Descrição de Processos e Termos Utilizados com Ferramentas de Medição FFT

Walter Ullmann, engº
dBW Ltda / Active Media Ltda
Rua Alba 1238
04346-000 São Paulo SP Brasil
walter_ullmann@hotmail.com

Resumo - Este trabalho tem por finalidade, descrever aplicações, processos e termos utilizados em sistemas de medição que se utilizem dos princípios da *Transformada Rápida de Fourier* em sistemas acústicos e eletro-acústicos

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho visa descrever rapidamente os processos e termos utilizados em ferramentas de medição do tipo ***FFT***, facilitando o manuseio destas.

A transformada de *Fourier* baseia-se numa descoberta do matemático francês *Jean Baptiste Joseph Fourier*, que qualquer fenômeno de natureza periódica pode ser decomposto em uma série infinita de funções senoidais, com amplitudes variáveis e frequências múltiplas de uma fundamental e fases coincidentes, inversas ou variáveis.

O inconveniente deste processo é que ele deve necessariamente lidar um fenômenos que sejam periódicos, ou seja se repitam de tempos em tempos - *PERÍODO*. Após um estudo mais aprofundado do assunto, Fourier concluiu que se esse período fosse extremamente grande, tendendo ao infinito, sua descoberta poderia ser aplicada inclusive a fenômenos com duração muito curta - *impulsos*.

Isto permite que um único pulso, de duração e intensidade mensuráveis, possa ser *desmontado* em termos das frequências e intensidades que o compõem. Ou seja, transforma-se um fenômeno que existe apenas no domínio do tempo, em um análogo que passa a existir também no domínio da frequência.

Durante este processo de transformação, o impulso inicial vai sendo dividido em uma quantidade praticamente infinita de intervalos menores, os quais contém todas as informações pertinentes a composição desse pulso em termos de frequências, que existem naquele momento específico. Para fins práticos, esse processo não se mostra vantajoso, em razão de utilizar uma quantidade muito grande de amostras e cálculos.

Mas se forem impostas certas restrições a esse processo de *fatiamento* da amostra, poderemos trabalhar com relativa rapidez e precisão de cálculos. Portanto, a chamada ***TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER*** ou ***FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)*** nada mais é do que a própria transformada, porém envolvendo um alto grau de restrições.

A mais importante é relativa a menor quantidade de fatias ou amostras que pode ser feita a partir do sinal analisado, sem que estas percam suas características e propriedades de ainda permitir a reconstrução do espectro de frequências daquele sinal.

Embora os princípios das análises por ***FFT*** de sinais de audio, sejam relativamente antigos e conhecidos, sua aplicação era pouco prática ou inviável, pelo seguinte :

- Quantidades de cálculos necessários em pequeno espaço de tempo.
- Qualidade da transformação do sinal a ser analisado, de análgico para digital.

Com a popularização dos computadores pessoais, barateamento dos custos de micro-processadores; melhora nos processos de conversão análgico-digital, (DSP's / algoritmos / etc), a aplicação destes métodos passou a ser cada vez mais simples e pratica.

2. TRANSFORMADA DE FOURIER

Uma vez que qualquer forma de onda pode ser decomposta em uma séries infinita de funções senoidais mais simples, podemos descrever cada uma destas componentes da seguinte forma :

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Onde :

A	Amplitude
t	tempo
ω	freq. angular (rad/s) ou $\omega = 2\pi f$
f	frequência (Hz)
ϕ	angulo de fase (rad)

Uma série de Fourier é composta pela soma de (n+1) das componentes acima, portanto uma forma de escrever-se essa função seria :

$$F(t) = \left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{(n=1)}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)\right]$$

Onde :

a e b	amplitudes no ponto n
N	(meio) período da forma de onda
t	tempo
n	ponto qualquer

A definição acima deve ainda ser manipulada adequadamente para que possamos incluirmos dados na forma de números complexos, supondo-se que a função acima converge para f(t), assim teríamos :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a \quad e^{\frac{in\pi t}{N}}$$

