

O Método da Função Descritiva

Leonardo A. B. Tôrres

Junho de 2017

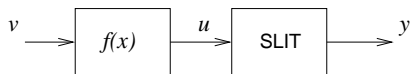
1 Sistemas Não Lineares: SLITs + Funções Não Lineares

2 O Método da Função Descritiva – MFD

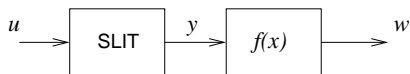
Sistemas de Hammerstein e de Wiener I

É comum encontrar sistemas não lineares resultantes da associação entre um Sistema Linear Invariante no Tempo – SLIT e uma função não linear. Duas classes bem conhecidas são os:

- Sistemas de Hammerstein



- Sistemas de Wiener

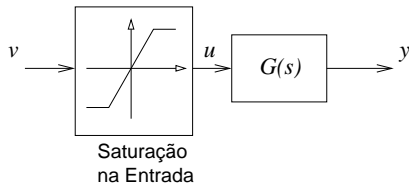


Em muitos casos as funções não lineares são *estáticas*, i.e. *sem memória*. Nos casos acima, $f(\cdot)$ representa uma função não linear.

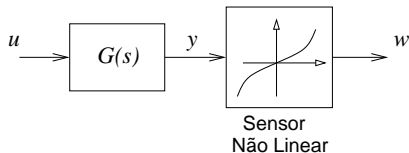
Sistemas de Hammerstein e de Wiener II

Por exemplo, dois casos típicos encontrados em controle são:

- Sistemas com saturação da variável manipulada (o que sempre acontece na prática):



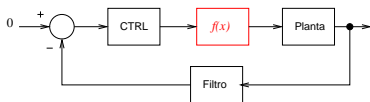
- Sistemas em que se emprega um instrumento de medição com características estáticas não lineares:



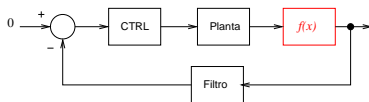
Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Quando consideramos a *Estabilidade Interna* de sistemas de controle em *Malha Fechada*, temos os seguintes casos:

Sistemas de Hammerstein



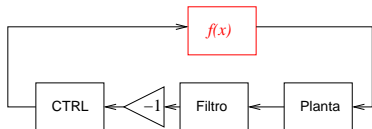
Sistemas de Wiener



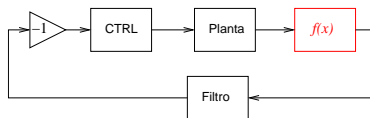
Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Quando consideramos a *Estabilidade Interna* de sistemas de controle em *Malha Fechada*, temos os seguintes casos:

Sistemas de Hammerstein



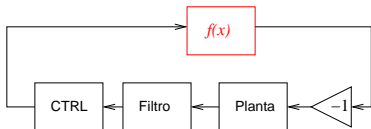
Sistemas de Wiener



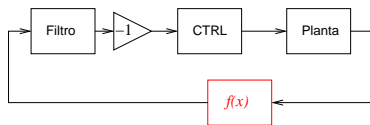
Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Quando consideramos a *Estabilidade Interna* de sistemas de controle em *Malha Fechada*, temos os seguintes casos:

Sistemas de Hammerstein



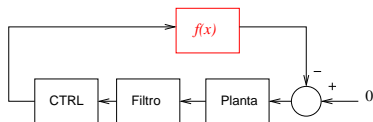
Sistemas de Wiener



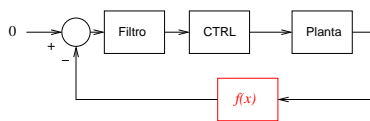
Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Quando consideramos a *Estabilidade Interna* de sistemas de controle em *Malha Fechada*, temos os seguintes casos:

Sistemas de Hammerstein



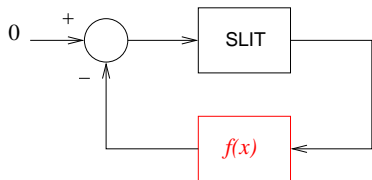
Sistemas de Wiener



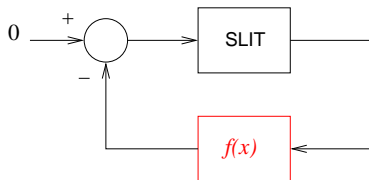
Análise de Estabilidade em Malha Fechada

Quando consideramos a *Estabilidade Interna* de sistemas de controle em *Malha Fechada*, temos os seguintes casos:

Sistemas de Hammerstein



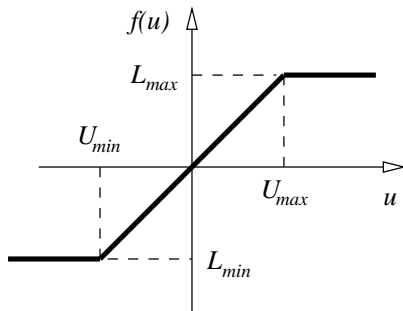
Sistemas de Wiener



Ou seja, ambos os casos conduzem ao **mesmo problema** de Análise de Estabilidade Interna.

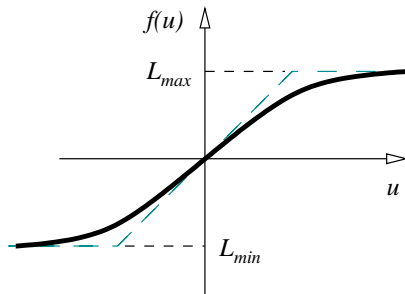
Algumas Funções Não Lineares Típicas I

1 Saturação:



Algumas Funções Não Lineares Típicas II

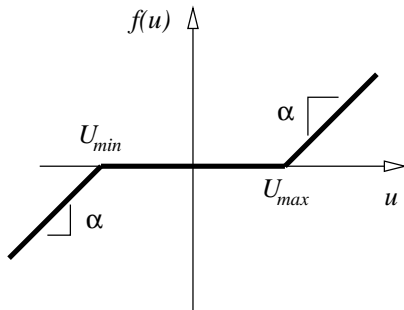
- 2 Saturação suave (função suave sigmoideal – “na forma de S”; i.e. com derivadas de todas as ordens, que aproxima a função de saturação):



Exemplo: $f(u) = L \tanh(ku)$. Obs.: Esta aproximação é frequentemente utilizada quando a continuidade da função não linear é um elemento importante nas provas matemáticas.

Algumas Funções Não Lineares Típicas III

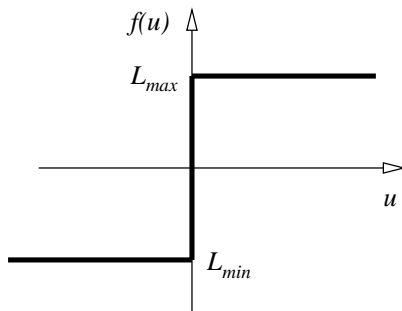
3 Zona Morta:



Observação interessante: $f_{\text{zona morta}}(u) = \alpha u - f_{\text{saturação}}(u)$.

Algumas Funções Não Lineares Típicas IV

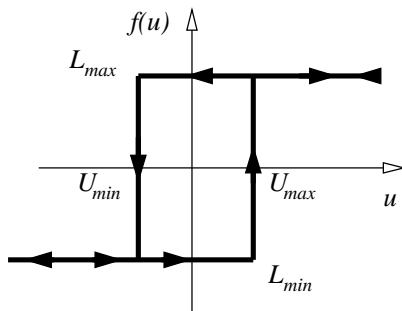
4 *On-Off* ou do tipo Relé:



Observação interessante: $f_{\text{relé}}(u) = f_{\text{saturação}}(u)$ quando $U_{\text{max}} = U_{\text{min}} = 0$.

