Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$

1. Revisitando o controle ótimo: LQR e LQG
    1.1. Relação entre o custo ótimo LQR e a norma $\mathcal{H}_2$ e o custo LQG e a norma rms?
2. Controle ótimo $\mathcal{H}_2$
    2.1. Por que estudar a síntese de controladores com critério do tipo norma $\mathcal{H}_2$?
    2.2. Abordagem padrão por equações algébricas de Riccati
        2.2.1 Realimentação de estados
        2.2.2 Realimentação de saída
3. Utilizando as desigualdades matriciais lineares - LMIs – Vantagens ?
    3.1 Estabilidade Quadrática
    3.2 Condições relaxadas para sistemas incertos
    3.3 Realimentação de saída
4. Alocando pólos em malha fechada

Brincando de controle "ótimo"...

Objetivo do controle ótimo: encontrar uma lei de controle $u(t)$ tal que minimize um custo funcional $J(x(t), u(t))$

Formalmente $\widehat{u}^*(t)$ é denominado ótimo se é a solução ótima do problema

$$\begin{cases} \min\limits_{\widehat{u}(t)} & J(x(t), \widehat{u}(t)) \\ \text{s.a} & \delta[x(t)] = Ax(t) + B\widehat{u}(t), \quad x(0) = x_0 \end{cases}$$

- Custo $J = \int_0^\infty f(x(t), \widehat{u}(t))dt$ (ou $J = \sum_{t=0}^{T-1} f(x(t+1), \widehat{u}(t))$, discreto)

- Não importa a trajetória de $\widehat{u}^*(t)$, desde que seja limitada (nem sempre a trajetória "em linha reta" é a melhor solução – exemplo tradicional: trajetória que demanda o menor tempo tal que o caça de combate F4 atinja um ponto de operação a uma certa altitude)

LQR – Controle ótimo × tempo ...

Determinar $\widehat{u}^*(t)$ solução ótima

$$\begin{cases} \min\limits_{\widehat{u}(t)} & J(x(t), \widehat{u}(t)) \\ \text{s.a} & \delta[x(t)] = Ax(t) + B\widehat{u}(t), \quad x(0) = x_0 \end{cases}$$

sendo $J(x(t), \widehat{u}(t)) \triangleq \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ \widehat{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \widehat{u}(t) \end{bmatrix} dt$

- para $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $\widehat{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma *ponderação* para os estados,

$R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma *ponderação* para o sinal de controle e $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ pondera conjuntamente o termo cruzado: estado e sinal de controle

LQR – realimentação de estados

Restrições $Q = Q^T$ e $R = R^T \succ \mathbf{0}$. $R \succ \mathbf{0}$ para garantir que o sinal de controle é *regular*, ie é finito, $\widehat{u}(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty]$

No geral $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}$ e aplicando o complemento de Schur

$$\widehat{Q} \triangleq Q - SR^{-1}S^T \succeq \mathbf{0}$$

como $\widehat{Q} \succeq \mathbf{0}$, pode-se fatorá-la da forma $\widehat{Q} = C_{zz}^T C_{zz}$, com $C_{zz} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Definem-se $u \triangleq R^{1/2}\widehat{u}$; $B_u \triangleq BR^{1/2}$

$$C_z \triangleq \begin{bmatrix} C_{zz} \\ R^{-1/2}S^T \end{bmatrix}; \quad D_{zu} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad z \triangleq C_z x + D_{zu} u$$

LQR – realimentação de estados

Desta forma

$$
\begin{aligned}
z^T z &= \left(x^T C_z^T + u^T D_{zu}\right)(C_z x + D_{zu} u) \\
&= x^T C_z^T C_z x + x^T C_z^T D_{zu} u + u^T D_{zu}^T C_z x + u^T D_{zu}^T D_{zu} u
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
x^T C_z^T C_z x &= x^T \begin{bmatrix} C_{zz}^T & S R^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{zz} \\ R^{-1/2} S^T \end{bmatrix} x \\
&= x^T \left(\underbrace{C_{zz}^T C_{zz}}_{\widehat{Q}} + S R^{-1} S^T \right) x \\
&= x^T \left(Q - S R^{-1} S^T + S R^{-1} S^T \right) x \; = \; x^T Q x
\end{aligned}
$$

LQR – realimentação de estados

- $$\begin{aligned} x^T C_z^T D_{zu} u &= x^T \begin{bmatrix} C_{zz}^T & S R^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{bmatrix} u \\ &= x^T S R^{-1/2} \underbrace{u}_{R^{1/2}\hat{u}} = x^T S \hat{u} \end{aligned}$$

- $$u^T D_{zu}^T D_{zu} u = u^T \,\mathrm{I}\, u = \hat{u}^T R^{1/2} R^{1/2} \hat{u} = \hat{u}^T R \hat{u}$$

LQR – realimentação de estados

Logo, pode-se concluir que

$$\begin{aligned} J(x(t), \widehat{u}(t)) &= \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ \widehat{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \widehat{u}(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^\infty z^T(t) z(t) dt \\ &= \|z\|_2^2 \end{aligned}$$

LQR – realimentação de estados

Por que não introduzir uma "saída" artificial a ser controlada, z, e considerar o sistema abaixo?

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t), \qquad x(0) = x_0 \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) \end{cases}$$

- (A, B_u) é estabilzável e (A, C_z) é observável (garante $\exists u$ e $\exists\ X = \mathrm{Ric}(M) \succeq \mathbf{0}$)
- D_{zu} é injetiva (tem posto completo de coluna), ie garante controle não-singular...
- $\begin{bmatrix} A - j\omega\mathbf{I} & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix}$ é injetiva, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, ie garante também regularidade

Reformulando o problema LQR

"Encontre uma lei de controle ótima $u(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$, que estabilize internamente o sistema com a saída controlada "artificial", z, e minimize o índice de desempenho $J = \|z\|_2^2$ "

Associada a matriz Hamiltoniana

$$M = \begin{bmatrix} A - B_u D_{zu}^T C_z & -B_u B_u^T \\ -C_z^T \left(\mathrm{I} - D_{zu} D_{zu}^T\right)^T \left(\mathrm{I} - D_{zu} D_{zu}^T\right) C_z & -\left(A - B_u D_{zu}^T C_z\right)^T \end{bmatrix}$$

tem-se a equação algébrica de Riccati

$$\widetilde{A}^T X + X \widetilde{A} - X B_u B_u^T X + \widetilde{C}_z^T \widetilde{C}_z = 0$$

sendo $\widetilde{A} \triangleq A - B_u D_{zu}^T C_z$, e $\widetilde{C}_z \triangleq \left(\mathrm{I} - D_{zu} D_{zu}^T\right) C_z$

Reformulando o problema LQR

Supondo que X seja a solução estabilizante da equação de Riccati define-se

$$K = -\left(D_{zu}^T D_{zu}\right)^{-1}\left(B_u^T X + D_{zu}^T C_z\right), \quad \text{sendo } D_{zu}^T D_{zu} = \mathbf{I}$$

Nota Mostra-se no Zhou que $A + B_u K$ é estável

Definindo-se $A_f \triangleq A + B_u K$ e $C_f \triangleq C_z + D_{zu} K$, a Riccati é reescrita da forma

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}^T X + X\widetilde{A} - XB_uB_u^TX + \widetilde{C}_z^T\widetilde{C}_z \\
XB_u(D_{zu}^TD_{zu})B_u^TX - XB_u(D_{zu}^TD_{zu})B_u^TX \\
C_z^T(D_{zu}^TD_{zu})D_{zu}B_u^TX - C_z^T(D_{zu}^TD_{zu})D_{zu}B_u^TX \\
XB_u(D_{zu}^TD_{zu})D_{zu}^TC_z - XB_u(D_{zu}^TD_{zu})D_{zu}^TC_z & = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ou $A_f^T X + X A_f + C_f^T C_f = \mathbf{0}$, ie **$X$ é o Grammiano de Observabilidade !!**

Reformulando o problema LQR

Considerando o sistema em malha fechada com a lei de controle $u(t) = Kx(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{(A + B_u K)}_{A_f} x(t), & x(0) = x_0 \\ z(t) = \underbrace{(C_z - D_{zu} K)}_{C_f} x(t) \end{cases}$$

Nota Particularmente, a solução do problema é a mesma substituindo-se a condição inicial por uma pertubação persistente não-correlacionada entrando em todas as direções do espaço de estado através de uma matriz B_w, ie

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_w w(t), & x(0) = 0 \\ z(t) = C_f x(t) \end{cases}$$

sendo $B_w \triangleq x_0$ e $w \triangleq \delta(t)$

Custo LQR $\times$ norma $\mathcal{H}_2$

Matrix de transferência da pertubação, w, para a saída controlada, z, ie $z = T_{zw} w$:

$$T_{zw} = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_w \\ \hline C_f & 0 \end{array}\right]$$

Considerando o Grammiano de Observabilidade, X, descrito para o sistema em malha fechada, obtém-se que minimizar o custo LQR é equivalente à

$$\min_K \|T_{zw}\|_2^2 = \min_K \|z\|_2^2 = \text{Traço } \left[B_w^T X B_w\right]$$

