

# MÉTODOS DE ANÁLISE DA ROBUSTEZ DE REDES NEURAIS ARTIFICIAIS SUJEITAS A RETARDO NO TEMPO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

**Fernando de Oliveira Souza**

**Engenheiro de Controle e Automação – PUC/Minas**

**Orientador:** Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares

Junho de 2005

## **Banca Examinadora**

- Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares (Orientador)  
CPDEE/UFMG
  
- Prof. Dr. Benjamim Rodrigues de Menezes  
CPDEE/UFMG
  
- Prof. Dr. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes  
CPDEE/UFMG
  
- Prof. Dr. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi  
ICE<sub>x</sub>/UFMG

À TIA LILI.

“HÁ MAIS PESSOAS QUE DESISTEM  
DO QUE PESSOAS QUE FRACASSAM.”

HENRY FORD

# Agradecimentos

Agradeço,

- ao orientador, professor Reinaldo Martinez Palhares, pelo: apoio, paciência, dispor, competência e amizade;
- à Tia Lili, pelo amor e por me proporcionar a oportunidade de estudo;
- a minha família, por propiciar-me momentos de conforto e colaboração;
- a minha namorada Karina, por sua ajuda e por compreender minha ausência;
- ao corpo docente e funcionários do PPGEE, pela colaboração e atenção, em especial ao prof. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes;
- à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Notações, Definições e Resultados Intermediários</b>	<b>3</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>8</b>
1.1 Objetivo . . . . .	11
1.2 Perspectiva Histórica . . . . .	12
1.3 Contribuição Esperada e Metodologia . . . . .	13
1.4 Organização do Trabalho . . . . .	14
<b>2 Formulação do Problema</b>	<b>16</b>
<b>3 Análise da Estabilidade de RNAs (Redes Neurais Artificiais)</b>	<b>21</b>
3.1 Análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a um único retardo no tempo – $\mathcal{A}_a^r \mathcal{RNA}$ . . . . .	21
3.2 Análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a múltiplos retardos no tempo – $\mathcal{A}_a^{\tau_k} \mathcal{RNA}$ . . . . .	25
3.3 Análise de estabilidade exponencial de RNAs sujeitas a um único retardo no tempo – $\mathcal{A}_e^r \mathcal{RNA}$ . . . . .	28
3.4 Análise de estabilidade de RNAs sujeitas a incertezas paramétricas – $\mathcal{ARNA}^\Delta$ . . . . .	33
3.5 Conclusões Finais . . . . .	34
<b>4 Estudo de Casos</b>	<b>36</b>

---

4.1	Exemplos – Análise de estabilidade assintótica de RNAs com um único retardo no tempo – $\mathcal{A}_a^r \mathcal{RN} \mathcal{A}$ . . . . .	36
4.2	Exemplos – Análise da estabilidade assintótica da RNA sujeita a um único retardo tempo e incertezas paramétricas – $\mathcal{A}_a^r \mathcal{RN} \mathcal{A}^\Delta$ .	45
4.3	Exemplos – Análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a múltiplos retardos no tempo – $\mathcal{A}_a^{\tau_k} \mathcal{RN} \mathcal{A}$ . . . . .	48
4.4	Exemplos – Análise da estabilidade assintótica da RNA sujeita a múltiplos retardos no tempo e incertezas paramétricas – $\mathcal{A}_a^{\tau_k} \mathcal{RN} \mathcal{A}^\Delta$	56
4.5	Exemplos – Análise de estabilidade exponencial de RNA sujeita a um único retardo no tempo – $\mathcal{A}_e^r \mathcal{RN} \mathcal{A}$ . . . . .	66
4.6	Conclusões Finais . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Conclusões e Propostas de Trabalho</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>73</b>

# Lista de Figuras

1.1	Mapa de fase de um sistema com dois neurônios. . . . .	10
1.2	Recuperação correta do padrão “3” para uma entrada corrompida em uma rede de Hopfield. . . . .	11
2.1	Modelo aditivo de um neurônio . . . . .	16
4.1	Dinâmica da RNA no tempo para $\tau = 0.4283$ e $\mu = 0$ . . . . .	39
4.2	Dinâmica da RNA no tempo para $\tau = 0.5283$ e $\mu = 0$ . . . . .	39
4.3	Atratores para $(\tau = 0.4283$ e $\mu = 0)$ e $(\tau = 0.5283$ e $\mu = 0)$ , respectivamente. . . . .	40
4.4	Diagrama de bifurcação para $x_1$ e $x_2$ , respectivamente. Fazendo $\tau = 0.4283$ para $\mu = 0$ . . . . .	40
4.5	Diagrama de bifurcação para $x_1$ e $x_2$ , respectivamente. Fazendo $\tau = 1.6409$ para $\mu = 0$ . . . . .	42
4.6	Diagrama de bifurcação para $x_3$ e $x_4$ , respectivamente. Fazendo $\tau = 1.6409$ para $\mu = 0$ . . . . .	42
4.7	Diagrama de bifurcação para $x_5$ e $x_6$ , respectivamente. Fazendo $\tau = 1.6409$ para $\mu = 0$ . . . . .	43
4.8	Diagrama de bifurcação para $x_7$ e $x_8$ , respectivamente. Fazendo $\tau = 1.6409$ para $\mu = 0$ . . . . .	43
4.9	Diagrama de bifurcação para $x_9$ e $x_{10}$ , respectivamente. Fazendo $\tau = 1.6409$ para $\mu = 0$ . . . . .	44
4.10	Resposta temporal da RNA com $\tau = 1.0152$ e $\mu = 0$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(1)}$ , $W^{0(1)}$ e $W^{1(1)}$ . . . . .	46



4.11 Resposta temporal da RNA com $\tau = 1.0152$ e $\mu = 0$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(2)}$ , $W^{0(2)}$ e $W^{1(2)}$ . . . . .	47
4.12 Resposta temporal da RNA com $\tau = 1.0152$ e $\mu = 0$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(3)}$ , $W^{0(3)}$ e $W^{1(3)}$ . . . . .	47
4.13 Diagrama de bifurcação para $\tau_1 = 0.1$ e com $\tau_2$ como parâmetro de controle. Destacando $\tau_2 = 0.7328$ . . . . .	49
4.14 Diagrama de bifurcação para $\tau_1 = 0.2$ e com $\tau_2$ como parâmetro de controle. Destacando $\tau_2 = 0.6449$ . . . . .	50
4.15 Diagrama de bifurcação para $\tau_1 = 0.3$ e com $\tau_2$ como parâmetro de controle. Destacando $\tau_2 = 0.5529$ . . . . .	50
4.16 Diagrama de bifurcação para $\tau_1 = 0.4283$ e com $\tau_2$ como parâmetro de controle. Destacando $\tau_2 = 0.4284$ . . . . .	51
4.17 Diagrama de bifurcação para $\tau_1 = 0.1$ e com $\tau_2 = \tau_3$ como parâmetro de controle. Destacando $\tau_2 = \tau_3 = 0.9534$ . . . . .	53
4.18 Diagrama de bifurcação para $\tau_1 = 1000$ e com $\tau_2 = \tau_3$ como parâmetro de controle. Destacando $\tau_2 = \tau_3 = 0.9534$ . . . . .	53
4.19 Diagrama de bifurcação para $\tau_1 = \tau_2 = 0.1$ e com $\tau_3$ como parâmetro de controle. Destacando $\tau_3 = 0.5634$ . . . . .	55
4.20 Diagrama de bifurcação para $\tau_1 = \tau_2 = 1500$ e com $\tau_3$ como parâmetro de controle. Destacando $\tau_3 = 0.5634$ . . . . .	55
4.21 Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.05$ e $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(1)}$ , $W^{1(1)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	57
4.22 Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.05$ e $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(2)}$ , $W^{1(1)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	58
4.23 Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.05$ e $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(3)}$ , $W^{1(1)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	58
4.24 Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.05$ e $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(4)}$ , $W^{1(1)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	59
4.25 Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.05$ e $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(1)}$ , $W^{1(2)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	59

4.26	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.05$ e $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(2)}$ , $W^{1(2)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	60
4.27	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.05$ e $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(3)}$ , $W^{1(2)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	60
4.28	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.05$ e $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(4)}$ , $W^{1(2)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	61
4.29	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.2017$ e $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(1)}$ , $W^{1(1)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	61
4.30	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.2017$ e $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(2)}$ , $W^{1(1)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	62
4.31	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.2017$ e $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(3)}$ , $W^{1(1)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	62
4.32	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.2017$ e $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(4)}$ , $W^{1(1)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	63
4.33	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.2017$ e $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(1)}$ , $W^{1(2)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	63
4.34	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.2017$ e $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(2)}$ , $W^{1(2)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	64
4.35	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.2017$ e $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(3)}$ , $W^{1(2)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	64
4.36	Resposta temporal da RNA com $\tau_1 = 0.2017$ e $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes $A^{(4)}$ , $W^{1(2)}$ e $W^{2(1)}$ . . . . .	65
4.37	Resposta temporal da RNA com $\tau = 0.1$ (traço contínuo) e decaimento exponencial $e^{-k}$ com $k = 0.68$ (pontilhado) para $\mu = 0$ .	67
4.38	Resposta temporal da RNA com $\tau = 0.2$ (traço contínuo) e decaimento exponencial $e^{-k}$ com $k = 0.37$ (pontilhado) para $\mu = 0$ .	68
4.39	Resposta temporal da RNA com $\tau = 0.3$ (traço contínuo) e decaimento exponencial $e^{-k}$ com $k = 0.16$ (pontilhado) para $\mu = 0$ .	68
4.40	Resposta temporal da RNA com $\tau = 0.4$ (traço contínuo) e decaimento exponencial $e^{-k}$ com $k = 0.02$ (pontilhado) para $\mu = 0$ .	69

- 
- 4.41 Resposta temporal da RNA com  $\tau = 0.4283$  (traço contínuo) e decaimento exponencial  $e^{-k}$  com  $k = 0.00006$  (pontilhado) para  $\mu = 0$ . . . . . 69

# Lista de Tabelas

4.1	Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 1) . . . . .	37
4.2	Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 2) . . . . .	38
4.3	Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 4) . . . . .	46
4.4	Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 5) . . . . .	48
4.5	Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 7) . . . . .	54
4.6	Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 8) . . . . .	57
4.7	Graus de estabilidade exponencial, $k$ , para os retardos no tempo com $\mu = 0$ (Exemplo 9) . . . . .	67
4.8	Graus de estabilidade exponencial, $k$ , para os retardos no tempo com $\mu = 0.5$ (Exemplo 9) . . . . .	67
4.9	Graus de estabilidade exponencial, $k$ , para os retardos no tempo com $\mu = 0.9$ (Exemplo 9) . . . . .	67

# Resumo

Este trabalho apresenta condições suficientes para análise de estabilidade assintótica e exponencial de uma classe de RNAs (Redes Neurais Artificiais) sujeitas a influência de retardo no tempo (constante ou variante) e/ou sujeitas a incertezas paramétricas do tipo politópicas.

A abordagem apresentada é do tipo dependente do retardo, sendo que a metodologia é baseada: no uso de matrizes de relaxação para expressar a influência dos termos da fórmula de Leibniz-Newton; definição apropriada de funcionais do tipo Lyapunov-Krasovskii; desigualdades matriciais lineares (LMIs - do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) e ferramentas de otimização convexa para solucionar problemas formulados em termos de LMIs.

Vários exemplos são apresentados, que corroboram com a teoria apresentada de análise de estabilidade de RNA com retardo no tempo.

# Abstract

This work presents sufficient conditions for analysis of asymptotic and exponential stability of a class of artificial neural network (ANN) subject to constant or time-varying delays and polytope-bounded uncertainties.

The approaches proposed is the type of delay-dependent and the methodology is based on four points: the selection of slack matrices that express the influence of the Newton-Leibniz condition; the appropriate definition of Lyapunov-Krasovskii functionals; the use of linear matrix inequalities (LMIs) and the use of tools of convex optimization to solve problems described in LMI terms.

Several examples are presented that corroborate with the theory presented of analysis of the stability of ANN with time-varying delay.

# Notações, Definições e Resultados Intermediários

- $\mathbb{R}^n$  é o espaço euclidiano real
- $\mathbb{R}^{(m \times n)}$  denota o espaço normado das matrizes reais
- $\mathbf{0}$  denota uma matriz nula de dimensão apropriada
- $*$  denota termos simétricos em relação a diagonal principal
- $F^T$  denota a matriz transposta de  $F$
- $F \succ 0$  ( $F \succeq 0$ ) denota  $F$  definida (semidefinida) positiva
- $F \prec 0$  ( $F \preceq 0$ ) denota  $F$  definida (semidefinida) negativa

**Lema 1** [1] *considere a função:*

$$w(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \int_{t+\theta}^t f(s) ds d\theta$$

*então:*

$$\frac{d}{dt}w(t) = (b - a)f(t) - (1 - \dot{b}) \int_{t+a}^{t+b} f(s) ds + (\dot{b} - \dot{a}) \int_{t+a}^t f(s) ds$$



Para se obter as condições dependentes do retardo utiliza-se a fórmula de Newton-Leibniz:

$$\int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)ds = x(t) - x(t - d(t))$$

considerando o lado esquerdo da equação.

**Lema 2** [2] *Considere o termo nulo*

$$2[x^T(t)Y + x^T(t - d(t))T] \times \left[ x(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)ds - x(t - d(t)) \right] = 0 \quad (1)$$

(1) é equivalente a:

$$\xi^T(t) \Gamma \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \zeta(t)^T \Upsilon \zeta(t)ds = 0$$

sendo:  $\xi(t) = [x^T(t) \quad x^T(t - d(t))]^T$  e  $\zeta(t, s) = [x^T(t) \quad x^T(t - d(t)) \quad \dot{x}^T(s)]^T$   
e:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} Y + Y^T & -Y + T^T \\ -Y^T + T & -T - T^T \end{bmatrix} \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -Y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -T \\ -Y^T & -T^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2)$$

▲

**Lema 3** [2] *Para qualquer matrix  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} \succeq 0$ :*

$$\tau \xi^T(t) X \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \xi^T(t) X \xi(t)ds \geq 0, \quad (3)$$

sendo  $\xi(t) = [x^T(t) \quad x^T(t - d(t))]^T$ .

▲

O Lema 2 pode ser facilmente estendido para o caso de  $K$  retardos no tempo, como descrito no próximo corolário.



**Corolário 1** *Considere o termo nulo*

$$\sum_{k=1}^K 2[x^T(t)Y_k + x^T(t - d_k(t))T_k] \times \left[ x(t) - \int_{t-d_k(t)}^t \dot{x}(s)ds - x(t - d_k(t)) \right] = 0 \quad (4)$$

(4) é equivalente a:

$$\xi_d^T(t)\bar{\Gamma}\xi_d(t) - \sum_{k=1}^K \int_{t-d_k(t)}^t \zeta_k(t, s)^T \Upsilon_k \zeta_k(t, s) ds = 0 \quad (5)$$

sendo que:

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} & \bar{\Gamma}_{12} \\ * & \bar{\Gamma}_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \bar{\Gamma}_{11} = \sum_{k=1}^K Y_k + Y_k^T \\ \bar{\Gamma}_{12} = [-Y_1 + T_1^T \quad -Y_2 + T_2^T \quad \dots \quad -Y_K + T_K^T] \\ \bar{\Gamma}_{22} = \text{diag}\{-T_k - T_k^T\}, \quad k = 1, \dots, K \end{cases} \quad (6)$$

$$\Upsilon_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & Y_k \\ * & \mathbf{0} & T_k \\ * & * & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$e \xi_d(t) = [x(t)^T \quad x^d(t)^T]^T$$

$$x^d(t) \triangleq [x^T(t - d_1(t)) \quad x^T(t - d_2(t)) \quad \dots \quad x^T(t - d_k(t))]^T, \text{ com } k = 1, \dots, K$$

$$\zeta_k(t, s) = [x(t) \quad x(t - d_k(t)) \quad \dot{x}^T(s)]^T.$$

▲▲

O Lema 3 pode ser estendido para o caso de  $K$  retardos no tempo.

**Corolário 2** *Para qualquer matriz:*

$$X_k = \begin{bmatrix} \hat{X}_k & \check{X}_k \\ * & \bar{X}_k \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (8)$$

e  $\eta_k(t) = [x^T(t) \quad x^T(t - d_k(t))]^T$  ( $k = 1, \dots, K$ ), então:

$$\sum_{k=1}^K \{ \tau_k \eta_k^T(t) X_k \eta_k(t) - \int_{t-d_k(t)}^t \eta_k^T(t) X_k \eta_k(t) ds \} \geq 0,$$

é equivalente a:

$$\xi_d^T(t) \mathcal{X} \xi_d(t) - \sum_{k=1}^K \int_{t-d_k(t)}^t \eta_k^T(t) X_k \eta_k(t) ds \geq 0 \quad (9)$$

sendo que:

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} \\ * & \mathcal{X}_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \mathcal{X}_{11} = \sum_{k=1}^K \tau_k \hat{X}_k \\ \mathcal{X}_{12} = [\tau_1 \check{X}_1, \tau_2 \check{X}_2, \dots, \tau_K \check{X}_K] \\ \mathcal{X}_{22} = \text{diag}[\tau_k \check{X}_k], \quad k = 1, \dots, K \end{cases} \quad (10)$$

▲▲

**Lema 4** [3] *Se existirem escalares  $k > 0$  e  $\rho(k) > 0$ , tais que:*

$$\|x(t)\| \leq \rho(k) e^{-kt} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|x(\theta)\|, \quad \forall t > 0 \quad (11)$$

*o sistema  $\dot{x} = f(x(t), x(t-d(t)), t)$  é dito exponencialmente estável, onde  $k$  é chamado de grau de estabilidade exponencial.* ▲

## Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs

Uma desigualdade matricial linear (LMI) é uma restrição da forma

$$L(x) \triangleq L_0 + x_1 L_1 + \dots + x_N L_N \prec 0 \quad (12)$$

sendo que:

- $x = [x_1 \dots x_N]$  é um vetor de incógnitas escalares (variáveis de decisão)
- $L_0, \dots, L_N$  são matrizes simétricas dadas.

Observe que as desigualdades  $L(x) \succ 0$  ou  $L(x) \prec M(x)$  são casos especiais de (12)

## Acrônimos

- LMI – Desigualdade matricial linear
- RNAs – Redes Neurais Artificiais
- ANN – Artificial Neural Network
- $\mathcal{A}_a^r \mathcal{RNA}$  – Análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a um único retardo no tempo
- $\mathcal{A}_a^{rk} \mathcal{RNA}$  – Análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a múltiplos retardos no tempo
- $\mathcal{A}_e^r \mathcal{RNA}$  – Análise de estabilidade exponencial de RNAs sujeitas a um único retardo no tempo
- $\mathcal{RNA}^\Delta$  – Análise de estabilidade de RNAs sujeitas a incertezas paramétricas
- $\mathcal{A}_a^r \mathcal{RNA}^\Delta$  – Análise da estabilidade assintótica da RNA sujeita a um único retardo tempo e incertezas paramétricas
- $\mathcal{A}_a^{rk} \mathcal{RNA}^\Delta$  – Análise da estabilidade assintótica da RNA sujeita a múltiplos retardos no tempo e incertezas paramétricas

# Capítulo 1

## Introdução

As RNAs surgiram como uma área da informática cujo objetivo básico era o de criar modelos artificiais do cérebro humano, de forma a permitir que computadores “pensem”. Atualmente é consenso que a dinâmica das RNAs tem um forte apelo em aplicações relacionadas a processamento de sinais, imagem e reconhecimento de padrões.

Uma RNA funciona de forma similar ao cérebro humano, tentando reconhecer padrões e regularidades nos dados que lhe são apresentados. Esse aprendizado ocorrerá por experiência e fará generalizações com base em seu conhecimento passado. Neste sentido, diferentes experiências ou sensações são armazenadas no cérebro com diferentes ligações, ou diferentes intensidades de ligações, entre os neurônios.

O neurônio, individualmente, funciona de maneira bastante simples. Ele recebe sinais elétricos das outras células do corpo humano através de pontos de contato (sinápses), processa estes sinais e, se o resultado deste processamento, em um dado período de tempo, excede um certo valor, produz outros sinais que são, então, transmitidos a outras células. Aparentemente, não é o funcionamento do neurônio, mas sim o alto grau de ligação entre eles, que é responsável pelo grande poder “computacional” do cérebro humano.

Um neurônio artificial atua exatamente como um neurônio comum. O neurônio artificial recebe vários sinais de entrada ( $x$ ), calcula uma média ponderada des-

tes sinais ( $z$ ) e, quando esta média é aplicada a uma função de ativação<sup>1</sup> ( $F$ ), produz então um sinal de saída ( $y$ ).

De uma maneira concisa as RNAs são sistemas paralelos distribuídos compostos por unidades de processamento simples que calculam determinadas funções matemáticas.

Os computadores convencionais têm a arquitetura proposta por John Von Neumann que é seqüencial<sup>2</sup> e as RNAs tem processo maciçamente paralelo. Sendo assim, a qualidade da RNA como sistema rápido é perdido quando implementadas em computadores, e para o máximo proveito do paralelismo das RNAs, a implementação em hardware é essencial [4]. Outra vantagem da implementação analógica é a ligação direta com as informações do mundo, ao passo que implementações digitais necessitam de rápidos conversores digitais para analógico e vice-versa.

Na implementação eletrônica de redes neurais analógicas, retardos no tempo acontecem na comunicação e resposta de neurônios devido à velocidade finita de chaveamento dos amplificadores ([5], [6] e [7]). Sabe-se que eles podem influenciar a estabilidade da rede criando fenômenos oscilatório ou instabilidade, como mostrados em [8], [9] e [10], e em alguns exemplos deste trabalho. Além disso sistemas físicos normalmente sofrem de incertezas que surgem por causa de variações de seus parâmetros.

Uma estrutura de RNA muito utilizada é a RNA com memória associativa. Neste tipo de rede os pontos de equilíbrios são chamados de memória associativa com estímulos externos. Estes equilíbrios são localmente estáveis, armazenam informação e formam estruturas de memória distribuídas.