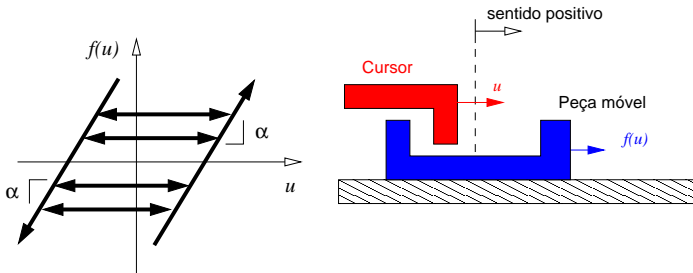
Algumas Funções Não Lineares Típicas V

5 Relé com Histerese:



Algumas Funções Não Lineares Típicas VI

6 Folga (*backlash*):



O Método da Função Descritiva – MFD

MFD

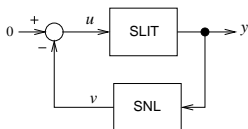
O Método da Função Descritiva é uma forma de se investigar a existência de *ciclos-limite* em sistemas que podem ser considerados como sendo formados por uma conexão de realimentação entre um SLIT e uma função estática não-linear.

O Método da Função Descritiva – MFD

MFD

O Método da Função Descritiva é uma forma de se investigar a existência de *ciclos-limite* em sistemas que podem ser considerados como sendo formados por uma conexão de realimentação entre um SLIT e uma função estática não-linear.

Considere o seguinte caso:

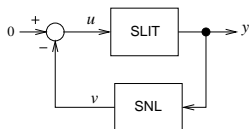


O Método da Função Descritiva – MFD

MFD

O Método da Função Descritiva é uma forma de se investigar a existência de *ciclos-limite* em sistemas que podem ser considerados como sendo formados por uma conexão de realimentação entre um SLIT e uma função estática não-linear.

Considere o seguinte caso:



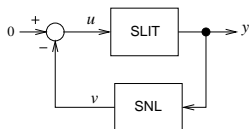
- 1 Há apenas um único subsistema Não Linear;

O Método da Função Descritiva – MFD

MFD

O Método da Função Descritiva é uma forma de se investigar a existência de *ciclos-limite* em sistemas que podem ser considerados como sendo formados por uma conexão de realimentação entre um SLIT e uma função estática não-linear.

Considere o seguinte caso:



- 1 Há apenas um único subsistema Não Linear;
- 2 O SLIT é tal que age como uma espécie de filtro que atenua fortemente qualquer outra componente de frequência presente que não seja a componente fundamental associada ao ciclo-limite cuja existência quer se investigar.

Ciclos-limite I

Definição

Um ciclo-limite é uma trajetória no Espaço de Estados que é uma curva fechada *isolada*. Por ser uma curva fechada, considerando-se verdadeiras as condições para unicidade das soluções, a trajetória necessariamente precisa ser periódica.

Note que um SLIT autônomo

$$\dot{x} = Ax,$$

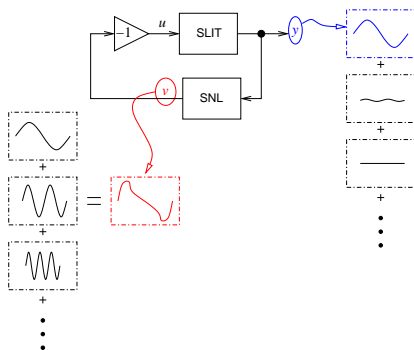
cuja matrix A tem autovalores puramente imaginários, com multiplicidade $m = 1$, é tal que para cada condição inicial $x(0)$ haverá uma oscilação sustentada correspondente a uma curva fechada no Espaço de Estados. Entretanto, essas curvas não são *isoladas* e por isso não são consideradas ciclos-limite.