Nota K é único

Realimentação de estados $\mathcal{H}_2$ por Riccati

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t), \qquad x(0) = 0 \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{I}\, x(t), \qquad u(t) = Kx(t) \end{cases}$$

satisfazendo as hipóteses de estabilizabilidade e regularidade anteriores

- Solução: $\min\limits_{K} \|T_{zw}\|_2^2 = \min\limits_{K} \|C_f(sI - A_f)^{-1} B_w\|_2^2 = \text{Traço}\left\{B_w^T X B_w\right\}$

sendo $X = X^T \succ \mathbf{0}$, $X = \text{Ric}(M_2)$

$$M_2 = \begin{bmatrix} A - B_u D_{zu}^T C_z & -B_u B_u^T \\ -C_z^T \left(\mathbf{I} - D_{zu} D_{zu}^T\right)^T \left(\mathbf{I} - D_{zu} D_{zu}^T\right) C_z & -\left(A - B_u D_{zu}^T C_z\right)^T \end{bmatrix}$$

e $K = -\left(D_{zu}^T D_{zu}\right)^{-1} \left(B_u^T X + D_{zu}^T C_z\right)$

Regulador Linear Quadrático Gaussiano – LQG

A saída medida é corrompida por ruído, ou não está acessível para medição. Implicação? Como realimentar ... Necessariamente deve-se então estimar os estados. Considere o sistema abaixo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\widehat{u}(t) + \mu(t), \qquad x(0) = x_0 \\ \widehat{y}(t) &= Cx(t) + \nu(t) \end{cases}$$

sendo $v(t) = \begin{bmatrix} \mu(t) & \nu(t) \end{bmatrix}^T$ um sinal do tipo ruído branco, de média nula e covariância

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad W_{22} \succ 0$$

- Considere o custo $J_{LQG} = \lim_{t\to\infty} \mathcal{E}\left\{ \begin{bmatrix} x(t) \\ \widehat{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \widehat{u}(t) \end{bmatrix} \right\}$

Regulador Linear Quadrático Gaussiano – LQG

Seguindo os mesmos passos como no LQR, aplica-se Schur em $\boldsymbol{W}$ e na matriz de ponderação

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \succeq 0, \quad R \succ 0$$

ie

$$\widehat{Q} \triangleq Q - SR^{-1}S^T \succeq 0 \quad , \quad \widehat{W} \triangleq W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{12}^T \succeq 0$$

Decompondo-os da forma

$$\widehat{Q} \triangleq C_{zz}^T C_{zz}; \quad C_{zz} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$\widehat{W} \triangleq B_{ww} B_{ww}^T, \quad B_{ww} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

definem-se

$$u \triangleq R^{1/2}\widehat{u}; \quad B_u \triangleq BR^{1/2}$$

$$y \triangleq W_{22}^{-1/2}\widehat{y}; \quad C_y \triangleq W_{22}^{-1/2}C$$

$$C_z \triangleq \begin{bmatrix} C_{zz} \\ R^{-1/2}S^T \end{bmatrix}; \quad D_{zu} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$B_w \triangleq \begin{bmatrix} B_{ww} & W_{12}W_{22}^{-1/2} \end{bmatrix}; \quad D_{yw} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

$$z \triangleq C_z x + D_{zu} u; \qquad y \triangleq C_y x + D_{yw} w$$

Desta forma o sistema original pode ser reescrito abaixo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) & = & C_z x(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) & = & C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{cases}$$

sendo $w(t)$ um sinal do tipo ruído branco, média nula e covariância unitária, satisfazendo

$$v(t) = \begin{bmatrix} B_{ww} & W_{12} W_{22}^{-1/2} \\ \mathbf{0} & W_{22}^{1/2} \end{bmatrix} w(t)$$

$$\therefore \quad J_{LQG} \quad = \quad \underbrace{\lim_{t \to \infty} \mathcal{E}\left\{ z^T(t) z(t) \right\}}_{Norma \quad rms...}$$

Maquinário para solução Princípio da Separação: Filtro de Kalman + Realimentação com estado estimado

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + B_u u(t) + L(C_y x(t) - C_y x_e(t)) \\ u(t) = K x_e(t) \end{cases}$$

sendo os ganhos dados por

$$K = -R^{-1}\left(B_u^T X + S^T\right)$$

$$L = -\left(Y C_y^T + W_{12}\right) W_{22}^{-1}$$

com $R = D_{zu}^T D_{zu}$ e $S = C_{zu}^T D_{zu}$

$X = X^T \succ \mathbf{0}$ e $Y = Y^T \succ \mathbf{0}$ satisfazem, respectivamente, as Riccati

$$\widetilde{A}^T X + X\widetilde{A} - XB_u R^{-1} B_u^T X + Q - SR^{-1}S^T = \mathbf{0}$$

$$\widehat{A}Y + Y\widehat{A}^T - YC_y^T W_{22}^{-1} C_y Y + W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{12}^T = \mathbf{0}$$

sendo $\widetilde{A} \triangleq A - B_u R^{-1} S$, e $\widehat{A} \triangleq A - W_{12}W_{22}^{-1}C_y$

Nota As hipóteses para a existência de soluções para as Riccati acima, bem como condições para ganhos finitos do controle, K, e do filtro, L, serão apresentadas a seguir no problema de controle $\mathcal{H}_2$ padrão

Problema de Controle $\mathcal{H}_2$ padrão

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) & = & C_z x(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) & = & C_y x(t) + D_{yw} w(t) \\ u(t) & = & K(s) y(t) \end{cases}$$

Planta Generalizada: $P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & \mathbf{0} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & \mathbf{0} \end{array}\right] \implies \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$

- $D_{yu} \equiv \mathbf{0}$ garante que o sistema é bem definido
- $D_{zw} \equiv \mathbf{0}$ assegura que a função de transferência em malha fechada $\mathcal{F}_i(P, K)$ é estritamente própria

Problema de Controle $\mathcal{H}_2$ padrão

Hipóteses

- $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B_u})$ é estabilzável e $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C_y})$ é detectável (garante que o sistema é estabilizável por realimentação de saída)

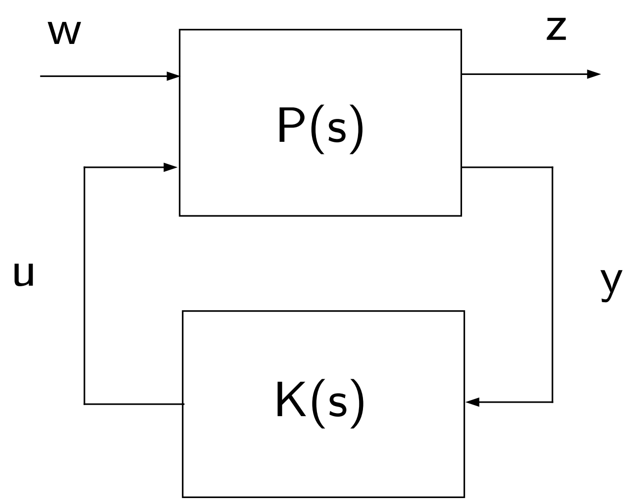
- $\boldsymbol{D_{zu}}$ é injetiva e $\boldsymbol{D_{yw}}$ é sobrejetiva

- $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - j\omega\mathbf{I} & \boldsymbol{B_u} \\ \boldsymbol{C_z} & \boldsymbol{D_{zu}} \end{bmatrix}$ é injetiva, $\forall \omega \in \mathbb{R}$

- $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - j\omega\mathbf{I} & \boldsymbol{B_w} \\ \boldsymbol{C_y} & \boldsymbol{D_{yw}} \end{bmatrix}$ é sobrejetiva, $\forall \omega \in \mathbb{R}$

Problema de Controle $\mathcal{H}_2$ padrão

"Encontre um controlador $K(s)$ que estabilize internamente o sistema descrito por $P(s)$, e minimize a norma $\mathcal{H}_2$ da matriz de transferência em malha fechada T_{zw} de w para z (ou $\mathcal{F}_i(P, K)$) "



Planta Generalizada associada ao sistema

Problema de Controle $\mathcal{H}_2$ padrão por Riccati

As hipóteses anteriores garantem que as matrizes Hamiltonianas abaixo, $\boldsymbol{M_2} \in \mathrm{dom(Ric)}$ e $\boldsymbol{H_2} \in \mathrm{dom(Ric)}$

$$\boldsymbol{M_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A - B_u D_{zu}^T C_z} & \boldsymbol{-B_u B_u^T} \\ \boldsymbol{-C_z^T C_z + C_z^T D_{zu} D_{zu}^T C_z} & \boldsymbol{-\left(A - B_u D_{zu}^T C_z\right)^T} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\left(A - B_w D_{yw}^T C_y\right)^T} & \boldsymbol{-C_y^T C_y} \\ \boldsymbol{-B_w B_w^T + B_w D_{yw}^T D_{yw} B_w^T} & \boldsymbol{-(A - B_w D_{yw}^T C_y)} \end{bmatrix}$$

tais que $\boldsymbol{X_2} = \mathrm{Ric}(\boldsymbol{M_2}) \succeq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{Y_2} = \mathrm{Ric}(\boldsymbol{H_2}) \succeq \mathbf{0}$

Problema de Controle $\mathcal{H}_2$ padrão por Riccati

Definem-se os ganhos para o controle $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$

$$\boldsymbol{K_2 = -\left(D_{zu}^T D_{zu}\right)^{-1}\left(B_u^T X_2 + D_{zu}^T C_z\right)}$$

$$\boldsymbol{L_2 = -\left(Y_2 C_y^T + B_w D_{yw}^T\right)\left(D_{yw} D_{yw}^T\right)^{-1}}$$

Nota A construção do ganho do filtro (observador), $\boldsymbol{L_2}$, depende das matrizes do sistema, ao contrário do LQG. Pode-se mostrar que há uma relação entre $\boldsymbol{W_{12}}$ e $\boldsymbol{W_{22}}$, no LQG, com as matrizes do sistema. De fato, $\boldsymbol{W_{12} = B_w D_{yw}^T}$ e $\boldsymbol{W_{22} = D_{yw} D_{yw}^T}$

Problema de Controle $\mathcal{H}_2$ padrão por Riccati

Considera-se o controlador baseado no observador da forma

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) & = & Ax_c(t) + B_u u(t) + L_2 \left(C_y x_c(t) - y(t) \right) \\ u(t) & = & K_2 x_c(t) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) & = & \left(A + B_u K_2 + L_2 C_y \right) x_c(t) - L_2 y(t) \\ u(t) & = & K_2 x_c(t) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$u = K(s)y \quad \Leftrightarrow \quad K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + B_u K_2 + L_2 C_y & -L_2 \\ \hline K_2 & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

Problema de Controle $\mathcal{H}_2$ padrão por Riccati

Considerando agora, isoladamente, pelo princípio da separação, primeiro a ação da realimentação de estados e em seguida o observador (filtro), pode-se obter duas funções de transferência do distúrbio, w, para a saída controlada, z,

1. Realimentação de estado, $u = K_2 x$, em malha fechada no sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{I}\, x(t) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

Malha fechada ...

