Controle Ótimo $\mathcal{H}_\infty$

1. Controle $\mathcal{H}_\infty$ e robustez
2. Controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ por Riccati
3. Controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ por LMI
   - 3.1. Realimentação de estado
   - 3.2. Estabilidade quadrática e condições relaxadas
   - 3.3. Patologia no controle $\mathcal{H}_\infty$: altos ganhos
   - 3.4. Realimentação de saída
4. Controle Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Controle $\mathcal{H}_\infty$ e robustez

Afinal como é o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$? Neste tipo de estratégia, o ganho induzido $\boldsymbol{\mathcal{L}_2}$ da entrada de distúrbios para a saída controlada é utilizado como a "medida" de desempenho e robustez do sistema em malha fechada. Como a norma $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$, que é o ganho induzido $\boldsymbol{\mathcal{L}_2}$, é o valor de pico (pior caso) na resposta em freqüência no diagrama de valores singulares, pode-se concluir que a sua minimização implica em atenuar a relação entrada-saída, ie o efeito da entrada de distúrbio na saída controlada

- O controle ótimo $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$ pode ser interpretado como sendo o controlador que "achata" a resposta em freqüência em malha fechada, ie minimiza a relação de pior caso entrada-saída (distúrbio-saída controlada) ...

Controle $\mathcal{H}_\infty$ e robustez

Controle $\mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_\infty$ Ao contrário do projeto de controle $\mathcal{H}_2$, que mostra-se apropriado a tratar distúrbios com características estocásticas, a escolha de um controlador $\mathcal{H}_\infty$ pode ser **bem mais conveniente**, no sentido de tornar o sistema mais "robusto" frente a sinais exógenos de características tanto determinísticas como "desconhecidas" (energia limitada)

- Propriedades extras do controle $\mathcal{H}_\infty$: especificações no domínio da freqüência como largura de banda passante e ganho em baixa freqüência

Robustez? O termo robusto assume no controle $\mathcal{H}_\infty$ duas interpretações

1. Incertezas no modelo (assim como no controle $\mathcal{H}_2$)
2. Incertezas associadas ao sinal de distúrbio

Controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ por Riccati

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{cases}$$

com as mesmas hipóteses para o controle $\mathcal{H}_2$:

- (A, B_u) é estabilzável e (A, C_y) é detectável
- D_{zu} é injetiva e D_{yw} é sobrejetiva
- $\begin{bmatrix} A - j\omega \mathbf{I} & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix}$ é injetiva, $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- $\begin{bmatrix} A - j\omega \mathbf{I} & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix}$ é sobrejetiva, $\forall \omega \in \mathbb{R}$

Controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ por Riccati

Teorema $\exists\, K(s) \in \{K(s) \mid T_{zw}$ é internamente estável $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma\}$

se e somente se todas as condições a seguir são satisfeitas

1. $\exists\, P = P^T \succeq \mathbf{0}$ satisfazendo a Riccati

$$A_p^T P + P A_p - P\left(B_u R^{-1} B_u^T - \gamma^2 B_w B_w^T\right) P + C_z^T \Phi C_z = \mathbf{0}$$

sendo $A_p \triangleq A - B_u R^{-1} D_{zu}^T C_z,\;\; R \triangleq D_{zu}^T D_{zu},\;\; \Phi \triangleq \mathbf{I} - D_{zu} R^{-1} D_{zu}^T$

$\rightsquigarrow\;\; A_c \triangleq A_p - B_u R^{-1} B_u^T P + \gamma^{-2} B_w B_w^T P$ **é estável**

Controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ por Riccati

2. $\exists\, Q = Q^T \succeq \mathbf{0}$ satisfazendo a Riccati

$$A_s Q + Q A_s^T - Q\left(C_y^T S^{-1} C_y - \gamma^2 C_z^T C_z\right) Q + B_w \Psi B_w^T = \mathbf{0}$$

sendo $A_s \triangleq A - B_w D_{yw}^T S^{-1} C_y,\ \ R \triangleq D_{yw} D_{yw}^T,\ \ \Psi \triangleq \mathbf{I} - D_{yw}^T S^{-1} D_{yw}$

$\rightsquigarrow\ A_f \triangleq A_s - Q C_y^T S^{-1} C_y + \gamma^{-2} Q C_z^T C_z$ **é estável**

