

GERAÇÃO DE RUÍDO ROSA A PARTIR DE RUÍDO BRANCO

Sidnei Noceti Filho e André L. Dalcastagnê

LINSE: Circuitos e Processamento de Sinais
Departamento de Engenharia Elétrica, UFSC
Campus Universitário, 88040-900 - Florianópolis SC - Brasil
Tel: (0xx48) 331-9504, Fax: (0xx48) 331-9091
sidnei@linse.ufsc.br andre@linse.ufsc.br

Resumo - Neste trabalho é mostrado como obter ruído rosa a partir de ruído branco. A razão de se obter ruído rosa desta forma se deve ao fato do mesmo ser encontrado na natureza junto com outros ruídos como “ruído de excesso” e, tipicamente, se apresentar distribuído no espectro de frequência de forma diferente da ideal. O ruído rosa tem aplicações em síntese de sons da natureza e nas medições de sistemas eletroacústicos.

Abstract - This paper introduces a method of generating pink noise from white noise. The main purpose of obtaining pink noise by this way, is that this type of noise is found in nature along with other noise sorts as excess noise. Moreover, such a noise presents a power spectral density which is different from the ideal distribution. Pink noise has applications in several domains, such as syntheses of nature sounds, electroacoustic measurements, among other uses.

I. INTRODUÇÃO

Os ruídos são quaisquer sinais que têm a capacidade de reduzir a inteligibilidade de uma informação de som, imagem ou dados. No entanto os ruídos têm seu lado útil. Devido à sua riqueza espectral, alguns tipos de ruídos servem de fonte para a síntese da fala, de sons da natureza e de sons de instrumentos musicais. Em adição, são úteis para a calibração de equipamentos eletrônicos, como sinais de teste, e nas medidas das características de sistemas de áudio eletroacústicos.

Em medições de sistemas eletroacústicos, três tipos de sinais têm sido usados: i) sinais sinusoidais (usualmente 60 frequências por oitava); ii) ruído branco (quando se utiliza bandas de largura constante); iii) ruído rosa (quando se utiliza bandas relacionadas por um fator constante como por exemplo, 1/3 de oitava ou 1/10 de década). A vantagem da utilização de ruído rosa aos invés de sinais sinusoidais ou ruído branco será justificada na Seção II deste trabalho.

Um ruído rosa “ideal” apresenta uma Densidade Espectral de Potência (DEP)(esta grandeza será definida na Seção II) proporcional a $1/f$, ou seja, a potência do ruído tem uma variação inversamente proporcional à frequência. Este tipo de ruído também é chamado de “ruído de excesso”, por estar presente em dispositivos eletrônicos junto com outros tipos de ruídos. Além disso, A DEP dos “ruídos de excesso” encontrados na natureza tipicamente apresentam uma característica proporcional a $1/f^\alpha$ e tem sido observado que o expoente α assume valores de 0,8 a 1,3 em vários

dispositivos [1]. Por esta razão, é usual gerar um ruído rosa com DEP proporcional a $1/f$, a partir de um ruído branco.

É possível encontrar na literatura propostas de redes [2] equalizadoras analógicas que possibilitam a geração de ruído rosa a partir de ruído branco utilizando funções de transferência com singularidades (pólos e zeros) reais. Porém, a precisão obtida pode não ser suficiente para algumas aplicações.

Neste trabalho, primeiramente se mostra a inclinação obtida na magnitude da resposta em frequência em função da relação entre as frequências dos pólos e zeros quando a ordem é suficientemente alta de tal forma que as deformações próximas do primeiro pólo e do último zero são desprezíveis na região de medida da inclinação. Neste caso, a ordem do sistema não é preestabelecida.

Outros resultados apresentados neste trabalho são baseados em técnicas de otimização. Considerando a faixa de áudio, determinou-se a melhor posição para os pólos e zeros em função da ordem do sistema. É também apresentada a forma de projetar dois tipos de redes, que permitem obter ruído rosa “quase ideal” a partir de um ruído branco. A primeira das redes é essencialmente ativa, e tem sido apresentada na literatura pertinente [3]. A segunda rede, proposta neste trabalho, pode ser passiva, desde que não seja necessária uma amplificação.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção II são apresentadas algumas definições básicas que possibilitam um melhor entendimento deste trabalho; na Seção III é mostrada uma das formas possíveis de se obter ruído rosa a partir de um ruído branco; na Seção IV estuda-se inclinação da resposta em frequência da rede equalizadora, em função da relação entre os pólos e zeros, quando a ordem é livre; na Seção V é mostrada a melhor posição das singularidades da função equalizadora em função da ordem, para a faixa de áudio; na Seção VI é mostrado como projetar as redes equalizadoras para geração de ruído rosa a partir de ruído branco; na Seção VII são apresentadas as conclusões.