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \underbrace{(A + B_u K_2)}_{A_{K_2}} x(t) + B_w w(t) \\ z(t) & = & \underbrace{(C_z + D_{zu} K_2)}_{C_{zK_2}} x(t) \end{cases}$$

Então $z = G_c B_w w$, $\quad G_c(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{K_2} & \mathbf{I} \\ \hline C_{zK_2} & \mathbf{0} \end{array}\right]$

2. Dinâmica do erro de estimação (obervação ou filtragem) considerando o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) & = & C_z x(t) \\ y(t) & = & C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{cases}$$

e o observador

$$\dot{x}_c(t) = Ax_c(t) + B_u u(t) + L_2(C_y x_c(t) - \underbrace{(C_y x(t) + D_{yw} w(t))}_{y(t)})$$

A dinâmica do erro de estimação, para $\widetilde{x}(t) = x(t) - x_c(t)$, é da forma

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) - Ax_c(t) + L_2(C_y x_c(t) - C_y x(t) - D_{yw} w(t)) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) &= \underbrace{(A + L_2 C_y)}_{A_{L_2}} \widetilde{x}(t) + \underbrace{(B_w + L_2 D_{yw})}_{B_{wL_2}} w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{cases}$$

Então $z = C_z G_f w$, $\quad G_f(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{L_2} & B_{wL_2} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right]$

Problema de Controle $\mathcal{H}_2$ padrão por Riccati

Teorema Considere a planta generalizada $P(s)$ e as hipóteses de regularidade, estabilizabilidade e observabilidade. Então o problema de controle $\mathcal{H}_2$ padrão tem a seguinte solução:

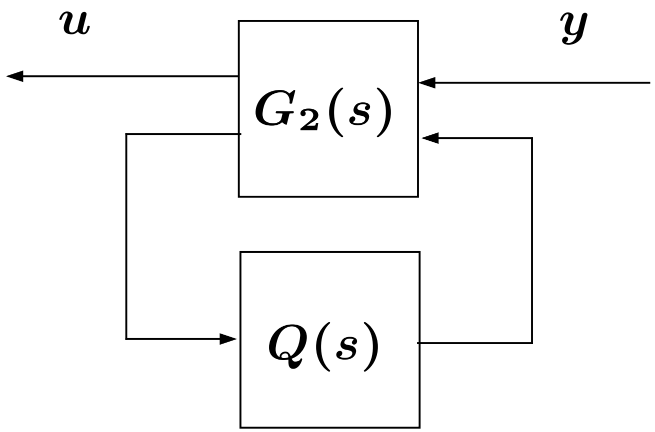
a)

$$\begin{aligned} \min_K \|T_{zw}\|_2^2 &= \|G_c B_w\|_2^2 + \|K_2 G_f\|_2^2 \\ &= \|G_c L_2\|_2^2 + \|C_z G_f\|_2^2 \\ &= \gamma_{2*}^2 \end{aligned}$$

b) O único controlador ótimo é dado por

$$K^*(s) = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A}_2 & -L_2 \\ \hline K_2 & 0 \end{array}\right], \quad \widehat{A}_2 \triangleq A + B_u K_2 + L_2 C_y$$

c) O conjunto de todos os controladores estabilizantes tal que $\|T_{zw}\|_2^2 < \gamma_2^2$, $\gamma_2 > 0$, é definido pelo esquema da figura abaixo



$$G_2(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \widehat{A}_2 & -L_2 & B_u \\ \hline K_2 & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -C_y & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

sendo o parâmetro livre $Q \in \mathbb{R}\mathcal{H}_2$, $\|Q\|_2^2 < \gamma_2^2 - \gamma_{2*}^2$, $\gamma_2 > \gamma_{2*} > 0$. Para $Q \equiv 0$, obtém-se $K^*(s)$

Controle $\mathcal{H}_2$ por LMIs

Por que considerar LMIs? Facilidade de se tratar incertezas politópicas (e limitadas em norma também). Obtém-se facilmente problemas de otimização convexa

Implicações para o controle $\mathcal{H}_2$ com Incertezas? Introdução da noção de custo garantido

Realimentação de estados para o caso de modelos precisamente conhecidos, reproduz **exatamente a mesma solução** quando se considera uma abordagem por Riccati

Nota Há várias estratégias na literatura baseadas em Riccati que também permitem lidar com sistemas incertos, particularmente incertezas limitas em norma (porém, sob o meu ponto de vista, a um custo em termos de manipulações razoavelmente grande)

Controle $\mathcal{H}_2$ por LMIs

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{I}\, x(t) \ , \qquad u(t) = Kx(t) \end{cases}$$

sendo que o sistema em malha fechada de $w \longrightarrow z$ é descrito por

$$T_{zw}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_w \\ \hline C_f & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

onde $A_f = A + B_u K$ e $C_f = C_z + D_{zu} K$

Controle $\mathcal{H}_2$ por LMIs

Ponto de partida? Resultado de análise para o **cálculo** da norma $\mathcal{H}_2$ em espaço de estados, baseado nos Grammianos de observabilidade ou controlabilidade, **e revisitados em termos de um problema de otimização**, ie

$$\min_{K} \|T_{zw}\|_2^2 \quad = \quad \min_{X_o \succ 0} \text{Traço}\left\{B_w^T X_o B_w\right\}$$

$$\text{s.a} \qquad A_f^T X_o + X_o A_f + C_f^T C_f \preceq 0$$

ou

$$\min_{K} \|T_{zw}\|_2^2 \quad = \quad \min_{X_c \succ 0} \text{Traço}\left\{C_f X_c C_f^T\right\}$$

$$\text{s.a} \qquad A X_c + X_c A^T + B_w B_w^T \preceq 0$$

Controle $\mathcal{H}_2$ por LMIs

Como garantir que se obtêm a norma $\mathcal{H}_2$ mínima? Afinal não utilizou-se diretamente os Grammianos de Observabilidade ou Controlabilidade, mas sim um problema de otimização? Em outras palavras, qual a relação entre X_o e L_o?

- Note que do Grammiano de Observabilidade

$$A_f^T L_o + L_o A_f + C_f^T C_f = \mathbf{0}$$

e da LMI na primeira restrição anterior

$$A_f^T X_o + X_o A_f + C_f^T C_f \preceq \mathbf{0}$$

obtém-se do termo em comum $C_f^T C_f$

$$A_f^T X_o + X_o A_f \preceq A_f^T L_o + L_o A_f$$

$$A_f^T (X_o - L_o) + (X_o - Lo) A_f \preceq \mathbf{0}$$

Do Teorema de Lyapunov, se A_f é estável então $X_o - L_o \succ \mathbf{0} \Rightarrow X_o \succ L_o$

Controle $\mathcal{H}_2$ por LMIs

- Como o problema de otimização é convexo (concorda?), então é fácil concluir que, $\boldsymbol{X_o} \rightarrow \boldsymbol{L_o}$ e

$$\min_{\boldsymbol{X_o \succ 0}} \text{Traço}\left\{\boldsymbol{B_w^T X_o B_w}\right\} = \text{Traço}\left\{\boldsymbol{B_w^T L_o B_w}\right\} = \min_{\boldsymbol{K}} \|\boldsymbol{T_{zw}}\|_2^2$$

- O mesmo procedimento vale para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ descrita pelo procedimento de otimização e o Grammiano de controlabilidade

Controle $\mathcal{H}_2$ por LMIs

Receita de bolo Uma vez de posse de um resultado de análise $\mathcal{H}_2$ em malha fechada (ou cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ para um controlador K dado), basta proceder as substituições de A_f e C_f na LMI, ie considerando

$$A_f^T X_o + X_o A_f + C_f^T C_f \preceq \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A + B_u K)^T X_o + X_o (A + B_u K) + (C_z + D_{uz} K)^T (C_z + D_{uz} K) \preceq \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow \quad \text{Schur}$$

$$\begin{bmatrix} (A + B_u K)^T X_o + X_o (A + B_u K) & (C_z + D_{uz} K)^T \\ (C_z + D_{uz} K) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

Controle $\mathcal{H}_2$ por LMIs

$\Updownarrow$ Transformação de Similaridade

$$\begin{bmatrix} X_o^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A + B_u K)^T X_o + X_o (A + B_u K) & (C_z + D_{uz} K)^T \\ (C_z + D_{uz} K) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

$\Updownarrow$ $X \triangleq X_o^{-1}, \quad Z \triangleq K X_o^{-1} = K X$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & X C_z^T + Z^T D_{uz}^T \\ C_z X + D_{uz} Z & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

Controle $\mathcal{H}_2$ por LMIs

- Veja que com a mudança de variáveis linearizante $\boldsymbol{X} \triangleq \boldsymbol{X_o^{-1}}$ transformou a função objetivo da forma:

$$\text{Traço}\left\{\boldsymbol{B_w^T X_o B_w}\right\} = \text{Traço}\left\{\boldsymbol{B_w^T X^{-1} B_w}\right\}$$

portanto **não-linear** !!