3. $\lambda_{max}(PQ) < \gamma^{-2}$

Controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ por Riccati

⇝ Em caso afirmativo o controlador é descrito por $K(s) = \widetilde{C}\left(s\mathbf{I} - \widetilde{A}\right)^{-1}\widetilde{B}$, sendo

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A} &\triangleq A_c + Z_\infty L_\infty\left(C_y - \gamma^{-2} D_{yw} B_w^T P\right) \\
\widetilde{B} &\triangleq -Z_\infty L_\infty \\
\widetilde{C} &\triangleq -R^{-1}\left(B_u^T P - D_{zu}^T C_z\right) \\
Z_\infty &\triangleq \left(\mathbf{I} - \gamma^{-2} Q P\right)^{-1} \\
L_\infty &\triangleq -\left(Q C_y^T - B_w^T D_{yw}^T\right) S^{-1}
\end{aligned}
$$

- A condição (3) garante que Z_∞ é invertível

- Ao contrário da controle $\mathcal{H}_2$, a condição (3) **impede a aplicação do princípio da separação** no controle $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de saída ...

Controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ por LMI: realimentação de estados

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta[x(t)] & = & Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) & = & C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \\ y(t) & = & \mathrm{I}\, x(t), \quad u(t) = K y(t) \end{array}\right.$$

$\Updownarrow$ Malha fechada

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta[x(t)] & = & \underbrace{(A + B_u K)}_{A_f} x(t) + B_w w(t) \\ z(t) & = & \underbrace{(C_z + D_{zu} K)}_{C_f} x(t) + D_{zw} w(t) \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$T_{zw}(\xi) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_w \\ \hline C_f & D_{zw} \end{array}\right], \quad \xi = s, z$$

Controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ por LMI: realimentação de estados

- De forma similar a metodologia utilizada no controle $\mathcal{H}_2$, obtém-se o controlador a partir de um resultado de análise, no caso o **Bounded Real Lemma**:

BRL A_f é estável e $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ sse $\exists P = P^T \succ \mathbf{0}$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} A_f^T P + P A_f & P B_w & C_f^T \\ B_w^T P & -\gamma^2 \mathbf{I} & D_{zw}^T \\ C_f & D_{zw} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

- Substituindo $\boldsymbol{A_f}$ e $\boldsymbol{C_f}$, pré- e pós-multiplicando por diag $\{\boldsymbol{P}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$ e definindo-se $\boldsymbol{X} \triangleq \boldsymbol{P}^{-1}$ e $\boldsymbol{Z} \triangleq \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^{-1}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_uZ + Z^TB_u^T & B_w & XC_z^T + Z^TD_{zu}^T \\ B_w^T & -\gamma^2\mathbf{I} & D_{zw}^T \\ C_zX + D_{zu}Z & D_{zw} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

Controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ por LMI: realimentação de estados

Portanto o problema de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ pode ser colocado da seguinte forma

$$
\begin{cases}
\min\limits_{X,\rho} & \rho \qquad\qquad (\rho \triangleq \gamma^2) \\
\text{s.a} & X = X^T \succ 0 \\
& \begin{bmatrix} AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_w & XC_z^T + Z^T D_{zu}^T \\ B_w^T & -\rho \mathbf{I} & D_{zw}^T \\ C_z X + D_{zu} Z & D_{zw} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}
\end{cases}
$$

onde $K = ZX^{-1}$ e $\|T_{zw}\|_\infty = \sqrt{\rho} = \gamma$

Estabilidade quadrática e condições relaxadas

- A versão discreta é obtida seguindo os mesmos passos e considerando o **Bounded Real Lemma** discreto. Portanto a solução ótima do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ é da forma:

$$\begin{cases} \min\limits_{X,\rho} \quad \rho \qquad (\rho \triangleq \gamma^2) \\ \text{s.a} \quad \begin{bmatrix} X & 0 & XA^T + Z^T B_u^T & XC_z^T + Z^T D_{zu}^T \\ 0 & \mathbf{I} & B_w^T & D_{zw}^T \\ AX + B_u Z & B_w & X & 0 \\ C_z X + D_{zu} Z & D_{zw} & 0 & \rho \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \end{cases}$$

onde $K = ZX^{-1}$ e $\|T_{zw}\|_\infty = \sqrt{\rho} = \gamma$

Estabilidade quadrática e condições relaxadas

Incertezas limitadas em norma No controle $\mathcal{H}_\infty$, a maior parte das abordagens por Riccati, bem como uma parte por LMI, trataram incertezas do tipo limitas em norma. Portanto não é difícil encontrar uma série de referências a respeito