II. DEFINIÇÕES BÁSICAS

i) Densidade Espectral de Potência.

A função DEP ($S_x(\omega)$ ou $S_x(f)$) de um sinal $x(t)$ define a densidade de potência por unidade de banda em função da frequência (potência média por unidade de banda) do mesmo. A sua unidade é Watt por radiano por segundo (W/rad/s) ou Watt por Hertz (W/Hz). A sua integral em uma determinada banda nos fornece a potência média do sinal [1].

Mas por que definir mais esta grandeza $S_x(\omega)$? Como se sabe, a transformada de Fourier de um sinal é uma importantíssima ferramenta matemática que nos auxilia a interpretar fisicamente sinais e sistemas, assim como analisar e sintetizar sistemas.

Sabemos que se um sistema estável, linear e invariante (amplificador, filtro ou sistema eletroacústico) com uma resposta em frequência $H(\omega)$ é excitado com um sinal $x(t)$, com transformada de Fourier $X(\omega)$, sua saída apresenta um sinal $r(t)$, com transformada de Fourier $R(\omega)$ dada por:

$$R(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (1)$$

Porém, nem todos os sinais têm transformada de Fourier. A existência desta transformada está condicionada a uma representação do sinal por uma função matemática. Como alguns sinais não possuem tal representação (por exemplo, a maioria dos ruídos) utiliza-se a função DEP como uma forma de caracterizá-los.

Se um sinal com DEP $S_x(\omega)$ é aplicado a um sistema estável, linear e invariante no tempo, com resposta em frequência $H(\omega)$, a DEP do sinal de saída do sistema, $S_r(\omega)$, é:

$$S_r(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (2.a)$$

$$\text{ou } S_r(f) = |H(f)|^2 S_x(f) \quad (2.b)$$

A função Densidade Espectral de Potência $S_x(f)$ também é comumente expressa nas unidades A^2/Hz e V^2/Hz . Ou seja, também é definida como potência média por unidade de banda, em um resistor de 1Ω . Isto se deve ao fato de que alguns ruídos se apresentam na natureza sob a forma de correntes ou tensões. Como, para um resistor de 1Ω , os valores eficazes de tensão e de corrente são a raiz quadrada positiva da potência média, os ruídos também são apresentados na forma de valor rms de corrente ou valor rms de tensão por raiz de Hertz, nas unidades A/\sqrt{Hz} e V/\sqrt{Hz} , respectivamente.

ii) Ruído Branco

O ruído branco é por definição aquele que tem a sua potência distribuída uniformemente no espectro de frequência, ou seja, $S_w(f) = N_w$, que é uma constante. O nome ruído branco advém da analogia com o espectro eletromagnético na faixa de luz. A luz branca contém todas as frequências do espectro visível, daí o nome adotado.

iii) Ruído Rosa

O ruído rosa é, por definição, aquele cuja DEP é proporcional ao inverso da frequência, na forma $S_p(f) = N_p / f$. O nome ruído rosa vem também de uma analogia com o espectro luminoso. A luz vermelha possui a mais baixa frequência do espectro visível e o ruído rosa tem mais energia nas baixas frequências.

Entre todos os ruídos, o ruído rosa é o que mais tem relação com os sons da natureza. Se convenientemente

equalizado, pode ser usado para gerar sons de chuva, cachoeira, vento, rio caudaloso e outros sons naturais.

A função DEP em uma banda $B_1 = f_s - f_i$ nos fornece a potência média da função. Então para a DEP $S_p(f) = N_p / f$, a integral nos fornece uma potência média do ruído P_{p1} :

$$P_{p1} = N_p \int_{f_i}^{f_s} \frac{df}{f} = N_p \ln \frac{f_s}{f_i} \quad (3)$$

Vamos determinar agora qual é a potência média do ruído rosa em uma banda que é K vezes a banda anteriormente considerada ($B_2 = KB_1 = Kf_s - Kf_i$).

$$P_{p2} = N_p \ln \frac{Kf_s}{Kf_i} = N_p \ln \frac{f_s}{f_i} = P_{p1} \quad (4)$$

Este resultado indica que a potência média do ruído rosa é constante se as medidas são feitas em bandas que se relacionam por um fator constante. Isso também acontece com o ruído branco se as medidas são feitas com largura de banda constante.