Dessa forma, ainda é necessário se fazer mais uma manipulação para que o problema possa ser descrito da forma linear ...

Controle $\mathcal{H}_2$ por LMIs

O que fazer? Introduze-se uma variável matricial adicional, $\boldsymbol{J}$, lembrando que traço é um operador linear e utilizando Schur

$$\text{Traço}\{\boldsymbol{J}\} \geq \text{Traço}\left\{\boldsymbol{B}_w^T \boldsymbol{X}^{-1} \boldsymbol{B}_w\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{J} \succeq \boldsymbol{B}_w^T \boldsymbol{X}^{-1} \boldsymbol{B}_w$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{J} - \boldsymbol{B}_w^T \boldsymbol{X}^{-1} \boldsymbol{B}_w \succeq \mathbf{0}$$

$\Updownarrow$ agora linear ...

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J} & \boldsymbol{B}_w^T \\ \boldsymbol{B}_w & \boldsymbol{X} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

Controle ótimo $\mathcal{H}_2$ por LMIs – Contínuo

Portanto o problema de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ pode ser colocado da seguinte forma

$$\begin{cases} \displaystyle\min_{J=J^T,X=X^T,Z} & \text{Traço}\,\{J\} \\ \text{s.a} & \begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} AX + XA^T + B_uZ + Z^TB_u^T & XC_z^T + Z^TD_{uz}^T \\ C_zX + D_{uz}Z & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \end{cases}$$

onde $K = ZX^{-1}$ e $\min \|T_{zw}\|_2^2 = \text{Traço}\,\{J\}$

Controle ótimo $\mathcal{H}_2$ por LMIs

Caso a tempo discreto Mesmos procedimentos ... Particularmente do **cálculo** da norma $\mathcal{H}_2$ em termos de otimização, tem-se

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{K} \|T_{zw}\|_2^2 & = & \min\limits_{X_o \succ 0} \text{Traço}\left\{B_w^T X_o B_w\right\} \\ \text{s.a} & & A_f^T X_o A_f - X_o + C_f^T C_f \preceq 0 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{K} \|T_{zw}\|_2^2 & = & \min\limits_{X_c \succ 0} \text{Traço}\left\{C_f X_c C_f^T\right\} \\ \text{s.a} & & A_f X_c A_f^T - X_c + B_w B_w^T \preceq 0 \end{array}$$

Da primeira opção, obtém-se a síntese do controlador ótimo aplicando-se Schur na LMI, considerando as mudanças de variáveis linearizantes $X = X_o^{-1}$, $Z = KX_o^{-1}$, e levando em conta a introdução de uma variável extra na função custo, J

Controle ótimo $\mathcal{H}_2$ por LMIs – Discreto

Particularmente $\quad A_f^T X_o A_f - X_o + C_f^T C_f \prec \mathbf{0}$...

$$\Updownarrow \quad \text{Schur}$$

$$\begin{bmatrix} X_o & A_f^T & C_f^T \\ A_f & X_o^{-1} & \mathbf{0} \\ C_f & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

$\Updownarrow$ Pré- e pós-multiplicando por diag$\{X_o^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$

$$\begin{bmatrix} X_o^{-1} & X_o^{-1}(A + B_u K)^T & X_o^{-1}(C_z + D_{zu} K)^T \\ (A + B_u K) X_o^{-1} & X_o^{-1} & \mathbf{0} \\ (C_z + D_{zu} K) X_o^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

Aplicando as mudanças de variáveis linearizantes $X = X_o^{-1}$ e $Z = K X_o^{-1}$ obtém-se a última LMI da próxima página ...

Controle ótimo $\mathcal{H}_2$ por LMIs – Discreto

Portanto o problema de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ para sistemas a tempo discreto é dado por:

$$
\begin{cases}
\min\limits_{J,X,Z} & \text{Traço}\,\{J\} \\[2em]
\text{s.a} & \begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \\[2em]
 & \begin{bmatrix} X & XA^T + Z^T B_u^T & XC_z^T + Z^T D_{uz}^T \\ AX + B_u Z & X & \mathbf{0} \\ C_z X + D_{uz} Z & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}
\end{cases}
$$

onde $K = ZX^{-1}$ e $\min \|T_{zw}\|_2^2 = \text{Traço}\,\{J\}$

Controle ótimo $\mathcal{H}_2$ por LMIs – Discreto

- Incertezas politópicas? Bastante simples de ser aplicado nos procedimentos de otimização convexa descritos por LMIs. É suficiente testar nos vértices do politopo

- Valor da norma $\mathcal{H}_2$? No caso de sistemas incertos, considerando estabilidade quadrática, tem-se o denominado **custo garantido $\mathcal{H}_2$**. Isto é, (Traço $\{J\}$)$^{1/2}$ é um **limitante superior** assegurando que em cada vértice, o valor da norma $\mathcal{H}_2$ é **limitado** por este custo garantido

- Solução conservadora? Considerando estabilidade quadrática, com a matriz de Lyapunov fixada para todos os vértices, o custo garantido pode ser bastante conservativo com relação a norma $\mathcal{H}_2$ realmente obtida para cada vértice. Alternativa? Utilizar os resultados de análise introduzidos anteriormente em termos de condições relaxadas, ie considerar que a matriz de Lyapunov não é fixada ...

Condições relaxadas para $\mathcal{H}_2$ – Contínuo

Considerando o caso de realimentação de estados, $u(t) = Kx(t)$ e o sistema em malha fechada, T_{zw}

Teorema As afirmações a seguir são equivalentes

1. A_f é estável e $\min\limits_{K} \|T_{zw}\|_2^2 \preceq \min \text{Traço}\{J\}$

2. $\exists X = X^T, J$:

$$\begin{bmatrix} X & C_f^T \\ C_f & J \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} A_f^T X + X A_f & X B_w \\ B_w^T X & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

Condições relaxadas para $\mathcal{H}_2$ – Contínuo

3. $\exists X = X^T, J, V$:

$$\begin{bmatrix} X & C_f^T \\ C_f & J \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -(V+V^T) & V^T A_f + X & V^T B_w & V^T \\ A_f^T V + X & -X & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B_w^T V & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

4. (Dual) $\exists X = X^T, J, V$:

$$\begin{bmatrix} X & B_w \\ B_w^T & J \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) & V^T A_f^T + X & V^T C_f^T & V^T \\ A_f V + X & -X & 0 & 0 \\ C_f V & 0 & -I & 0 \\ V & 0 & 0 & -X \end{bmatrix} \prec 0$$

Linhas gerais da demonstração

(1) $\Leftrightarrow$ (2). Direto da discussão anterior e do cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ por Grammiano de controlabilidade (ou observabilidade para o dual)

Condições relaxadas para $\mathcal{H}_2$ – Contínuo

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Basta aplicar o Lema Projetivo Recíproco para o Grammiano de controlabilidade no item (2)

$$A_f Y + Y A_f^T + B_w B_w^T \prec 0, \qquad \text{onde} \quad Y \triangleq X^{-1}$$

$$\Updownarrow \quad \text{com } \Psi \triangleq B_w B_w^T \text{ e } S^T = A_f Y$$

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) + P + B_w B_w^T & A_f Y + W^T \\ Y A_f^T + W & -P \end{bmatrix} \prec 0$$

pré- e pós-multiplicando por diag$\{\mathbf{I}, Y^{-1}\}$ com $X \triangleq Y^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) + P + B_w B_w^T & A_f + W^T X \\ A_f^T + XW & -XPX \end{bmatrix} \prec 0$$

Condições relaxadas para $\mathcal{H}_2$ – Contínuo

pré- e pós-multiplicando por diag$\{W^{-T}, \mathbf{I}\}$ e diag$\{W^{-1}, \mathbf{I}\}$ com $V \triangleq W^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) + V^T P V + V^T B_w B_w^T V & V^T A_f + X \\ A_f^T V + X & -XPX \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

$\Updownarrow$ aplicando Schur em $V^T P V$ e $V^T B_w B_w^T V$...

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) & V^T A_f + X & V^T B_w & V^T \\ A_f^T V + X & -XPX & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B_w^T V & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P^{-1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

usando a mudança de variável linearizante $P \triangleq X^{-1}$, obtém-se o resultado

(3) $\Leftrightarrow$ (4). Por dualidade fazendo $A_f \leftarrow A_f^T$, $C_f \leftarrow B_w^T$ e $B_w \leftarrow C_f^T$

Condições relaxadas para controle $\mathcal{H}_2$ – Contínuo

Síntese de K? Condição (4) do Teorema anterior substituindo A_f e C_f:

$$\begin{bmatrix} -(V+V^T) & V^T(A+B_uK)^T + X & V^T(C_z+D_{uz}K)^T & V^T \\ (A+B_uK)V + X & -X & 0 & 0 \\ (C_z+D_{uz}K)V & 0 & -\mathrm{I} & 0 \\ V & 0 & 0 & -X \end{bmatrix} \prec 0$$

$\Updownarrow$ mudança de variável $Z \triangleq KV$

$$\begin{bmatrix} -(V+V^T) & V^TA^T + Z^TB_u^T + X & V^TC_z^T + Z^TD_{uz}^T & V^T \\ AV + B_uZ + X & -X & 0 & 0 \\ C_zV + D_{uz}Z & 0 & -\mathrm{I} & 0 \\ V & 0 & 0 & -X \end{bmatrix} \prec 0$$

então $K = ZV^{-1}$ ...