Onde :

a	amplitude no ponto n
N	(meio) período da forma de onda
t	tempo
n	ponto qualquer
e^x	função exponencial

Até este ponto estamos supondo que as formas de onda analisadas são periódicas, ou seja, em algum momento irão repetir seu *formato*, mas isso acaba por impor varias restrições ao uso das séries na análise de certos tipos de sinais ou formas de onda, por exemplo, um pulso ou transiente. Este *inconveniente* pode ser contornado com algumas imposições e suposições, a mais importante é que deveremos imaginar o período (***N***) da forma de onda como sendo *INFINITO*.

Com esta suposição e as devidas manipulações algébricas, chegamos ao que se chama de *PAR DE TRANSFORMADAS DE FOURIER* :

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(T) e^{-i\pi f T} dT$$

$$e^{\pm 2\pi f T} = \cos(2\pi f T) \pm i \sin(2\pi f T$$

$$x(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} Sx(f) e^{i\pi f T} dT$$

Onde :

$S_x(f)$	Transformada Direta de FOURIER
$x(T)$	Transformada Inversa de FOURIER
$e^{(\pm 2\pi f T)}$	Núcleo (kernel) da Transformada

3. ANÁLISE DA FORMA DE ONDA

Qualquer forma de onda que venha a ser analisada por meio da transformada de Fourier devera ser capturada por um dispositivo qualquer e convertida de seu formato analógico para o equivalente digital. Uma vez nesse formato, o processo de transformação consiste em cortar a forma de onda em fatias de tempo, cuja espessura deveria ser próxima de zero, ou infinitesimal. Surge aqui o que poderia se caracterizar como um problema, para que essa espessura seja próxima de zero, o processo de conversão analógico-digital deveria ser extremamente rápido, o mesmo acontecendo para o processo de transformação tempo-frequência. Esta necessidade iria obrigar a utilização de microprocessadores cada vez mais rápidos e potentes e de quantidades extremamente grandes de memoria (*RAM*). Porém estes inconvenientes podem ser contornados se pudermos estabelecer de antemão um tamanho ou espessura mínima para essa fatia de tempo, na qual durante sua transformação não sejam perdidas informações a respeito de cada uma das componentes da mesma em termos de frequência, amplitude e fase.

Para que isto aconteça, torna-se necessário que se utilize uma variante do par de transformadas descrito acima, denominada *TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER*, que pode ser obtida assumindo-se a seguinte definição :

> “ Para descrever-se plenamente uma frequência em um espectro de frequência, são necessários dois valores calculados, amplitude e a fase, ou então as partes reais e imaginarias de determinada frequência.”

E fazendo-se as devidas manipulações chega-se à :

$$F_k = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{\frac{2\pi i(2j)k}{N}} f_{2j} + e^{\frac{2\pi i}{N}} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{\frac{2\pi i(2j)k}{N}} f_{2j+1}$$

Podendo ser reescrita de uma forma mais elegante, ou seja :

$$F_k = F_{par}^{k} + W_N^k \, F_{impar}^{k}$$

Onde os termos são :

$$F_{par}^{k} = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{\frac{2\pi i(2j)k}{N}} f_{2j}$$

$$F_{impar}^{k} = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{\frac{2\pi i(2j)k}{N}} f_{2j+1}$$

$$W_N^k = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

Estas equações ou termos significam que para obtermos uma transformada de Fourier de comprimento N, serão necessárias duas transformadas - $\boldsymbol{F}^{par}$ e $\boldsymbol{F}^{impar}$ - de comprimento (N/2) nos elementos par e ímpar. Estas transformadas podem ser combinadas através do fator $\boldsymbol{W}^k$ apropriado de maneira a obtermos a transformada de Fourier $\boldsymbol{F}$.

Uma vez que cada sub-transformada - $\boldsymbol{F}^{par}$ e $\boldsymbol{F}^{impar}$ - deve ter sua soma acontecendo a cada $0 \leq k \leq N-1$ intervalos e o comprimento deve ser N, então serão necessárias para a soma direta N^2 operações.