Consideremos o caso de medidas na faixa de áudio, primeiramente com medidas em 1/3 de oitava e com frequências aumentando com fator constante K (ou com um percentual fixo $K\% = (K-1) \times 100\%$). Chamando a frequência inicial da primeira banda de uma oitava qualquer de f_{INI} , a frequência inicial da segunda banda será Kf_{INI} . A frequência inicial da terceira banda será $K^2 f_{INI}$ e a frequência final será $K^3 f_{INI}$. Como a frequência final de uma oitava é $2 \times f_{INI}$, tem-se que:

$$K^3 f_{INI} = 2 f_{INI} \therefore K = 2^{\frac{1}{3}} = 1,25892541 \cong 1,26 \quad (5)$$

Considerando, por simplicidade de cálculo, que na banda toda de áudio tem-se $f_i = 20 \text{ Hz}$ e $f_s = 20 \text{ kHz}$, teríamos cerca de 10 oitavas e portanto um total de 30 bandas de frequência. A norma ISO – *International Standards Organization* – estabelece frequências em torno de 5 Hz e 50 kHz para f_i e f_s , respectivamente. Logo, usualmente, o número de bandas de frequência é maior do que 30.

Consideremos agora medidas em 1/10 de década e com frequências aumentando com fator constante K' . Chamando a frequência inicial da primeira banda de uma década qualquer de f_{INI} , a frequência inicial da segunda banda será $K' f_{INI}$. De forma análoga ao desenvolvimento anteriormente feito, tem-se que:

$$(K')^{10} f_{INI} = 10 f_{INI} \therefore K' = 10^{\frac{1}{10}} = 1,25992104 \cong 1,26 \quad (6)$$

Logo, o aumento percentual ao se atuar em escalas de 1/10 de década, é aproximadamente igual à atuação em escalas de 1/3 de oitava.

Se pensarmos em bandas de largura constante com o intuito de utilizar o ruído branco como o sinal de entrada

para as medidas e tomando como base a largura da primeira banda $B_1 = 1,26 \times 20 \text{ Hz} - 20 \text{ Hz} = 5,2 \text{ Hz}$, teríamos um número aproximado de $(20.000 - 20) \div 5,2 = 3.842$ bandas! No final da banda os acréscimos seriam de aproximadamente $(5,2 \div 20.000) \times 100 \% = 0,026 \%$. Se tomássemos valores de banda constantes fixando em 30 o seu número máximo, as bandas teriam a largura de aproximadamente $(20.000 - 20) \div 30 = 666 \text{ Hz}$. A variação percentual no início da banda seria de $(666 \div 20) \times 100 \% = 3.330 \% !$

III. DETERMINAÇÃO DE RUÍDO ROSA A PARTIR DE UM RUÍDO BRANCO

Para fins didáticos, vamos investigar inicialmente o que acontece quando passamos um ruído branco através de um filtro passa-baixa de 1ª ordem, conforme é ilustrado na Figura 1.

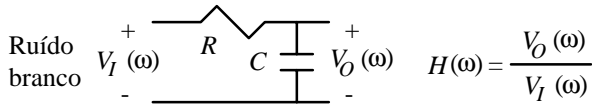


Fig. 1 – Aplicação do ruído branco em um filtro passa-baixa de 1ª ordem.

Pode ser mostrado que a magnitude da resposta em frequência ao quadrado é:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \quad (7)$$

Se na faixa de frequência de interesse for forçada a condição $(\omega RC)^2 \gg 1$, tem-se:

$$|H(\omega)|^2 \cong \frac{1}{(\omega RC)^2} = \frac{1/(RC)^2}{\omega^2} \quad (8)$$

Logo, obtém-se na saída do filtro um ruído do tipo $1/f^2$ uma vez que a Densidade Espectral do ruído branco é $S_w(\omega) = N_w$.

$$S_o(\omega) = S_w(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 = N_w \frac{1/(RC)^2}{\omega^2} = \frac{N_B}{\omega^2} \quad (9)$$

O filtro passa-baixa de 1ª ordem apresenta uma inclinação de -6 dB/oitava quando $(\omega RC)^2 \gg 1$ e com ele se obtém ruído $1/f^2$. Sendo assim, para se obter um ruído rosa com Densidade Espectral $1/f$ a partir de um ruído branco seria necessário um filtro tal que $|H(\omega)| \cong 1/\sqrt{\omega}$ ou $|H(\omega)|^2 \cong 1/\omega$, que apresentaria uma inclinação de -3 dB/oitava . Esta função não é fisicamente realizável na sua forma exata, porém é possível obter uma boa aproximação em uma determinada faixa de frequência.