Importantes aspectos de preocupação nas características dinâmicas de redes neurais são [11]: *i*) convergência para equilíbrios de órbitas, como a capacidade de resposta rápida das memórias; e *ii*) o número de pontos de equilíbrios, incluindo

---

<sup>1</sup>A função de ativação pode, em princípio, tomar diversas formas. Ela pode ser uma função logística, degrau, ou mesmo uma simples função linear. A função mais usada em aplicações práticas é uma função logística.

<sup>2</sup>A arquitetura de Von Neuman separa as unidades de lógica e aritmética da memória e centraliza a estrutura de interconexão e a unidade de controle. Sendo assim o computador deve ser controlado por instruções de fluxo que são apresentadas de forma seqüencial.

as bacias de atração, para a capacidade de armazenamento dos modelos das redes.

No caso da estabilidade assintótica global, não há nenhuma necessidade de especificar as condições iniciais da rede, desde que todas as trajetórias, partindo de qualquer ponto vá eventualmente se estabelecer em um ponto de equilíbrio armazenado na RNA, evitando assim o risco de ser apanhado em mínimos locais. A figura 1.1 mostra o diagrama de fases da evolução de uma rede de Hopfield no qual o ponto de equilíbrio armazenado na rede é  $(1,1)$ <sup>3</sup>. Na prática isto significa que mesmo com entradas corrompidas na rede, ela consegue recuperar os padrões armazenados de forma exata. A figura 1.2, exemplifica tal situação, onde o padrão armazenado, número “3”, é recuperado através de 35 iterações da rede, quando a entrada é este número corrompido [13].

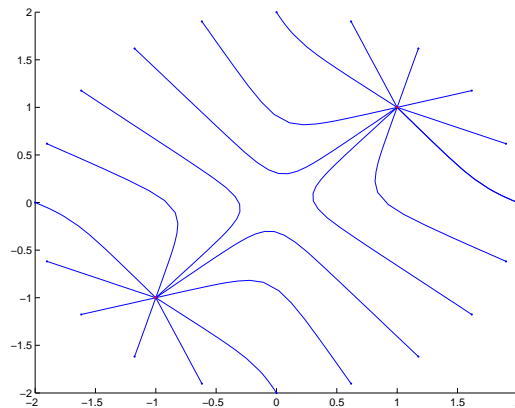


Figura 1.1: Mapa de fase de um sistema com dois neurônios.

A propriedade de estabilidade exponencial é particularmente importante quando a taxa exponencial de convergência é usada para determinar a velocidade de cálculos neurais, sujeitas a quaisquer transformações. Assim, não é só teórica-

---

<sup>3</sup>Uma característica inerente em redes de Hopfield é que, por exemplo, quando se armazena um ponto de equilíbrio  $x$  nesta rede o inverso deste ponto  $\bar{x}$  também é armazenado [12], o que explica a existência do ponto de equilíbrio  $(-1,-1)$

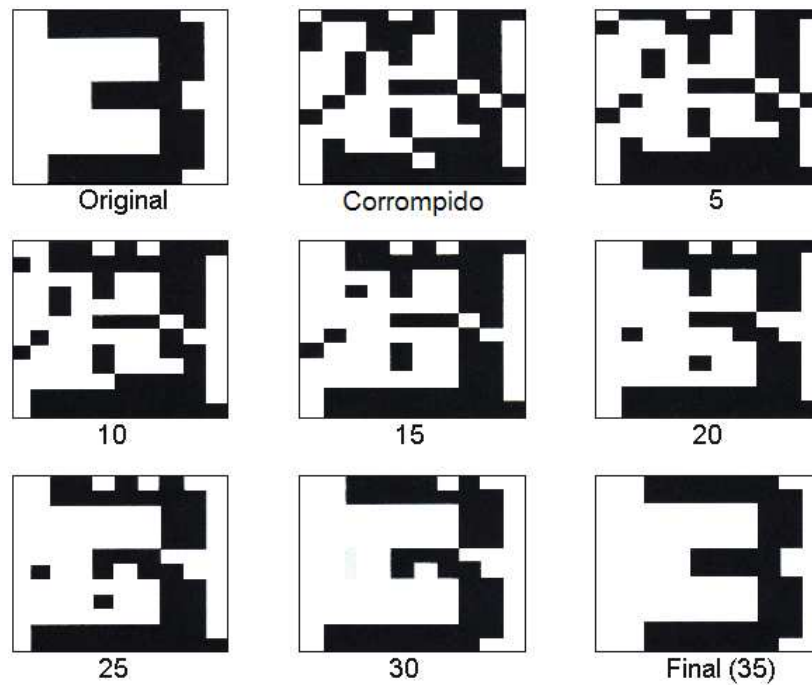


Figura 1.2: Recuperação correta do padrão “3” para uma entrada corrompida em uma rede de Hopfield.

mente interessante mas também importante determinar a estabilidade exponencial e calcular a taxa de convergência exponencial para redes neurais dinâmicas em geral [3].

Sendo assim, é de suma importância o estudo das estabilidades assintótica e exponencial para avaliar a convergência para o ponto de equilíbrio armazenado na rede e a possibilidade de se conhecer esta taxa de convergência, respectivamente.

## 1.1 Objetivo

Este trabalho concentra-se na análise de estabilidade assintótica e exponencial para uma classe de redes neurais artificiais sujeitas a retardo variante no tempo e com incertezas paramétricas do tipo politópicas, onde são propostos métodos eficientes através de LMIs, que podem ser facilmente resolvidas através dos algoritmos de pontos interiores [14], podendo ser menos conservadores que alguns

da literatura. Os métodos aqui propostos permitirão encontrar o máximo valor do retardo no tempo, para uma determinada taxa de variação do mesmo.

## 1.2 Perspectiva Histórica

Em 1982, John Hopfield [15] mostrou a relação entre redes recorrentes auto-associativas e sistemas físicos, permitindo que várias linhas de pesquisa estudassem tais modelos. Também em meados da década de 80, com o avanço da tecnologia, sobretudo da microeletrônica, permitiu-se a realização física de tais modelos de maneira simples.

Marcus e Westervelt em 1989 [16], introduziu o primeiro estudo da influência de um único retardo no tempo em uma RNA. Após este trabalho, Gopalsamy e He em 1994 [17] consideraram a introdução de diferentes retardos no tempo em diferentes canais de comunicação. Joy em 1999 [18] adicionou um novo termo de forma que além do retardo no tempo da propagação dos sinais, o modelo da RNA inclui informação sobre a propagação instantânea dos sinais, sendo este um modelo mais geral.

Com o aumento crescente de estudos nesta área, gerou-se na literatura dois conceitos sobre estabilidade em RNAs sujeitas a influência do retardo no tempo. O primeiro, que não inclui qualquer informação sobre o tamanho do retardo no tempo, é conhecido como independente do retardo no tempo (Marcus e Westervelt em 1989 [16]; T. Roska et. al. em 1992 [19] e em 1993 [20]; K. Gopalsamy e X. Z. He em 1994 [21] e [17]; H. Ye et. al. em 1994 [22]; Y. Zhang em 1996 [23]; X. F. Liao e J. B. Yu em 1998 [24]; X. Liao e J. Yu em 1998 [5]; P. Van den Driessche e X. Zou em 1998 [25]; M. P. Joy em 1999 [18] e em 2000 [26]; J. Cao em 2000 [27]; S. Arik em 2000 [28]; T. Chen e L. Rong em 2003 [29]; Z. Wang, H. He e X. Liao em 2004 [30]). O outro conceito leva em conta explicitamente o retardo no tempo na formulação do problema, sendo conhecido como dependente do retardo no tempo (J. Wei e S. Ruan em 1999 [10]; Q. Zhang, X. Wei e J. Xu em 2003 [7]; W.-H. Chen, Z.-H. Guan e X. Lu em 2004 [31]; C. Li, X. Liao e R. Zhang em 2004 [32]; Z. Zeng, J. Wang e X. Liao em 2005 [33]; T. Ensari e S. Arik [34]). Assim sendo, como a informação sobre o tamanho do retardo no



tempo é usado como critério do conceito dependente do retardo, este pode ser menos conservador que a abordagem independente do tamanho do retardo.

Com o crescente interesse nesta área, e a necessidade de se obter condições viáveis para se verificar a estabilidade de RNAs em situações práticas, o uso das LMIs, por suas potencialidades em termos de convexidade, manipulações e introdução de relaxações, tornou-se uma ferramenta com forte apelo, sendo tema de diversos trabalhos: X. Liao e J. Yu em 2002 [3], [11]; T. Chen e L. Rong em 2003 [29]; C. Li, X. Liao e Y. Chen em 2004 [35]; C. Ji, H. Zhang e H. Guan em 2004 [36]; V. Singh em 2004 [37]; E. Yucel e S. Arik em 2004 [38]; C. Li, X. Liao e R. Zhang em 2004 [32]; J. Cao e J. Wang em 2005 [39].

Em [32], [37] e [40], a estabilidade assintótica de redes neurais com incertezas paramétricas com retardo no tempo também foi estudado, sendo que há algumas condições suficientes que são viáveis, porém têm a desvantagem de não serem capazes de encontrar o máximo retardo no tempo permissível.

### 1.3 Contribuição Esperada e Metodologia

O objeto de estudo desta dissertação é o problema da estabilidade robusta em uma classe de RNAs que podem ser sujeitas a retardo no tempo constante ou variante e/ou incertezas paramétricas. Neste trabalho desenvolvem-se abordagens para a análise da estabilidade assintótica e exponencial para esta classe.

Um problema intrínseco a qualquer sistema dinâmico, como a rede neural a ser considerada, diz respeito a quesitos de estabilidade, que é o foco principal deste trabalho.

Em questões práticas os métodos desenvolvidos neste trabalho poderão ser aplicados para avaliar a influência do retardo no tempo e/ou de incertezas paramétricas em uma classe de RNAs implementadas analógicamente, ou considerando uma situação de projeto, os métodos propostos poderão auxiliar um projetista a escolher uma determinada classe de amplificadores operacionais, ou até mesmo, a implementar RNAs com parâmetros ajustáveis.

As abordagens desenvolvidas centram-se nos pontos abaixo:

- Utilizar o método de um trabalho recente da literatura [2];
- Aplicação da fórmula de Leibniz-Newton;
- Introdução de matrizes de parâmetros livres para expressar a influência dos termos da fórmula de Leibniz-Newton;
- Definição apropriada de funcionais do tipo Lyapunov-Krasovskii para análise de estabilidade das RNAs sujeitas a retardo no tempo e incertezas paramétricas;
- Utilização de ferramentas de otimização convexa para solucionar problemas descritos em termos de LMIs.

Vale ressaltar que a metodologia apresentada nos itens acima é inovadora no sentido de poder reduzir significativamente o conservadorismo fruto do retardo no tempo, como será verificado por uma série de exemplos. Além disso, a metodologia também é inovadora no sentido de introduzir instrumentos de análise até então não utilizados neste tipo de problema.

## 1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho é organizado como segue: o capítulo 2 aborda a formulação do problema, destacando os principais passos da literatura para a estruturação deste problema de forma mais geral. O capítulo 3 trata do desenvolvimento de métodos para a análise da estabilidade em RNAs. Inicialmente é abordado o problema de estabilidade assintótica considerando-se um único retardo no tempo. Em seguida são abordados os problemas de estabilidade assintótica considerando-se múltiplos retardos no tempo, de estabilidade exponencial (que permite saber a velocidade de convergência da RNA) e finalmente é apresentado o teorema para a análise de estabilidade de RNAs sujeitas a incertezas paramétricas. O capítulo 4 apresenta alguns exemplos numéricos, com a finalidade de verificar a eficiência dos métodos

---

apresentados. Por fim, o capítulo 5 apresenta as conclusões acerca do trabalho desenvolvido.

# Capítulo 2

## Formulação do Problema

Neste capítulo será levantado um modelo dinâmico para RNAs sujeitas ao retardo no tempo descrito em equações diferenciais, que será o objeto de estudo neste trabalho.

Como mostrado em [15], pode-se considerar uma forma “simples” de um modelo a tempo contínuo descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias para representar a dinâmica de RNAs. Em termos físicos, os pesos sinápticos  $w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}$  representam condutâncias, e as entradas  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  representam tensões;  $n$  é o número de entradas. Estas entradas são aplicadas a uma junção aditiva de corrente caracterizada na figura 2.1. Na qual  $R_i$  é a resistência

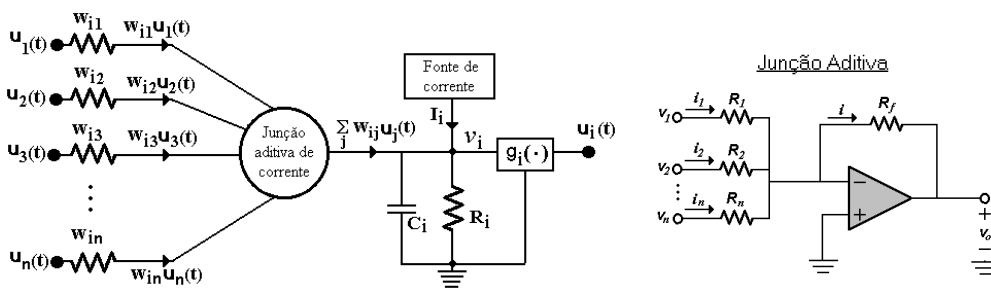


Figura 2.1: Modelo aditivo de um neurônio

de fuga,  $C_i$  a capacitância de fuga,  $v_i$  representa o campo local induzido na

entrada da função de ativação do neurônio  $g_i$ . Assim é possível determinar a saída do neurônio  $i$  como:

$$u_i(t) = g_i(v_i(t)) \quad (2.1)$$

Aplicando a *lei de das correntes de Kirchoff*, chega-se em:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{v_i(t)}{C_i R_i} + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n w_{ij} g_i(v_i(t)) + \frac{I_i}{C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

No trabalho pioneiro de Marcus e Westervelt [16], introduziu-se um retardo no tempo constante  $\bar{\tau} > 0$  em (2.2), de forma que se obtém:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{v_i(t)}{C_i R_i} + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n w_{ij} g_i(v_i(t - \bar{\tau})) + \frac{I_i}{C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

No entanto, ao contrário do sistema descrito em (2.2), o sistema (2.3) tem um comportamento dinâmico muito mais complicado devido a incorporação do retardo no tempo. Em [18] adicionou-se um novo termo de forma que além do retardo no tempo da propagação dos sinais, o modelo da RNA inclui informação sobre a propagação instantânea dos sinais, sendo este um modelo mais geral.

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{v_i(t)}{C_i R_i} + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n w_{ij}^0 g_i(v_i(t)) + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n w_{ij}^1 g_i(v_i(t - \bar{\tau})) + \frac{I_i}{C_i} \quad (2.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Outra dificuldade é que, ao contrário de apresentar um retardo constante, muitas redes neurais na prática podem estar sujeitas a retardo que varia no tempo ou, em uma situação limite, apenas conhece-se o limitante para o retardo no tempo. Dessa forma,  $(v_i(t - \bar{\tau}))$  é reescrita como  $(v_i(t - d(t)))$ .

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{v_i(t)}{C_i R_i} + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n w_{ij}^0 g_i(v_i(t)) + \frac{1}{C_i} \sum_{j=1}^n w_{ij}^1 g_i(v_i(t - d(t))) + \frac{I_i}{C_i} \quad (2.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Considera-se o retardo,  $d(t)$ , variante no tempo, diferenciável, não-negativo e limitado, ou seja, que satisfaça:

$$0 \leq d(t) \leq \tau, \quad \dot{d}(t) \leq \mu < 1$$

sendo  $\tau$  e  $\mu$  constantes.

Considerando o sistema (2.5) reescrito de forma mais apropriada para o uso de LMLs, considere as novas variáveis:  $a_i = 1/(R_i C_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $w_{ij} = w_{ij}/C_i$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  e  $I_i = I_i/C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Assim, a rede neural com retardo variante no tempo com  $n$  neurônios é equivalente a:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -Av(t) + W^0 g(v(t)) + W^1 g(v(t - d(t))) + I \quad (2.6)$$

no qual  $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados da rede neural,  $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$  é uma matriz diagonal com elementos positivos,  $a_i > 0$ ,  $W^0 = (w_{ij}^0) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$  e  $W^1 = (w_{ij}^1) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$  são pesos de conexão da matriz e os pesos de conexão da matriz com o retardo, respectivamente,  $g(v(t)) = [g_1(v_1(t)), g_2(v_2(t)), \dots, g_n(v_n(t))]^T \in \mathbb{R}^n$  é a função de ativação dos neurônios com  $g(0) = 0$  e  $I = [I_1, I_2, \dots, I_n]^T \in \mathbb{R}^n$  é um vetor constante.

Morita em [41] e Morita e Amari em [42] mostrou que a capacidade absoluta de uma rede de memória associativa pode ser melhorada substituindo-se a função de ativação sigmoideal habitual por alguma função de ativação não monotônica, pois em muitos circuitos eletrônicos, os amplificadores operacionais não são monotônicos e nem continuamente diferenciáveis. Então, a função de ativação de cada neurônio em (2.6),  $g_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , satisfaz a hipótese seguinte:

**Hipótese:**

$$(H) \quad 0 \leq \frac{g_j(x) - g_j(y)}{x - y} \leq \sigma_j \quad \forall x, y \in R \quad (2.7)$$

$$x \neq y, \quad g_j(0) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Este tipo de função de ativação é claramente mais geral que a usual sigmoïdal.



O sistema (2.6) pode ser alterado de forma a levar o ponto fixo para a origem. Assim será estudado a estabilidade do sistema na origem, fazendo uma mudança no ponto de equilíbrio  $v^*$  levando-o para origem,  $x^* = v - v^*$ . Portanto, pode-se transformá-lo em:

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t - d(t))) \quad (2.8)$$

sendo que  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado do sistema transformado, e  $f(x) = [f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)]^T \in \mathbb{R}^n$  com  $f_i(x_i) = g_i(x_i + u_i^*) - g_i(u_i^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Enquanto o retardo no tempo,  $d(t)$ , é variante, diferenciável, não-negativo e limitado.

Considerando-se a introdução de diferentes retardos no tempo em diferentes canais de comunicação, como sugerido no trabalho de Gopalsamy e He [17], pode ser feita mais uma modificação no sistema (2.8). Então, o sistema (2.8) pode ser reescrito da seguinte forma considerando a existência de  $n^2$  retardos no tempo:

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W^0 f(x(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W^{(i-1)n+j} f(x(t - d_{(i-1)n+j}(t))) \quad (2.9)$$

no qual  $W^{(i-1)n+j} \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$  é uma matriz com um único elemento não nulo igual a  $w_{ij}^1$  na posição  $(i, j)$ .

Estendendo o sistema (2.9) ele pode ser escrito para o caso da existência de  $K$  retardos no tempo diferentes, tal que  $1 \leq K \leq n^2$  :

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W^0 f(x(t)) + \sum_{k=1}^K W^k f(x(t - d_k(t))) \quad (2.10)$$

na qual  $d_k$  representa o  $n$ -ésimo retardo no tempo,  $k = 1, \dots, K$  e  $W^k \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$

é a matriz formada pelos elementos  $w_{ij}^1$  correspondentes ao retardo no tempo  $d_k$ , satisfazendo as condições:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 0 \leq d_k(t) \leq \tau_k \\ (2) \quad & \dot{d}_k(t) \leq \mu_k \leq 1 \end{aligned}$$

Por simplicidade, será feita a seguinte notação:

$$\begin{aligned} x(t)^d &= [x^T(t - d_1) \quad x^T(t - d_2) \quad \dots \quad x^T(t - d_K)]^T \\ W^d &= [W^1 \quad W^2 \quad \dots \quad W^K] \end{aligned}$$

Então, o sistema (2.10) pode ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^d f(x(t)^d) \quad (2.11)$$

Este formato geral será adotado neste trabalho.



# Capítulo 3

## Análise da Estabilidade de RNAs (Redes Neurais Artificiais)

Neste capítulo são desenvolvidas condições suficientes, do tipo dependente do retardo, para análise de estabilidade assintótica e exponencial de uma classe de RNAs (Redes Neurais Artificiais) sujeitas a influência de retardo no tempo (constante ou variante) e/ou sujeitas a incertezas paramétricas do tipo politópicas.

A metodologia é baseada na quadra: uso de matrizes de relaxação para expressar a influência dos termos da fórmula de Leibniz-Newton; definição apropriada de funcionais do tipo Lyapunov-Krasovskii; desigualdades matriciais lineares (LMIs - Linear Matrix Inequalities) e ferramentas de otimização convexa para solucionar problemas formulados em termos de LMIs.

### 3.1 Análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a um único retardo no tempo –

$$\mathcal{A}_a^{\tau} \mathcal{RNA}$$

A abordagem da análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a um único retardo no tempo é apresentada aqui em forma de teorema, como apresentado abaixo.