Estes dados nos permitem então estabelecer, todos os parâmetros para que a amostragem ou fatiamento da forma de onda ou sinal de entrada, possa ocorrer da maneira mais rápida e simples possível, sem que no entanto venhamos a perder as características de composição da mesma no domínio da frequência.

Figura 1 : Série de Tempo

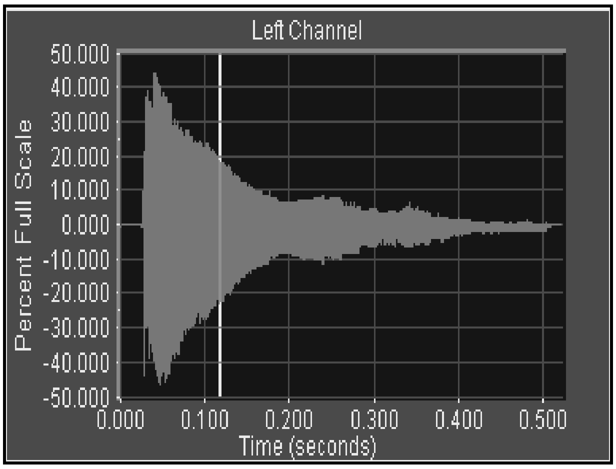
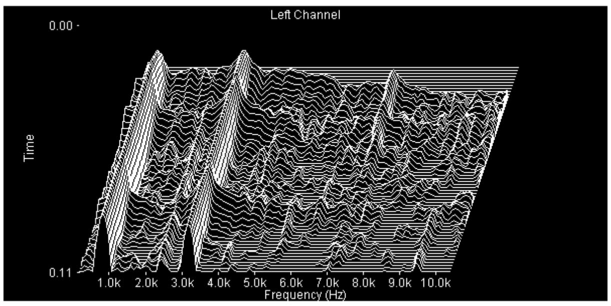


Figura 1 : Vista Waterfall da Figura 1



(segue)

Figura 1 : Serie de Freqüência em T= 0.115 seg da Fig. 1

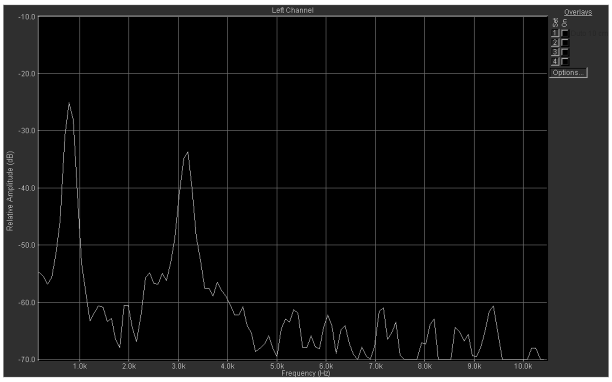
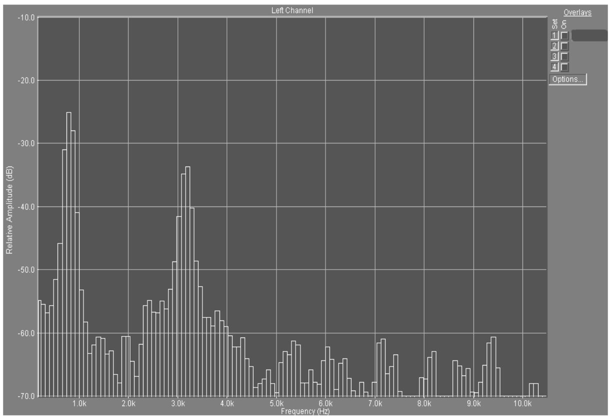


Figura 4 : Serie de Freqüência em T= 0.115 seg da Fig. 1, em modo de Analisador de Tempo Real



3.1. NUMERO DE AMOSTRAS

Sera dado por :