Incertezas Politópicas Considerando estabilidade quadrática, basta tomar os vértices do politopo, tanto no caso contínuo como no caso discreto

Condições relaxadas? Aplicar diretamente o Lema Projetivo Recíproco no caso de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas a tempo contínuo, infelizmente gera desigualdades não-lineares... Porém pode-se utilizar um método iterativo para resolvê-lo

- Já no caso a tempo discreto, isto não é um problema...

Controle $\mathcal{H}_\infty$ contínuo: condições relaxadas

Referência J. Wang and D. A. Wilson, "Continuous-time $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control with non-common Lyapunov variables via convergent iterations", *Proceedings of the 2003 European Control Conference*, Oxford, UK.

Usando a LMI do BRL como ponto de partida:

$$\begin{bmatrix} A_f^T Y + Y A_f & Y B_w & C_f^T \\ B_w^T Y & -\gamma^2 \mathbf{I} & D_{zw}^T \\ C_f & D_{zw} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

e aplicando o Lema Projetivo Recíproco $\Psi = 0$ e $S = Y A_f$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} P - (W + W^T) & * & * & * \\ Y A_f + W & -Y & * & * \\ B_w^T Y & 0 & -I & * \\ C_f & 0 & D_{zw} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0$$

Controle $\mathcal{H}_\infty$ contínuo: condições relaxadas

Aplicando a transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

com $\boldsymbol{V} \triangleq \boldsymbol{W}^{-1}$, e definindo $\boldsymbol{P} \triangleq \boldsymbol{X}^{-1} \triangleq \boldsymbol{Y}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V}^T + \boldsymbol{V}) & * & * & * \\ \boldsymbol{A}_f\boldsymbol{V} + \boldsymbol{X} & -\boldsymbol{X} & * & * \\ \boldsymbol{B}_w^T\boldsymbol{Y}_{1\,i}\boldsymbol{V} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{I} & * \\ \boldsymbol{C}_f\boldsymbol{V} & \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_{zw} & -\gamma^2\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \qquad (1)$$

que pode ser reescrita como

$$\boldsymbol{\Upsilon} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}^T \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_w^T \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{X}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_w & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \prec \boldsymbol{0} \qquad (2)$$

com

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \begin{bmatrix} -(\boldsymbol{V}^T + \boldsymbol{V}) & * & * & * \\ \boldsymbol{A}_f \boldsymbol{V} + \boldsymbol{X} & -\boldsymbol{X} & * & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_w^T \boldsymbol{X}^{-1} \boldsymbol{B}_w & * \\ \boldsymbol{C}_f \boldsymbol{V} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_{zw} & -\gamma^2 \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Controle $\mathcal{H}_\infty$ contínuo: condições relaxadas

Aplicando o complemento de Schur ...

$$\begin{bmatrix} -(V^T+V) & * & * & * & * \\ A_f V + X & -X & * & * & * \\ 0 & 0 & -I-\Phi & * & * \\ C_f V & 0 & D_{zw} & -\gamma^2 I & * \\ V & 0 & B_w & 0 & -X \end{bmatrix} \prec 0 \qquad (4)$$

Nas desigualdades acima o termo Φ é um limitante superior para o termo não-linear $-B_w^T X^{-1} B_w$ que pode se minimizado recursivamente fazendo

$$L = X^{-1} B_w$$

sendo X a matriz calculada na interação anterior. O cálculo recursivo inicia-se com algum X, solução de um problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ convencional, como já apresentado neste bloco

Controle $\mathcal{H}_\infty$ discreto: condições relaxadas

Novamente BRL discreto A_f é estável e $\|z\|_2 < \gamma\|w\|_2$ sse $\exists X = X^T$:

$$\begin{bmatrix} X & 0 & XA_f^T & XC_f^T \\ 0 & \mathbf{I} & B_w^T & D_{zw}^T \\ A_fX & B_w & X & 0 \\ C_fX & D_{zw} & 0 & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\Updownarrow \; V = V^T = X$$

$$\begin{bmatrix} V^TX^{-1} & * & * & * \\ 0 & \mathbf{I} & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 & XA_f^T & XC_f^T \\ 0 & \mathbf{I} & B_w^T & D_{zw}^T \\ A_fX & B_w & X & 0 \\ C_fX & D_{zw} & 0 & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1}V & * & * & * \\ 0 & \mathbf{I} & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & * \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0$$