Ciclos-limite II

Há pelo menos 3 tipos de ciclos-limite:

- 1 Estáveis (as trajetórias se aproximam do ciclo-limite, para todas as condições iniciais próximas),
- 2 Instáveis (as trajetórias se afastam do ciclo-limite, para todas as condições iniciais próximas), e
- 3 Semi-estáveis (as trajetórias podem se aproximar ou afastar do ciclo-limite, dependendo da condição inicial, mesmo sendo próxima à curva fechada).

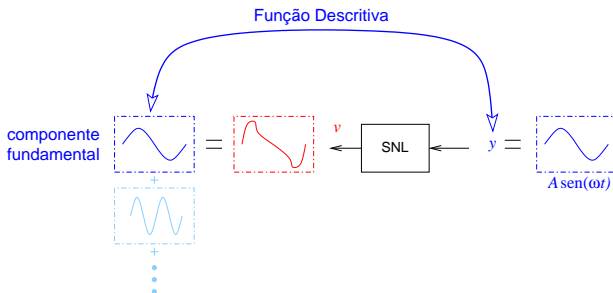
MFD – Investigando Ciclos-limite: Ideia Principal



O SLIT é visto como um filtro passa-baixas que atenua fortemente todas as componentes harmônicas do sinal de entrada periódico $v(t) = v(t + T)$, à exceção da componente fundamental.

A Função Descritiva – Formulação I

A partir das hipóteses feitas sobre os subsistemas não linear e linear, vê-se que o impacto da não linearidade na malha fechada está relacionado à produção da componente fundamental.



A relação entre um sinal senoidal $y(t) = A \text{sen}(\omega t)$ e a componente fundamental do sinal $v(t)$ é chamada de *Função Descritiva*.

A Função Descritiva – Formulação II

Partindo-se da hipótese de que $v(t) = v(t + T)$, este sinal pode ser representado pela Série de Fourier:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(n)e^{j\omega n t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T};$$

em que

$$C(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)e^{-j\omega n t} dt; \quad C(n) = a(n) + jb(n) \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Sabendo que $v(t)$ é um sinal real, tem-se que

$$C^*(n) = \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)e^{-j\omega n t} dt \right\}^* = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)e^{j\omega n t} dt = C(-n).$$

A Função Descritiva – Formulação III

Logo, combinando-se os pares

$$\begin{aligned}
 C(n)e^{j\omega nt} + C(-n)e^{-j\omega nt} &= C(n)e^{j\omega nt} + \{C(n)e^{j\omega nt}\}^*, \\
 &= 2a(n)\cos(\omega nt) + 2b(n)\text{sen}(\omega nt), \\
 &= M_n\text{sen}(\omega nt + \phi_n),
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 M_n &= 2|C(n)| = \sqrt{[2a(n)]^2 + [2b(n)]^2}, \\
 \phi_n &= \text{atan}\left(\frac{2a(n)}{2b(n)}\right).
 \end{aligned}$$

A Função Descritiva – Formulação IV

Para $n = 1$ (componente fundamental), lembrando que $a(n) = \text{Re}\{C(n)\}$ e $b(n) = \text{Im}\{C(n)\}$, a componente senoidal terá amplitude e fase:

$$M_1 = 2|C(1)| = \sqrt{[2a(1)]^2 + [2b(1)]^2},$$
$$\phi_1 = \text{atan}\left(\frac{2a(1)}{2b(1)}\right),$$

em que

$$2a(1) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \cos(\omega t) dt,$$

$$2b(1) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \text{sen}(\omega t) dt.$$

com $v(t)$ a saída do subsistema não linear excitado por uma senóide pura dada por $A \text{sen}(\omega t)$.

A Função Descritiva – Formulação V

Função Descritiva – Definição

A Função Descritiva de um subsistema não linear é dada pela razão:

$$N(A, \omega) = \frac{M_1 e^{j\phi_1}}{A e^{j0}} = \frac{2b(1) + j2a(1)}{A}, \quad (2)$$

que representa a relação entre magnitude e fase dos sinais de entrada e de saída, considerando-se que o sinal de entrada é uma senóide $A \sin(\omega t)$, e computando-se apenas a componente fundamental do sinal de saída correspondente.