**Teorema 1** Considere o sistema (2.11) para um único retardo no tempo ( $K = 1$ ). Sejam  $\tau > 0$  e  $\mu < 1$  escalares limitantes para o valor do retardo no tempo

e sua taxa de variação, respectivamente, e suponha que a hipótese ( $H$ ) (veja Capítulo 2) seja satisfeita. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P$ ,  $Q$ ,  $Z$  e  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} \succeq 0$ , e quaisquer matrizes  $Y$  e  $T$  de dimensões apropriadas, tais que as seguintes LMLs sejam satisfeitas,

$$\Xi = \begin{bmatrix} \phi_{11} + \Omega_{11} + \Gamma_{11} & \phi_{12} + \Omega_{12} + \Gamma_{12} \\ \phi_{12}^T + \Omega_{12}^T + \Gamma_{11}^T & \phi_{22} + \Omega_{22} + \Gamma_{22} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.1)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & Y \\ X_{12}^T & X_{22} & T \\ Y^T & T^T & Z \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (3.2)$$

com

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= -PA - AP + \Sigma^\sigma W_0^T P + PW_0 \Sigma^\sigma + Q + \tau X_{11} \\ \phi_{12} &= PW^1 \Sigma^\sigma + \tau X_{12} \\ \phi_{22} &= -(1 - \mu)Q + \tau X_{22} \end{aligned}$$

$\Gamma_{11}$ ,  $\Gamma_{12}$  e  $\Gamma_{22}$  são definidos em (2),  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{22}$  são definidos em (3.8) e  $\Sigma^\sigma = \text{diag}(\sigma_i)$ ,  $i, \dots, n$ . Então, a origem do sistema (2.11) para  $K = 1$  é assintoticamente estável.  $\diamond$

**Demonstração:** Considere o seguinte funcional tipo Lyapunov-Krasovskii:

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) \quad (3.3)$$

com

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &\triangleq x^T(t)Px(t) \\ V_2(x_t) &\triangleq \int_{t-d(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds \\ V_3(x_t) &\triangleq \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s)dsd\theta \end{aligned}$$

e  $P = P^T \succ 0$ ,  $Q = Q^T \succ 0$ ,  $Z = Z^T \succ 0$ . Derivando o funcional (3.3) com relação as trajetórias, obtém-se:

$$\dot{V}(x_t) = \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) \quad (3.4)$$

com

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(x_t) &= x(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P x(t) \\
&= x(t)^T P [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))] \\
&\quad + [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))]^T P x(t) \\
&= x(t)^T P [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))] \\
&\quad + [-x(t)^T A + f(x(t))^T W^{0T} + f(x(t-d(t)))^T W^{1T}] P x(t) \\
&= -x(t)^T [PA + AP] x(t) + f^T(x(t)) W^{0T} P x(t) \\
&\quad + x(t)^T P W^0 f(x(t)) + 2x(t)^T P W^1 f(x(t-d(t))) \\
&\leq -x(t)^T [PA + AP] x(t) + x(t)^T \Sigma^\sigma W^{0T} P x(t) \\
&\quad + x^T(t) P W^0 \Sigma^\sigma x(t) + 2x(t)^T P W^1 \Sigma^\sigma x(t-d(t)) \\
&= x(t)^T [-PA - AP + \Sigma^\sigma W^{0T} P + P W^0 \Sigma^\sigma] x(t) \\
&\quad + 2x(t)^T (P W^1 \Sigma^\sigma x(t-d(t)))
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(x_t) &= -(1 - \dot{d}(t)) x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t)) \\
&\quad + x^T(t) Q x(t) \\
&\leq -(1 - \mu) x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t)) \\
&\quad + x^T(t) Q x(t)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(x_t) &= \tau \dot{x}(t)^T Z \dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&= \tau [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))]^T \\
&\quad \times Z [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))] \\
&\quad - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&= \tau [-x(t)^T A + f(x(t))^T W^{0T} + f(x(t-d(t)))^T W^{1T}] \\
&\quad \times Z [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))] \\
&\quad - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&\leq \tau [-x(t)^T A + x(t)^T \Sigma^\sigma W^{0T} + x(t-d(t))^T \Sigma^\sigma W^{1T}] \\
&\quad \times Z [-Ax(t) + W^0 \Sigma^\sigma x(t) + W^1 \Sigma^\sigma x(t-d(t))] \\
&\quad - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&= \tau [-x(t)^T (A - \Sigma^\sigma W^{0T}) + x(t-d(t))^T \Sigma^\sigma W^{1T}] \\
&\quad \times Z [-(A - W^0 \Sigma^\sigma) x(t) + W^1 \Sigma^\sigma x(t-d(t))] \\
&\quad - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&\leq x(t)^T \tau (A - \Sigma^\sigma W^{0T}) Z (A - W^0 \Sigma^\sigma) x(t) \\
&\quad - x(t)^T \tau (A - \Sigma^\sigma W^{0T}) Z (W^1 \Sigma^\sigma) x(t-d(t)) \\
&\quad - x(t-d(t))^T \tau (\Sigma^\sigma W^{1T}) Z (A - W^0 \Sigma^\sigma) x(t) \\
&\quad + x(t-d(t))^T \tau (\Sigma^\sigma W^{1T}) Z (W^1 \Sigma^\sigma) x(t-d(t)) \\
&\quad - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds
\end{aligned}$$

que é equivalente a:

$$\dot{V}_3(x_t) \leq \xi(t)^T \Omega \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \quad (3.7)$$

com

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \tau(A - \Sigma^\sigma W^{0T})Z(A - W^{0T}\Sigma^\sigma) \\ \Omega_{12} &= -\tau(A - \Sigma^\sigma W^{0T})Z(W^1\Sigma^\sigma) \\ \Omega_{21} &= -\tau(\Sigma^\sigma W^{1T})Z(A - W^0\Sigma^\sigma) \\ \Omega_{22} &= \tau(\Sigma^\sigma W^{1T})Z(W^1\Sigma^\sigma) \end{aligned}$$

Adicionando em (3.4) o termo nulo como no Lema 2 (veja seção Notações, Definições e Resultados Intermediários), e qualquer matriz semi-positiva definida como no Lema 3 (veja seção Notações, Definições e Resultados Intermediários):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \leq & \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) \\ & + 2[x^T(t)Y + x^T(t-d(t))T] \\ & \times \left[ x(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t-d(t)) \right] \\ & + \tau \xi^T(t) X \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \xi^T(s) X \xi(s) ds \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo  $\dot{V}_1(x_t)$ ,  $\dot{V}_2(x_t)$  e  $\dot{V}_3(x_t)$  em (3.9) por (3.5), (3.6) e (3.7), respectivamente

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) \leq & x^T[-PA - AP + \Sigma^\sigma W^{0T}P + PW^0\Sigma^\sigma]x(t) \\ & + 2x^T(t)PW^1\Sigma^\sigma x(t-d(t)) \\ & - (1-\mu)x^T(t-d(t))Qx(t-d(t)) + x^T(t)Qx(t) \\ & + \xi(t)^T \Omega \xi(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\ & + 2[x^T(t)Y + x^T(t-d(t))T] \\ & \times \left[ x(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t-d(t)) \right] \\ & + \tau \xi^T(t) X \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \xi^T(s) X \xi(s) ds \end{aligned} \quad (3.10)$$

Então obtém-se:

$$\dot{V}(x_t) \leq \xi^T(t) \Xi \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \zeta^T(t,s) \Psi \zeta(t,s) ds, \quad (3.11)$$

Sendo que as matrizes  $\Xi$  e  $\Psi$  são definidas em (3.1) e (3.2), respectivamente. Se  $\Xi \prec 0$ ,  $\Psi \succeq 0$ , então  $\dot{V}(x_t) < 0$  para qualquer  $\xi(t) \neq 0$ . Logo, a origem do sistema (2.11) para  $K = 1$  é assintoticamente estável.

□

### 3.2 Análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a múltiplos retardos no tempo – $\mathcal{A}_a^{\tau_k} \mathcal{RNA}$

A abordagem da análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a múltiplos retardos no tempo é apresentada aqui em forma de teorema, como apresentado abaixo.

**Teorema 2** Considere o sistema (2.11). Sejam  $\tau_k > 0$  e  $\mu_k < 1$  escalares limitantes para os valores dos retardos no tempo e suas taxas de variações, respectivamente, e suponha que a hipótese ( $H$ ) (veja Capítulo 2) seja satisfeita. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P$ ,  $Q_k$ ,  $Z_k$ , matrizes simétricas semi-definidas positivas  $X_k$  como em (8) e  $\mathcal{X}$  como em (10), e quaisquer matrizes  $Y_k$  e  $T_k$  de dimensões apropriadas ( $k = 1, \dots, K$ ), tais que as LMIs sejam satisfeitas:

$$\Xi = \mathcal{V}^1 + \mathcal{V}^2 + \mathcal{V}^3 + \bar{\Gamma} + \mathcal{X} \prec 0 \quad (3.12)$$

com  $\mathcal{V}^1$ ,  $\mathcal{V}^2$ ,  $\mathcal{V}^3$ ,  $\bar{\Gamma}$  e  $\mathcal{X}$  definidos em (3.14), (3.15), (3.16), (6), (10), respectivamente, e,

$$\Psi_k = \Upsilon_k + X_k + Z_k \succeq 0 \quad (k = 1, \dots, K) \quad (3.13)$$

com  $\Upsilon_k$ ,  $X_k$  e  $Z_k$  definidos em (7), (8) e (3.17), respectivamente. Então o sistema (2.11) é assintoticamente estável.

$$\mathcal{V}^1 = \begin{bmatrix} -PA - AP + PW^0 \Sigma^\sigma + \Sigma^\sigma W^{0T} P & PW^d \Sigma^\sigma \\ * & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{V}^2 = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K Q_k & \mathbf{0} \\ * & \text{diag}\{-(1-\mu_k)Q_k\} \quad (k=1, \dots, K) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{V}^3 = \sum_{k=1}^K \tau_k \begin{bmatrix} (-A + \Sigma^\sigma W^{0T}) Z_k (-A + W^0 \Sigma^\sigma) \\ * \\ -(A - \Sigma^\sigma W^{0T}) Z_k (W^d \Sigma^\sigma) \\ (\Sigma^\sigma W^{dT}) Z_k (W^d \Sigma^\sigma) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$Z_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & Z_k \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

◇

**Demonstração:** Considere o seguinte funcional do tipo Lyapunov-Krasovskii:

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) \quad (3.18)$$

com

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &\triangleq x^T(t) P x(t) \\ V_2(x_t) &\triangleq \sum_{k=1}^K \int_{t-d_k(t)}^t x^T(s) K_k x(s) ds \\ V_3(x_t) &\triangleq \sum_{k=1}^K \int_{-\tau_k}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T Z_k \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned}$$

e  $P = P^T \succ 0$ ,  $K_k = K_k^T \succ 0$ ,  $Z_k = Z_k^T \succ 0$ . Derivando o funcional (3.18) com relação as trajetórias, obtém-se:

$$\dot{V}(x_t) = \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) \quad (3.19)$$

com

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(x_t) &= x(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P x(t) \\
 &= x(t)^T P [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^d f(x(t)^d)] \\
 &\quad + [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^d f(x(t)^d)]^T P x(t) \\
 &= x(t)^T P [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^d f(x(t)^d)] \\
 &\quad + [-x^T(t)A + f(x(t))^T W^{0T} + f^T(x(t)^d) W^{dT}] P x(t) \\
 &\leq x(t)^T P [-Ax(t) + W^0 \Sigma^\sigma x(t) + W^d \Sigma^\sigma x(t)^d] \\
 &\quad + [-x^T(t)A + \Sigma^\sigma x(t)^T W^{0T} + \Sigma^\sigma x^T(t)^d W^{dT}] P x(t) \\
 &= x(t)^T [-PA - AP + PW^0 \Sigma^\sigma + \Sigma^\sigma W^0 P] x(t) \\
 &\quad + x^T(t) (PW^d \Sigma^\sigma) x(t)^d + x^T(t)^d (\Sigma^\sigma W^{dT} P) x(t) \\
 &= \xi_d^T(t) \mathcal{V}^1 \xi_d(t)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(x_t) &= \sum_{k=1}^K \{ -(1 - \dot{d}_k(t)) x^T(t - d_k(t)) K_k x(t - d_k(t)) \\
 &\quad + x^T(t) K_k x(t) \} \\
 &\leq \sum_{k=1}^K \{ -(1 - \mu_k(t)) x^T(t - d_k(t)) K_k x(t - d_k(t)) \\
 &\quad + x^T(t) K_k x(t) \} \\
 &= \xi_d^T(t) \mathcal{V}^2 \xi_d(t)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3(x_t) &= \sum_{k=1}^K \{ \tau_k \dot{x}(t)^T Z_k \dot{x}(t) - \int_{t-\tau_k}^t \dot{x}(s)^T Z_k \dot{x}(s) ds \} \\
 &= \sum_{k=1}^K \tau_k [-x^T(t)A + f(x(t))^T W^{0T} + f^T(x(t)^d) W^{dT}] \\
 &\quad \times Z_k [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^d f(x(t)^d)] \\
 &\quad - \sum_{k=1}^K \int_{t-\tau_k}^t \dot{x}(s)^T Z_k \dot{x}(s) ds \\
 &\leq \sum_{k=1}^K \tau_k [-x^T(t)A + \Sigma^\sigma x(t)^T W^{0T} + \Sigma^\sigma x^T(t)^d W^{dT}] \\
 &\quad \times Z_k [-Ax(t) + W^0 \Sigma^\sigma x(t) + W^d \Sigma^\sigma x(t)^d] \\
 &\quad - \sum_{k=1}^K \int_{t-\tau_k}^t \dot{x}(s)^T Z_k \dot{x}(s) ds \\
 &= \sum_{k=1}^K \tau_k [x^T(t)(-A + \Sigma^\sigma W^{0T}) + x^T(t)^d \Sigma^\sigma W^{dT}] \\
 &\quad \times Z_k [(-A + W^0 \Sigma^\sigma) + W^d \Sigma^\sigma x(t)^d] \\
 &\quad - \sum_{k=1}^K \int_{t-\tau_k}^t \dot{x}(s)^T Z_k \dot{x}(s) ds \\
 &= \sum_{k=1}^K \tau_k [x^T(t)(-A + \Sigma^\sigma W^{0T}) Z_k (-A + W^0 \Sigma^\sigma) x(t) \\
 &\quad + x^T(t)^d (-A + \Sigma^\sigma W^{0T}) Z_k (W^d \Sigma^\sigma) x(t)^d \\
 &\quad + x^T(t)^d (\Sigma^\sigma W^{dT}) Z_k (-A + W^0 \Sigma^\sigma) x(t) \\
 &\quad + x^T(t)^d (\Sigma^\sigma W^{dT}) Z_k (W^d \Sigma^\sigma) x(t)^d] \\
 &\quad - \sum_{k=1}^K \int_{t-\tau_k}^t \dot{x}(s)^T Z_k \dot{x}(s) ds \\
 &\leq \xi_d^T(t) \mathcal{V}^3 \xi_d(t) - \sum_{k=1}^K \int_{t-d_k(t)}^t \zeta_k(t, s)^T Z_k \zeta_k(t, s) ds
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

sendo  $\mathcal{V}^1$ ,  $\mathcal{V}^2$ ,  $\mathcal{V}^3$  e  $\mathcal{Z}_k$  definidos em (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17), respectivamente.

Adicionando o termo nulo no Corolário 1 (veja seção Notações, Definições e Resultados Intermediários) e a desigualdade (3) Corolário 2 (veja seção Notações, Definições e Resultados Intermediários) em (3.19):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) \\ &+ \sum_{k=1}^K 2[x^T(t)Y_k + x^T(t-d_k(t))T_k] \\ &\times \left[ x(t) - \int_{t-d_k(t)}^t \dot{x}(s)ds - x(t-d_k(t)) \right] \\ &+ \xi_d^T(t)\mathcal{X}\xi_d(t) - \sum_{k=1}^K \int_{t-d_k(t)}^t \eta_k^T(t)X_k\eta_k(t)ds \end{aligned} \quad (3.23)$$

e reescrevendo a Equação (3.23) como:

$$\dot{V}(x_t) \leq \xi_d^T(t)\Xi\xi_d(t) - \sum_{k=1}^K \int_{t-d_k(t)}^t \zeta_k^T(t,s)\Psi_k\zeta_k(t,s)ds \quad (3.24)$$

As matrizes  $\Xi$  e  $\Psi_k$  são definidas em (3.12) e (3.13), respectivamente. Se  $\Xi \prec 0$ ,  $\Psi_k \succeq 0$  ( $k = 1 \dots K$ ), implica que  $\dot{V}(x_t) < 0$  para qualquer  $\xi_d(t) \neq 0$ . Então, a origem do sistema (2.11) é assintoticamente estável.

□

### 3.3 Análise de estabilidade exponencial de RNAs sujeitas a um único retardo no tempo – $\mathcal{A}_e^T \mathcal{R} \mathcal{N} \mathcal{A}$

A abordagem da análise de estabilidade Exponencial de RNAs sujeitas a um único retardo no tempo é apresentada aqui em forma de teorema, como apresentado abaixo.

**Teorema 3** Considere o sistema (2.11) para um único retardo no tempo ( $K = 1$ ). Sejam  $\tau > 0$  e  $\mu < 1$  escalares limitantes para o tamanho do retardo no



tempo e sua taxa de variação, respectivamente, e suponha que a hipótese ( $H$ ) (veja Capítulo 2) seja satisfeita. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P$ ,  $Q$ ,  $Z$ ,  $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} \succeq 0$  e matrizes com dimensões apropriadas,  $Y$  e  $T$  tais que as seguintes LMIs sejam verificadas:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \phi_{11} + \Omega_{11} + \Gamma_{11} & \phi_{12} + \Omega_{12} + \Gamma_{12} \\ \phi_{12}^T + \Omega_{12}^T + \Gamma_{12}^T & \phi_{22} + \Omega_{22} + \Gamma_{22} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (3.25)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & Y \\ X_{12}^T & X_{22} & T \\ Y^T & T^T & Z \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (3.26)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= 2kP - PA - AP + \Sigma^\sigma W^{0T}P + PW^0\Sigma^\sigma + Q + \tau X_{11} \\ \phi_{12} &= PW^1\Sigma^\sigma + \tau X_{12} \\ \phi_{22} &= -e^{-2k\tau}(1 - \mu)Q + \tau X_{22} \end{aligned}$$

$\Gamma_{11}$ ,  $\Gamma_{12}$  e  $\Gamma_{22}$  são definidos em (2),  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{22}$  são definidos em (3.32) e  $\Sigma^\sigma = \text{diag}(\sigma_i)$ ,  $i, \dots, n$ . Então o sistema (2.11) para  $K = 1$  é exponencialmente estável.  $\diamond$

**Demonstração:** O funcional de Lyapunov-Krasovskii escolhido é:

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) \quad (3.27)$$

tais que:  $P = P^T \succ 0$ ,  $Q = Q^T \succ 0$  e  $Z = Z^T \succ 0$  com,

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &\triangleq e^{2kt} x^T(t) P x(t) \\ V_2(x_t) &\triangleq \int_{t-d(t)}^t e^{2ks} x^T(s) Q x(s) ds \\ V_3(x_t) &\triangleq \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2ks} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned}$$

Derivando o funcional escolhido (3.27) ao longo de  $x(t)$

$$\dot{V}(x_t) = \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) \quad (3.28)$$

com

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) &= 2k e^{2kt} x(t)^T P x(t) + e^{2kt} \dot{x}(t)^T P x(t) + e^{2kt} x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= e^{2kt} [x(t)^T 2k P x(t) + \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t)] \\ &= e^{2kt} [x(t)^T 2k P x(t) \\ &\quad + [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))]^T P x(t) \\ &\quad + x(t)^T P [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))]] \\ &= e^{2kt} [x(t)^T 2k P x(t) \\ &\quad + [-x(t)^T A + f(x(t))^T W^{0T} + f(x(t-d(t)))^T W^{1T}] P x(t) \\ &\quad + x(t)^T P [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))]] \\ &= e^{2kt} [x(t)^T 2k P x(t) \\ &\quad - x(t)^T P A x(t) - x(t)^T A P x(t) \\ &\quad + f^T(x(t)) W^{0T} P x(t) + x(t)^T P W^0 f(x(t)) \\ &\quad + 2x(t)^T P W^1 f(x(t-d(t)))] \\ &\leq e^{2kt} x(t)^T [2kP - PA - AP] x(t) \\ &\quad + x(t)^T \Sigma^\sigma W^{0T} P x(t) + x^T(t) P W^0 \Sigma^\sigma x(t) \\ &\quad + 2x(t)^T P W^1 \Sigma^\sigma x(t-d(t)) \\ &= e^{2kt} \{x(t)^T [2kP - PA - AP + \Sigma^\sigma W^{0T} P + P W^0 \Sigma^\sigma] x(t) \\ &\quad + 2x(t)^T P W^1 \Sigma^\sigma x(t-d(t))\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x_t) &= -e^{2k(t-d(t))} (1 - \dot{d}(t)) x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t)) \\ &\quad + e^{2kt} x^T(t) Q x(t) \\ &\leq -e^{2k(t-\tau)} (1 - \dot{d}(t)) x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t)) \\ &\quad + e^{2kt} x^T(t) Q x(t) \\ &= -e^{2kt} e^{-2k\tau} (1 - \dot{d}(t)) x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t)) \\ &\quad + e^{2kt} x^T(t) Q x(t) \\ &= e^{2kt} \{-e^{-2k\tau} (1 - \dot{d}(t)) x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t)) \\ &\quad + x^T(t) Q x(t)\} \\ &\leq e^{2kt} \{-e^{-2k\tau} (1 - \mu) x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t)) \\ &\quad + x^T(t) Q x(t)\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(x_t) &= \tau e^{2kt} \dot{x}(t)^T Z \dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t e^{2ks} \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&= \tau e^{2kt} [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))]^T \\
&\quad \times Z [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))] \\
&\quad - \int_{t-\tau}^t e^{2ks} \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&= \tau e^{2kt} [-x(t)^T A + f(x(t))^T W^{0T} + f(x(t-d(t)))^T W^{1T}] \\
&\quad \times Z [-Ax(t) + W^0 f(x(t)) + W^1 f(x(t-d(t)))] \\
&\quad - \int_{t-\tau}^t e^{2ks} \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&\leq \tau e^{2kt} [-x(t)^T A + x(t)^T \Sigma^\sigma W^{0T} + x(t-d(t))^T \Sigma^\sigma W^{1T}] \\
&\quad \times Z [-Ax(t) + W^0 \Sigma^\sigma x(t) + W^1 \Sigma^\sigma x(t-d(t))] \\
&\quad - \int_{t-\tau}^t e^{2ks} \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&= \tau e^{2kt} [-x(t)^T (A - \Sigma^\sigma W^{0T}) + x(t-d(t))^T \Sigma^\sigma W^{1T}] \\
&\quad \times Z [-(A - W^0 \Sigma^\sigma)x(t) + W^1 \Sigma^\sigma x(t-d(t))] \\
&\quad - \int_{t-\tau}^t e^{2ks} \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&\leq e^{2kt} \{ x(t)^T \tau (A - \Sigma^\sigma W^{0T}) Z (A - W^0 \Sigma^\sigma)x(t) \\
&\quad - x(t)^T \tau (A - \Sigma^\sigma W^{0T}) Z (W^1 \Sigma^\sigma)x(t-d(t)) \\
&\quad - x(t-d(t))^T \tau (\Sigma^\sigma W^{1T}) Z (A - W^0 \Sigma^\sigma)x(t) \\
&\quad + x(t-d(t))^T \tau (\Sigma^\sigma W^{1T}) Z (W^1 \Sigma^\sigma)x(t-d(t)) \\
&\quad - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \}
\end{aligned}$$