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

Onde :

N	*numero de amostras*
T	*Janela de tempo (amostragem)*
Δt	*Tamanho da amostra em termo de tempo (fatia)*

3.2. SEPARAÇÃO DE FREQUÊNCIAS OU RESOLUÇÃO DE FREQUÊNCIAS

É dado por :

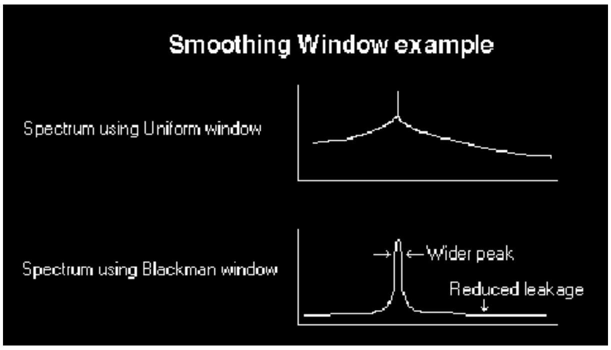
$$\Delta f = \frac{2 f_{max}}{N}$$

Onde

N	*numero de amostras*
fmax	*Frequência máxima de amostragem (Teorema de Nyquist)*
Δf	*Espaçamento de Frequências ou Resolução*

3.3. O PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO (Smoothing)

A transformação de uma forma de onda no domínio do tempo para o domínio da frequência através da aplicação das transformadas de Fourier pode ser entendida como um processo de filtragem. Como tal quando se esta manuseando um sinal de comportamento previsível, por exemplo uma senóide, podemos esperar que tanto o inicio, quanto seu término ocorram no mesmo valor de amplitude, idealmente *ZERO*. Quando este sinal for amostrado através de técnicas de ***FFT***, o resultado será uma linha continua, com um pico na frequência da senóide. Conforme podemos observar nas figuras a seguir.



Porém, se estivermos lidando com sinais cujo comportamento não é previsível, ruído rosa por exemplo, onde a amplitude ou nível do sinal não é *ZERO* em ambas extremidades simultaneamente, ira ocorrer uma falha (descontinuidade) na linha que esta sendo mostrada.
Isto acaba por provocar um *ESPALHAMENTO* dos dados que estariam contidos no ponto onde ocorre essa descontinuidade, que vira a contaminar as amostras seguintes. Esse espalhamento é também

chamado de *VAZAMENTO* .

Um processo para se diminuir os efeitos desse vazamento consiste em forçar-se a passagem do inicio e termino da amostra pelos pontos onde a amplitude seja *ZERO*. Em razão dos algoritmos utilizados pelas técnicas de *FFT* toda vez que se força esse procedimento, acaba-se introduzindo uma distorção à amostra. O efeito mais direto da introdução dessa distorção é a diminuição da resolução da análise que esta acontecendo.

Na pratica, após termos determinado a resolução de análise, a taxa de amostragem, torna-se necessário definirmos qual o processo que será utilizado para *corrigir* tais vazamentos.

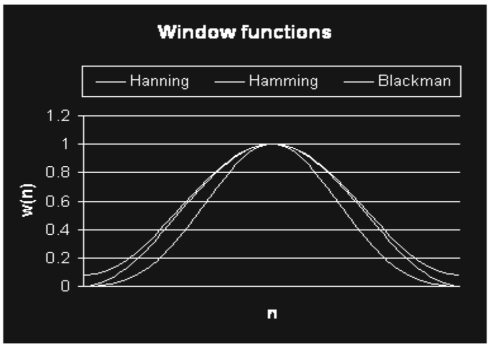
Este processo ira suavizar a curva ou linha mostra, acrescentando ao mesmo tempo uma certa correção para as distorções introduzidas.