Condições relaxadas para controle $\mathcal{H}_2$ – Contínuo

Para $A \in \mathcal{P}_A \triangleq \{A \mid A = \sum_{i=1}^{q} \xi_i A_i,\ \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{q} \xi_i = 1\}$ e $B_u \in \mathcal{P}_{B_u}$ $\triangleq \left\{B_u \mid B_u = \sum_{j=1}^{r} \tau_j B_{uj},\ \tau_j \geq 0, \sum_{j=1}^{r} \tau_j = 1\right\}$, o problema de **controle robusto** com custo garantido $\mathcal{H}_2$ é descrito por:

$$
\begin{cases}
\min\limits_{J, X_{ij}, Z, V} & \text{Traço}\,\{J\} \\[2ex]
\text{s.a} & \begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X_{ij} \end{bmatrix} \succ 0, \qquad i = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, r \\[2ex]
& \begin{bmatrix} -(V + V^T) & * & * & * \\ A_i V + B_{uj} Z + X_{ij} & -X_{ij} & * & * \\ C_z V + D_{uz} Z & 0 & -\mathbf{I} & * \\ V & 0 & 0 & -X_{ij} \end{bmatrix} \prec 0
\end{cases}
$$

sendo $K = ZV^{-1}$ e $\min \|T_{zw}\|_2^2 \leq \text{Traço}\,\{J\}$ (veja que $*$ indica simetria)

Condições relaxadas para $\mathcal{H}_2$ – Discreto

Considerando novamente o caso de realimentação de estados, $u(t) = Kx(t)$ e o sistema em malha fechada, T_{zw}

Teorema As afirmações a seguir são equivalentes

1. A_f é estável e $\min_K \|T_{zw}\|_2^2 \preceq \min \text{Traço}\{J\}$

2. $\exists X = X^T, J$:

$$\begin{bmatrix} X & B_w \\ B_w^T & J \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} X & XA_f^T & XC_f^T \\ A_f X & X & 0 \\ C_f X & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0$$

Condições relaxadas para $\mathcal{H}_2$ – Discreto

3. $\exists\, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{V}$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{B_w} \\ \boldsymbol{B_w^T} & \boldsymbol{J} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^T - \boldsymbol{X} & \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}_f^T & \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{C}_f^T \\ \boldsymbol{A}_f\boldsymbol{V} & \boldsymbol{X} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C}_f\boldsymbol{V} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

4. Resultado dual para $\boldsymbol{A}_f^T \leftarrow \boldsymbol{A}_f$, $\boldsymbol{C}_f \leftarrow \boldsymbol{B}_w^T$ e $\boldsymbol{B}_w \leftarrow \boldsymbol{C}_f^T$

Referência M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou, "Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norm characterizations and controller parametrization for discrete-time systems", *International Journal of Control*, 75(9), pp. 666–679, 2002.

Linhas gerais da demonstração

(1) $\Leftrightarrow$ (2). Direto do cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ por Grammiano de controlabilidade, aplicando Schur e uma mudança de variável linearizante do tipo $X_c = X^{-1}$

(2) $\Leftrightarrow$ (3).

$$\begin{bmatrix} X & XA_f^T & XC_f^T \\ A_f X & X & 0 \\ C_f X & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\Updownarrow \quad V = V^T = X$$

$$\begin{bmatrix} V^T X^{-1} & * & * \\ 0 & \mathrm{I} & * \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & * & * \\ A_f X & X & * \\ C_f X & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} V & * & * \\ 0 & \mathrm{I} & * \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \succ 0$$

Condições relaxadas para $\mathcal{H}_2$ – Discreto

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} -V^T X^{-1} V & V^T A_f^T & V^T C_f^T \\ A_f V & -X & 0 \\ C_f V & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\Updownarrow \quad -V^T X^{-1} V \preceq -(V + V^T - X)$$

$$\begin{bmatrix} V + V^T - X & V^T A_f^T & V^T C_f^T \\ A_f V & X & 0 \\ C_f V & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0$$

Síntese de K? Substituindo A_f e C_f:

$$\begin{bmatrix} V + V^T - X & V^T (A + B_u K)^T & V^T (C_z + D_{uz} K)^T \\ (A + B_u K) V & X & 0 \\ (C_z + D_{uz} K) V & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0$$

$\Updownarrow$ mudança de variável $Z \triangleq KV$

$$\begin{bmatrix} V + V^T - X & V^T A^T + Z^T B_u^T & V^T C_z^T + Z^T D_{uz}^T \\ AV + B_u Z & X & 0 \\ C_z V + D_{uz} Z & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0$$

então $K = ZV^{-1}$ ...

Para $A \in \mathcal{P}_A \triangleq \{A \mid A = \sum_{i=1}^{q} \xi_i A_i,\ \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{q} \xi_i = 1\}$ e $B_u \in \mathcal{P}_{B_u}$ $\triangleq \left\{B_u \mid B_u = \sum_{j=1}^{r} \tau_j B_{uj},\ \tau_j \geq 0, \sum_{j=1}^{r} \tau_j = 1\right\}$, o problema de **controle robusto** com custo garantido $\mathcal{H}_2$ é descrito por:

$$
\begin{cases}
\min\limits_{J, X_{ij}, Z, V} & \text{Traço}\,\{J\} \\
\\
\text{s.a} & \begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X_{ij} \end{bmatrix} \succ 0, \qquad i = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, r \\
\\
& \begin{bmatrix} V + V^T - X_{ij} & * & * \\ A_i V + B_{uj} Z & X_{ij} & * \\ C_z V + D_{zu} Z & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0
\end{cases}
$$

sendo $K = ZV^{-1}$ e $\min \|T_{zw}\|_2^2 \leq \text{Traço}\,\{J\}$

Exercícios

Questão 1 Considere o modelo de um avião de combate F4E:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \zeta \\ \xi & \nu & \mu \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -97.78 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}}_{B_u} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_w} w(t)$$

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_z} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_{zu}} u(t)$$

- O modelo incerto é representado por três pontos de operação

Referência I. R. Petersen, "A procedure for simultaneously stabilizing a collection of single input linear systems using non-linear state feedback control", *Automatica*, V. 23, pp. 33–40, 1987.

Exercícios

A tabela abaixo apresenta os valores de cada parâmetro para cada ponto de operação

Pontos de Operação	α	β	ζ	ξ	ν	μ
$\mathbf{1}$	$\mathbf{-0.9896}$	$\mathbf{17.41}$	$\mathbf{96.15}$	$\mathbf{0.2648}$	$\mathbf{-0.8512}$	$\mathbf{-11.39}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{-0.6607}$	$\mathbf{18.11}$	$\mathbf{84.34}$	$\mathbf{0.08201}$	$\mathbf{-0.6587}$	$\mathbf{-10.81}$
$\mathbf{3}$	$\mathbf{-1.7020}$	$\mathbf{50.72}$	$\mathbf{263.50}$	$\mathbf{0.2201}$	$\mathbf{-1.4180}$	$\mathbf{-31.99}$

O problema de controle robusto consiste: (i) estabilização do modo de período curto longitudinal do avião considerando os três pontos de operação; (ii) minimização do índice de desempenho $\mathcal{H}_2$

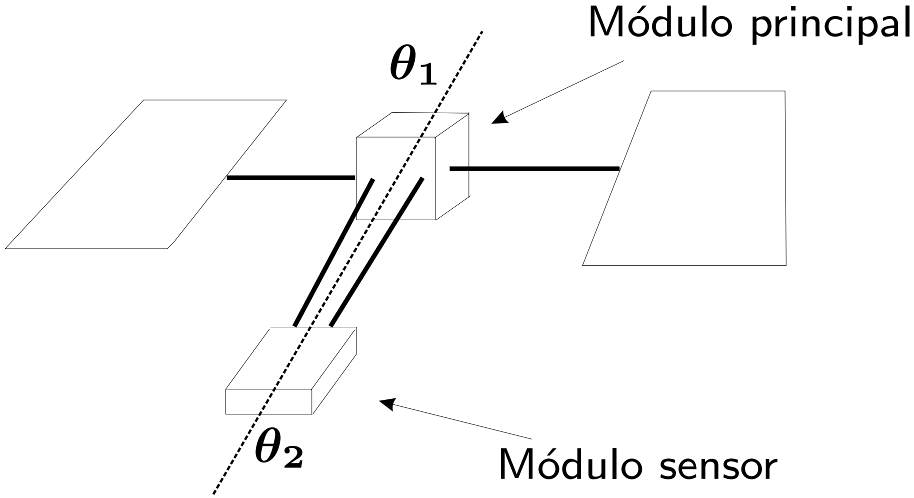
Exercícios

1. Suponha que o ponto de operação 1 "represente o modelo adotado" (portanto precisamente conhecido), obtenha o controlador $\mathcal{H}_2$ e o valor da norma $\mathcal{H}_2$, utilizando os procedimentos nas páginas 41 e 52, respectivamente. Discuta os resultados

2. Considerando o modelo incerto, ie todos os pontos de operação, obtenha os controladores e os custos garantidos mínimos $\mathcal{H}_2$, utilizando os procedimentos nas páginas 41 e 52. Discuta os resultados

3. Considerando o modelo incerto, calcule o valor da norma $\mathcal{H}_2$ obtida em cada vértice para cada um dos controladores no item 2.