que equivale a:

$$\dot{V}_3(x_t) \leq e^{2kt} \left\{ \xi(t)^T \Omega \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \right\} \quad (3.31)$$

e

$$\Omega = \begin{bmatrix} \tau (A - \Sigma^\sigma W^{0T}) Z (A - W^{0T} \Sigma^\sigma) & -\tau (A - \Sigma^\sigma W^{0T}) Z (W^1 \Sigma^\sigma) \\ -\tau (\Sigma^\sigma W^{1T}) Z (A - W^0 \Sigma^\sigma) & \tau (\Sigma^\sigma W^{1T}) Z (W^1 \Sigma^\sigma) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Substituindo em (3.28) os termos  $\dot{V}_1(x_t)$ ,  $\dot{V}_2(x_t)$  e  $\dot{V}_3(x_t)$  por (3.29), (3.30) e (3.31), respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) &\leq e^{2kt} \{x(t)^T [2kP - PA - AP + \Sigma^\sigma W^{0T} P + PW^0 \Sigma^\sigma] x(t) \\
&\quad + 2x(t)^T PW^1 \Sigma^\sigma x(t - d(t))\} \\
&\quad + e^{2kt} \{-e^{-2k\tau} (1 - \mu) x^T(t - d(t)) Q x(t - d(t)) + x^T(t) Q x(t)\} \\
&\quad + e^{2kt} \{\xi(t)^T \Omega \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds\} \\
&= e^{2kt} \{x(t)^T [2kP - PA - AP + \Sigma^\sigma W^{0T} P + PW^0 \Sigma^\sigma + Q] x(t) \\
&\quad + 2x(t)^T PW^1 \Sigma^\sigma x(t - d(t)) \\
&\quad - e^{-2k\tau} (1 - \mu) x^T(t - d(t)) Q x(t - d(t)) \\
&\quad + \xi(t)^T \Omega \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds\} \\
\dot{V}(x_t) &\leq e^{2kt} \Pi
\end{aligned} \tag{3.33}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
\Pi &= x(t)^T [2kP - PA - AP + \Sigma^\sigma W^{0T} P + PW^0 \Sigma^\sigma + Q] x(t) \\
&\quad + 2x(t)^T PW^1 \Sigma^\sigma x(t - d(t)) \\
&\quad - e^{-2k\tau} (1 - \mu) x^T(t - d(t)) Q x(t - d(t)) \\
&\quad + \xi(t)^T \Omega \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Adicionando em (3.34) o termo nulo no Lema 2 (veja seção Notações, Definições e Resultados Intermediários) e a relação no Lema 3 (veja seção Notações, Definições e Resultados Intermediários):

$$\begin{aligned}
\Pi &\leq x(t)^T [2kP - PA - AP + \Sigma^\sigma W^{0T} P + PW^0 \Sigma^\sigma + Q] x(t) \\
&\quad + 2x(t)^T PW^1 \Sigma^\sigma x(t - d(t)) \\
&\quad - e^{-2k\tau} (1 - \mu) x^T(t - d(t)) Q x(t - d(t)) \\
&\quad + \xi(t)^T \Omega \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)^T Z \dot{x}(s) ds \\
&\quad + 2[x^T(t) Y + x^T(t - d(t)) T] \\
&\quad \times \left[ x(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t - d(t)) \right] \\
&\quad + \tau \xi^T(t) X \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \xi^T(t) X \xi(t) ds \\
&= \xi^T(t) \Xi \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \zeta^T(t, s) \Psi \zeta(t, s) ds
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Com as matrizes  $\Xi$  e  $\Psi$  definidas em (3.25) e (3.26), respectivamente. Então substituindo (3.35) em (3.33)

$$\dot{V}(x_t) \leq e^{2kt} \left\{ \xi^T(t) \Xi \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \zeta^T(t,s) \Psi \zeta(t,s) ds \right\} \quad (3.36)$$

As matrizes  $\Xi$  e  $\Psi$  são definidas em (3.25) e (3.26), respectivamente. Se  $\Xi \prec 0$ ,  $\Psi \succeq 0$ , implica que  $\dot{V}(x_t) < 0$  para qualquer  $\xi(t) \neq 0$ . Então, a origem do sistema (2.11) para  $K = 1$  é exponencialmente estável.

□

**Nota 1** O Teorema 3 pode ser estendido para a abordagem com múltiplos retardos. Não foi feito, porém envolve apenas manipulações.  $\triangle$

### 3.4 Análise de estabilidade de RNAs sujeitas a incertezas paramétricas – $\mathcal{ARN}\mathcal{A}^\Delta$

Suponha que as matrizes do sistema (2.11) são reunidas na matriz:

$$\mathcal{S} \triangleq [ A \quad W^0 \quad W^d ] \quad (3.37)$$

Agora o Teorema 1 pode ser estendido para o caso de análise de estabilidade assintótica robusta quando as matrizes do sistema não são exatamente conhecidas, mas pertencem a um domínio incerto politópico  $\mathcal{P}$  definido como o conjunto de todas as matrizes obtidas com a combinação convexa dos vértices:

$$\mathcal{P}(\alpha) \triangleq \left\{ \mathcal{S} : \mathcal{S} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{S}_i; \quad \alpha \in \Omega \right\} \quad (3.38)$$

$$\Omega \triangleq \left\{ \alpha : \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (3.39)$$

sendo que  $\mathcal{S}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , são os vértices do politopo e o vetor  $\alpha = [ \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_N ]'$  parametriza o politopo.

Pode-se apresentar o Teorema a seguir que estabelece condições suficientes para estabilidade assintótica robusta da RNA com retardo no tempo e incertezas no modelo.

**Teorema 4** *Considere o sistema incerto (2.11) com  $S \in \mathcal{P}(\alpha)$ . Sejam  $\tau_k > 0$  e  $\mu_k < 1$  escalares limitantes para os valores dos retardos no tempo e suas taxas de variações, respectivamente, e suponha que a hipótese (H) (veja Capítulo 2) seja satisfeita. Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P$ ,  $Q_k$ ,  $Z_k$ , matrizes simétricas semi-definidas positivas  $X_k$  (8) e  $\mathcal{X}$  (10), e quaisquer matrizes  $Y_k$  e  $T_k$  de dimensões apropriadas ( $k = 1, \dots, K$ ), tais que as LMIs (3.12)-(3.13) sejam satisfeitas,  $\forall i = 1, \dots, N$ , com  $A, W^0, W^d$  tendo o índice subscrito  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Então o sistema incerto é robustamente estável.  $\diamond$*

**Nota 2** *O Teorema 4 pode ser estendido para a abordagem da análise da estabilidade exponencial robusta quando as matrizes do sistema não são exatamente conhecidas. Supondo que as matrizes do sistema (2.11) são reunidas na matriz (3.37) e pertencem a um domínio incerto politópico  $\mathcal{P}(\alpha)$  (3.38) definido como o conjunto de todas as matrizes obtidas com a combinação convexa dos vértices.*

$\triangle$

### 3.5 Conclusões Finais

Neste capítulo foram desenvolvidos métodos viáveis para se verificar a estabilidade assintótica e exponencial de uma classe de RNAs (Redes Neurais Artificiais) sujeitas a influência de retardo no tempo (constante ou variante) e/ou sujeitas a incertezas paramétricas do tipo politópicas. Estes métodos são capazes de informar o máximo retardo no tempo para uma determinada taxa de variação que a RNA ainda seja estável, além da capacidade de informar a taxa de decaimento exponencial da solução da RNA.

O ponto principal do desenvolvimento destes métodos é a utilização da fórmula de Newton-Leibniz, que sem incluir qualquer dinâmica adicional ao sistema original permite que os métodos desenvolvidos aqui sejam menos conservadores em relação os da literatura que fazem muitas trocas de funções não-lineares por seus limitantes superiores, afim de representar o problema em termos de LMIs.

# Capítulo 4

## Estudo de Casos

Neste capítulo, alguns exemplos numéricos são estudados a fim de evidenciar as potencialidades dos métodos de análise propostos. Todos os exemplos se baseiam em três modelos de RNAs (Redes Neurais Artificiais), sendo que as mesmas serão inicialmente estudadas sob um ponto de vista mais particular estendendo-se a casos mais gerais. A organização deste capítulo será da seguinte forma. Os três primeiros exemplos estudam a análise de estabilidade assintótica de RNAs com um único retardo no tempo, o quarto exemplo estuda a análise da estabilidade assintótica da RNA sujeita a um único retardo no tempo e incertezas paramétricas, o quinto, sexto e sétimo exemplos estudam a análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a múltiplos retardos no tempo, o oitavo exemplo estuda a análise da estabilidade assintótica de uma RNA sujeita a múltiplos retardos no tempo e incertezas paramétrica, e por fim, o nono exemplo estuda a análise de estabilidade exponencial de uma RNA sujeita a um único retardo no tempo.

### 4.1 Exemplos – Análise de estabilidade assintótica de RNAs com um único retardo no tempo – $\mathcal{A}_a^T \mathcal{R} \mathcal{N} \mathcal{A}$

**Exemplo 1** *Considere a RNA (2.11) sujeita um único retardo variante no tempo,  $K = 1$ , com as seguintes matrizes:*



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2.9 \end{bmatrix} \quad W^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Sigma^\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 1 pode-se obter os resultados apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 1)

$\mu$	0	0.5	0.9
$\tau$	4.4721	2.0083	1.1801

Os resultados apresentados na Tabela 4.1, mostram a dependência direta da estabilidade assintótica da RNA em relação ao retardo no tempo, observando que essa dependência se torna mais forte quando há uma grande variação do retardo no tempo, pois o máximo retardo no tempo que permite que a RNA seja estável se torna menor.

**Exemplo 2** Babcock e Westervelt [9] estudaram uma RNA com dois neurônios e dois retardos no tempo:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1(t) + a_1 \tanh[x_2(t - \tau_1)] \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2(t) + a_2 \tanh[x_1(t - \tau_2)] \end{cases} \quad (4.1)$$

no qual  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são escalares positivos e constantes.

Em [9] foi mostrado que quando  $a_1 a_2 < -1$  e  $\tau_1 + \tau_2$  atinge um determinado valor, a origem do sistema (4.1) é estável. Quando a soma dos atrasos se incrementa até um valor crítico, a origem se torna instável e a rede oscila em um ciclo limite.

Wei e Ruan [10] confirmaram a análise apresentada em [9] matematicamente e mostraram que a RNA é estável considerando, e.g.,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -1.5$  e

$\tau_1 + \tau_2 < 0.8$ .

Considerando um caso ligeiramente modificado com  $\tau_1 = \tau_2$  e variantes no tempo, que pode ser visto como um caso particular, a idéia principal é verificar a estabilidade. Escolhendo-se os mesmos valores para  $a_1 = 2$  e  $a_2 = -1.5$ , pode-se obter o maior retardo no tempo, considerando a rede neural (2.11) para  $K = 1$ , com as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W_0 = 0$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1.5 & 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma^{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 1 obtém-se os resultados apresentados na Tabela 4.2. Note que para  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  constante obtém-se o retardo  $\tau = 0.4283$ .

Tabela 4.2: Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 2)

$\mu$	0	0.5	0.9
$\tau$	0.4283	0.2891	0.2886

Nota-se que na figura 4.1, a origem é assintoticamente estável para o maior retardo no tempo encontrado  $\tau = 0.4283$  com  $\mu = 0$ . Na figura 4.2 é mostrado que a origem se torna instável para um retardo no tempo um pouco maior, e.g.,  $\tau = 0.5283$ . A figura 4.3 mostra os atratores do sistema para  $\tau = 0.4283$  e  $\tau = 0.5283$ , respectivamente: i) as variáveis do sistema tendem para o ponto fixo (a); ii) as variáveis tendem para um ciclo limite (b). A figura 4.4 ilustra quando a bifurcação de Hopf ocorre, que é muito próximo do valor encontrado  $\tau = 0.4283$ , o qual sugere que o método apresentado é eficiente.

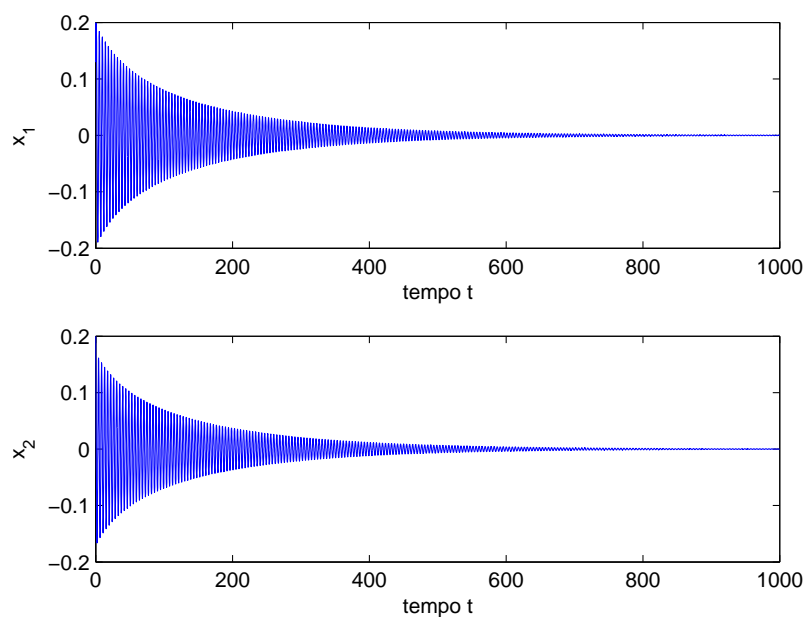


Figura 4.1: Dinâmica da RNA no tempo para  $\tau = 0.4283$  e  $\mu = 0$

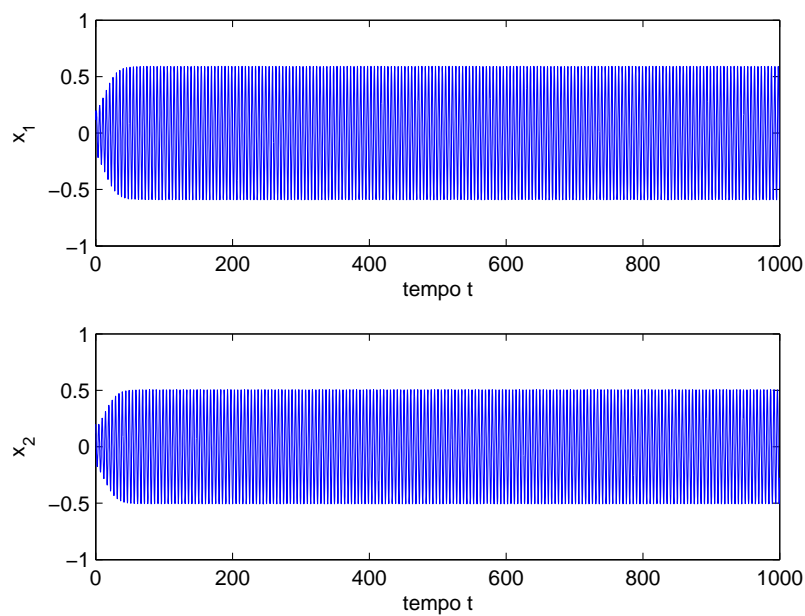


Figura 4.2: Dinâmica da RNA no tempo para  $\tau = 0.5283$  e  $\mu = 0$

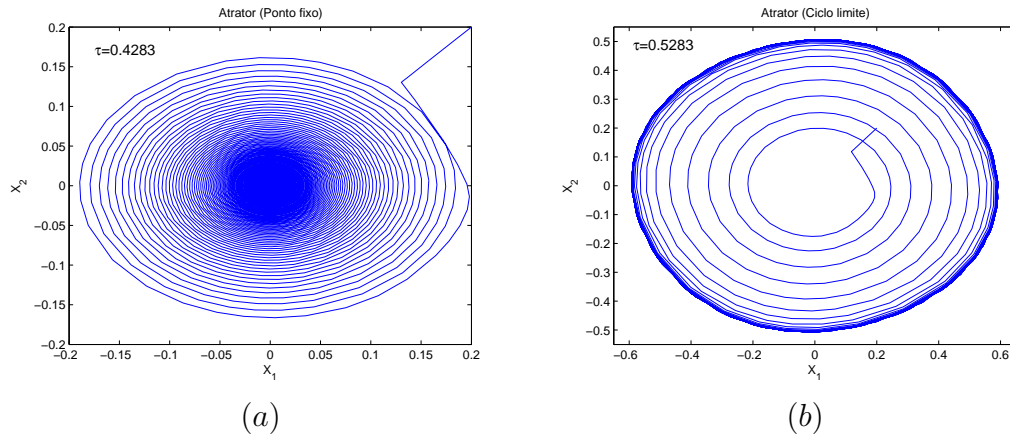


Figura 4.3: Atratores para  $(\tau = 0.4283$  e  $\mu = 0)$  e  $(\tau = 0.5283$  e  $\mu = 0)$ , respectivamente.

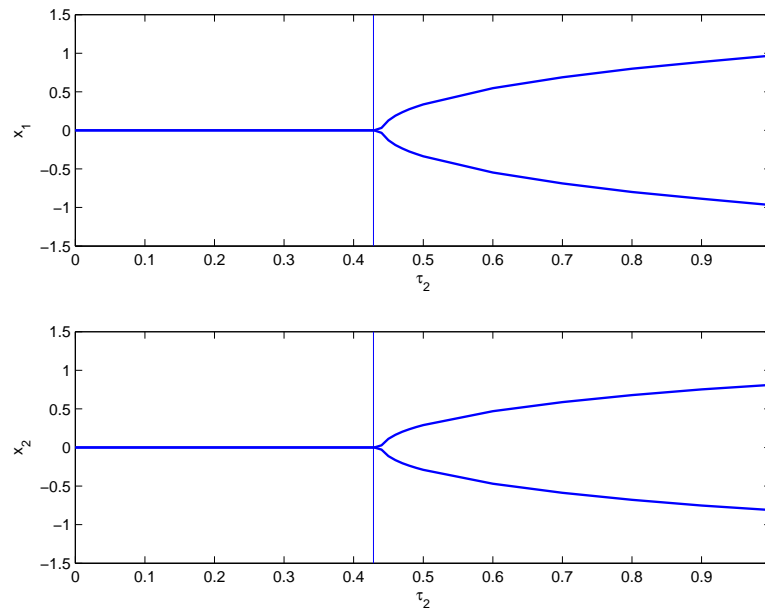


Figura 4.4: Diagrama de bifurcação para  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. Fazendo  $\tau = 0.4283$  para  $\mu = 0$

**Exemplo 3** Considere a seguinte Rede Neural com 10 neurônios e sem auto-conexão que pode ser representada como a RNA (2.11) com  $K = 1$  através das matrizes:

$$A = \Sigma^\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W^0 = 0$$

$$W^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & -0.3 & -0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.1 & -0.3 & -0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0.4 & 0.2 & -0.6 & 0.2 & -0.1 & -0.5 \\ -0.2 & 0.1 & -0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 1 \\ 0.8 & 0.6 & 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0.5 & -0.1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 & -0.4 & 0.1 & 0.6 & 0.5 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & -0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.3 & -0.5 & 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.7 & -0.1 & 0.1 & 0.1 & -0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & -0.6 & 0.1 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 1 obtém-se que o máximo retardo constante no tempo em que esta RNA pode estar sujeita permanecendo estável é  $\tau = 1.6409$ .

As figuras (4.5-4.9) mostram os diagramas de bifurcação para todos os neurônios desta RNA com o objetivo de verificar a eficiência do método proposto aplicado a uma RNA com um número maior de neurônios. Através destes diagramas pode-se verificar que o método proposto é eficiente, o que pode facilmente ser observando na figura 4.7 que mostra o diagrama de bifurcação do neurônio  $x_5$ , no qual o máximo retardo no tempo encontrado pelo método proposto,  $\tau = 1.6409$ , é muito próximo do ponto de bifurcação original.

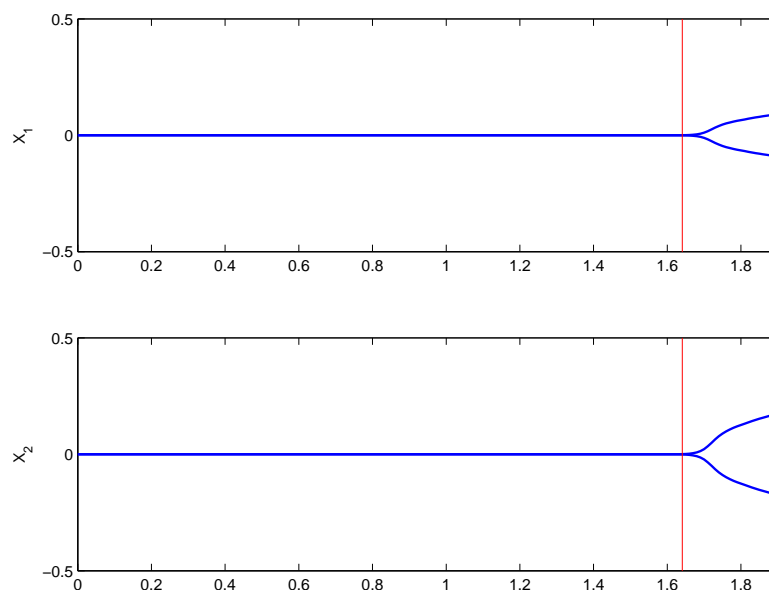


Figura 4.5: Diagrama de bifurcação para  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. Fazendo  $\tau = 1.6409$  para  $\mu = 0$ .