Uma das formas possíveis para a obtenção de uma resposta em frequência cuja magnitude apresente uma inclinação de -3 dB/oitava , é projetar um filtro com pólos e zeros reais alternados com função de transferência dada por:

$$H(s) = \frac{H_{\text{inf}}(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (10)$$

onde n é a ordem do sistema, z_1, \dots, z_n são os zeros em rad/s, p_1, \dots, p_n são os pólos em rad/s e H_{inf} é o valor da função de transferência quando $s \rightarrow \infty$. O ganho na origem desta função de transferência é:

$$H(0) = \frac{H_{\text{inf}} z_1 z_2 \dots z_n}{p_1 p_2 \dots p_n} \quad (11)$$

Fixando n e as frequências limite da banda desejada, existe uma posição ótima para os pólos e zeros de $H(s)$ de modo que a inclinação de $|H(\omega)|$ se aproxima ao máximo de -3 dB/oitava . Quanto maior a quantidade de pólos e zeros, $|H(\omega)|$ será mais próxima da função ideal.

IV. DETERMINAÇÃO DA RELAÇÃO ÓTIMA ENTRE AS SINGULARIDADES REAIS

Neste estudo, da melhor relação entre os pólos e zeros (k) e a inclinação (I), foi feito com um número relativamente grande de singularidades (22 singularidades ou $n = 11$).

O pólo p_1 foi fixado e as demais singularidades foram calculadas da seguinte forma: $z_1 = k \times p_1$, $p_2 = k^2 \times p_1$, $z_2 = k^3 \times p_1$ e assim por diante até se chegar em z_n , ou seja:

$$p_i = k^{2i-2} \times p_1 ; i = 1 : n \quad (12)$$

$$z_i = k^{2i-1} \times p_1 ; i = 1 : n \quad (13)$$

Quando os zeros e os pólos estão muito próximos, k pequeno, o efeito dos pólos e zeros tende a se cancelar. No limite, para $k = 1$ todos os pólos e zeros se anulam e assim $|H(\omega)| = H_{\text{inf}}$, o que quer dizer que teríamos uma inclinação igual a zero. Se k for muito grande, as singularidades estão distantes umas das outras, e com isso praticamente não há influência de uma sobre a outra. Assim, a inclinação de $|H(\omega)|$ tende a de um filtro de primeira ordem, -6 dB/oitava , após um pólo e para inclinação nula após um zero. Portanto existe um valor ótimo para k , para o qual $|H(\omega)|$ possui a inclinação mais próxima da desejada.

O parâmetro k foi variado entre 1 e 5 e a inclinação baseada em $H(f_s) - H(f_i)$. Foi arbitrada a relação $f_s = 2f_i$ (uma oitava) com frequência central calculada como a média geométrica do primeiro pólo p_1 e o último zero z_{11} . Desta forma tem-se que:

$$f_0 = \sqrt{p_1 \times z_n} / 2\pi = \sqrt{f_s f_i} \quad (14)$$

Como $f_s = 2f_i$, pode-se facilmente mostrar que:

$$f_i = f_0 / \sqrt{2} \quad (15)$$

Pode ser determinado a partir da tabela geradora da Figura 2 (b) que a melhor relação k é aproximadamente 1,56 (para o valor desejado de $I \cong -3,0103$ dB/oitava).