Questão 2 Considere o modelo de um satélite composto por dois corpos rígidos (módulo principal e módulo de sensor) conectado por uma haste elástica. A haste é modelada como uma mola com torque constante $\boldsymbol{k}$ e amortecimento viscoso $\boldsymbol{f}$.



Satélite

descrito da forma:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & -f & f \\ k & -k & f & -f \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_u} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_w} w(t)$$

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_z} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_{zu}} u(t), \qquad \begin{cases} 0.09 \leq k \leq 0.4 \\ 0.0038 \leq f \leq 0.04 \end{cases}$$

Referência P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *"LMI Control Toolbox"*, The MathWorks Inc., 1995. (páginas 4-9 a 4-11)

Exercícios

1. Considerando o modelo incerto com as variações de k e f, obtenha os controladores e os custos garantidos mínimos $\mathcal{H}_2$ utilizando os procedimentos nas páginas 41 e 52.

2. Calcule o valor da norma $\mathcal{H}_2$ obtida em cada vértice para cada um dos controladores no item 1.

Questão 3 Discuta os resultados obtidos nas questões 1 e 2 quando se utilizou estabilidade quadrática e Lyapunov com condição relaxada

Exercícios

Questão 4 Considere o exemplo de controle confiável para um sistema a tempo discreto apresentado em (R. J. Veillette, S. V. Medanic, and W. R. Perkins, "Design of reliable control systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(3), pp. 280–304, 1992), cujas matrizes para o modelo contínuo são

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Use um segurador de ordem zero com período de amostragem T$= 0.1$s para obter as matrizes do sistema a tempo discreto

Exercícios

Objetivo projetar um controlador *confiável* para três diferentes cenários:

1. Modelo nominal

2. Falha do primeiro atuador

3. Falha do segundo atuador

- Considerando o modelo incerto, obtenha os controladores e os custos garantidos mínimos $\mathcal{H}_2$ utilizando os procedimentos nas páginas 44 e 58

Nota O sistema é modelado por um politopo de matrizes com três vértices...

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

Neste caso o controlador é dinâmico (controle baseado no observador), ie

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta[x_c(t)] & = & A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) & = & C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad K(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right]$$

Nota O controlador é próprio ... (considerando LMIs pode-se incluir facilmente um controlador próprio, e ao final resolver uma restrição extra em termos de LME, tal que o termo de transmissão direta em malha fechada seja forçado a ser nulo)

Nota No caso discreto, quando se obtém um sistema em malha fechada próprio isto não é proibitivo no sentido de se obter norma $\mathcal{H}_2$ finita

Nota Medidas "imperfeitas", ie $y(t) \neq \mathbf{I}\, x(t)$ ...

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

A filosofia quanto as manipulações é sutilmente similar. De fato, as mesmas idéias com relação a mudança de variáveis (porém em quantidade e "qualidade" diferenciadas), e transformações de similaridade continuam válidas. Dois artigos são seminais neste tipo de extensão:

1. C. Scherer. *Mixed $\boldsymbol{\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty}$ Control*. Trends in Control. Editor A. Isidori. Springer-Verlags, Berlin, pp. 173-216. 1995.

2. C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali, "Multiobjetive output-feedback control via LMI optimization". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42(7)**, pp. 896-911, 1997.

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

- Sistema em malha fechada? Controlador $K(\zeta)$ realimentando o modelo abaixo:

$$\Sigma : \quad \begin{cases} \delta[x(t)] & = & Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) & = & C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \\ y(t) & = & C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{cases}$$

Nota Como $D_{zw} \neq \mathbf{0}$, a FT em malha fechada de w para z é própria

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

- Considerando o sistema $\boldsymbol{\Sigma}$ e o controlador $\boldsymbol{K}(\zeta)$ obtém-se as equações:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= C_c x_c(t) + D_c \underbrace{\left(C_y x(t) + D_{yw} w(t)\right)}_{y(t)} \\
\delta[x(t)] &= A x(t) + B_u C_c x_c(t) + B_u D_c \left(C_y x(t) + D_{yw} w(t)\right) + B_w w(t) \\
\delta[x_c(t)] &= A_c x_c(t) + B_c \left(C_y x(t) + D_{yw} w(t)\right) \\
z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} C_c x_c(t) + D_{zu} D_c \left(C_y x(t) + D_{yw} w(t)\right) + D_{zw} w(t)
\end{aligned}
$$

- Define-se o vetor aumentado: $\widetilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$ (Por quê?)

Então o sistema em malha fechada admite a seguinte realização:

$$\Sigma_f : \begin{cases} \delta[\tilde{x}(t)] &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}w(t) \\ z(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}w(t) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad T_{zw} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array}\right]$$

sendo $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{q\times 2n}$, $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ e

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c D_{yw} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw}$$

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

- As manipulações são bastante similares para sistemas a tempo contínuo ou discreto.

Escolhendo o caso mais "patológico", ie o contínuo ...

- Cálculo da norma $\mathcal{H}_2$, para $T_{zw} \in \mathbb{R}\mathcal{H}_2 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{D} \equiv \mathbf{0}$ ...

$$\min_{K} \|T_{zw}\|_2^2 \quad = \quad \text{Traço}\,\{J\}$$

$$\text{s.a} \qquad \widetilde{D} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} P & \widetilde{C}^T \\ \widetilde{C} & J \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}^T P + P\widetilde{A} & P\widetilde{B} \\ \widetilde{B}^T P & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

Suponha que a matriz $\boldsymbol{P = P^T \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}}$ seja dividida da seguinte forma

$$\boldsymbol{P} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{P_{11}} & \boldsymbol{P_{12}} \\ \boldsymbol{P_{12}^T} & \boldsymbol{P_{22}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P_{11}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n\times n}}$$

e a sua inversa da forma

$$\boldsymbol{S} \triangleq \boldsymbol{P^{-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_{11}} & \boldsymbol{S_{12}} \\ \boldsymbol{S_{12}^T} & \boldsymbol{S_{22}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S_{11}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n\times n}}$$

Da identidade $PS = \mathbf{I}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} P_{11}S_{11} + P_{12}S_{12}^T & P_{11}S_{12} + P_{12}S_{22} \\ P_{12}^T S_{11} + P_{22}S_{12}^T & P_{12}^T S_{12} + P_{22}S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad P_{11}S_{11} + P_{12}S_{12}^T = \mathbf{I} \qquad \Longrightarrow \quad \mathbf{I} - P_{11}S_{11} = P_{12}S_{12}^T$$

Nota $\boldsymbol{P_{12}}$ e $\boldsymbol{S_{12}}$ têm posto completo de linhas quando $\mathbf{I} - \boldsymbol{P_{11}S_{11}}$ é não singular

Nota $\mathbf{I} - \boldsymbol{P_{11}S_{11}}$ é singular sse $\boldsymbol{P_{12}}$ não tem posto completo de linhas. Em tal caso é possível perturbar $\boldsymbol{P_{12}}$ a fim de se obter posto completo. Portanto a não singularidade de $\mathbf{I} - \boldsymbol{P_{11}S_{11}}$ pode ser considerada sem perda de generalidade

Nota $\boldsymbol{P}$ satisfaz a identidade $\boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}$, sendo

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_{11}} & \mathbf{I} \\ \boldsymbol{S_{12}^T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{P_{11}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{P_{12}^T} \end{bmatrix}$$

Fato Pode-se assumir que $\boldsymbol{P_{12}}$ e $\boldsymbol{S_{12}}$ têm posto completo de linhas $\therefore$ $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$ têm posto completo de colunas

- Por que introduzir $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$? Construção de transformações de similaridade em função de $\boldsymbol{M}$ *ou* $\boldsymbol{N}$ ...

- Baseado nas LMIs do resultado de análise, ie do cálculo da norma $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ obtém-se

a.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M^T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{\widetilde{C}^T} \\ \boldsymbol{\widetilde{C}} & \boldsymbol{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M^T P M} & \boldsymbol{M^T \widetilde{C}^T} \\ \boldsymbol{\widetilde{C} M} & \boldsymbol{J} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

b.

$$\begin{bmatrix} M^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A}^T P + P\widetilde{A} & P\widetilde{B} \\ \widetilde{B}^T P & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} M^T \widetilde{A}^T P M + M^T P \widetilde{A} M & M^T P \widetilde{B} \\ \widetilde{B}^T P M & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

Calculando cada um dos termos nas desigualdades (a) e (b) onde aparece o produto com $\boldsymbol{M}$

- $\boldsymbol{M^T P M} = \boldsymbol{N^T M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{P_{11}} & \boldsymbol{P_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_{11}} & \mathbf{I} \\ \boldsymbol{S_{12}^T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_{11}} & \mathbf{I} \\ \underbrace{\boldsymbol{P_{11} S_{11} + P_{12} S_{12}^T}}_{\mathbf{I}} & \boldsymbol{P_{11}} \end{bmatrix}$

então $\boldsymbol{M^T P M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S_{11}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \boldsymbol{P_{11}} \end{bmatrix}$

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

- $$\widetilde{C}M = \begin{bmatrix} C_z + D_{zu}D_cC_y & D_{zu}C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ S_{12}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} C_zS_{11} + D_{zu}D_cC_yS_{11} + D_{zu}C_cS_{12}^T & C_z + D_{zu}D_cC_y \end{bmatrix}$$

- $$M^TP\widetilde{B} = N^T\widetilde{B}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w + B_uD_cD_{yw} \\ B_cD_{yw} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} B_w + B_uD_cD_{yw} \\ P_{11}B_w + P_{11}B_uD_cD_{yw} + P_{12}B_cD_{yw} \end{bmatrix}$$

