbol{\omega}_{\text{B/A}}^{\text{B}} \right] \right\}, \\ \mathbf{H}_{\text{cm}}^{\text{B}} &= \left\{ \sum_{i=1}^N -m_i \left(\tilde{\mathbf{r}}_{i/\text{cm}}^{\text{B}} \right)^2 \right\} \boldsymbol{\omega}_{\text{B/A}}^{\text{B}}. \end{aligned}$$

Momento Angular e Tensor de Inércia III

Em se tratando de um corpo rígido com uma quantidade não enumerável de pontos materiais, cada um deles com massa $m_i = dm = \rho(x,y,z)dV$, em que $\rho(x,y,z)$ é a densidade do material do corpo na posição $\mathbf{r}_{x,y,z/\text{cm}}^B = [x \ y \ z]^\top$ e $dV = dx \, dy \, dz$ é o elemento diferencial de volume, temos, ao invés do somatório, uma integração no volume, tal que:

$$\mathbf{H}_{\text{cm}}^B = \underbrace{\left\{ \iiint_V - \left(\tilde{\mathbf{r}}_{x,y,z/\text{cm}}^B \right)^2 \rho(x,y,z) dx \, dy \, dz \right\}}_{J^B} \boldsymbol{\omega}_{B/A}^B, \quad (17)$$

em que

$$- \left(\tilde{\mathbf{r}}_{x,y,z/\text{cm}}^B \right)^2 = \begin{bmatrix} (y^2 + z^2) & -(xy) & -(xz) \\ -(xy) & (x^2 + z^2) & -(yz) \\ -(xz) & -(yz) & (x^2 + y^2) \end{bmatrix}.$$

Momento Angular e Tensor de Inércia IV

Portanto,

$$\mathbf{H}_{\text{cm}}^{\text{B}} = \mathbf{J}^{\text{B}} \boldsymbol{\omega}_{\text{B/A}}^{\text{B}} \quad (18)$$

em que o **Tensor de Inércia** em relação aos eixos do Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{B}}$,

$$\mathbf{J}^{\text{B}} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^{\text{B}})^{\top},$$

é uma matriz *simétrica* e *definida positiva*. Uma matriz é definida positiva quando

$$(\mathbf{v}^{\text{B}})^{\top} \mathbf{J}^{\text{B}} \mathbf{v}^{\text{B}} > 0, \quad \forall \mathbf{v}^{\text{B}} \neq 0,$$

e toda matriz definida positiva é invertível, i.e. a inversa $(\mathbf{J}^{\text{B}})^{-1}$ sempre existe.

Momento Angular e Tensor de Inércia V

É importante notar que o Tensor de Inércia, uma vez definidos os eixos do Referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$, só depende de como a massa do corpo está distribuída em torno desses eixos, isto é,

$$J_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \rightarrow \text{Momento de Inércia em torno de } x$$

$$J_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \rightarrow \text{Momento de Inércia em torno de } y$$

$$J_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \rightarrow \text{Momento de Inércia em torno de } z$$

$$J_{xy} = \iiint_V (xy) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \rightarrow \text{Produto de Inércia } xy$$

$$J_{yz} = \iiint_V (yz) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \rightarrow \text{Produto de Inércia } yz$$

$$J_{xz} = \iiint_V (xz) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \rightarrow \text{Produto de Inércia } xz.$$

Veja que as coordenadas (x, y, z) dos pontos materiais, no Referencial $\vec{\mathcal{F}}_B$, não mudam ao longo do tempo e, por isto, a matriz J^B é constante.

Momento Angular e Tensor de Inércia VI

Caso seja necessário calcular o Tensor de Inércia J^A em relação a um outro Referencial $\vec{\mathcal{F}}_A$ (isto é, em relação a outros eixos), podemos considerar (7) e escrever:

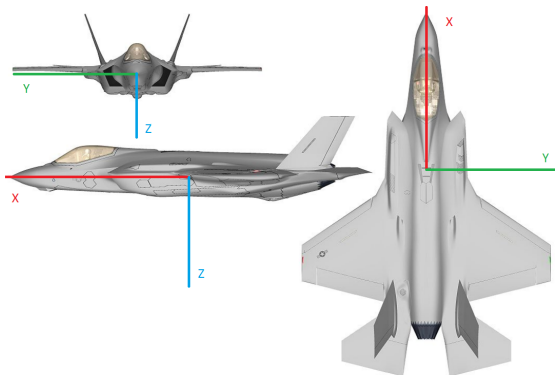
$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}_{x,y,z/\text{cm}}^B &= C_{B/A} \tilde{\mathbf{r}}_{x,y,z/\text{cm}}^A C_{B/A}^\top, \\ \Rightarrow \left(\tilde{\mathbf{r}}_{x,y,z/\text{cm}}^B \right)^2 &= C_{B/A} \left(\tilde{\mathbf{r}}_{x,y,z/\text{cm}}^A \right)^2 C_{B/A}^\top,\end{aligned}$$

de modo que, usando a expressão (17), vemos que

$$J^B = C_{B/A} J^A C_{B/A}^\top \Leftrightarrow J^A = C_{A/B} J^B C_{A/B}^\top \quad (19)$$

Tensor de Inércia de Aeronaves I

A grande maioria das aeronaves tem o plano $y = 0$ no Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}}$ como plano de simetria:



Tensor de Inércia de Aeronaves II

Isto faz com que qualquer produto de inércia que dependa das coordenadas y seja igual a zero: $J_{xy} = J_{yz} = 0$. O Tensor de Inércia, portanto, pode ser comumente escrito como

$$J^{\text{frd}} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_y & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left(J^{\text{frd}}\right)^{-1} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} J_z & 0 & J_{xz} \\ 0 & \frac{\Gamma}{J_y} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_x \end{bmatrix}$$

(20)

em que $\Gamma = J_x J_z - J_{xz}^2$.

Além disso, como é usual uma distribuição de massa quase simétrica em torno dos planos $z = 0$ e $x = 0$, tem-se $J_{xz} \ll \min\{J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}\}$, e frequentemente se considera $J_{xz} \approx 0$.

Equação Dinâmica dos Momentos I

A partir das equações (16) e (18), para um torque (ou momento) externo total

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_{\text{ext}/i} = \vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}} \left(\mathbf{M}^{\text{frd}} \right),$$

podemos escrever, no caso de uma aeronave em que *a distribuição de massa não muda ao longo do tempo*, e considerando que *o Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{tp}$ é Inercial*, que:

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{cm}} &= \vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}} \mathbf{H}^{\text{frd}} = \vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}} \left(J^{\text{frd}} \boldsymbol{\omega}_{\text{frd}/tp}^{\text{frd}} \right), \\ \Rightarrow \left[\frac{d}{dt} \left(J^{\text{frd}} \boldsymbol{\omega}_{\text{frd}/tp}^{\text{frd}} \right) \right]^{tp} &= \mathbf{M}^{\text{frd}}. \end{aligned}$$

Equação Dinâmica dos Momentos II

Usando o Teorema do Transporte (5), vemos que a expressão anterior é igual a

$$\begin{aligned}
 {}^{\text{tp}} \left[\frac{d}{dt} \left(J^{\text{frd}} \omega_{\text{frd/tp}}^{\text{frd}} \right) \right] &= {}^{\text{frd}} \left[\frac{d}{dt} \left(J^{\text{frd}} \omega_{\text{frd/tp}}^{\text{frd}} \right) \right] + \\
 &\quad \omega_{\text{frd/tp}}^{\text{frd}} \times J^{\text{frd}} \omega_{\text{frd/tp}}^{\text{frd}} = M^{\text{frd}}, \\
 &= {}^{\text{frd}} \left[\frac{d}{dt} (J^{\text{frd}}) \right] \omega_{\text{frd/tp}}^{\text{frd}} + J^{\text{frd}} \left(\dot{\omega}_{\text{frd/tp}}^{\text{frd}} \right) + \\
 &\quad \omega_{\text{frd/tp}}^{\text{frd}} \times J^{\text{frd}} \omega_{\text{frd/tp}}^{\text{frd}} = M^{\text{frd}}.
 \end{aligned}$$

Note: A red arrow points from the term $\frac{d}{dt}(J^{\text{frd}})$ to a red '0' above it, indicating it is zero.