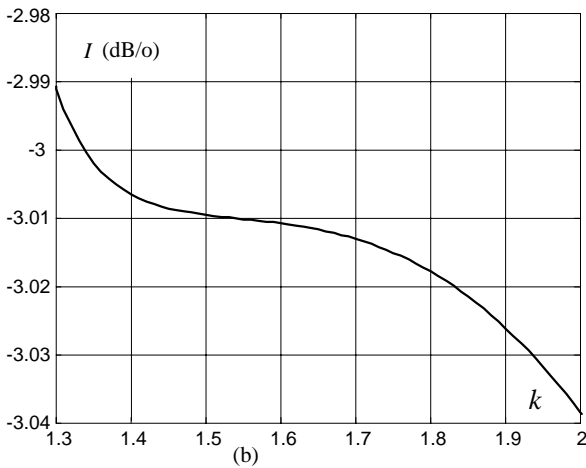
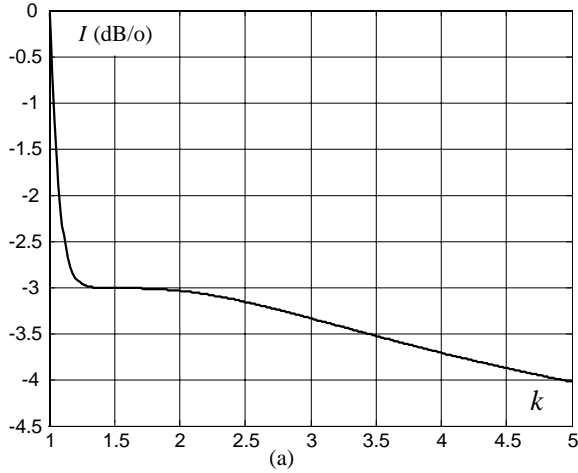


Figura 2 – Inclinação I em função de k :

- (a) Inclinação I na faixa $1 \leq k \leq 5$;
- (b) Detalhe de I na faixa $1,3 \leq k \leq 2$.

V. DETERMINAÇÃO DA MELHOR POSIÇÃO DAS SINGULARIDADES COM FIXAÇÃO DA BANDA E DA ORDEM

Quando se deseja $|H(\omega)|$ com inclinação de -3 dB/oitava dentro de uma determinada faixa de frequência (no caso a faixa de áudio, de 20-20000 Hz), deve-se escolher uma ordem e posicionar as singularidades de modo a minimizar o erro médio quadrático. Neste caso, não é conveniente fixar a frequência do pólo p_1 . Seu valor será obtido através do programa de otimização. Para posicionar as singularidades foi adotada a seguinte estratégia:

$$p_1 = 2\pi \times 20 / a \quad (16)$$

$$z_n = 2\pi \times 20000a \quad (17)$$

As demais singularidades são calculadas através das equações 12 e 13, podendo ser mostrado que:

$$k = (z_n / p_1)^{-(2n-1)} \quad (18)$$

Portanto, é necessário encontrar (via método numérico de otimização) o parâmetro “ a ”, de modo que $|H(f)|$ seja o mais próximo possível da função ideal $1/\sqrt{f}$, dentro da faixa de interesse. Considerou-se um vetor de frequências discretas $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]$, onde N é o número de pontos utilizados, dentro da faixa de áudio. A estratégia utilizada foi minimizar o erro médio quadrático, dado por:

$$erro(a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [c/\sqrt{f_i} - |H(f_i, a)|]^2 \quad (19)$$

O método numérico utilizado foi o *Sequential Quadratic Programming* [4], que é um método de programação não-linear.

O ganho da função $|H(f)|$ na origem é variável com “ a ”, porque a função na origem $H(0)$ é dependente da posição das singularidades, como mostra a equação (11). Por simplicidade e sem perda de generalidade, adotou-se $H(0) = 1$ (0 dB). A cada nova iteração o ganho no infinito H_{inf} era novamente calculado como:

$$H_{inf} = \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{z_1 z_2 \dots z_n} \quad (20)$$

Feito isso, ajusta-se a função $1/\sqrt{f}$ através de um ganho c , dado pela seguinte equação:

$$c = \sqrt{f_0} |H(f_0)| \quad (21)$$

onde $f_0 = \sqrt{20 \times 20000}$ Hz.

O cálculo da posição das singularidades foi feito para $2 \leq n \leq 8$ e os resultados estão na Tabela I. Além de p_1 , z_n e k , é também mostrado o valor de $|H(f)|$ em 20 Hz.

Pode-se perceber pelos resultados apresentados na Tabela I que à medida que a ordem aumenta, o erro diminui, o que é esperado, e k diminui, o que já havia sido constatado na Seção IV.

TABELA I
Resultados do programa de otimização para várias ordens

n	p_1 (rad/s)	z_n (krad/s)	k	$ H(f=20) $	erro
2	326,514	48,3635	5,29101	0,935648	$3,77220 \times 10^{-5}$
3	176,180	89,6321	3,47777	0,829739	$3,37473 \times 10^{-6}$
4	97,7862	161,488	2,88201	0,665362	$8,18718 \times 10^{-7}$
5	47,9982	328,999	2,66820	0,473060	$1,66123 \times 10^{-7}$
6	33,5103	471,239	2,38285	0,413638	$2,47842 \times 10^{-8}$
7	30,6497	243,753	2,11370	0,408428	$5,37554 \times 10^{-9}$
8	17,9520	879,646	2,05438	0,314695	$2,11274 \times 10^{-9}$

A Figura 3 apresenta a magnitude da resposta em frequência para as várias ordens, dentro da faixa de áudio, juntamente com a curva correspondente à função c/\sqrt{f} .