Cálculo da Função Descritiva – Casos Especiais I

- Se o subsistema não linear é representado por uma função não linear $f(\cdot)$ *invariante no tempo* (todos os casos vistos anteriormente, à exceção dos casos de histerese e folga), então

$$\begin{aligned}2a(1) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \cos(\omega t) dt, \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(A \sin \omega t) \cos(\omega t) dt, \\ 2a(1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(A \sin \theta) \cos(\theta) d\theta. \quad (3)\end{aligned}$$

Cálculo da Função Descritiva – Casos Especiais II

De forma similar,

$$\begin{aligned}2b(1) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)\text{sen}(\omega t)dt, \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(A\text{sen}\omega t)\text{sen}(\omega t)dt, \\ 2b(1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(A\text{sen}\theta)\text{sen}(\theta)d\theta.\end{aligned}\tag{4}$$

Isto significa que para este caso especial a Função Descritiva não depende da frequência do sinal de entrada, mas apenas de sua amplitude:

$$N(A,\omega) \equiv N(A), \quad N(A) \in \mathbb{C}.$$

Cálculo da Função Descritiva – Casos Especiais III

- Se além disso, a função não linear é ímpar, i. e. $f(x) = -f(-x)$, que é um caso bastante representativo em aplicações práticas (vide funções não lineares anteriormente apresentadas), tem-se que

$$2a(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(A \sin \theta) \cos(\theta) d\theta = 0,$$

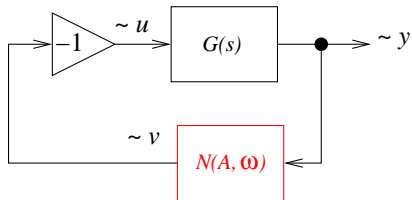
pois $f(A \sin(\theta)) \cos(\theta) = -f(A \sin(-\theta)) \cos(-\theta)$ será também uma função ímpar, integrada em um intervalo simétrico. Portanto, a Função Descritiva terá sua imagem no conjunto dos números reais:

$$N(A, \omega) \equiv N(A) = \frac{2b(1)}{A} = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \theta) \sin(\theta) d\theta,$$

em que $N(A) \in \mathbb{R}$.

MFD – Análise I

Partindo-se das hipóteses anteriormente declaradas, o sistema em malha fechada pode ser representado **aproximadamente** por:



em que o subsistema não linear foi substituído pela Função Descritiva $N(A, \omega)$ e o SLIT está representado por sua Função de Transferência $G(s)$.

MFD – Análise II

Note que a Equação Característica correspondente ao laço de malha fechada mostrado na figura anterior pode ser obtida de:

$$Y(j\omega) = -G(j\omega)N(A,\omega)Y(j\omega) \Leftrightarrow Y(j\omega) [1 + G(j\omega)N(A,\omega)] = 0.$$

Como essa expressão deve ser válida para $Y(j\omega) = Ae^{j\omega t}$, $\forall \omega \geq 0$, conclui-se que

$$1 + G(j\omega)N(A,\omega) = 0,$$

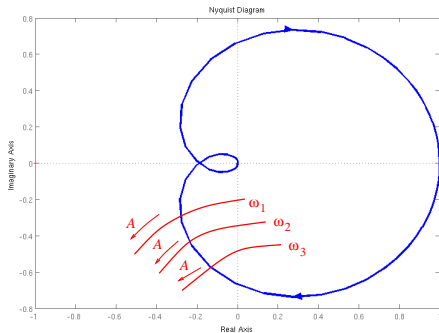
e, portanto,

$$G(j\omega) = \frac{-1}{N(A,\omega)}$$

É importante notar a semelhança com a Equação Característica $G(j\omega) = -1$, comumente encontrada ao se analisar a estabilidade do sistema em malha fechada, a partir do diagrama de Nyquist de $G(s)$.