Cabe lembrar que para cada tipo de análise existe um método de suavização - ***SMOOTHING*** - diferente, que esta intrinsecamente vinculado ao tipo de sinal analisado ou ao tipo de análise a ser feita. Sendo o mesmo puramente matemático é integralmente controlado por meio de funções, bem definidas. Algumas delas são mostradas na tabela a seguir :

Tabela 1

Processo de Suavização	Função
Retangular ou Uniforme	1
Hanning	$+ \ 0.5 \cos [\ n \ \pi \ I \ (\ m \ + \ 1$
Hamming	$).54 \ + \ 0.46 \cos (\ n \ \pi \ I \ m$
Blackman	$0.42 + 0.5 \cos (\ n \ \pi \ I \ \ m \ ) + 0.08 \cos (\ 2 \ n \ \pi \ I \ m \ )$
Kaiser	$I_0 \ (\ \alpha \ \sqrt{[} \ 1 \ - \ \frac{n^2}{m^2} \ ] \ ) \ / \ I_0 \ (\ \alpha \ )$

O efeito de algumas destas funções é mostrado na figura a seguir :



3.4. CARACTERÍSTICAS E APLICAÇÕES DAS JANELAS DE SUAVIZAÇÃO

Uma analise de um sinal a partir de uma Transformada de Fourier, nos indica duas maneira de enxergar um sinal, ou como uma serie de tempo, ou como uma serie de frequencias, assim se alterarmos o tipo de sinal em um determinado período de tempo, estaremos também alterando a natureza do espectro no domínio da freqüência. Com isso torna-se necessário aplicarmos uma determinada correção nessa janela de tempo que estaremos analisando. Essa é exatamente a função das Janelas de Suavização, que podem ser mais apropriadamente consideradas como sendo um filtro.

Torna-se implícito então, que a cada tipo de sinal a ser analisado, devermos aplicar um tipo especifico de suavização para podermos melhorar a qualidade de nossa analise.

Os tipos mais usados para estas janelas ou funções de suavização são mostrados na tabela 2.

3.5. A AMOSTRAGEM

Na maioria dos softwares dedicados a análise de ***FFT***, a taxa de amostragem está diretamente vinculada ao funcionamento da placa de som. Sendo a maior taxa de amostragem de gravação de audio, aquela oferecida pela placa. A menor, obviamente, podera ser selecionada nas opções do software da própria placa. Usualmente, estes valores podem ser de ***44.10 kHz*** ou ***48 kHz***. Sendo então responsáveis pela ***TAXA DE AMOSTRAGEM*** do analisador de ***FFT***.

Os valores descritos na tabela 3, estão

vinculadas a uma taxa de amostragem de gravação da placa de ***44.10 kHz*** :

3.6. FILTRO DE DECIMAÇÃO (Decimation Filter)

Consiste basicamente em amostrar-se o sinal de entrada a uma taxa menor do que aquela original. Genericamente, se o sinal de entrada for amostrado inicialmente a uma taxa de 44.10 kHz, após o processo de decimação essa taxa poderia ser equivalente a 22.05 kHz, ou 11.025 kHz e assim por diante. O valor que determina a proporção em a taxa de amostragem original será reduzida é denominado de TAXA DE DECIMAÇÃO - Decimation Ratio - e podendo ser qualquer numero inteiro, variando entre 1 e infinito. Na pratica, encontra-se um limite superior por volta de 50.

O processo quando aplicado em um sinal que esta sendo amostrado, consiste em *descartar-se* ***(n-1)*** amostras a cada ***(n)*** amostragens. O processo permite aumentar-se a resolução das analises, mas implica na redução da faixa de frequências das amostras analisadas, visto que esse processo também vem a configurar um filtro passa baixas.

3.7. FILTRO ANTI-ALIAS (Aliasing Filter)

Este fenômeno pode criar falsas componentes de sinal, que são virtualmente impossíveis de serem distinguidas dos sinais originais, e ocorre normalmente durante o processo de gravação do sinal amostrado. De maneira geral este fenômeno ocorre quando o sinal que esta sendo amostrado contem frequências maiores que metade do valor da frequência de amostragem.

Pode ser evitado usando-se uma frequência de amostragem de pelo menos duas vezes o valor da mais alta frequência do sinal que se deseja amostrar.