Controle $\mathcal{H}_\infty$ discreto: condições relaxadas

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} -V^TXV & 0 & V^TA_f^T & V^TC_f^T \\ 0 & -\mathsf{I} & B_w^T & D_{zw}^T \\ A_fV & B_w & -X & 0 \\ C_fV & D_{zw} & 0 & -\gamma^2\mathsf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\Updownarrow \quad -V^TX^{-1}V \preceq -(V+V^T-X)$$

$$\begin{bmatrix} V+V^T-X & 0 & V^TA_f^T & V^TC_f^T \\ 0 & \mathsf{I} & B_w^T & D_{zw}^T \\ A_fV & B_w & X & 0 \\ C_fV & D_{zw} & 0 & \gamma^2\mathsf{I} \end{bmatrix} \succ 0$$

Síntese? Basta substituir A_f e C_f e definir $Z \triangleq KV$

Controle $\mathcal{H}_\infty$ discreto: condições relaxadas

Para $A \in \mathcal{P}_A \triangleq \{A \mid A = \sum_{i=1}^{q} \xi_i A_i,\ \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{q} \xi_i = 1\}$ e $B_u \in \mathcal{P}_{B_u}$ $\triangleq \left\{B_u \mid B_u = \sum_{j=1}^{r} \tau_j B_{uj},\ \tau_j \geq 0, \sum_{j=1}^{r} \tau_j = 1\right\}$, o problema de **controle robusto** com custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ é descrito por:

$$
\begin{cases}
\min\limits_{X,\rho} \quad \rho \qquad (\rho \triangleq \gamma^2) \\
\text{s.a} \quad \begin{bmatrix} V + V^T - X_{ij} & \mathbf{0} & V^T A_i^T + Z^T B_{uj}^T & V^T C_z^T + V^T D_{zu}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & B_w^T & D_{zw}^T \\ A_i V + B_{uj} Z & B_w & X_{ij} & \mathbf{0} \\ C_z V + D_{zu} V + & D_{zw} & \mathbf{0} & \rho \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}
\end{cases}
$$

onde $K = ZV^{-1}$ e $\|T_{zw}\|_\infty = \sqrt{\rho} = \gamma$

Caso patológico no controle $\mathcal{H}_\infty$: altos ganhos

Patologias No controle $\mathcal{H}_\infty$, eventualmente pode-se obter como controlador ótimo em realimentação de estado um ganho da forma

$$\|\boldsymbol{K}_i\| \longrightarrow \boldsymbol{K}_{\text{ótimo}} \longrightarrow \infty, \quad \text{quando} \quad \gamma_i \longrightarrow \gamma_{\text{ótimo}}$$

ie, para atingir o valor ótimo de atenuação de distúrbios ótimo $\gamma_{\text{ótimo}}$, é necessário aproximá-lo por uma seqüência de altos ganhos, $\boldsymbol{K}_i$

- Por que? A explicação para esta pergunta pode ser encontrada na referência abaixo:

Referência R. M. Palhares, S. L. C. Oliveira, and P. L. D. Peres. "Relating two different approaches of $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control". *Revista Brasileira de Controle & Automação*. **9(2)**, pp. 77-84, 1998. URL: `http://www.fee.unicamp.br/revista_sba/`

Solução? Impor uma restrição de positividade na matriz que compõe o ganho $\boldsymbol{K}$. Por exemplo, para $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{X}^{-1}$, basta impor $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T \succ \varepsilon \mathbf{I}$, $\varepsilon > 0$ (eg $\varepsilon = 10^{-4}$)

Realimentação de saída no controle $\mathcal{H}_\infty$

Segue os mesmos passos como no controle $\mathcal{H}_2$. Ie exatamente as mesmas mudanças de variáveis e transformações de similaridade. Diferenças?