MFD – Análise III

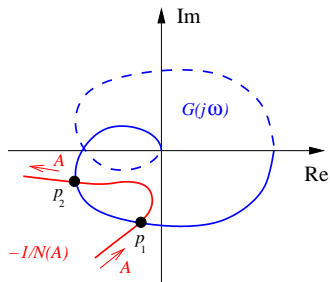
De fato, ao invés de se buscar contabilizar os envoltimentos do ponto -1 , no plano $G(j\omega)$, busca-se os envoltimentos no sentido horário de algum ponto $\frac{-1}{N(A,\omega)}$, para algum valor de amplitude A e algum valor de frequência ω .



Na figura ao lado, em vermelho estão representadas as curvas correspondentes a $\frac{-1}{N(A,\omega)}$ para diferentes valores de frequência, variando-se em cada curva o valor da amplitude A .

MFD – Estabilidade dos Ciclos-Limite

Em alguns casos pode ocorrer mais de um cruzamento entre o diagrama de Nyquist do subsistema linear e o negativo inverso da Função Descritiva. No caso abaixo considere, para fins de argumentação, que $G(s)$ é um SLIT estável.



Note que o cruzamento em p_1 representa uma condição de ciclo-limite que não pode ser observada na prática. Caso a amplitude inicial da oscilação seja grande o suficiente tal que há um envolvimento de $-1/N(A, \omega)$, o aumento da amplitude irá conduzir a oscilação naturalmente para o ponto p_2 . Caso p_2 seja ultrapassado, a estabilidade do sistema forçará a amplitude a decrescer, conduzindo o sistema novamente para p_2 .

MFD – Observações Importantes

- O Método da Função Descritiva para previsão de existência de ciclos-limite (oscilações) em malha fechada é um **método aproximado**. Não se tem garantias de que ele fornecerá a resposta correta. De fato, sabe-se que a resposta será sempre um pouco imprecisa, pois parte-se da hipótese de que na entrada do subsistema não linear há apenas uma sinal senoidal perfeito.

MFD – Observações Importantes

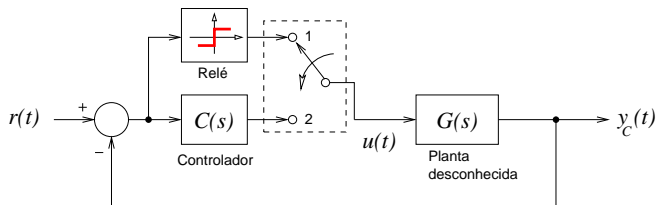
- O Método da Função Descritiva para previsão de existência de ciclos-limite (oscilações) em malha fechada é um **método aproximado**. Não se tem garantias de que ele fornecerá a resposta correta. De fato, sabe-se que a resposta será sempre um pouco imprecisa, pois parte-se da hipótese de que na entrada do subsistema não linear há apenas uma sinal senoidal perfeito.
- Embora se tenha enfatizado o caso SISO, há extensões da técnica para sistemas MIMO.

MFD – Observações Importantes

- O Método da Função Descritiva para previsão de existência de ciclos-limite (oscilações) em malha fechada é um **método aproximado**. Não se tem garantias de que ele fornecerá a resposta correta. De fato, sabe-se que a resposta será sempre um pouco imprecisa, pois parte-se da hipótese de que na entrada do subsistema não linear há apenas uma sinal senoidal perfeito.
- Embora se tenha enfatizado o caso SISO, há extensões da técnica para sistemas MIMO.
- A técnica é às vezes chamada de *Método do Equilíbrio Harmônico* (*Harmonic Balance*), apesar de haver divergências sobre a propriedade de se usar esse nome (vide [3]), uma vez que Equilíbrio Harmônico é uma técnica correlata ao MFD, usada em Eng. Elétrica, mas é algo diferente.