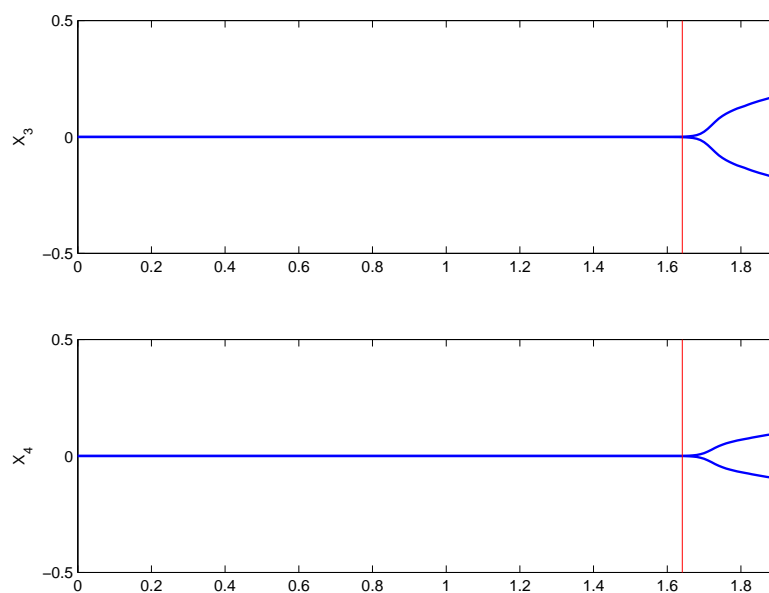


Figura 4.6: Diagrama de bifurcação para  $x_3$  e  $x_4$ , respectivamente. Fazendo  $\tau = 1.6409$  para  $\mu = 0$ .

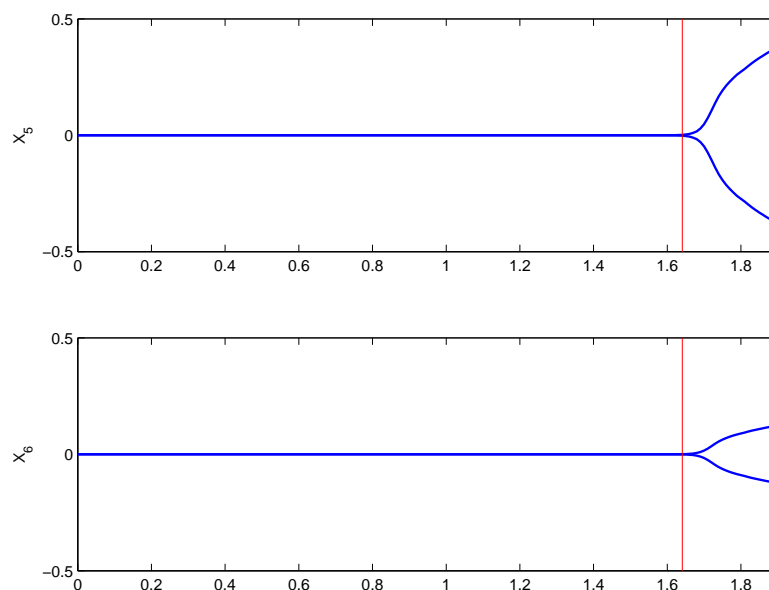


Figura 4.7: Diagrama de bifurcação para  $x_5$  e  $x_6$ , respectivamente. Fazendo  $\tau = 1.6409$  para  $\mu = 0$ .

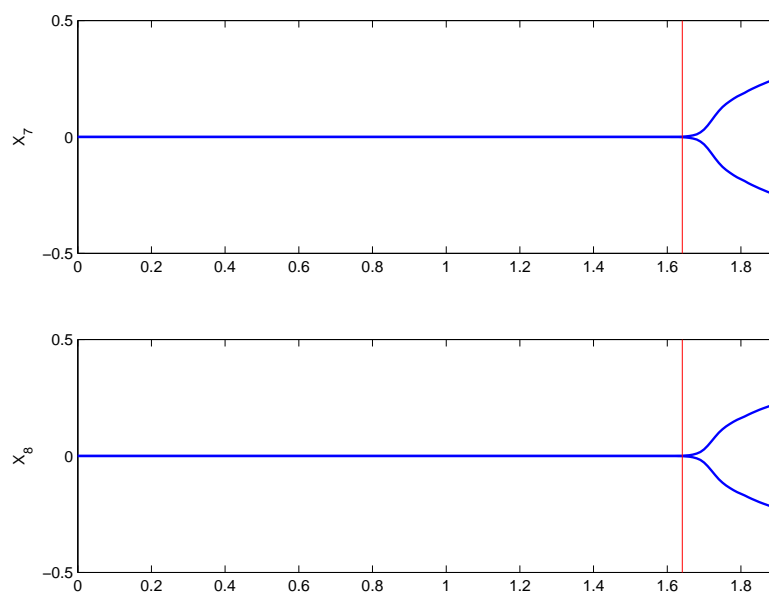


Figura 4.8: Diagrama de bifurcação para  $x_7$  e  $x_8$ , respectivamente. Fazendo  $\tau = 1.6409$  para  $\mu = 0$ .

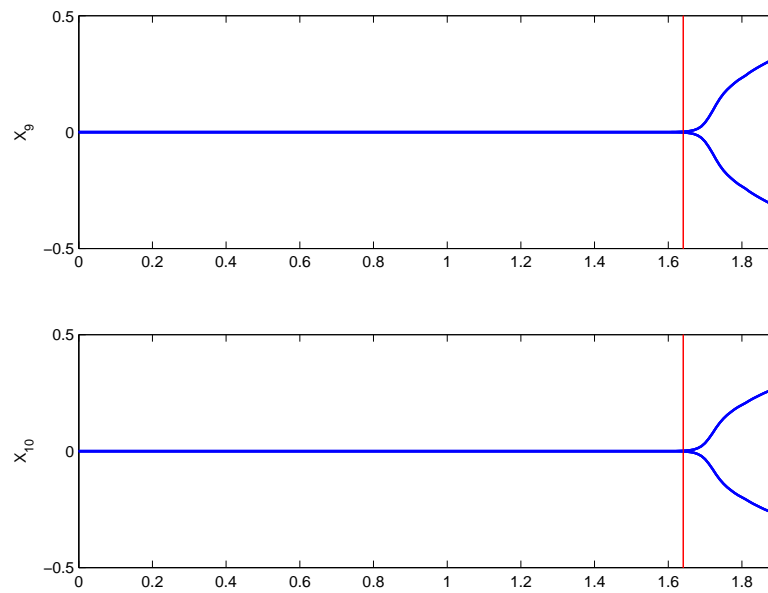


Figura 4.9: Diagrama de bifurcação para  $x_9$  e  $x_{10}$ , respectivamente. Fazendo  $\tau = 1.6409$  para  $\mu = 0$ .



## 4.2 Exemplos – Análise da estabilidade assintótica da RNA sujeita a um único retardo tempo e incertezas paramétricas – $\mathcal{A}_a^\tau \mathcal{RN} \mathcal{A}^\Delta$

**Exemplo 4** Considere a RNA (2.11) com  $K = 1$ , sujeita a incertezas do tipo politópicas:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = -A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + W^0 \begin{bmatrix} \tanh[x_1(t)] \\ \tanh[x_2(t)] \end{bmatrix} + W^1 \begin{bmatrix} \tanh[x_1(t-d(t))] \\ \tanh[x_2(t-d(t))] \end{bmatrix}$$

com as matrizes:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.87 \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2.87 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.93 \end{bmatrix} \quad A^{(4)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2.93 \end{bmatrix}$$

$$W^{0(1)} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 1.98 \end{bmatrix} \quad W^{0(2)} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 1.98 \end{bmatrix}$$

$$W^{0(3)} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 2.02 \end{bmatrix} \quad W^{0(4)} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 2.02 \end{bmatrix}$$

$$W^{1(1)} = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 \\ -1 & -1.3 \end{bmatrix} \quad W^{1(2)} = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ -1 & -1.3 \end{bmatrix}$$

$$W^{1(3)} = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 \\ -1 & -0.7 \end{bmatrix} \quad W^{1(4)} = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ -1 & -0.7 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 4 pode-se obter a Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 4)

$\mu$	0	0.5	0.9
$\tau$	1.0152	0.8820	0.7799

As figuras (4.10-4.12) mostram a resposta temporal da rede em três dos seus vértices considerando o máximo retardo no tempo constante apresentado na Tabela 4.3, sendo que nestas figuras pode-se verificar a estabilidade da RNA.

Os resultados apresentados na Tabela 4.3 mostram que a dependência da estabilidade assintótica da RNA em relação ao retardo no tempo se torna ainda maior quando a RNA está sujeita a incertezas paramétricas, pois o máximo retardo no tempo,  $\tau$ , que garante a estabilidade da RNA se torna menor quando está sujeito há uma grande variação.

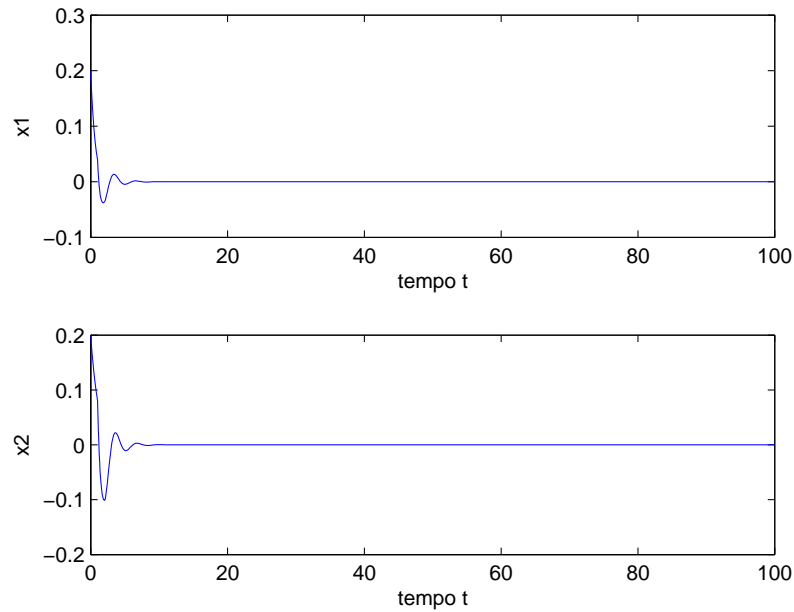


Figura 4.10: Resposta temporal da RNA com  $\tau = 1.0152$  e  $\mu = 0$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(1)}$ ,  $W^{0(1)}$  e  $W^{1(1)}$ .

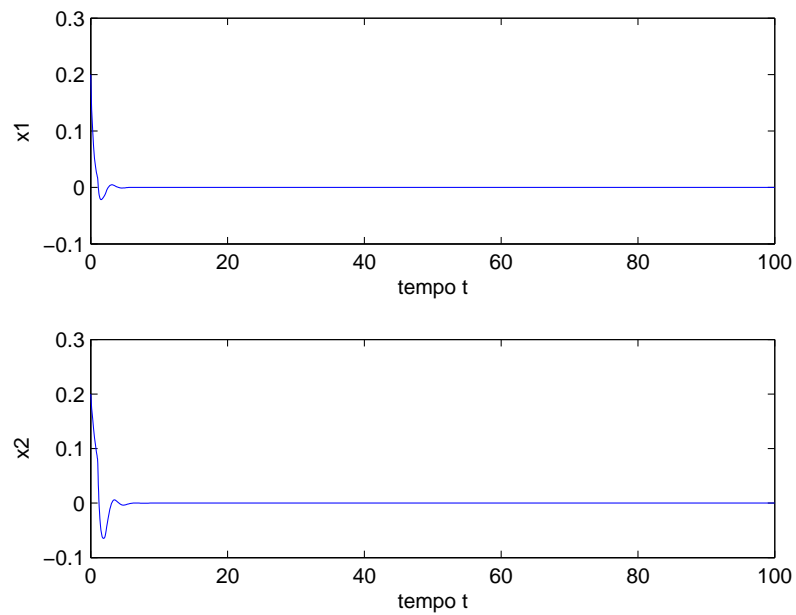


Figura 4.11: Resposta temporal da RNA com  $\tau = 1.0152$  e  $\mu = 0$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(2)}$ ,  $W^{0(2)}$  e  $W^{1(2)}$ .

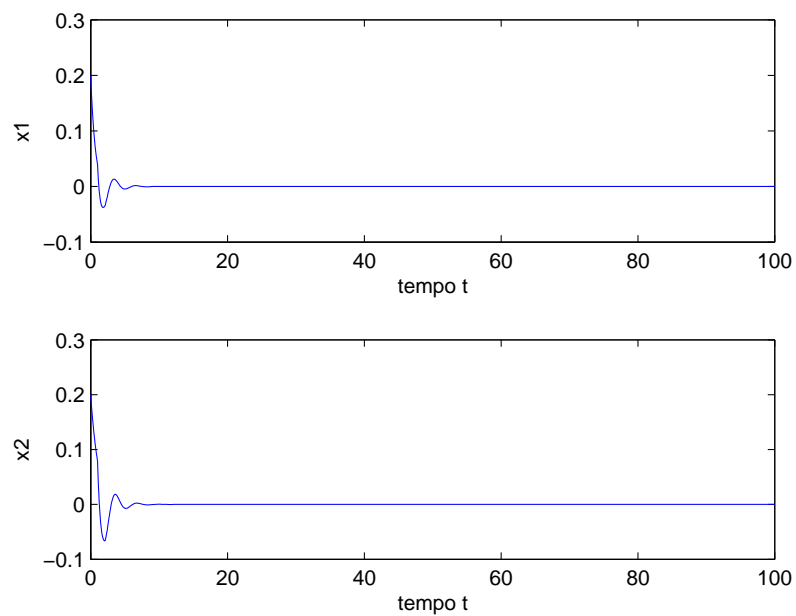


Figura 4.12: Resposta temporal da RNA com  $\tau = 1.0152$  e  $\mu = 0$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(3)}$ ,  $W^{0(3)}$  e  $W^{1(3)}$ .

### 4.3 Exemplos – Análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a múltiplos retardos no tempo – $\mathcal{A}_a^{\tau_k} \mathcal{RNA}$

**Exemplo 5** Considere a seguinte rede neural com dois neurônios e dois retardos constantes no tempo, estudada em [9] e [10]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1(t) + a_1 \tanh[x_2(t - \tau_1)] \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2(t) + a_2 \tanh[x_1(t - \tau_2)] \end{cases} \quad (4.2)$$

Fazendo  $a_1 = 2$  e  $a_2 = -1.5$ , este sistema pode ser reescrito na forma do sistema (2.11) com as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W^0 = 0 \\ W^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.5 & 0 \end{bmatrix} \quad W^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma^\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 2 obtém-se os resultados apresentados na Tabela 4.4. Na qual destacam-se os valores entre parênteses, para  $\tau_1$  e  $\tau_2$  e depois para  $(\tau_2)$  e  $(\tau_1)$ , isto é, um fixado enquanto o outro varia.

Tabela 4.4: Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 5)

$\tau_1$ ( $\tau_2$ )	0.1 (0.7328)	0.2 (0.6449)	0.3 (0.5529)	0.4283 (0.4284)
$\tau_2$ ( $\tau_1$ )	0.7328 (0.1)	0.6449 (0.2)	0.5529 (0.3)	0.4284 (0.4283)

Abaixo são realizadas algumas simulações para verificar a eficácia do método proposto para o caso em que a RNA está sujeita a múltiplos retardos no tempo, para isso são traçados diagramas de bifurcação, sendo que o parâmetro de controle ora é um retardo no tempo, ora é o outro.

As figuras (4.13-4.16), mostram os diagramas de bifurcação da rede para os retardos no tempo mostrados na Tabela 4.4, destacando o limite máximo

encontrado do retardo no tempo para que a rede seja estável.

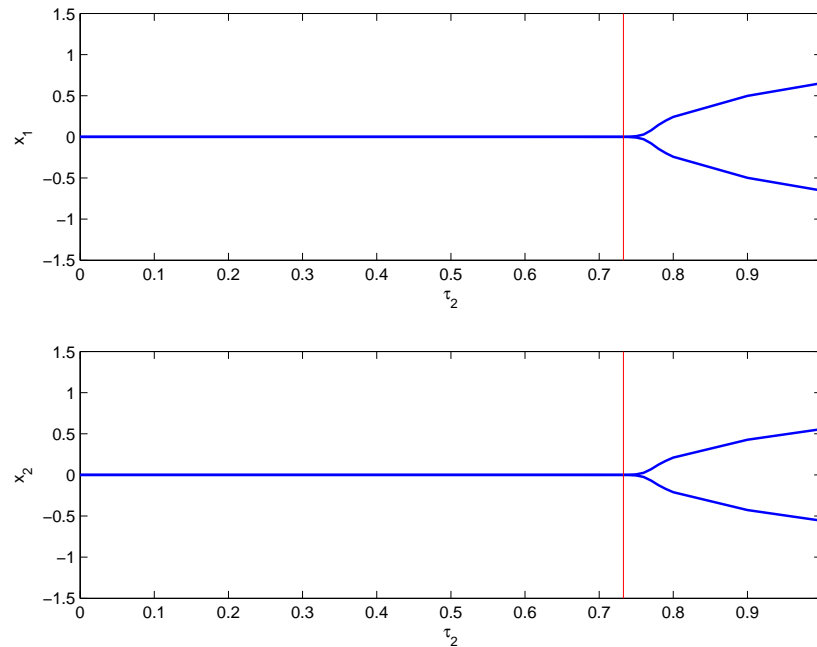


Figura 4.13: Diagrama de bifurcação para  $\tau_1 = 0.1$  e com  $\tau_2$  como parâmetro de controle. Destacando  $\tau_2 = 0.7328$ .

Observando as figuras (4.13-4.16) pode-se concluir que o método proposto se torna mais conservador quando as diferenças entre os retardos no tempo da RNA se tornam maiores, pois na figura 4.13 o ponto de bifurcação da RNA não é tão próximo do valor encontrado pelo método proposto se comparado, por exemplo, com o resultado apresentado no figura 4.16.

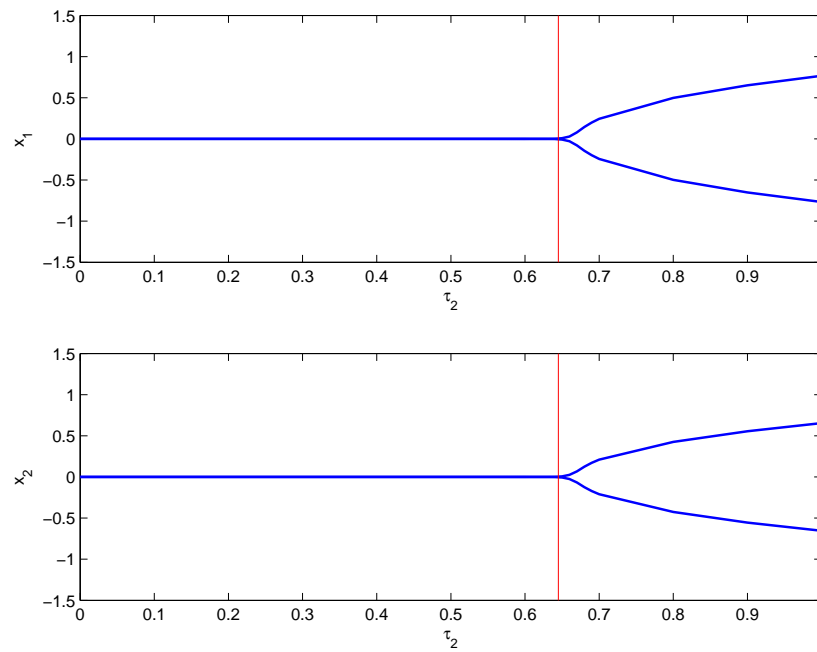


Figura 4.14: Diagrama de bifurcação para  $\tau_1 = 0.2$  e com  $\tau_2$  como parâmetro de controle. Destacando  $\tau_2 = 0.6449$ .

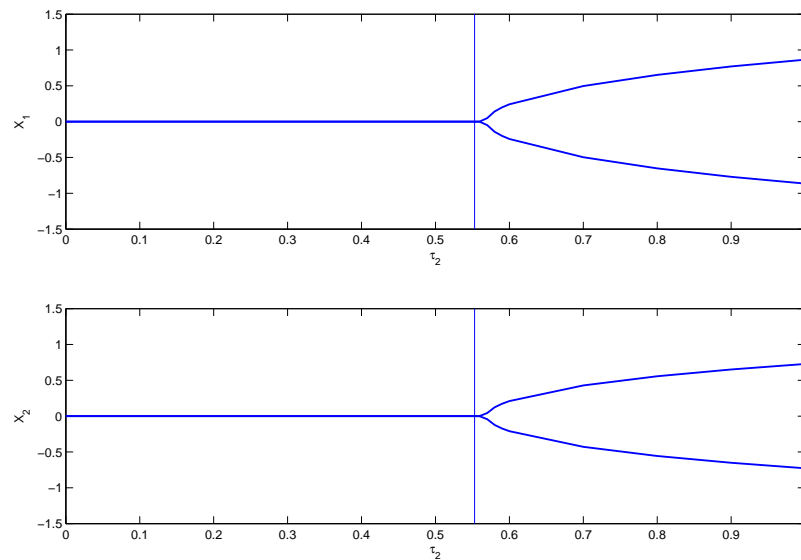


Figura 4.15: Diagrama de bifurcação para  $\tau_1 = 0.3$  e com  $\tau_2$  como parâmetro de controle. Destacando  $\tau_2 = 0.5529$ .