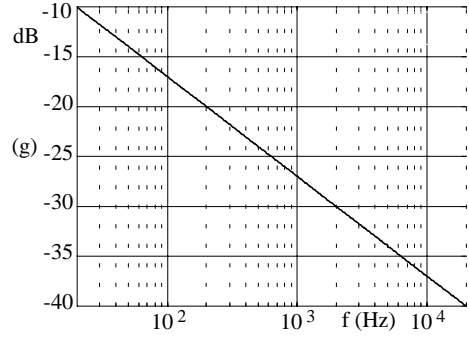
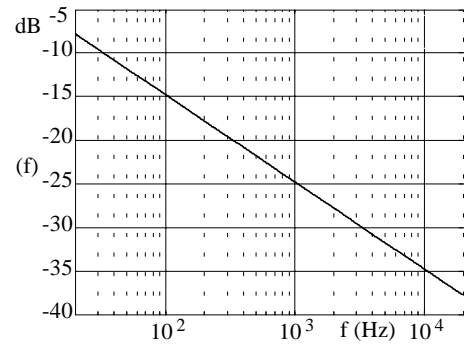
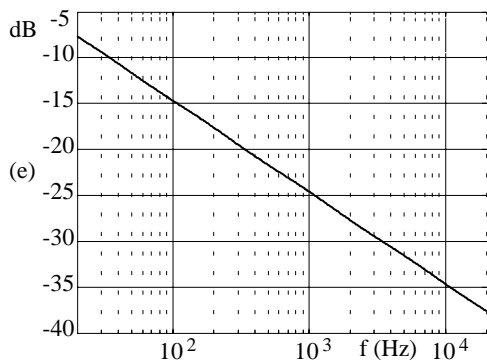
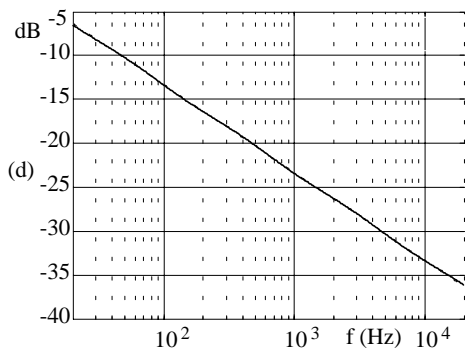
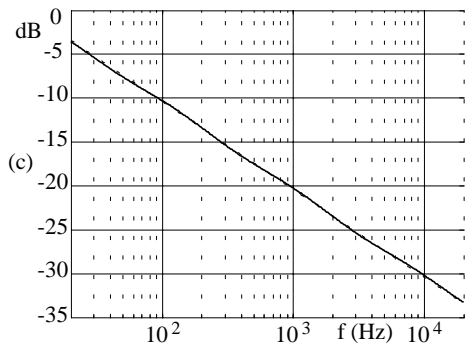
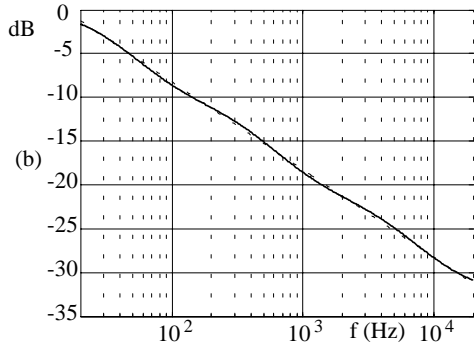
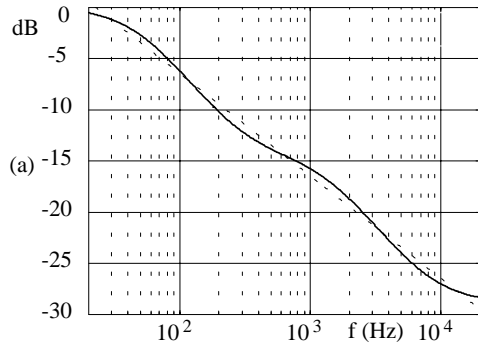


Fig. 3 – Resposta em frequência para várias ordens: (a) $n=2$; (b) $n=3$; (c) $n=4$; (d) $n=5$; (e) $n=6$; (f) $n=7$; (g) $n=8$.