MFD – Exemplo de Aplicação: *Relay Auto-tuning*

Na indústria existe um algoritmo de **intonia automática de controladores PID** de grande sucesso comercial – o *Método de Auto-Sintonia via Relé* (*Relay Auto-tuning*) – cujo fundamento é o MFD.



Com a chave na posição 1, utiliza-se o relé na malha fechada do sistema de controle para se conseguir informações acerca do ganho crítico K_{CR} e da frequência crítica f_{CR} correspondentes ao limiar de estabilidade do sistema quando controlado por um simples controlador proporcional.

MFD – Exemplo de Aplicação: *Relay Auto-tuning*

- 1 Os dois parâmetros K_{cr} e f_{cr} podem ser usados, *por exemplo*, para se sintonizar K_p , T_i e T_d de um controlador PID, usando a Tabela fornecida no Método de Ziegler-Nichols de Malha Fechada [1].

MFD – Exemplo de Aplicação: *Relay Auto-tuning*

- 1 Os dois parâmetros K_{cr} e f_{cr} podem ser usados, *por exemplo*, para se sintonizar K_p , T_i e T_d de um controlador PID, usando a Tabela fornecida no Método de Ziegler-Nichols de Malha Fechada [1].
- 2 K_{cr} e f_{cr} são obtidos medindo-se a amplitude das oscilações na saída da planta, e o período do sinal chaveado na saída do relé. Isto é, supõe-se que haverá oscilações ao se colocar o relé na malha (o que pode não ocorrer).

MFD – Exemplo de Aplicação: *Relay Auto-tuning*

- 1 Os dois parâmetros K_{cr} e f_{cr} podem ser usados, *por exemplo*, para se sintonizar K_p , T_i e T_d de um controlador PID, usando a Tabela fornecida no Método de Ziegler-Nichols de Malha Fechada [1].
- 2 K_{cr} e f_{cr} são obtidos medindo-se a amplitude das oscilações na saída da planta, e o período do sinal chaveado na saída do relé. Isto é, supõe-se que haverá oscilações ao se colocar o relé na malha (o que pode não ocorrer).
- 3 A ocorrência de oscilações e a relação entre seu período e f_{cr} , bem como a relação entre sua amplitude e K_{cr} , podem ser determinados usando o MFD.

MFD – Exemplo de Aplicação: *Relay Auto-tuning*

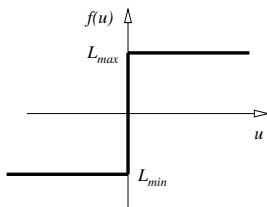
- 1 Os dois parâmetros K_{cr} e f_{cr} podem ser usados, *por exemplo*, para se sintonizar K_p , T_i e T_d de um controlador PID, usando a Tabela fornecida no Método de Ziegler-Nichols de Malha Fechada [1].
- 2 K_{cr} e f_{cr} são obtidos medindo-se a amplitude das oscilações na saída da planta, e o período do sinal chaveado na saída do relé. Isto é, supõe-se que haverá oscilações ao se colocar o relé na malha (o que pode não ocorrer).
- 3 A ocorrência de oscilações e a relação entre seu período e f_{cr} , bem como a relação entre sua amplitude e K_{cr} , podem ser determinados usando o MFD.
- 4 A grande vantagem de se usar o método de Auto-sintonia via Relé está em não se precisar ajustar um controlador proporcional para levar o sistema em malha fechada ao limiar da estabilidade – situação bastante perigosa e por vezes indesejada!