1. As condições relaxadas utilizando o Lema Projetivo Recíproco aplicada ao caso contínuo também introduz um procedimento recursivo como anteriormente

2. Aplica-se ao discreto as condições relaxadas da mesma forma

3. Incertezas politópicas? Não é tão evidente, ao menos que se faça imposições sobre a matriz de Lyapunov do sistema aumentado (eg bloco diagonal), já que o princípio da separação não é aplicado ao controle $\mathcal{H}_\infty$ ...

4. Por outro lado, uma infinidade de referências com abordagens para sistemas com incertezas limitadas em norma pode ser obtida para a síntese de controladores dinâmicos

Realimentação de saída no controle $\mathcal{H}_\infty$

Variáveis matriciais: $S_{11}, P_{11}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ e J

$$
\begin{cases}
\min \quad \delta \qquad\qquad \delta \triangleq \gamma^2 \\
\text{s.a} \quad \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & P_{11} \end{bmatrix} \succ 0 \\
\qquad \begin{bmatrix} \Pi & * & * & * \\ \mathcal{A} + A^T + C_y^T \mathcal{D}^T B_u^T & \Xi & * & * \\ B_w^T + D_{yw}^T \mathcal{D}^T B_u^T & B_w^T P_{11} + D_{yw}^T \mathcal{B}^T & -\delta I & * \\ C_z S_{11} + D_{zu} \mathcal{C} & C_z + D_{zu} \mathcal{D} C_y & \Lambda & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0
\end{cases}
$$

sendo $\Pi \triangleq A S_{11} + S_{11} A^T + B_u \mathcal{C} + \mathcal{C}^T B_u^T$,
$\Xi \triangleq A^T P_{11} + P_{11} A + \mathcal{B} C_y + C_y^T \mathcal{B}^T$ e $\Lambda \triangleq D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw}$

Reconstrução do controlador $K(s)$ Obtenha as matrizes não-singulares P_{12} e S_{12} da decomposição:

$$P_{12}S_{12}^T = \mathbf{I} - P_{11}S_{11}$$

1. $D_c = \mathcal{D}$
2. $C_c = (\mathcal{C} - D_c C_y S_{11}) \left(S_{12}^T\right)^{-1}$
3. $B_c = P_{12}^{-1} (\mathcal{B} - P_{11} B_c D_c)$
4. $A_c = P_{12}^{-1}(\mathcal{A} - P_{11} (A + B_u D_k C_y) S_{11} - P_{12} B_c \left(S_{11} - P_{11} B_u C_c S_{12}^T\right) \left(S_{12}^T\right)^{-1}$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Principal vantagem do controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ levar em consideração as duas principais características de qualquer projeto de controle:

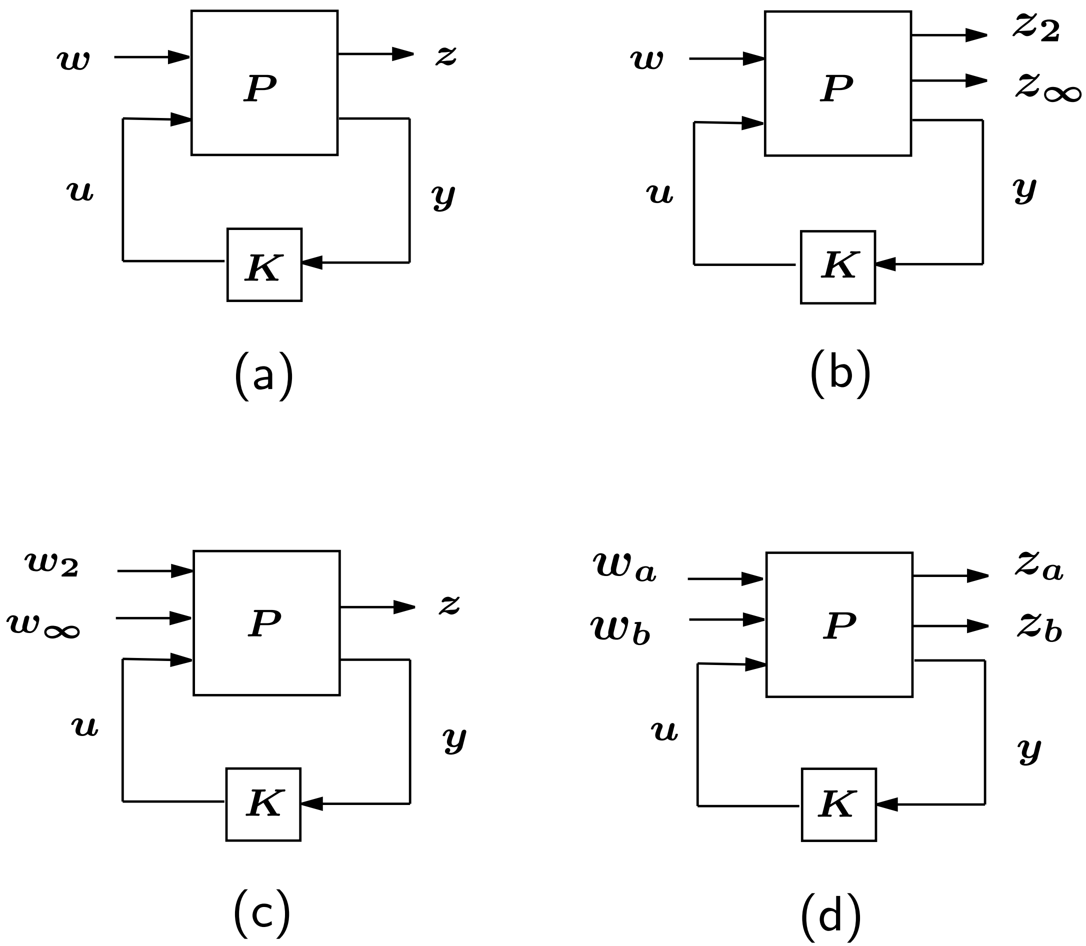
1. Otimizar o desempenho do sistema

2. Garantir robustez

Como agir? acomodar no mesmo projeto estes dois aspectos através das normas $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ e $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$

$\rightsquigarrow$ Por exemplo, minimizar a norma $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ garantindo um nível de atenuação de distúrbios $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$ dado por γ para a função de transferência de $\boldsymbol{w}$ para $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{T_{zw}}$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$



Planta generalizada com múltiplos canais

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Para a planta generalizada com múltiplos canais da figura anterior

a. Considerar controle misto para a planta generalizada com um canal (ie uma entrada e uma saída), é conhecido como controle central $\boldsymbol{\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty}$, para o qual se minimiza a norma $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ de $\boldsymbol{w}$ para $\boldsymbol{z}$, ao mesmo tempo garantido um nível de atenuação de distúrbios $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$ para o mesmo canal

b. Controle misto biobjetivo $\boldsymbol{\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty}$, onde se minimiza a norma $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ do canal $\boldsymbol{w}$ para $\boldsymbol{z_2}$ e garante-se um nível de atenuação de distúrbios $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$ do canal $\boldsymbol{w}$ para $\boldsymbol{z_\infty}$

c. Este padrão é bastante definido para problemas de filtragem mista $\boldsymbol{\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty}$, onde o sinal de distúrbio representa um papel primordial

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

d. Controle multiobjetivo para dois ou mais canais

$\rightsquigarrow$ Controle misto $\boldsymbol{\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty}$, minimizando a norma $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ do canal $\boldsymbol{w_a}$ para $\boldsymbol{z_a}$ e garante-se um nível de atenuação de distúrbios $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$ do canal $\boldsymbol{w_b}$ para $\boldsymbol{z_b}$? Veja

Referência E. N. Gonçalves, R. M. Palhares and R. H. C. Takahashi. "Robust $\boldsymbol{\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty}$ control synthesis based on controller parameter optimization". *IEE Proceedings on Control Theory & Applications*. **152 (2)** pp. 171-176, 2005

Referência R. H. C. Takahashi, R. M. Palhares, D. A. Dutra and L. P. S. Gonçalves. "Estimation of Pareto sets in the mixed $\boldsymbol{\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty}$ control problem". *International Journal of Systems Science*. **35 (1)** pp. 55-67, 2004

Referência C. W. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali. " Multiobjective output-feedback control via LMI optimization". *IEEE Transactions on Automatic Control*. **42(7)**, pp. 896-911, 1997