Equação Dinâmica dos Momentos III

Usando a Matriz Produto Vetorial (6), finalmente temos que

$$J^{\text{frd}} \left(\dot{\omega}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \right) = -\tilde{\omega}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \left(J^{\text{frd}} \omega_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \right) + M^{\text{frd}},$$

$$\dot{\omega}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} = \left(J^{\text{frd}} \right)^{-1} \left[-\tilde{\omega}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \left(J^{\text{frd}} \omega_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \right) + M^{\text{frd}} \right] \quad (21)$$

Section 4

Modelo Matemático de uma Aeronave

O Modelo Dinâmico de Corpo Rígido I

Para obtermos o modelo dinâmico da aeronave, vamos usar as expressões anteriores, considerando as seguintes hipóteses:

- 1 A massa da aeronave é constante: $\dot{m} = 0$.
- 2 A distribuição de massa da aeronave é constante: $\frac{d}{dt} (J^{\text{frd}}) = 0$.
- 3 A aeronave é um corpo rígido sem partes móveis.
- 4 Aproximação de Terra Plana (Flat Earth):
 - 1 O Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{tp}}$ é inercial.
 - 2 A aceleração da gravidade é constante.

O Modelo Dinâmico de Corpo Rígido II

Definindo a posição do c.m. da aeronave em relação à origem do Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{tp}$ como $\mathbf{p}_{cm/tp}^{tp}$, a velocidade da aeronave em relação ao solo será

$${}^{tp}\dot{\mathbf{p}}_{cm/tp}^{tp} = \dot{\mathbf{p}}_{cm/tp}^{tp} = \mathbf{v}_{cm/tp}^{tp},$$

tal que

$$\dot{\mathbf{p}}_{cm/tp}^{tp} = C_{tp/frd} \mathbf{v}_{cm/tp}^{frd}. \quad (22)$$

O Modelo Dinâmico de Corpo Rígido III

Combinando as expressões (22), (12), (15) e (21), temos o modelo de corpo rígido, ou de 6 graus de liberdade, da aeronave, considerando a terra plana (Flat Earth):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_{\text{cm}/\text{tp}}^{\text{tp}} &= C_{\text{tp}/\text{frd}} \mathbf{v}_{\text{cm}/\text{tp}}^{\text{frd}}, \\ \dot{\Phi} &= H(\Phi) \boldsymbol{\omega}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}}, \\ \dot{\mathbf{v}}_{\text{cm}/\text{tp}}^{\text{frd}} &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \mathbf{v}_{\text{cm}/\text{tp}}^{\text{frd}} + \frac{1}{m} \mathbf{F}^{\text{frd}}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} &= (\mathbf{J}^{\text{frd}})^{-1} \left[-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \left(\mathbf{J}^{\text{frd}} \boldsymbol{\omega}_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} \right) + \mathbf{M}^{\text{frd}} \right].\end{aligned}\tag{23}$$

Note que este modelo pode ser usado para representar qualquer sistema mecânico que possa considerado um corpo rígido sujeito a uma força externa resultante $\mathbf{F}^{\text{frd}}$ e a um momento externo resultante $\mathbf{M}^{\text{frd}}$.

O Modelo Dinâmico de Corpo Rígido IV

As variáveis de estado deste modelo são:

- Posição Norte, Leste e “-Altitude” do c.m.:

$$\mathbf{p}_{\text{cm}/\text{tp}}^{\text{tp}} = [p_N \quad p_E \quad p_D]^\top.$$

- Ângulos de Euler:

$$\Phi = [\phi \quad \theta \quad \psi]^\top.$$

- Velocidade de Translação do c.m. em relação à origem do Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{tp}}$, representada no Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}}$:

$$\mathbf{v}_{\text{cm}/\text{tp}}^{\text{frd}} = [U \quad V \quad W]^\top.$$

- Velocidade Angular da aeronave em relação ao Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{tp}}$, representada no Referencial $\vec{\mathcal{F}}_{\text{frd}}$:

$$\omega_{\text{frd}/\text{tp}}^{\text{frd}} = [P \quad Q \quad R]^\top.$$

Section 5

Bibliografia

Bibliografia



Anton H.J. de Ruiter, Christopher J. Damaren, and James R. Forbes.

Spacecraft Dynamics and Control: An Introduction.

John Wiley and Sons, Ltd., 2013.



Wayne Durham.

Aircraft flight dynamics and control.

John Wiley & Sons, Ltd., 2013.



Brian L. Stevens, Frank L. Lewis, and Eric N. Johnson.

Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems.

John Wiley & sons, Inc., 2016.