- $$\begin{aligned} M^T P \widetilde{A} M &= N^T \widetilde{A} M \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ S_{12}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ P_{11} A + P_{11} B_u D_c C_y + P_{12} B_c C_y & P_{11} B_u C_c + P_{12} A_c \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ S_{12}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} AS_{11} + B_u D_c C_y S_{11} + B_u C_c S_{12}^T \\ P_{11} A S_{11} + P_{11} B_u D_c C_y S_{11} + P_{12} B_c C_y S_{11} + P_{11} B_u C_c S_{12}^T + P_{12} A_c S_{12}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cdots & A + B_u D_c C_y \\ \cdots & P_{11} A + P_{11} B_u D_c C_y + P_{12} B_c C_y \end{matrix} \Bigg]$$

De (a)

$$\begin{bmatrix} M^T P M & M^T \widetilde{C}^T \\ \widetilde{C} M & J \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} & S_{11} C_z^T + S_{11} C_y^T D_c^T D_{zu}^T + S_{12} C_c^T D_{zu}^T \\ * & P_{11} & C_z^T + C_y^T D_c^T D_{zu}^T \\ * & * & J \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \qquad (1)$$

De (b)

$$\begin{bmatrix} M^T\widetilde{A}^TPM + M^TP\widetilde{A}M & M^TP\widetilde{B} \\ \widetilde{B}^TPM & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & B_w + B_uD_cD_{yw} \\ * & \Psi_{22} & P_{11}B_w + P_{11}B_uD_cD_{yw} + P_{12}B_cD_{yw} \\ * & * & \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &\triangleq AS_{11} + S_{11}A^T + B_uC_cS_{12}^T + S_{12}C_c^TB_u^T \\ &\quad + B_uD_cC_yS_{11} + S_{11}C_y^TD_c^TB_u^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{12} &\triangleq A + B_uD_cC_y + S_{11}A^TP_{11} + S_{11}C_y^TD_c^TB_u^TP_{11} \\ &\quad + S_{11}C_y^TB_c^TP_{12}^T + S_{12}C_c^TB_u^TP_{11} + S_{12}A_c^TP_{12}^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{22} &\triangleq A^TP_{11} + P_{11}A + P_{11}B_uD_cC_y + P_{12}B_cC_y \\ &\quad + C_y^TD_c^TB_u^TP_{11} + C_y^TB_c^TP_{12}^T\end{aligned}$$

Note que (1) e (2) **não são LMIs**. Necessita-se então introduzir as seguintes mudanças de variáveis linearizantes em (1) e (2) da forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^T &\triangleq S_{11}A^TP_{11} + S_{11}C_y^TD_c^TB_u^TP_{11} \\
&\quad + S_{11}C_y^TB_c^TP_{12}^T + S_{12}C_c^TB_u^TP_{11} + S_{12}A_c^TP_{12}^T \\
\mathcal{B} &\triangleq P_{11}B_uD_c + P_{12}B_c \\
\mathcal{C} &\triangleq D_cC_yS_{11} + C_cS_{12}^T \\
\mathcal{D} &\triangleq D_c
\end{aligned}
$$

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

Portanto o problema de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída é descrito pelo problema de otimização nas variáveis matriciais $S_{11}, P_{11}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ e J

$$
\begin{cases}
\min & \text{Traço}\,\{J\} \\[2em]
\text{s.a} & D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} = \mathbf{0} \\[2em]
 & \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} & S_{11} C_z^T + \mathcal{C}^T D_{zu}^T \\ * & P_{11} & C_z^T + C_y^T \mathcal{D}^T D_{zu}^T \\ * & * & J \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \\[2em]
 & \begin{bmatrix} A S_{11} + S_{11} A^T + B_u \mathcal{C} + \mathcal{C}^T B_u^T & * & * \\ \mathcal{A} + A^T + C_y^T \mathcal{D}^T B_u^T & A^T P_{11} + P_{11} A + \mathcal{B} C_y + C_y^T \mathcal{B}^T & * \\ B_w^T + D_{yw}^T \mathcal{D}^T B_u^T & B_w^T P_{11} + D_{yw}^T \mathcal{B}^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}
\end{cases}
$$

Resta a questão: **como reconstruir o controlador $K(s)$**? De posse do conjunto solução do problema de otimização convexo anterior, ie $S_{11}, P_{11}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ e J

- Primeiramente obtenha as matrizes não-singulares P_{12} e S_{12} da decomposição:

$$P_{12}S_{12}^T = \mathbf{I} - P_{11}S_{11}$$

- Siga os passos ...

1. $D_c = \mathcal{D}$
2. $C_c = (\mathcal{C} - D_c C_y S_{11}) \left(S_{12}^T\right)^{-1}$
3. $B_c = P_{12}^{-1} (\mathcal{B} - P_{11} B_u D_c)$
4. $A_c = P_{12}^{-1} \left(\mathcal{A} - P_{11} (A + B_u D_c C_y) S_{11} - P_{12} B_c C_y S_{11} - P_{11} B_u C_c S_{12}^T\right) S_{12}^{-T}$

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

- Há outras mudanças de variáveis linearizantes combinadas com outras tranformações de similaridade? A resposta para esta questão é sim ... Particularmente isto fica facilitado se o controlador for estritamente próprio, o que implica em $\boldsymbol{D_c \equiv 0}$

- Como tratar sistemas incertos?

1. com "bastante" paciência pode-se considerar as incertezas do tipo limitadas em norma, e obter uma descrição via LMIs baseada na tática anterior

Referência: S. H. Esfahani and I. R. Petersen. "An LMI approach to the output-feedback guaranteed cost control for uncertain time-delay systems". *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 1358-1363, Tampa, FL, 1998

Escolhi esta referência, para mostrar que a mesma estratégia iterativa que se utiliza no caso politópico a seguir, é adotada também neste artigo... O retardo no tempo "é um detalhe", para obter o caso $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ basta considerá-lo nulo e desprezar todas as matrizes associadas. As mudanças de variáveis consideradas são: $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ (dada anteriormente), e $\boldsymbol{\mathcal{B}_a}$ e $\boldsymbol{\mathcal{C}_a}$, definidas a seguir para o caso politópico

Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída via LMIs

2. o caso de incertezas politópicas pode ser "resolvido" por uma estratégia iterativa

Referência: J. C. Geromel, J. Bernussou and M. C. de Oliveira. "$\mathcal{H}_2$ norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: decentralized and reliable control". *IEEE Transactions on Automatic Control*. **44(7)**, pp. 1449-1454, 1999.

Neste caso, poder-se-ia, considerando $D_c \equiv \mathbf{0}$, definir as seguintes mudanças de variáveis alternativa em (2):

$$\mathcal{A}_a \triangleq S_{12} A_c^T P_{12}; \quad \mathcal{B}_a \triangleq P_{12} B_c; \quad \mathcal{C}_a \triangleq C_c S_{12}^T$$

- No entanto, as desigualdades resultantes seriam não-lineares. Uma solução iterativa, utilizando o princípio da separação, consiste em fixar o ganho de realimentação de estados e calcular um ganho para o filtro, a seguir fixa-se o ganho do filtro e calcula-se o ganho de realimentação, e assim por diante. Pode-se mostrar que este algoritmo é convergente. A solução inicial é obtida a partir de um problema de autovalor generalizado

Realimentação de saída: incerteza $\times$ conservadorismo?

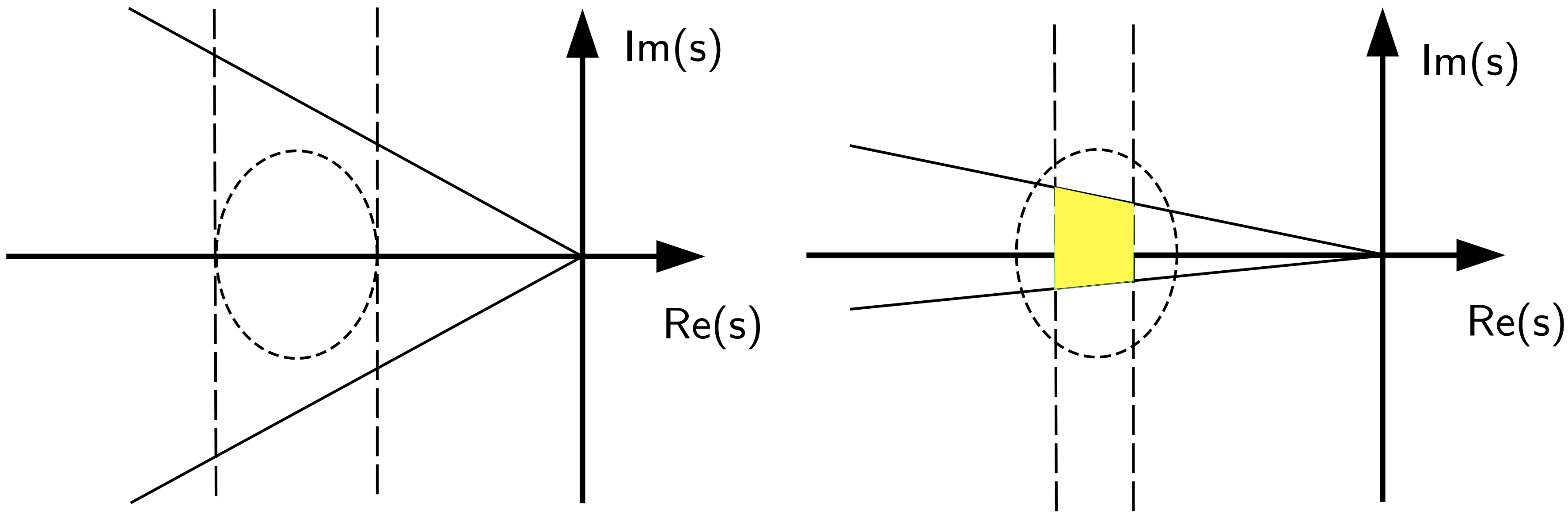
- As mesmas mudanças de variáveis e transformações de similaridade, no caso de controle por realimentação de saída, podem ser aplicadas as condições relaxadas que foram obtidas tanto no caso contínuo como no caso discreto. **Vale a pena tentar**, são manipulações que seguem a mesma metodologia apresentada. No caso contínuo pode consultar:

Referência: P. Apkarian, H. D. Tuan and J. Bernussou. "Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and $\mathcal{H}_2$ synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterization". *IEEE Transactions on Automatic Control*. **46(12)**, pp. 1941-1946, 2001.