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

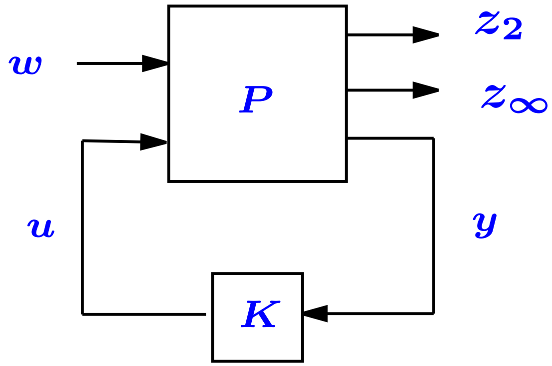
⇝ Controle multiobjetivo $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ para j canais. Veja

Referência: P. Apkarian, H. D. Tuan and J. Bernussou. "Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterization". *IEEE Transactions on Automatic Control*. **46(12)**, pp. 1941-1946, 2001

⇝ Controle multiobjetivo $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$ para j canais. Veja

Referência: M. A. Rotea and R. K. Prasanth. "An interpolation approach to multiobjective $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$ design". *International Journal of Control*. **65 (4)**, pp. 699-720, 1996

Como obter o controlador misto para a planta generalizada abaixo



sendo o modelo descrito por:

$$\begin{cases} \delta[x(t)] & = & Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z_2(t) & = & C_{z2}x(t) + D_{zu2}u(t) \\ z_\infty(t) & = & C_{z\infty}x(t) + D_{zu\infty}u(t) \\ y(t) & = & \mathbf{I}\, x(t), \quad u(t) = Ky(t) \end{cases}$$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Formulação do problema Obter K para $\gamma > 0$ dado tal que:

$$\min_{K} \quad \|T_{z_2 w}\|_2^2$$

$$\text{s.a} \quad \|z_\infty\|_2 < \gamma \|w\|_2$$

⇝ O controlador, solução deste problema, proporciona ao sistema em malha fechada desempenho "ótimo", para γ dado, contra distúrbios externos no canal $w \longrightarrow z_2$, enquanto a robustez é garantida para todos os modelos incertos da forma $z_\infty = \Delta w$ (Teorema do ganho pequeno... se $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ então $\|z_\infty\||_2 < \gamma \|w\|_2$)

Malha fechada $T_{z_2 w} \triangleq C_{f_2}(s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_w$ e $T_{z_\infty w} \triangleq C_{f_\infty}(s\mathbf{I} - A_f)^{-1} B_w$

sendo $A_f \triangleq A + B_u K$, $C_{f_2} \triangleq C_{z2} + D_{zu2} K$ e $C_{f_\infty} \triangleq C_{z\infty} + D_{zu\infty} K$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Qual é a idéia? Garantir que a restrição $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$ é satisfeita para algum K estabilizante, é o mesmo que satisfazer o **BRL**, ie $\exists P = P^T \succ \mathbf{0}$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} A_f P + P A_f^T & B_w & P C_{f\infty}^T \\ B_w^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ C_{f\infty} P & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

Por outro lado, para o **mesmo** ganho K estabilizante, $T_{z_2 w} \in \mathbb{R}\mathcal{H}_2$, e

$$\|T_{z_2 w}\|_2^2 = \text{Traço}\left\{ C_{f_2} L_c C_{f_2}^T \right\}$$

sendo que $L_c = L_c^T \succ \mathbf{0}$ satisfaz: $A_f L_c + L_c A_f^T + B_w^T B_w = \mathbf{0}$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Nota Veja que aplicando-se Schur no BRL obtém-se a Riccati

$$A_f P + P A_f^T + B_w^T B_w + \gamma^{-2} P C_{f\infty}^T C_{f\infty} P \prec 0$$

Comparando com a eq. do Grammiano $A_f L_c + L_c A_f^T + B_w^T B_w = 0$

$$\text{Conclui-se} \quad A_f P + P A_f^T - (A_f L_c + L_c A_f^T) + \gamma^{-2} P C_{f\infty}^T C_{f\infty} P \prec 0$$

$$\Updownarrow$$

$$A_f(P - L_c) + (P - L_c)A_f^T \prec -\underbrace{\gamma^{-2} P C_{f\infty}^T C_{f\infty} P}_{\succ 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$P - L_c \succ 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \succ L_c$$

$\therefore$ qualquer P factível para o BRL, fornece um limitante superior do Grammiano de Controlabilidade para a norma $\mathcal{H}_2$ de $T_{z_2 w}$, ie

$$\|T_{z_2 w}\|_2^2 < \text{Traço}\,\{C_{f_2} P C_{f_2}\}$$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Estratégia? Fixar $P = L_c$ ... para satisfazer ambos os canais e suas respectivas normas. Porém introduze-se conservadorismo...