VI. REDES EQUALIZADORAS

A Figura 4 mostra duas realizações possíveis para obtenção das funções de transferência propostas na Seção V.

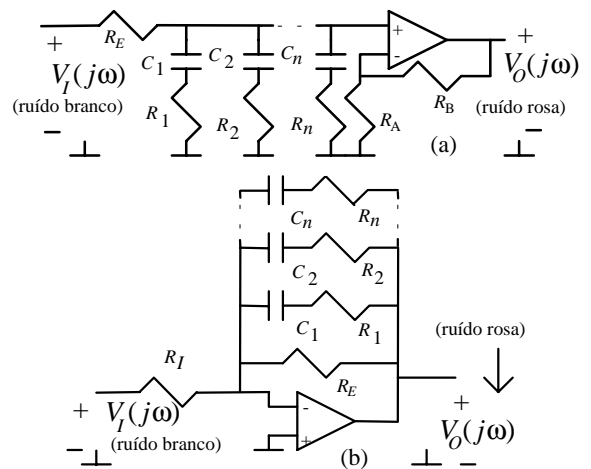


Fig. 4 – Redes equalizadoras.

A função de transferência das redes (a) e (b) é dada pela equação (20), com $H(0) = (R_A + R_B) / R_A$ para a rede (a) e $H(0) = -R_E / R_I$ para a rede (b).

$$H(s) = H(0) \frac{1/R_E}{1/R_E + \sum_{i=1}^n Y_i(s)} \quad (22)$$

onde:

$$Y_i(s) = \frac{1}{R_i} \frac{s}{s + 1/R_i C_i} \quad (23)$$

Os valores dos componentes das duas redes, que são iguais, foram obtidos através de otimização e estão apresentados na Tabela II (escalados para $R_E = 1 \Omega$).

Como exemplo de aplicação foi projetada uma rede de ordem 5 (passiva sem o estágio de ganho ou ativa com $R_E = R_I$). Com o intuito de diminuir os desvios nas funções de transferência, as impedâncias foram escaladas de tal forma que algumas capacitâncias coincidisse com os valores da série E12, já que o grau de liberdade para a escolha das resistências (série E96) é maior [5]. A capacitância de C_3 foi arbitrada em 47 nF gerando um fator de escalamento igual a $1,435 \times 10^{-3} \div 47 \times 10^{-9} = 30540,42$. Os demais capacitores são divididos e os resistores multiplicados por este fator. Os valores resultantes são: $R_1 = 26,1 \text{ k}\Omega$ $R_2 = 8,87 \text{ k}\Omega$ $R_3 = 3,24 \text{ k}\Omega$ $R_4 = 1,18 \text{ k}\Omega$ $R_5 = 324 \Omega$ $R_E = 30,9 \text{ k}\Omega$, $C_1 = (270 + 27) \text{ nF}$, $C_2 = (120 + 2,2) \text{ nF}$, $C_3 = 47 \text{ nF}$, $C_4 = 18 \text{ nF}$, $C_5 = (4,7 + 4,7) \text{ nF}$.

Se for necessário um ganho, este deve ser calculado em função da amplitude do ruído branco de entrada e do nível de ruído rosa desejado. Os capacitores devem, preferencialmente, ser medidos com precisão de 1% e apresentar baixas perdas de polarização do dielétrico (dielétrico de polipropileno ou mica). A Figura 5 apresenta a magnitude da resposta em frequência da rede da Figura 4 (a). Note que entre 20 Hz e 20 kHz a inclinação da curva é praticamente de -3 dB/oitava .

VII. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre a geração de ruído rosa a partir de ruído branco, utilizando equalizadores analógicos compostos por pólos e zeros reais alternados. Foi mostrado que existe uma relação ótima entre os pólos e zeros, considerando a ordem do sistema livre. Em adição, foram apresentados projetos otimizados de redes

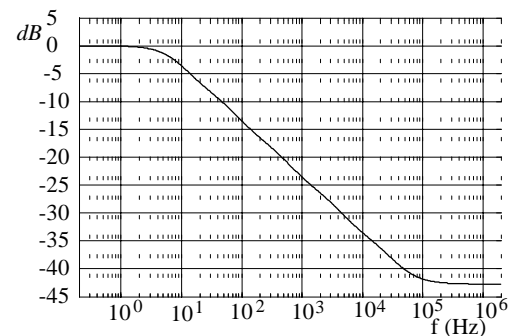


Fig. 5 – Magnitude da resposta em frequência da rede de ordem 5.