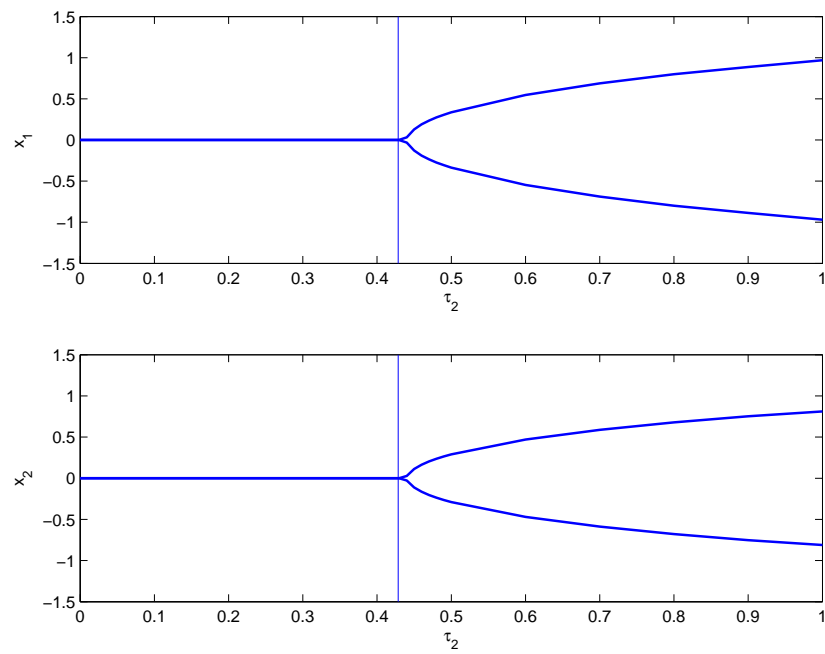


Figura 4.16: Diagrama de bifurcação para  $\tau_1 = 0.4283$  e com  $\tau_2$  como parâmetro de controle. Destacando  $\tau_2 = 0.4284$ .

**Exemplo 6** Considere a rede neural sujeita a três retardos constantes no tempo:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1(t) + \tanh[x_1(t)] - \tanh[x_1(t - \tau_1)] \\ \frac{dx_2}{dt} = -2.9x_2(t) + \tanh[x_1(t)] + 2\tanh[x_2(t)] - \tanh[x_2(t - \tau_2)] \\ \quad - \tanh[x_2(t - \tau_3)] \end{cases} \quad (4.3)$$

este sistema pode ser reescrito na forma do sistema (2.11) com as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \Sigma^\sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2.9 \end{bmatrix} & W^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ W^1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & W^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & W^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando o método proposto, Teorema 2, pode-se concluir que este método é capaz de identificar que a rede é independente do retardo no tempo  $\tau_1$  e dependentes simultaneamente dos retardos no tempo  $\tau_2$  e  $\tau_3$ . Para os seguintes limitantes:

- $\tau_2 = \tau_3 = 0.9534$ ;
- $\tau_2 = 0.9534$  e  $\tau_3 = 0.9535$ ;
- $\tau_2 = 0.9535$  e  $\tau_3 = 0.9534$ ;

As figuras 4.17 e 4.18 mostram o diagrama de bifurcação desta rede, sendo possível observar através delas que a rede é independente do retardo no tempo,  $\tau_1$ . Além disso, neste exemplo o método proposto se mostrou um pouco conservador por encontrar um máximo retardo no tempo não tão próximo do original ponto de bifurcação da rede.



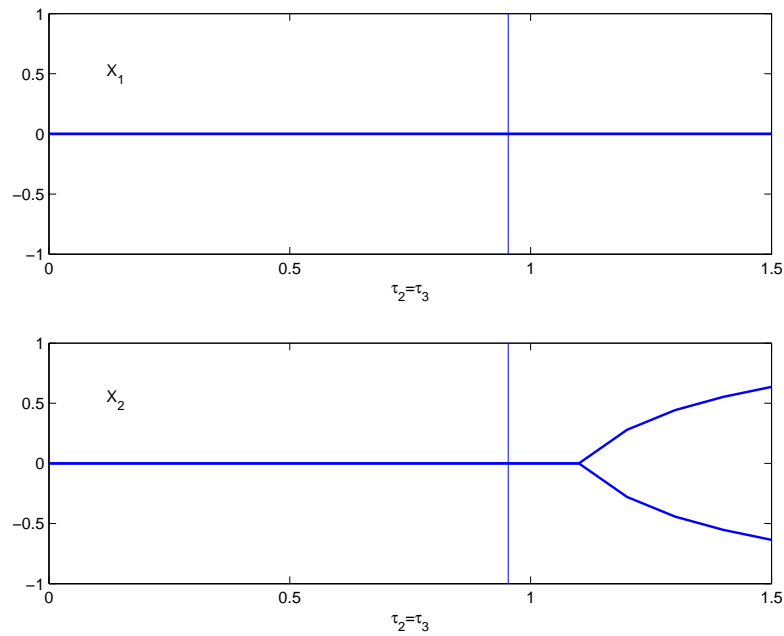


Figura 4.17: Diagrama de bifurcação para  $\tau_1 = 0.1$  e com  $\tau_2 = \tau_3$  como parâmetro de controle. Destacando  $\tau_2 = \tau_3 = 0.9534$ .

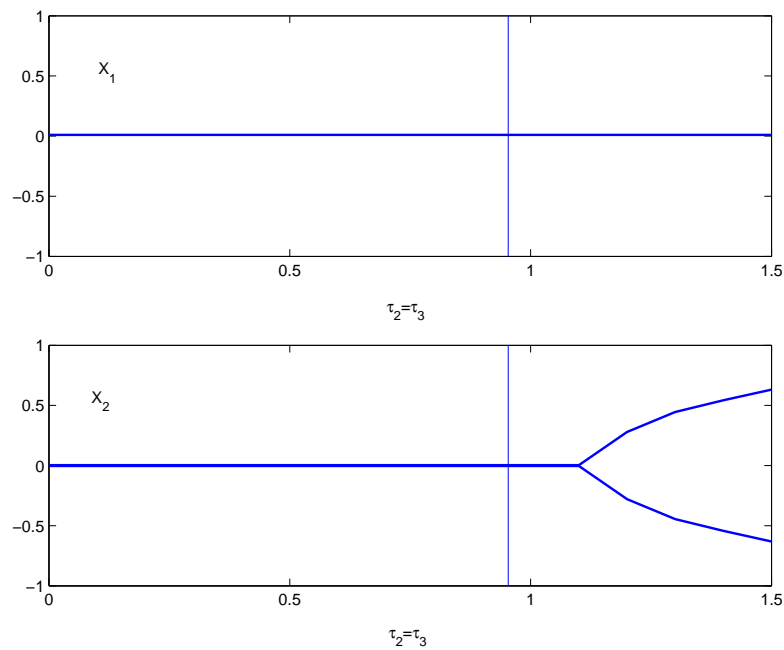


Figura 4.18: Diagrama de bifurcação para  $\tau_1 = 1000$  e com  $\tau_2 = \tau_3$  como parâmetro de controle. Destacando  $\tau_2 = \tau_3 = 0.9534$ .

**Exemplo 7** Considere a rede neural sujeita a três retardos no tempo:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1(t) + \tanh[x_1(t)] - \tanh[x_1(t - \tau_1)] \\ \frac{dx_2}{dt} = -2.9x_2(t) + \tanh[x_1(t)] + 2\tanh[x_2(t)] - \tanh[x_1(t - \tau_2)] \\ \quad - \alpha \tanh[x_2(t - \tau_3)] \end{cases} \quad (4.4)$$

este sistema pode ser reescrito na forma do sistema (2.11) com as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \Sigma^\sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2.9 \end{bmatrix} & W^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ W^1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & W^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & W^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando o método proposto, Teorema 2, pode-se concluir que este método é capaz de identificar o retardo no tempo que mais influencia a estabilidade da rede além de encontrar o seu valor limite para o qual é garantido a estabilidade. A Tabela 4.5 mostra os máximos retardos no tempo para diferentes ponderações da matriz  $W^3$ , variando o valor do parâmetro  $\alpha$ .

Para este caso particularmente é obtido que os retardos no tempo  $\tau_1$  e  $\tau_2$  não influenciam na estabilidade da rede, ao passo que o retardo no tempo  $\tau_3$  controla a estabilidade da rede, como pode ser observado na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 7)

$\alpha$	1	2	3
$\tau_1$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\tau_2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\tau_3$	4.4721	0.9534	0.5634

As figuras 4.19 e 4.20 mostram o diagrama de bifurcação desta rede fazendo  $\alpha = 3$ , sendo possível observar através delas a independência dos retardos no tempo,  $\tau_1$  e  $\tau_2$ . Além disso, neste exemplo, o método se mostrou conservador encontrando um máximo retardo no tempo não muito próximo do ponto de bifurcação original da rede.

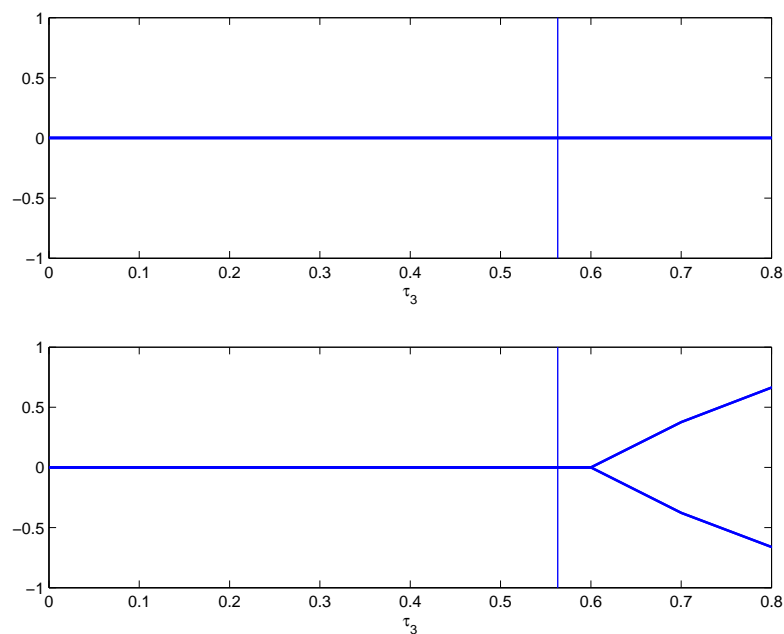


Figura 4.19: Diagrama de bifurcação para  $\tau_1 = \tau_2 = 0.1$  e com  $\tau_3$  como parâmetro de controle. Destacando  $\tau_3 = 0.5634$ .

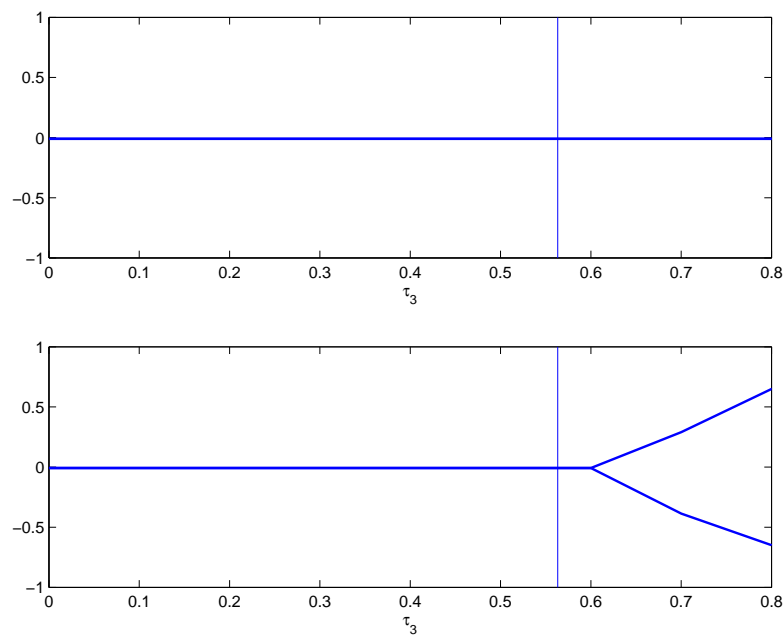


Figura 4.20: Diagrama de bifurcação para  $\tau_1 = \tau_2 = 1500$  e com  $\tau_3$  como parâmetro de controle. Destacando  $\tau_3 = 0.5634$ .

#### 4.4 Exemplos – Análise da estabilidade assintótica da RNA sujeita a múltiplos retardos no tempo e incertezas paramétricas – $\mathcal{A}_a^{\tau_k} \mathcal{RN} \mathcal{A}^\Delta$

**Exemplo 8** *Considere uma rede neural com dois neurônios e dois retardos constantes no tempo:*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1(t) + a_1 \tanh[x_2(t - \tau_1)] \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2(t) + a_2 \tanh[x_1(t - \tau_2)] \end{cases}$$

*Fazendo os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  pertencerem as seguintes faixas de variação:*

$$\begin{aligned} 1.4 &\leq a_1 \leq 2.6 \\ -1.515 &\leq a_2 \leq -1.48 \end{aligned}$$

*Este sistema pode ser reescrito na forma do sistema (2.11) incerto com as seguintes matrizes:*

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix} & A^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix} \\ A^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 1.03 \end{bmatrix} & A^{(4)} &= \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 1.03 \end{bmatrix} \\ W^{1(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & W^{1(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 2.6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ W^{2(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.515 & 0 \end{bmatrix} & W^{2(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.48 & 0 \end{bmatrix} \\ \Sigma^\sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Aplicando o Teorema 4 pode-se obter os resultados apresentados na Tabela 4.6:*

*Os resultados apresentados na Tabela 4.6 mostram que a estabilidade as-*

Tabela 4.6: Máximos retardos no tempo permissíveis (Exemplo 8)

$\tau_1$ ( $\tau_2$ )	0.05 (0.3515)	0.10 (0.3027)	0.15 (0.2533)	0.20 (0.2034)	0.2017
$\tau_2$ ( $\tau_1$ )	0.3515 (0.05)	0.3027 (0.10)	0.2533 (0.15)	0.2034 (0.20)	0.2017

*sintótica da RNA em relação ao retardo no tempo se torna ainda maior quando a RNA está sujeita a incertezas paramétricas, observando que essa dependência aumenta quando a diferença entre os retardos no tempo se tornam maiores.*

*As figuras (4.21-4.36) ilustram o comportamento da RNA em alguns dos seus vértices para diferentes retardos no tempo, sendo que os vértices formados pelas matrizes  $A^{(1)}$ ,  $W^{2(1)}$  e  $W^{2(1)}$  e pelas matrizes  $A^{(3)}$ ,  $W^{1(2)}$  e  $W^{2(1)}$  apresentaram tempo de acomodação da RNA superior aos outros vértices, como é mostrado nas figuras 4.25, 4.27, 4.33 e 4.35.*

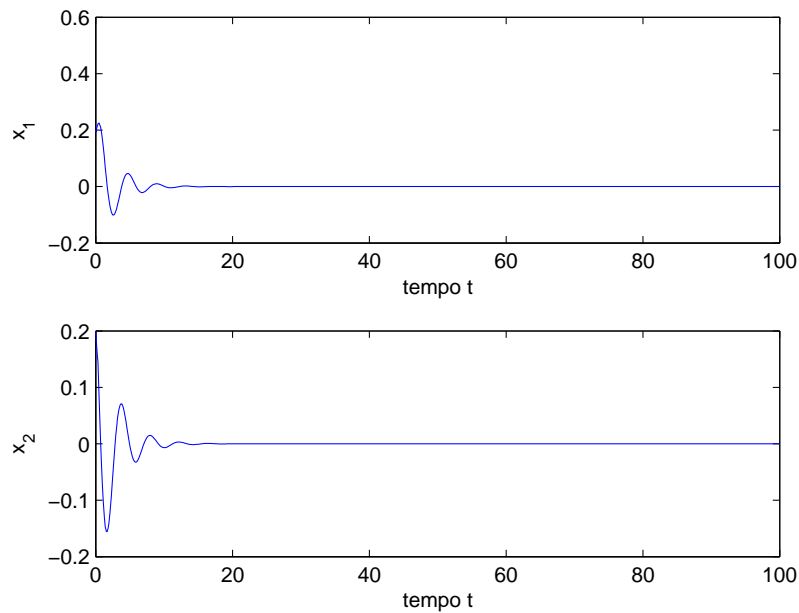


Figura 4.21: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.05$  e  $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(1)}$ ,  $W^{1(1)}$  e  $W^{2(1)}$

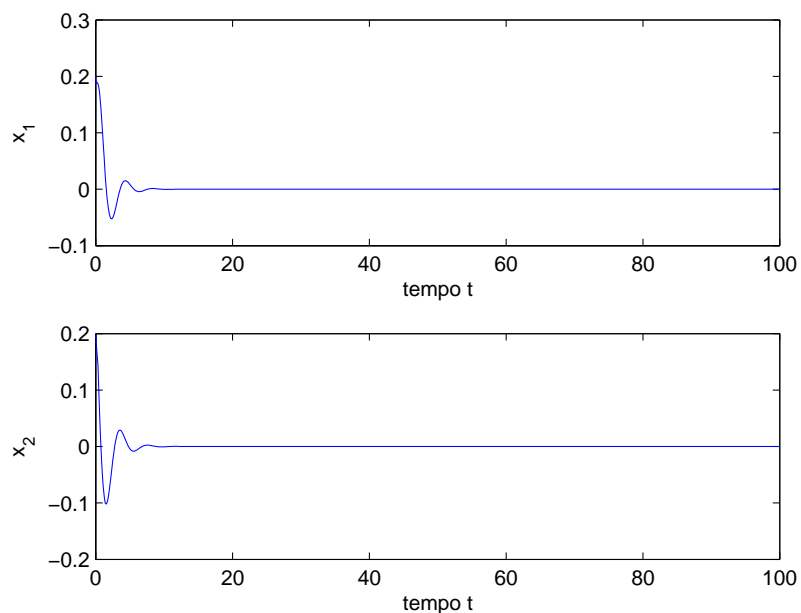


Figura 4.22: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.05$  e  $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(2)}$ ,  $W^{1(1)}$  e  $W^{2(1)}$

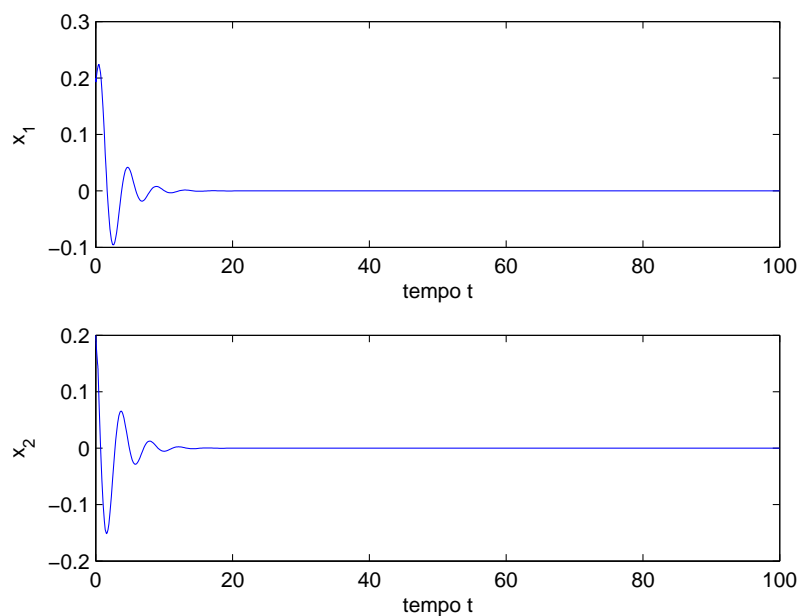


Figura 4.23: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.05$  e  $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(3)}$ ,  $W^{1(1)}$  e  $W^{2(1)}$

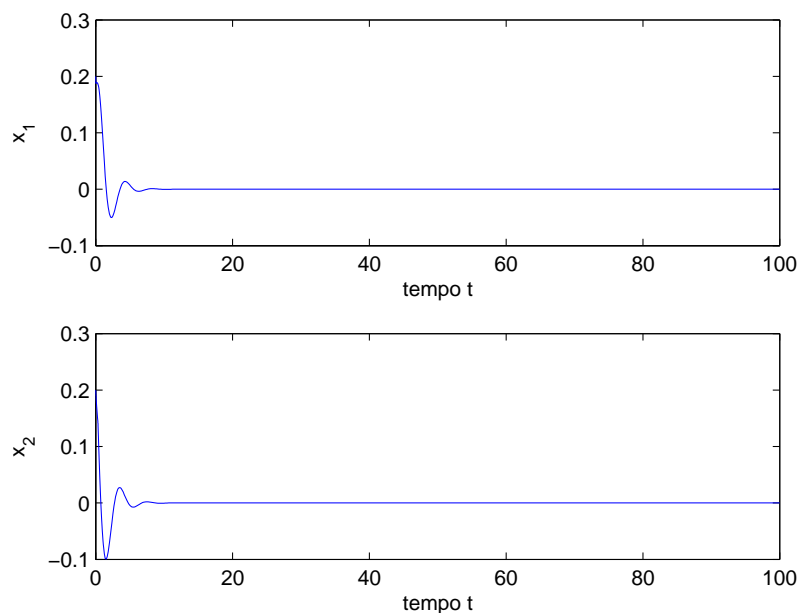


Figura 4.24: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.05$  e  $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(4)}$ ,  $W^{1(1)}$  e  $W^{2(1)}$