3.8. PROCESSAMENTO DE MÉDIAS (Averaging)

Ao analisar-se um sinal qualquer com um dispositivo do tipo ***FFT***, são feitas diversas amostragens do sinal de entrada e muitas vezes os ***FRAMES*** ou amostras apresentadas no visor ou tela podem mostrar variações pronunciadas para dois ou mais conjuntos de dados que ocorrem na mesma frequência em tempos consecutivos. Então, para que haja uma certa coerência nestes dados, faz-se necessária utilização de técnicas que permitam torna-las mais reais.

Esses processos consistem em agregar-se um determinado numero de ***FRAMES*** ou amostras e realizar consecutivamente sua média. Esta media é feita determinando-se um numero adequado de amostras a serem somadas. Tal numero pode variar conforme tipo do *software* e/ou *hardware* entre ***1*** e ***infinitas*** amostras. Valores usuais estão entre ***1*** e ***256***.

A média dos dados obtidos pode ser feitas de várias formas diferentes, cada uma delas com aplicações relativamente especificas, a saber :

- Processo Linear, as amostras são somadas ponto a ponto, e o resultado dividido pela quantidade de amostras escolhidas.
- RMS, média quadrática. Semelhante à linear.
- Vetorial média complexa, transforma os dados em um vetor, são computados amplitude, frequência e fase de cada um deles.
- Exponencial as amostras são analisada pela ordem de precedência, sendo que aquelas mais *antigas*, tem valor ou peso menor do que aquelas mais novas.

Na pratica, quando se esta trabalhando com sinais onde ocorram variações muito rápidas de frequência deve-se empregar quantidades de amostras - blocos de média - baixas.

Caso o sinal analisado tenha um tendo de decaimento muito rápido, deve-se utilizar medias do tipo exponencial.

3.9 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

É a comparação entre dois sinais, um tido com referencia e outro como analisado.

Para a obtenção de uma função de transferência valida, ambos sinais - referencia e medido - devem estar sincronizados ou alinhados no tempo. Para isto emprega-se uma ferramenta especifica que determina o tempo de atraso entre ambos e se encarregar de alinhar os dados do sinal de referencia com os de medida.

3.10. COERÊNCIA (Coherence)

Mostra a ***linearidade*** ou ***qualidade*** de uma função de transferência. Compara os sinais de referência e o analisado, quanto maior a diferença entre ambos menor será sua coerência.

Bibliografia :

1 - SpectraLab - User guide - versão 4.43.10
Soundtechnology Inc.
2 - SmaartLive User Guide R 4.0
SIA Software Company Inc.
3 - Principles of Digital Audio
Ken Pohlmann 3th Edition
McGrawHill
4 - Sound System Engineering
Davis & Davis 2th Edition SAAMS
5 - The Concept of the Fast Fourier Transform
Taku Tokuyasu (web)
www.cs.berkeley.edu/~tokuyasu/cs252-3/node8.html
6 - Waveform expressions in the FFT spectrum analyser demonstration (web)
www.dsptutor.freeuk.com/jsanalyser/expressions.html
7 - Window functions (web)
www.dsptutor.freeuk.com/WindowFunction/notes.html
8 - Time Windows
(BO0171-11) Application Notes
Bruel & Kjaer
9 - Practical Use of the HILBERT TRANSFORM
(BO0173-11) Application Notes
Bruel & Kjaer

Tabela 2 - Janelas de Suavização

Tipo de Janela	*Resolução de Frequência*	*Resolução de Amplitude*	*Supressão de Vazamentos*	*Aplicação Típica*
Bartlett	*Boa*	*Boa*	*Moderada*	*Genérica*
Blackman	*Boa*	*Fraca*	*Excelente*	*Medidas de distorção*
Flattop	*Fraca*	*Ótimo*	*Moderada*	*Medições de Amplitude Precisas*
Hamming	*Boa*	*Boa*	*Boa*	*Genérica*
Hanning	*Boa*	*Excelente*	*Excelente*	*Medidas de distorção e Ruído*
Kaiser	*Boa*	*Boa*	*Fraca*	*Genérica*
Parzen	*Boa*	*Boa*	*Fraca*	*Genérica*
Triangular	*Boa*	*Boa*	*Fraca*	*Genérica*
Uniforme ou Retangular	*Excelente*	*Fraca*	*Fraca*	*Alta resolução de frequência*