passivas e ativas normalizadas de várias ordens, para utilização de ruído rosa em medições de sistemas eletroacústicos. É mostrado um exemplo prático de projeto de um equalizador de ordem 5, com valores de componentes comerciais de resistores (série E96) e capacitores (série E12).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] C. D. Motchenbacher and J. A. Connelly, “Low-Noise Electronic System Design”, John Wiley & Sons, 1993.
- [2] Audio Handbook, National Semiconductor Corporation.
- [3] Elliot Sound Products, “Pink Noise Generator for Audio Testing”, Disponível em <http://sound.westhost.com/project11.htm> Acesso em: 22 nov. 2001.
- [4] T. Coleman; M. A. Branch and A. Grace, “Optimization Toolbox”, 1999, 1 CD-ROM.
- [5] S. Noceti Filho, “Filtros Seletores de Sinais”, Florianópolis: Editora da UFSC, 1998.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Rosalfonso Bortoni, M.Sc., pelas frutíferas discussões.

TABELA II
Valores dos componentes para várias ordens

n	8	7	6	5	4	3	2
R_1	1,5328	1,4283	1,0841	$8,5727 \times 10^{-1}$	$7,3852 \times 10^{-1}$	$5,2865 \times 10^{-1}$	$2,7709 \times 10^{-1}$
C_1	$1,7690 \times 10^{-2}$	$1,0807 \times 10^{-2}$	$1,1552 \times 10^{-2}$	$9,1083 \times 10^{-3}$	$4,8047 \times 10^{-3}$	$1,9398 \times 10^{-2}$	$2,0890 \times 10^{-3}$
R_2	$6,4353 \times 10^{-1}$	$5,8653 \times 10^{-1}$	$4,0465 \times 10^{-1}$	$2,9132 \times 10^{-1}$	$2,3445 \times 10^{-1}$	$1,4040 \times 10^{-1}$	$4,2761 \times 10^{-2}$
C_2	$9,9835 \times 10^{-3}$	$5,8905 \times 10^{-3}$	$5,4507 \times 10^{-3}$	$3,7649 \times 10^{-3}$	$1,8221 \times 10^{-3}$	$6,0388 \times 10^{-3}$	$4,8354 \times 10^{-4}$
R_3	$3,0391 \times 10^{-1}$	$2,6982 \times 10^{-1}$	$1,6650 \times 10^{-1}$	$1,0732 \times 10^{-1}$	$7,8346 \times 10^{-2}$	$3,1202 \times 10^{-2}$	
C_3	$5,0089 \times 10^{-3}$	$2,8661 \times 10^{-3}$	$2,3331 \times 10^{-3}$	$1,4354 \times 10^{-3}$	$6,5649 \times 10^{-4}$	$2,2466 \times 10^{-3}$	
R_4	$1,4680 \times 10^{-1}$	$1,2654 \times 10^{-1}$	$6,9123 \times 10^{-2}$	$3,8806 \times 10^{-2}$	$2,0159 \times 10^{-2}$		
C_4	$2,4570 \times 10^{-3}$	$1,3679 \times 10^{-3}$	$9,8975 \times 10^{-4}$	$5,5763 \times 10^{-4}$	$3,0718 \times 10^{-4}$		
R_5	$7,1104 \times 10^{-2}$	$5,9031 \times 10^{-2}$	$2,7709 \times 10^{-2}$	$1,0576 \times 10^{-2}$			
C_5	$1,2019 \times 10^{-3}$	$6,5630 \times 10^{-4}$	$4,3484 \times 10^{-4}$	$2,8739 \times 10^{-4}$			
R_6	$3,4106 \times 10^{-2}$	$2,6280 \times 10^{-2}$	$8,1902 \times 10^{-3}$				
C_6	$5,9372 \times 10^{-4}$	$3,2997 \times 10^{-4}$	$2,5910 \times 10^{-4}$				
R_7	$1,5559 \times 10^{-2}$	$8,4395 \times 10^{-3}$					
C_7	$3,0837 \times 10^{-4}$	$2,2998 \times 10^{-4}$					
R_8	$5,0939 \times 10^{-3}$						
C_8	$2,2317 \times 10^{-4}$						