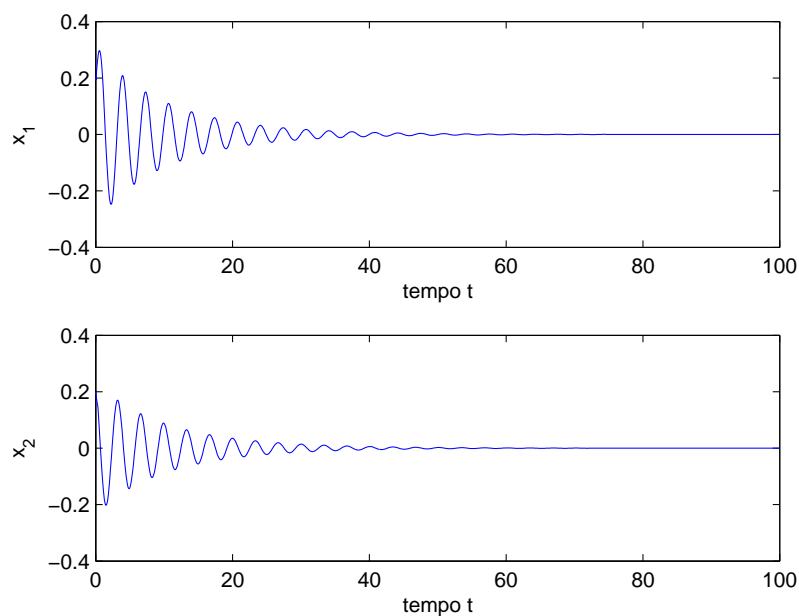


Figura 4.25: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.05$  e  $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(1)}$ ,  $W^{1(2)}$  e  $W^{2(1)}$

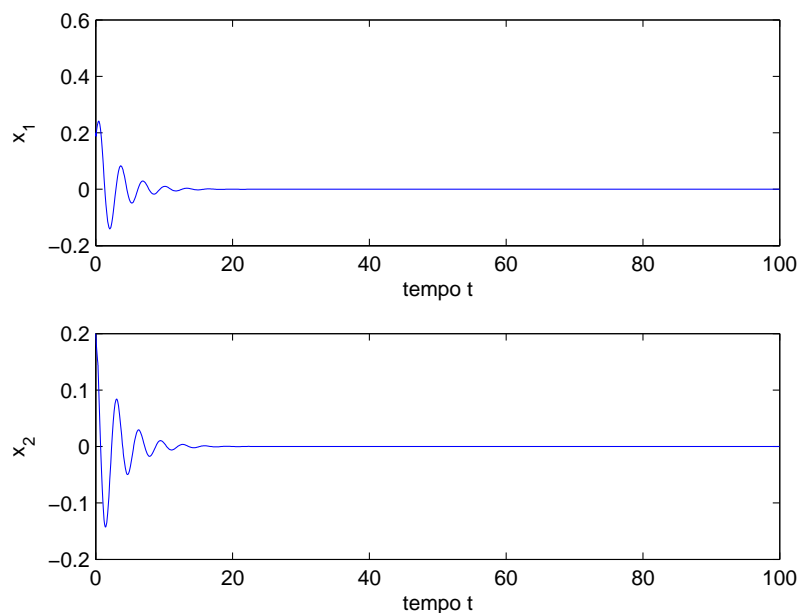


Figura 4.26: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.05$  e  $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(2)}$ ,  $W^{1(2)}$  e  $W^{2(1)}$

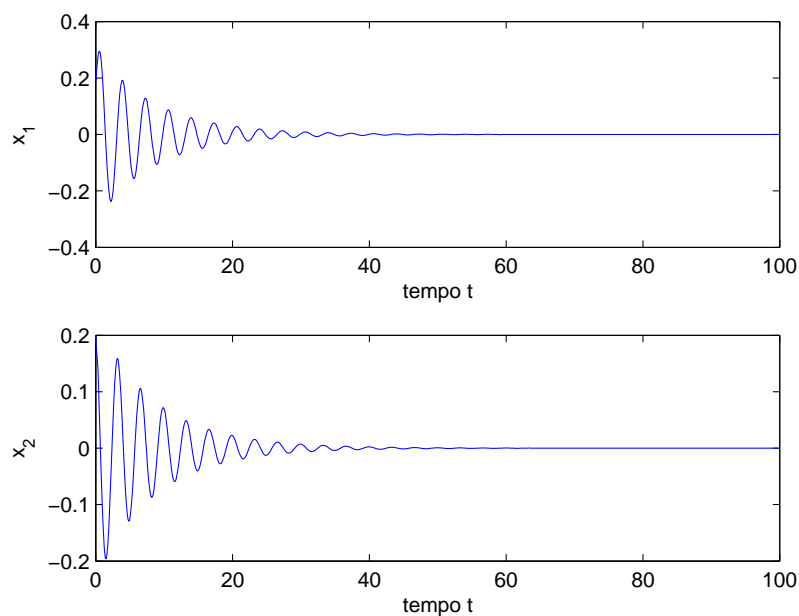


Figura 4.27: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.05$  e  $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(3)}$ ,  $W^{1(2)}$  e  $W^{2(1)}$



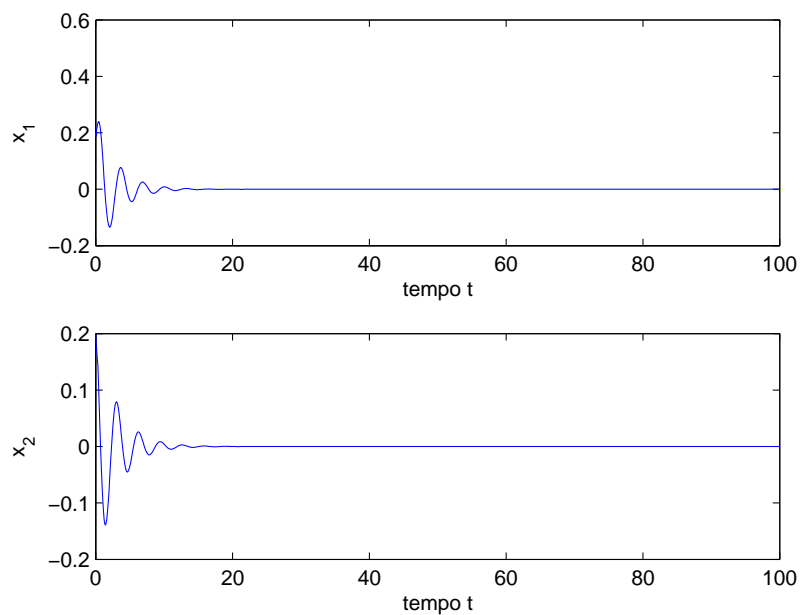


Figura 4.28: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.05$  e  $\tau_2 = 0.3515$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(4)}$ ,  $W^{1(2)}$  e  $W^{2(1)}$

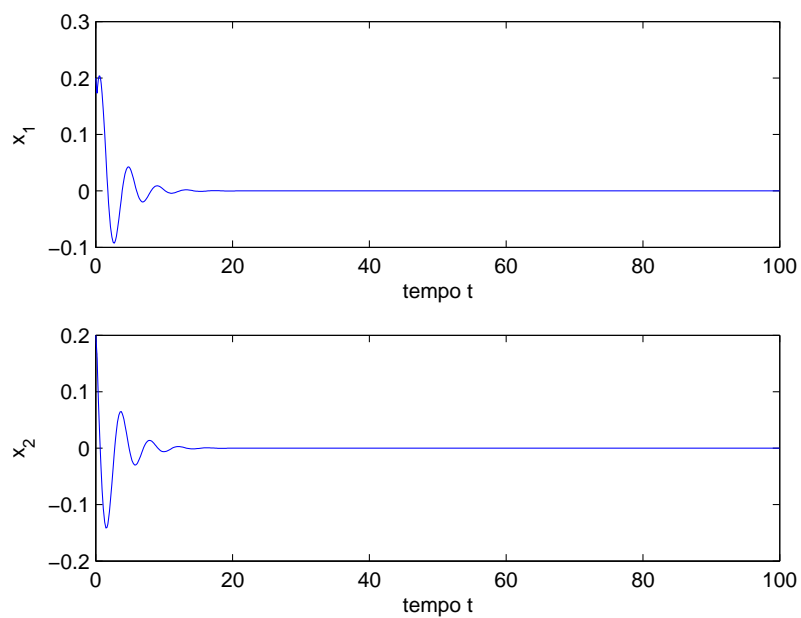


Figura 4.29: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.2017$  e  $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(1)}$ ,  $W^{1(1)}$  e  $W^{2(1)}$

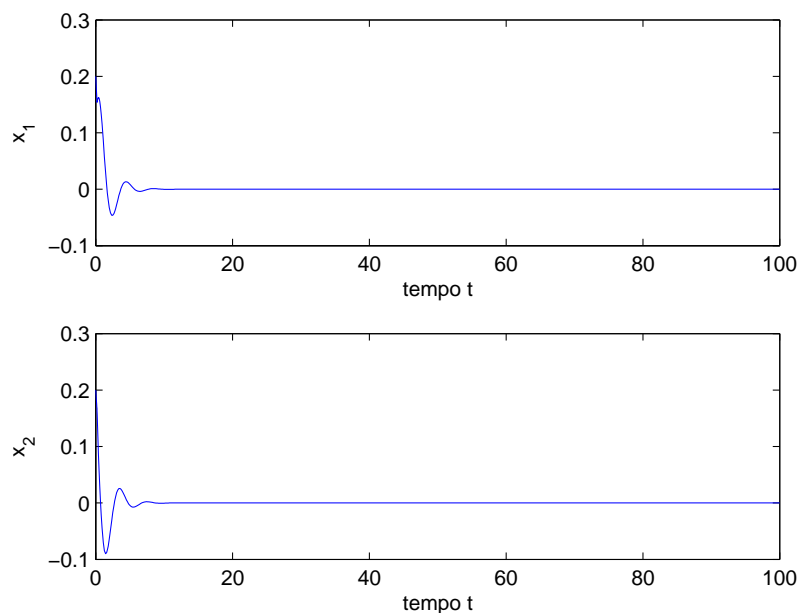


Figura 4.30: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.2017$  e  $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(2)}$ ,  $W^{1(1)}$  e  $W^{2(1)}$

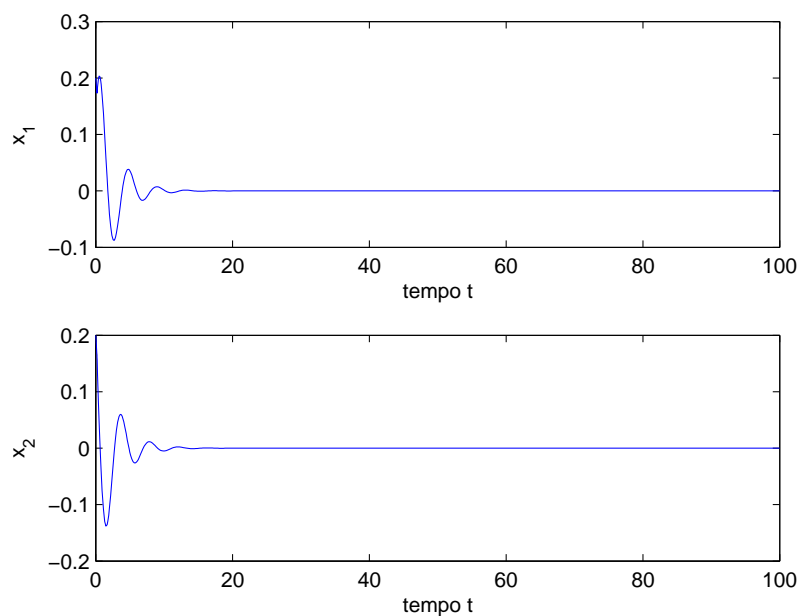


Figura 4.31: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.2017$  e  $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(3)}$ ,  $W^{1(1)}$  e  $W^{2(1)}$

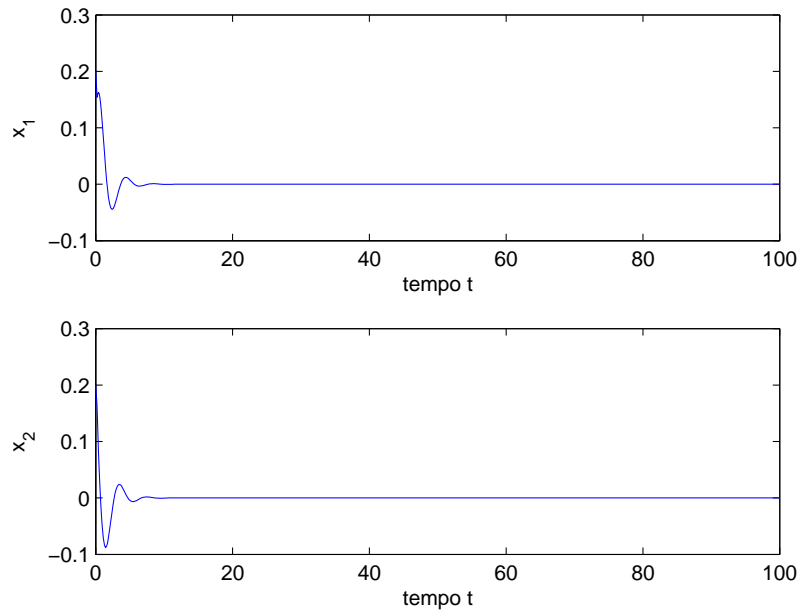


Figura 4.32: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.2017$  e  $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(4)}$ ,  $W^{1(1)}$  e  $W^{2(1)}$

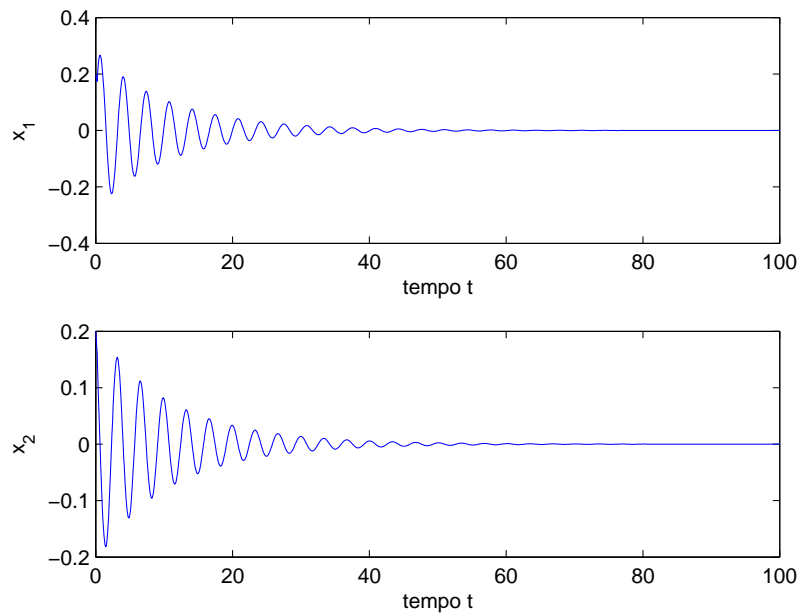


Figura 4.33: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.2017$  e  $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(1)}$ ,  $W^{1(2)}$  e  $W^{2(1)}$

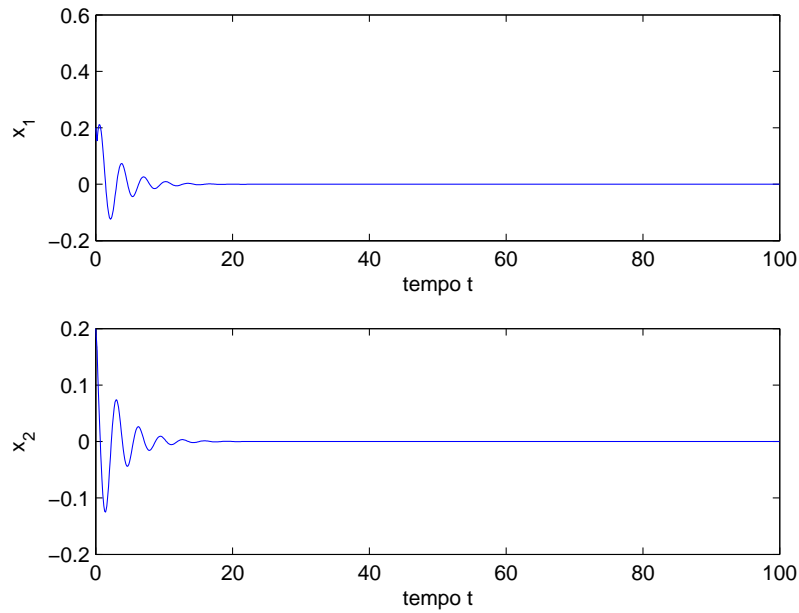


Figura 4.34: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.2017$  e  $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(2)}$ ,  $W^{1(2)}$  e  $W^{2(1)}$

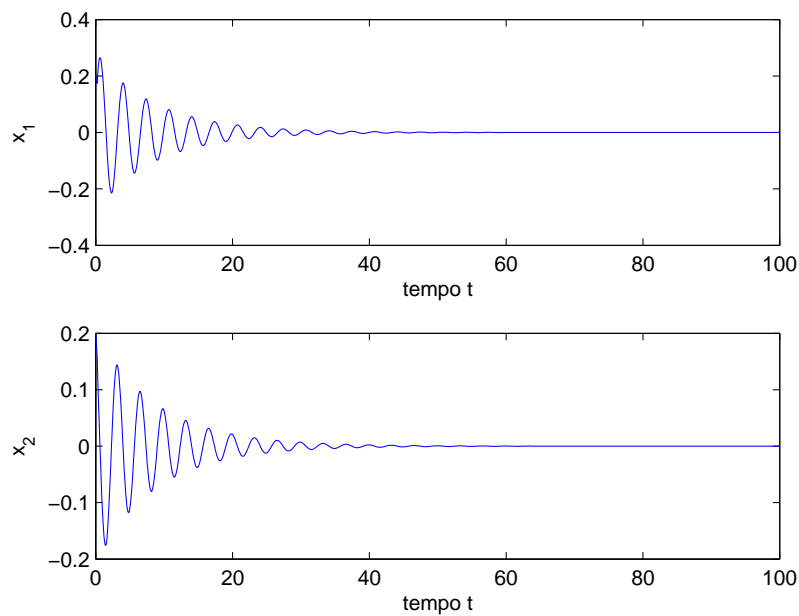


Figura 4.35: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.2017$  e  $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(3)}$ ,  $W^{1(2)}$  e  $W^{2(1)}$

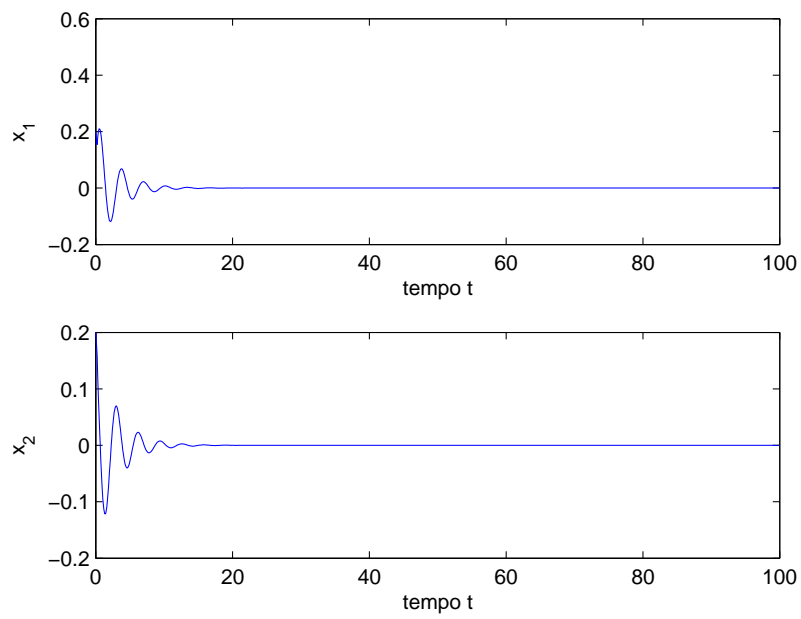


Figura 4.36: Resposta temporal da RNA com  $\tau_1 = 0.2017$  e  $\tau_2 = 0.2017$ . Para o vértice formado pelas matrizes  $A^{(4)}$ ,  $W^{1(2)}$  e  $W^{2(1)}$

## 4.5 Exemplos – Análise de estabilidade exponencial de RNA sujeita a um único retardo no tempo – $\mathcal{A}_e^{\tau} \mathcal{RNA}$

**Exemplo 9** Considere uma rede neural com dois neurônios sujeita a um único retardo variante no tempo  $d(t) = \tau_1 = \tau_2$ :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1(t) + a_1 \tanh[x_2(t - \tau_1)] \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2(t) + a_2 \tanh[x_1(t - \tau_2)] \end{cases}$$

Fazendo  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -1.5$  este sistema pode ser reescrito na forma do sistema (2.11) com as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W_0 = 0 \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1.5 & 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma^{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 3 obtemos os resultados apresentados nas Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9 que mostram as taxas de decaimento,  $k$ , para um determinado retardo no tempo,  $\tau$ . Sendo que as Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9 foram obtidas para a taxa de variação do retardo  $\mu = 0$ ,  $\mu = 0.5$  e  $\mu = 0.9$ , respectivamente.

Nas figuras (4.37-4.41) são comparados a resposta temporal da rede com o decaimento exponencial para os resultados apresentados na Tabela 4.7. Através destas figuras pode-se verificar a eficiência do método proposto, observando que o método se torna mais conservador quando o retardo no tempo se aproxima do seu limiar que garante a estabilidade assintótica da rede, pois pode-se observar na figura 4.41 que a curva com o decaimento exponencial encontrado pelo método proposto não se estabiliza próximo do ponto de estabilização da resposta temporal da RNA.