Tabela 3 - Resolução de Frequencias e Amostragem

FFT Size Frame	*Resolução de Frequência*	*Frequência Mínima (Hz)*	*Frequência Máxima (Hz)*
65.386	*0,677*	*1,346*	*22.050,0*
32.768	*1,346*	*2,692*	*22.050,0*
16.384	*2,692*	*5,383*	*22.050,0*
8.192	*5,383*	*10,767*	*22.050,0*
4.096	*10,767*	*21,533*	*22.050,0*
2.048	*21,533*	*43,066*	*22.050,0*
1.024	*43,066*	*86,133*	*22.050,0*
512	*86,133*	*172,265*	*22.050,0*
256	*172,266*	*344,531*	*22.050,0*
128	*344,531*	*689,062*	*22.050,0*
64	*689,062*	*1.378,425*	*22.050,0*
32	*1.378,125*	*2.756,250*	*22.050,0*

Tabela 4 - Tabela de Cálculo de Velocidade do Som em função da Temperatura

Temp em °C	Temp em °F	Velocidade do Som em m/s	Velocidade do Som em ft/s		Temp em °C	Temp em °F	Velocidade do Som em m/s	Velocidade do Som em ft/s
10.00	50.00	337.27	1,106.60		25.00	77.00	346.09	1,135.53
11.00	51.80	337.87	1,108.55		26.00	78.80	346.67	1,137.43
12.00	53.60	338.46	1,110.50		27.00	80.60	347.25	1,139.33
13.00	55.40	339.06	1,112.45		28.00	82.40	347.83	1,141.23
14.00	57.20	339.65	1,114.39		29.00	84.20	348.41	1,143.12
15.00	59.00	340.24	1,116.33		30.00	86.00	348.98	1,145.01
16.00	60.80	340.83	1,118.26		31.00	87.80	349.56	1,146.90
17.00	62.60	341.42	1,120.19		32.00	89.60	350.13	1,148.78
18.00	64.40	342.01	1,122.12		33.00	91.40	350.71	1,150.66
19.00	66.20	342.59	1,124.05		34.00	93.20	351.28	1,152.54
20.00	68.00	343.18	1,125.97		35.00	95.00	351.85	1,154.42
20.25	68.45	343.33	1,126.45		36.00	96.80	352.42	1,156.29
20.50	68.90	343.47	1,126.93		37.00	98.60	352.99	1,158.16
20.75	69.35	343.62	1,127.41		38.00	100.40	353.56	1,160.02
21.00	69.80	343.76	1,127.89		39.00	102.20	354.13	1,161.89
21.25	70.25	343.91	1,128.37		40.00	104.00	354.69	1,163.75
21.50	70.70	344.06	1,128.85		41.00	105.80	355.26	1,165.60
21.75	71.15	344.20	1,129.33		42.00	107.60	355.82	1,167.46
22.00	71.60	344.35	1,129.80		43.00	109.40	356.39	1,169.31
22.25	72.05	344.49	1,130.28		44.00	111.20	356.95	1,171.15
22.50	72.50	344.64	1,130.76		45.00	113.00	357.51	1,173.00
22.75	72.95	344.78	1,131.24		46.00	114.80	358.07	1,174.84
23.00	73.40	344.93	1,131.72		47.00	116.60	358.63	1,176.68
24.00	75.20	345.51	1,133.63		48.00	118.40	359.19	1,178.52

Obs : A função primordial desta tabela é permitir o ajuste dos parâmetros de configuração dos softwares de analise demonstrados.