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ – contínuo

$$
\begin{cases}
\displaystyle\min_{X,Z,J} & \text{Traço}\{J\} \\[2em]
\text{s.a} & \begin{bmatrix} J & C_{z_2}P + D_{zu2}Z \\ PC_{z2}^T + Z^T D_{zu2}^T & P \end{bmatrix} \succ 0 \\[2em]
 & \begin{bmatrix} AP + PA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_w & PC_{z\infty}^T + Z^T D_{zu\infty}^T \\ B_w^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ C_{z\infty}X + D_{zu\infty}Z & \mathbf{0} & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0
\end{cases}
$$

onde $K = ZP^{-1}$, $\|T_{z_2w}\|_2^2 <$ Traço$\{J\}$ e $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ – discreto

$$
\begin{cases}
\min\limits_{X,Z,J} & \text{Traço}\{J\} \\
\\
\text{s.a} & \begin{bmatrix} J & C_{z_2}P +_{zu2} Z \\ PC_{z2}^T + Z^T D_{zu2}^T & P \end{bmatrix} \succ 0 \\
\\
& \begin{bmatrix} X & 0 & XA^T + Z^T B_u^T & XC_{z\infty}^T + Z^T D_{zu\infty}^T \\ 0 & \mathbf{I} & B_w^T & 0 \\ AX + B_u Z & B_w & X & 0 \\ C_{z\infty}X + D_{zu\infty}Z & 0 & 0 & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0
\end{cases}
$$

onde $K = ZP^{-1}$, $\|T_{z_2 w}\|_2^2 < \text{Traço}\{J\}$ e $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$

Incertezas? Imediato para incertezas politópicas

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ - Condições relaxadas

Discreto – Referência M. C. de Oliveira, J. C. Geromel and J. Bernussou, "Extended $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_\infty$ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems", International Journal of Control, **75 (9)**, pp. 666-679, 2002.

Contínuo e Discreto... – Referência E. N. Gonçalves, R. M. Palhares and R. H. C. Takahashi. "Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control synthesis based on controller parameter optimization". *IEE Proceedings on Control Theory & Applications*. **152(2)**, pp. 171-176, 2005

Exercício

Questão 1 Considere o modelo abaixo para controle de nível de dois tanques de água interconectados, sujeitos a distúrbio:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Particularmente x_1 e x_2 são os níveis a serem controlados. Note que a saída controlada é composta por $z_1 = x_1$ e $z_2 = x_2$

Exercício

Define-se um novo vetor de estado

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} z_1(t) - z_1^{ref}(t) \\ z_2(t) - z_2^{ref}(t) \end{bmatrix} dt$$

- Objetivo inicial óbvio: $\dot{x}(t) \to 0$ e $\hat{x}(t) \to 0$ enquanto $t \to \infty$ ...

Define-se $\widetilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \hat{x}^T(t) \end{bmatrix}^T$, obtendo-se o modelo **padrão**

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) &= A\widetilde{x}(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z \widetilde{x}(t) \end{cases}$$

sendo $w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) & w_2(t) & z_1^{ref}(t) & z_2^{ref}(t) \end{bmatrix}$

Exercício

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício

Objetivos específicos:

1. Tornar o sistema em malha fechada estável

2. Obter um controlador por realimentação de estado $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2 \times 2}}$ tal que

$$\boldsymbol{u(t) = K\widetilde{x}(t) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = K_1 x(t) + K_2 \int_0^t (z - z^{ref}) dt}$$

Note que $\boldsymbol{u}$ representa um controlador PI multivariável...

3. Controlador $\boldsymbol{\mathcal{H}_\infty}$ que aloque pólos em malha fechada para o sistema aumentado no intervalo $[\boldsymbol{-2.5\,,\ -1}]$

4. Resposta temporal satisfatória a uma mudança de referência de nível, $\boldsymbol{z_{ref}}$, e carga, $\boldsymbol{w_1}$ e $\boldsymbol{w_2}$