Tabela 4.7: Graus de estabilidade exponencial,  $k$ , para os retardos no tempo com  $\mu = 0$  (Exemplo 9)

$\tau$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4283
$k$	0.68	0.37	0.16	0.02	0.00006

Tabela 4.8: Graus de estabilidade exponencial,  $k$ , para os retardos no tempo com  $\mu = 0.5$  (Exemplo 9)

$\tau$	0.1	0.2	0.2891
$k$	0.67	0.34	0.0001

Tabela 4.9: Graus de estabilidade exponencial,  $k$ , para os retardos no tempo com  $\mu = 0.9$  (Exemplo 9)

$\tau$	0.1	0.2	0.2886
$k$	0.67	0.34	0.0003

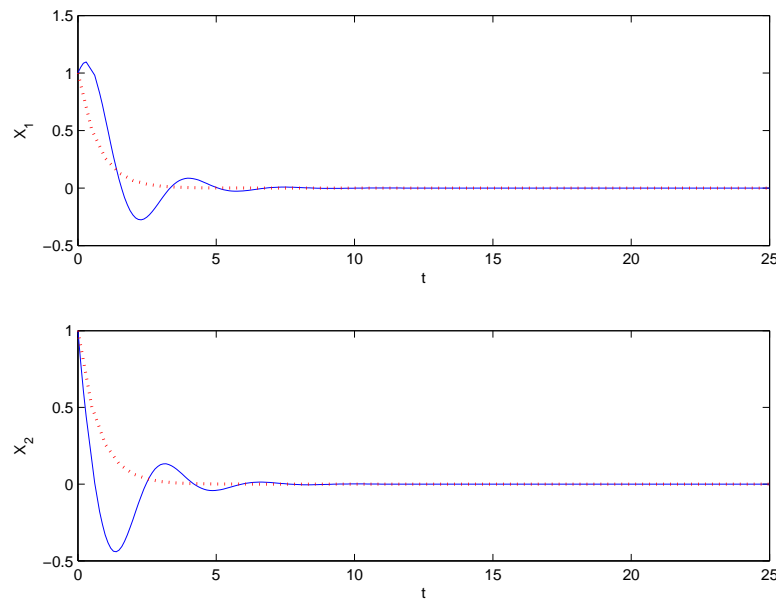


Figura 4.37: Resposta temporal da RNA com  $\tau = 0.1$  (traço contínuo) e decaimento exponencial  $e^{-k}$  com  $k = 0.68$  (pontilhado) para  $\mu = 0$ .

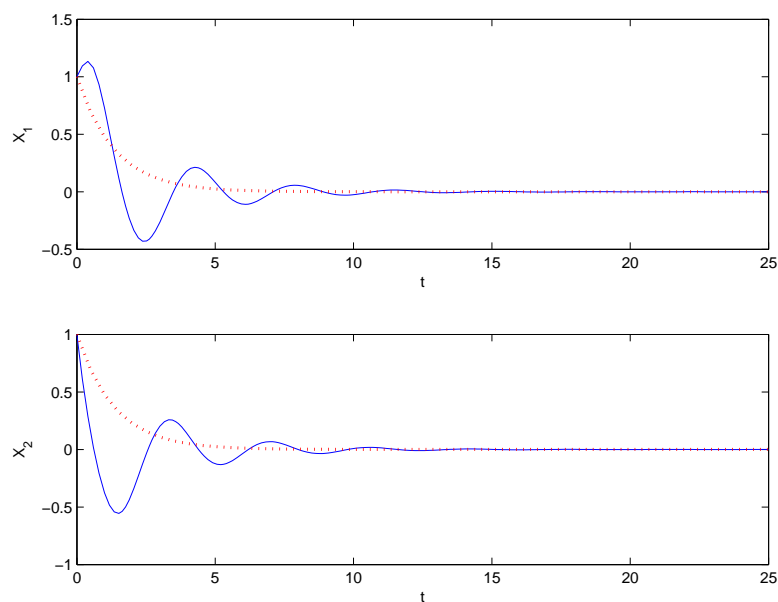


Figura 4.38: Resposta temporal da RNA com  $\tau = 0.2$  (traço contínuo) e decaimento exponencial  $e^{-k}$  com  $k = 0.37$  (pontilhado) para  $\mu = 0$ .

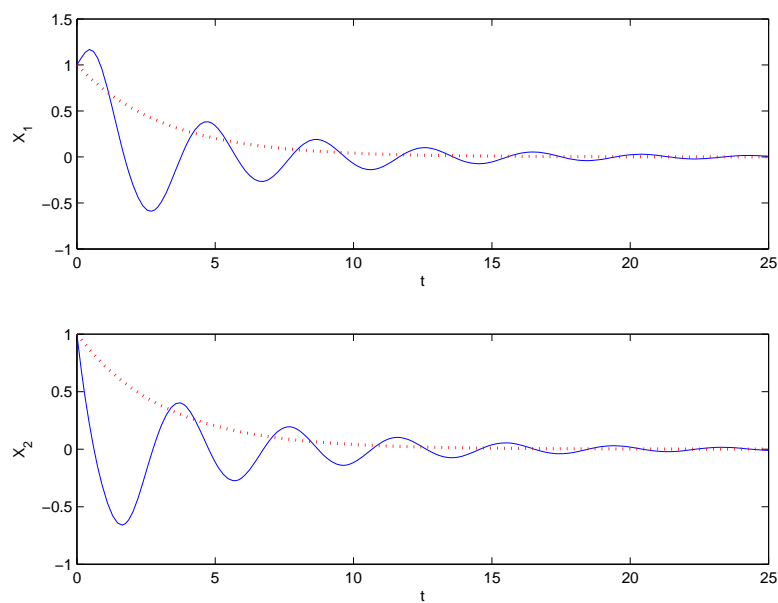


Figura 4.39: Resposta temporal da RNA com  $\tau = 0.3$  (traço contínuo) e decaimento exponencial  $e^{-k}$  com  $k = 0.16$  (pontilhado) para  $\mu = 0$ .



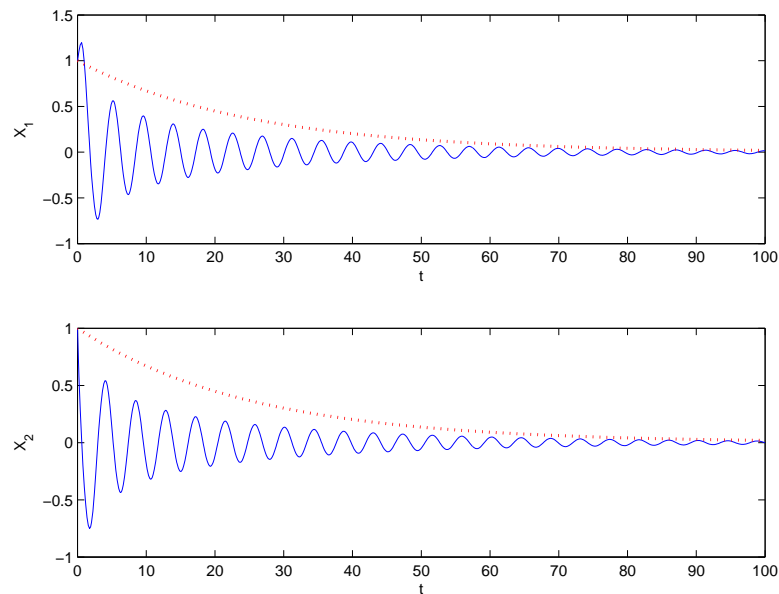


Figura 4.40: Resposta temporal da RNA com  $\tau = 0.4$  (traço contínuo) e decaimento exponencial  $e^{-k}$  com  $k = 0.02$  (pontilhado) para  $\mu = 0$ .

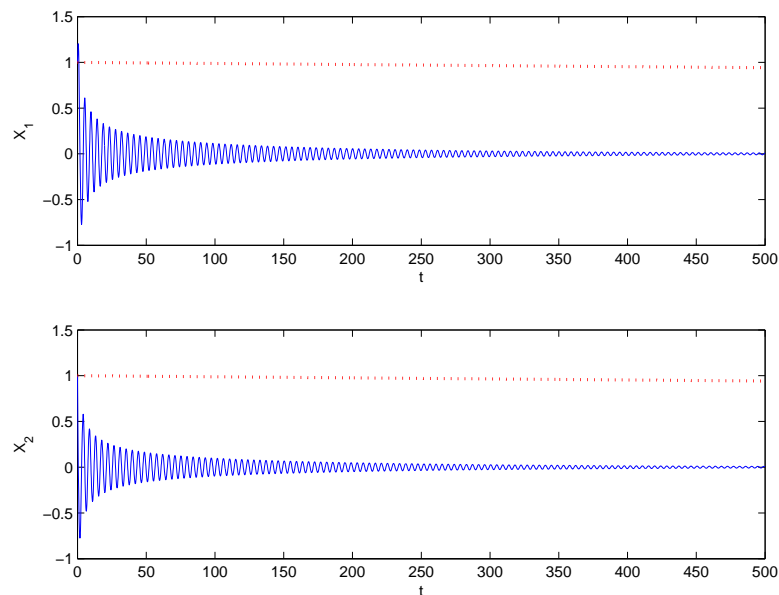


Figura 4.41: Resposta temporal da RNA com  $\tau = 0.4283$  (traço contínuo) e decaimento exponencial  $e^{-k}$  com  $k = 0.00006$  (pontilhado) para  $\mu = 0$ .

## 4.6 Conclusões Finais

Neste capítulo, exemplos numéricos foram realizados para evidenciar as potencialidades dos métodos desenvolvidos neste trabalho. Através dos exemplos 1, 2 e 3 que lidam com análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a um único retardo no tempo, pode-se perceber que o método proposto é capaz de identificar um limite superior para o retardo no tempo a uma determinada taxa de variação, tais resultados foram verificados através de gráficos. O exemplo 4 lida com a análise da estabilidade assintótica de uma RNA sujeita a um único retardo tempo e incertezas paramétricas, no qual pode-se verificar que a estabilidade da RNA se torna ainda mais frágil ao retardo no tempo. Os exemplos 5, 6 e 7 lidam com a análise de estabilidade assintótica de RNAs sujeitas a múltiplos retardos no tempo, sendo que nos exemplos 6 e 7 o método proposto encontra o retardo no tempo que mais influencia a estabilidade da rede. Através do exemplo 8 foi tratado um modelo mais geral que os exemplos anteriores, análise da estabilidade assintótica de uma RNA sujeita a múltiplos retardos no tempo e incertezas paramétricas, no qual o método proposto apresentou resultados condizentes com o esperado, a estabilidade da RNA torna-se ainda mais vulnerável ao retardo no tempo. Por fim, o exemplo 9 tratou da análise de estabilidade exponencial de uma RNA sujeita a um único retardo no tempo, no qual a taxa de decaimento exponencial,  $k$ , pode ser utilizada para se obter a velocidade de resposta da rede.

# Capítulo 5

## Conclusões e Propostas de Trabalho

No presente trabalho foi discutido o problema de estabilidade assintótica e exponencial em uma classe de RNAs (Redes Neurais Artificiais) sujeitas a influência de retardo no tempo (constante ou variante) e/ou incertezas paramétricas do tipo politópicas.

Inicialmente, foi apresentada a formulação do problema em forma geral, em seqüência foram apresentados métodos para se verificar a estabilidade assintótica de uma classe de RNAs para casos particulares estendendo-se para casos mais gerais.

Abordagens dependentes do retardo no tempo foram desenvolvidas sob as formas de teoremas, fundamentando-se na utilização de LMIs, na seleção adequada de um funcional do tipo Lyapunov-Krasovskii e na seleção de matrizes de parâmetros livres que expressam a influência da fórmula de Newton-Leibniz.

Os resultados obtidos nos exemplos sugerem que os métodos propostos são eficientes e que é possível encontrar o maior retardo no tempo que garante a estabilidade assintótica, além da taxa de convergência da solução, o que pode ser utilizado como velocidade de resposta da RNA.

Além disso, os resultados também permitem usar uma classe maior de funções de ativação, inclusive a função sigmoideal não-linear e uma função linear por partes.

É importante salientar que alguns dos resultados apresentados geraram arti-

gos submetidos à periódicos e congressos ([43], [44], [45], [46]), que estão em processo de revisão.

Como propostas de trabalho futuro, podem ser ressaltados alguns ítems:

- Abranger uma classe ainda mais geral de funções de ativação, para que os resultados possam ser mais amplos;
- Estudo de um método para que a taxa de variação do retardo no tempo  $\mu$ , não tenha um limitante superior unitário, tornando a abordagem mais geral;
- Estudo de novas abordagens através de manipulações no sistema em estudo ou em escolhas mais apropriadas tipo Lyapunov-Krasovskii, afim de se obterem resultados menos conservadores;
- Estender os resultados obtidos para uma classe mais geral de RNAs proposta inicialmente por Cohen e Grossberg em [47], descrita na forma:

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} &= -a_i(u_i) \left[ b_i(u_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(u_j(t)) + I_i \right] \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.1)$$

Sendo que  $n \geq 2$  é o número de neurônios da rede,  $u_i$  é a variável de estado associada ao  $i$ -ésimo neurônio,  $a_i$  é a amplificação da função, e  $b_i$  é uma função apropriada. A matriz  $A = \{a_{ij}\}$  mostra como os neurônios estão conectados na rede, e  $g_j$  é a função de ativação.

Note que, adicionando-se informação do retardo no tempo de maneira similar como feito neste trabalho (veja Capítulo 2), o sistema (5.1) pode ser reescrito abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} &= -a_i(u_i) \left[ b_i(u_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(u_j(t)) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(u_j(t-d(t))) + I_i \right] \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sendo que  $d(t)$  representa o retardo variante no tempo.



# Bibliografia

- [1] J.-H. Kim, "Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 5, pp. 789–792, 2001.
- [2] M. Wu, Y. He, J.-H. She, and G.-P. Liu, "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems," *Automatica*, vol. 40, no. 8, pp. 1435–1439, 2004.
- [3] X. Liao, G. Chen, and E. N. Sanchez, "Delay-dependent exponential stability analysis of delayed neural networks: an LMI approach," *Neural Networks*, vol. 15, no. 7, pp. 855–866, 2002.
- [4] R. P. Malhotra and R. Siferd, "Evaluation of electronic artificial neural network implementations," *Proceedings of the IEEE*, vol. 2, pp. 885–891, 1993.
- [5] X. Liao and J. Yu, "Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay," *IEEE Transactions Neural Networks*, vol. 9, no. 5, pp. 1042–1046, 1998.
- [6] D. Zhou, L. Zhang, and D. Zhao, "Global exponential stability for recurrent neural networks with a general class of activation functions and variable delays," *IEEE International Conference Neural Networks & Signal Processing*, pp. 108–111, Nanjing, China 2003.

- 
- [7] Q. Zhang, X. Wei, and J. Xu, "Global asymptotic stability of Hopfield neural networks with transmission delays," *Physics Letters A*, vol. 318, no. 4-5, pp. 399–405, 2003.
- [8] P. Baldi and A. F. Atiya, "How delays affect neural dynamics and learning," *IEEE Transactions Neural Networks*, vol. 5, no. 4, pp. 612–621, 1994.
- [9] K. L. Babcock and R. M. Westervelt, "Dynamics of simple electronic neural networks," *Physica D*, vol. 28, pp. 305–316, 1987.
- [10] J. Wei and S. Ruan, "Stability and bifurcation in a neural network model with two delays," *Physica D*, vol. 130, no. 3-4, pp. 255–272, 1999.
- [11] X. Liao, G. Chen, and E. N. Sanchez, "LMI-based approach for asymptotically stability analysis of delayed neural networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems – Part I: Regular Papers*, vol. 49, no. 3, pp. 1033–1039, 2002.
- [12] A. P. Braga, T. B. Ludemar, and A. C. P. L. F. Carvalho, *Redes neurais artificiais teoria e aplicações*, 1st ed. Rio de Janeiro, Brasil: LTC – Livros técnicos e científicos editora S.A., 2000.
- [13] S. Haykin, *Neural networks: a comprehensive foundation*, 2nd ed. New Jersey, USA: Prentice-Hall, 1997.
- [14] A. Nemirovski and P. Gahinet, "The projective method for solving linear matrix inequalities," *Mathematical Programming*, vol. 77, no. 2, pp. 163–190, 1997.
- [15] J. J. Hopfield, "Neural networks and physics systems with emergent collective computation abilities," *Proceedings of the National Academic Science of the USA*, vol. 79, no. 2, pp. 2554–2558, 1982.
- [16] C. M. Marcus and R. M. Westervelt, "Stability of analogy neural networks with delay," *Physics Reviews A*, vol. 39, no. 2, pp. 347–359, 1989.

- [17] K. Gopalsamy and X. Z. He, "Delay-independent stability in bidirectional associative memory networks," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 5, no. 6, pp. 998–1002, 1994.
- [18] M. P. Joy, "On the global convergence of a class of functional differential equations with applications in neural network theory," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 232, no. 1, pp. 61–81, 1999.
- [19] T. Roska, C. W. Wu, M. Balsi, and L. O. Chua, "Stability and dynamics of delay-type general neural networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems – Part I: Regular Papers*, vol. 39, no. 6, pp. 487–490, 1992.
- [20] T. Roska, C. W. Wu, and L. O. Chua, "Stability of cellular neural network with dominant nonlinear and delay-type templates," *IEEE Transactions on Circuits and Systems – Part I: Regular Papers*, vol. 40, no. 4, pp. 270–272, 1993.
- [21] K. Gopalsamy and X. Z. He, "Stability in asymmetric Hopfield networks with transmission delays," *Physica D*, vol. 76, no. 4, pp. 344–358, 1994.
- [22] H. Ye, A. N. Michel, and K. Wang, "Global stability and local stability of Hopfield neural networks with delays," *Physics Reviews E*, vol. 50, pp. 4206–4213, 1994.
- [23] Y. Zhang, "Global exponential stability and periodic solutions of delay Hopfield neural networks," *International Journal of System Sciences*, vol. 27, no. 2, pp. 227–232, 1996.
- [24] X. F. Liao and J. B. Yu, "Qualitative analysis of bidirectional associative memory networks with time delays," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 26, no. 3, pp. 219–229, 1998.
- [25] P. V. den Driessche and X. Zou, "Global attractivity in delayed Hopfield neural networks model," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 58, no. 6, pp. 1878–1890, 1998.



- [26] M. P. Joy, "Results concerning the absolute stability of delayed neural networks," *Neural Networks*, vol. 13, no. 6, pp. 613–616, 2000.
- [27] J. Cao, "Periodic oscillation and exponential stability of delayed CNNs," *Physics Letters A*, vol. 270, no. 3-4, pp. 157–163, 2000.
- [28] S. Arik, "Stability analysis of delayed neural networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems – Part I: Regular Papers*, vol. 47, no. 7, pp. 381–402, 2000.
- [29] T. Chen and L. Rong, "Delay-independent stability analysis of Cohen-Grossberg neural networks." *Physics Letters A*, vol. 317, no. 5-6, pp. 436–449, 2003.
- [30] Z. Wang, H. He, and X. Liao, "Stability analysis of uncertain neural networks with delay," *Lectures Notes in Computer Science*, vol. 3173, pp. 44–48, 2004.
- [31] W.-H. Chen, Z.-H. Guan, and X. Lu, "Delay-dependent exponential stability of neural networks with variable delays," *Physics Letters A*, vol. 326, no. 5-6, pp. 355–363, 2004.
- [32] C. Li, X. Liao, and R. Zhang, "Global robust asymptotical stability of multi-delayed interval neural networks: an LMI approach," *Physics Letters A*, vol. 328, no. 6, pp. 452–462, 2004.
- [33] Z. Zeng, J. Wang, and X. Liao, "Global asymptotic stability and global exponential stability of neural networks with unbounded time-varying delays," *IEEE Transactions on Circuits and Systems–II:Express Briefs*, vol. 52, no. 3, pp. 168–173, 2005.
- [34] T. Ensari and S. Arik, "Global stability of a class of neural networks with time-varying delay," *IEEE Transactions on Circuits and Systems–II:Express Briefs*, vol. 52, no. 3, pp. 126–130, 2005.

- [35] C. Li, X. Liao, and Y. Chen, "On robust stability of BAM neural networks with constant delays," *ISNN (International Symposium on Neural Networks)*, pp. 102–107, Dalian, China, 2004.
- [36] C. Ji, H. Zhang, and H. Guan, "Analysis for global stability of Cohen-Crossberg neural networks with multiple delays," *ISNN (International Symposium on Neural Networks)*, pp. 96–101, Dalian, China, 2004.
- [37] V. Singh, "Robust stability of cellular neural networks with delay: linear matrix inequality approach," *IEE Proceedings Control Theory & Applications*, vol. 151, pp. 125–129, 2004.
- [38] E. Yucel and S. Arik, "New exponential stability results for delayed neural networks with time varying delays," *Physica D*, vol. 191, no. 3–4, pp. 314–322, 2004.
- [39] J. Cao and J. Wang, "Global asymptotic and robust stability of recurrent neural networks with time delays," *IEEE Transactions on Circuits and Systems – Part I: Regular Papers*, vol. 52, no. 2, pp. 417–426, 2005.
- [40] J. Cao, D.-S. Huang, and Y. Qu, "Global robust stability of delayed recurrent neural networks," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 23, pp. 221–229, 2004.
- [41] M. Morita, "Associative memory with nonmonotone dynamics," *Neural Networks*, vol. 6, no. 1, pp. 115–126, 1993.
- [42] S. Y. M. Morita and S. Amari, "Capacity of associative memory using a nonmonotonic neuron model," *Neural Networks*, vol. 6, no. 6, pp. 167–176, 1993.
- [43] F.O.Souza and R.M.Palhães, "Stability analysis in uncertain state-delayed neural networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II – Express Briefs Papers*, 2005, submitted.

- 
- [44] —, "Asymptotic and exponential stability analysis in uncertain multi-delayed state neural networks by Lyapunov-Krasovskii theory," *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, submitted.
- [45] —, "Stability analysis in uncertain state-delayed neural networks," in *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005*, 2005, submitted.
- [46] —, "Stability analysis in uncertain multi-delayed state neural networks," in *SPGEE'2005*, 2005, submitted.
- [47] M. A. Cohen and S. Grossberg, "Absolute stability and global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Man Cybernetic*, vol. SMC-13, no. 5, pp. 815–821, 1983.