Exemplo: *Relay Auto-tuning I*

- Considere que a planta (desconhecida) é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

- A Função Descritiva associada ao Relé pode ser obtida lembrando-se que para uma entrada senoidal pura do tipo $u = A\sin(\omega t)$, a saída $f(u)$ do relé será uma onda quadrada de mesma frequência ω e amplitude igual a amplitude L_{\max} (assumindo-se $L_{\min} = -L_{\max}$):



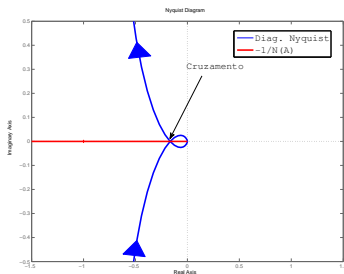
Exemplo: *Relay Auto-tuning II*

- Lembrando que a função não linear do tipo Relé é invariante no tempo e ímpar, sabemos que a Função Descritiva só dependerá da amplitude da entrada u (não dependerá da frequência), e terá valores reais.
- A Função Descritiva, portanto, será dada por

$$\begin{aligned}N_{\text{relé}}(A) &= \frac{2b(1)}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(A\text{sen}\theta)\text{sen}(\theta)d\theta, \\ &= \frac{1}{A\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -L_{\text{max}}\text{sen}(\theta)d\theta + \int_0^{\pi} L_{\text{max}}\text{sen}(\theta)d\theta \right], \\ &= \frac{2}{A\pi} \int_0^{\pi} L_{\text{max}}\text{sen}(\theta)d\theta = \frac{4}{\pi} \frac{L_{\text{max}}}{A}.\end{aligned}$$

Exemplo: Relay Auto-tuning III

- Analisando o diagrama de Nyquist de $G(s)$, juntamente com os valores de $\frac{-1}{N_{\text{relé}}(A)} = -\frac{\pi}{4} \frac{A}{L_{\text{max}}}$, para $A \in (0; \infty)$:



vê-se que haverá um cruzamento que corresponde exatamente ao ponto em que a fase de $G(j\omega)$ é 180° , e a magnitude de $G(j\omega)$ é igual ao inverso da margem de ganho.

Exemplo: *Relay Auto-tuning* IV

- Portanto, medindo-se a amplitude da saída do SLIT, que é, em princípio, uma boa **aproximação** do valor A (vide hipóteses sobre o efeito de filtro passa-baixas para o SLIT), e conhecendo-se o valor de L_{\max} , tem-se uma aproximação do valor do ganho crítico:

$$K_{\text{cr}} \approx \left[\frac{1}{N_{\text{relé}}(A)} \right] = -\frac{4}{\pi} \frac{L_{\max}}{A}.$$

- Além disso, a oscilação exibida terá o mesmo valor de frequência em que a fase de $G(j\omega)$ é 180° , que é exatamente a frequência crítica. Portanto, medindo-se o período T_r do sinal produzido pelo relé (é provavelmente mais fácil de se medir o período a partir desse sinal), tem-se que:

$$f_{\text{cr}} = \frac{\omega_{\text{cr}}}{2\pi} \approx \frac{1}{T_r}.$$

Exemplo: *Relay Auto-tuning V*

- Consultando a Tabela do Método Ziegler-Nichols de Malha Fechada, podemos sintonizar um controlador P, PI, ou PID (pode ser encontrada em [1], pág. 298, Tabela 13.1):

Tipo	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_{cr}$	-	-
PI	$0,45K_{cr}$	$T_{cr}/1,2$	-
PID	$0,6K_{cr}$	$T_{cr}/2$	$T_{cr}/8$

É importante lembrar que as indicações de parâmetros na tabela acima não garantem desempenho e estabilidade satisfatórios em todas as situações, pois a tabela foi construída considerando casos específicos nos quais pode não estar incluído o tipo de planta a ser controlada. É claro que existem outras Tabelas de sintonia correspondentes a outros métodos que poderiam ser usadas.

Referências Bibliográficas I



Dale E. Seborg, Duncan A. Mellichamp, Thomas F. Edgar, and Francis J. Doyle III.

Process Dynamics and Control.

Wiley, 1st edition, 1989.



Jean-Jacques Slotine and Weiping Li.

Applied Nonlinear Control.

Prentice Hall, 1990.



M. Vidyasagar.

Nonlinear Systems Analysis.

Prentice-Hall International, Inc., second edition, 1993.