- Incerteza no modelo $\times$ conservadorismo? A mesma tática de algoritmos iterativos, e indicadas nas referências anteriores, pode ser empregada "sem medo". Para tanto basta lembrar do princípio da separação e encontrar uma solução inicial a partir de um problema de autovalor generalizado ...

Alocando pólos em malha fechada

- Faixa, disco ou cone ? Como proceder via LMIs ?



Região de alocação dos pólos em malha fechada: caso contínuo no tempo

Alocando pólos em malha fechada

1. Solução fácil: alocar **apenas** dentro de uma faixa, limitando os autovalores em malha fechada ($\boldsymbol{\lambda}$), a valores $\boldsymbol{\lambda_{max}}$ e $\boldsymbol{\lambda_{min}}$, (respectivamente, autovalores máximo e mínimo) e procurando por um conjunto de autovalores que estejam relativamente próximos um dos outros

$\rightsquigarrow$ Neste caso, bastaria limitar os autovalores da matriz de Lyapunov ...

Considerando o caso de realimentação de estados, ie $\boldsymbol{u(t) = Kx(t)}$, o controlador ótimo $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$ é obtido da página 41. Particularmente $\boldsymbol{Q = Q^T \succ 0}$ é tal que

$$\boldsymbol{AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T = -Q}$$

Alocando pólos em malha fechada

Teorema Considere $\lambda_{max} \geq \lambda_{min} > 0$, $X = X^T \succ \mathbf{0}$ e $Q = Q^T \succ \mathbf{0}$ satisfazendo

$$AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T = -Q$$

Seja λ_i, $i = 1, \ldots, n$ um autovalor em malha fechada de $A_f = A + BK$. Se

$$\frac{1}{2\lambda_{max}} Q \preceq X \preceq \frac{1}{2\lambda_{min}} Q$$

então $-\lambda_{max} \leq \text{Re}(\lambda_i) \leq -\lambda_{min}$, para $i = 1, \ldots, n$

Referência B. Ling. "State-feedback regional pole placement via LMI optimization". In the proceedings of the American Control Conference, pp. 3475-3480, Arlignton, VA, 2001.

Controle $\mathcal{H}_2$ com alocação de pólos (em faixa) por LMIs

$$
\begin{cases}
\min \|T_{zw}\|_2^2 = & \displaystyle\min_{J,X,Z,Q} \text{Traço}\,\{J\} \\
\text{s.a} & 2\lambda_{max} X \succeq Q, \quad 2\lambda_{min} X \preceq Q \\
 & AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T = -Q \\
 & \begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} -Q & XC_z^T + Z^T D_{uz}^T \\ C_z X + D_{uz} Z & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}
\end{cases}
$$

onde $K = ZX^{-1}$

Regiões LMIs e Alocação “genérica” de pólos em malha fechada

Uma região LMI é uma subregião convexa do plano complexo, simétrica em relação ao eixo real e que pode ser definida como:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : L + zM + \bar{z}M^T < 0\}$$

sendo $L = L^T$ e M matrizes reais. A função matricial

$$f_{\mathcal{D}}(z) = L + zM + \bar{z}M^T < 0$$

é chamada função característica de $\mathcal{D}$

▷ Alocação de pólos em uma região LMI especificada pode ser caracterizada em termos dos elementos das matrizes L e M (l_{ij} e m_{ij}), de modo que a matriz A terá autovalores em uma região determinada $\mathcal{D}$ sse $\exists P = P^T \succ \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{D}}(A, X) &= [l_{ij}X + m_{ij}AX + m_{ji}XA^T]_{1 \le i,j \le p} \\ &= L \otimes X + M \otimes (AX) + M^T \otimes (AX)^T \end{aligned}$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

▷ A é $\mathcal{D}$-estável, ie $\lambda(A) \in \mathcal{D}$, sse $\exists X = X^T$ tal que

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) \prec 0, \qquad X \succ 0$$

▷ Veja que $M_{\mathcal{D}}(A, X)$ e $f_{\mathcal{D}}(z)$ estão relacionados através da substituição $(X, AX, XA^T) \leftrightarrow (1, z, \overline{z})$

▷ $M_{\mathcal{D}}(A, X)$ pode ser visto como uma generalização da desigualdade de Lyapunov pois se $\mathcal{D}$ é todo o semi-plano esquerdo, com $f_{\mathcal{D}}(z) = z + \overline{z} < 0$, então

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = AX + XA^T \prec 0, \qquad X \succ 0$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

1. Região semiplano: Re$(z) < \sigma_S$

$$z + \overline{z} = (\sigma + j\omega) + (\sigma - j\omega) = 2\sigma < 2\sigma_S \Rightarrow z + \overline{z} - 2\sigma_S < 0$$

Para semiplano no lado esquerdo do plano complexo, $\sigma_S = -\alpha$, $\alpha > 0$, ou

$$z + \overline{z} + 2\alpha < 0$$

que resulta na LMI

$$AP_F + P_F A^T + 2\alpha P_F \prec 0$$

▷ Considerando o sistema em malha fechada, ie para $A + B_u K$, obtém-se

$$(A + B_u K)P_F + P_F(A + B_u K)^T + 2\alpha P_F \prec 0$$

que resulta, com a mudança de variável linearizante, $Z = KP_F$,

$$AP_F + P_F A^T + B_u Z + Z^T B_u^T + 2\alpha P_F \prec 0, \quad P_F \succ 0 \text{ e } K = ZP_F^{-1}$$

2. Região do tipo disco de raio r e centrado em $(c, 0)$:

$$|z - c| < r \;\Rightarrow\; |\sigma - c + j\omega| < r \;\Rightarrow\; \sqrt{(\sigma - c)^2 + \omega^2} < r$$

$$\Rightarrow\; (\sigma - c)^2 + \omega^2 - r^2 < 0$$

elevando ao quadrado e somando e subtraindo $j\omega c$ e $j\omega\sigma$ obtém-se

$$\sigma^2 - \sigma c - \sigma c + c^2 + \omega^2 - r^2 + j\omega c - j\omega c + j\omega\sigma - j\omega\sigma < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\sigma - j\omega)(\sigma + j\omega) - (\sigma - j\omega)c - (\sigma + j\omega)c + c^2 - r^2 < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{z}z - \bar{z}c - cz + c^2 - r^2 < 0 \;\Rightarrow\; (\bar{z} - c)(z - c) - r^2 < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\bar{z} - c)\frac{1}{r}(z - c) - r < 0$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

Aplicando o complemento de Schur na desigualdade:

$$(\bar{z} - c)r^{-1}(z - c) - r < 0$$

obtém-se a LMI

$$\begin{bmatrix} -r & z - c \\ \bar{z} - c & -r \end{bmatrix} \prec 0$$

Para um disco centrado em $c = -q$, com $q > 0$ segue

$$\begin{bmatrix} -r & z + q \\ \bar{z} + q & -r \end{bmatrix} \prec 0$$

Veja que

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -r & z+q \\ \bar{z}+q & -r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M^T} \bar{z} < 0$$

que resulta na LMI, substituindo $(P_D, AP_D, P_D A^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z})$

$$\begin{bmatrix} -rP_D & AP_D + qP_D \\ P_D A^T + qP_D & -rP_D \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

Outras regiões LMIs

3. Cone descrito como

$$|\text{Im}(z)| < \beta|\text{Real}(z)| : f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -(z+\bar{z}) & \frac{1}{\beta}(z-\bar{z}) \\ \frac{1}{\beta}(z-\bar{z}) & -(z+\bar{z}) \end{bmatrix} \prec 0$$

resulta na LMI

$$\begin{bmatrix} -(AP_C + P_C A^T) & \frac{1}{\beta}(AP_C - P_C A^T) \\ \frac{1}{\beta}(AP_C - P_C A^T) & -(AP_C + P_C A^T) \end{bmatrix} \prec 0$$

4. Faixa horizontal $|\mathrm{Im}(z)| < \omega$: $f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -2\omega & \bar{z} - z \\ z - \bar{z} & -2\omega \end{bmatrix} \prec 0$

resulta na LMI

$$\begin{bmatrix} -2\omega P_H & P_H A^T - A P_H \\ A P_H - P_H A^T & -2\omega P_H \end{bmatrix} \prec 0$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

▷ Todas as regiões LMIs podem ser estendidas para sistemas a tempo discreto!!! Basta que se escolha de forma apropriada os elementos que a caracterizam

▷ Pode-se combinar duas ou mais regiões LMIs facilmente... No entanto, só é possível utilizá-las quando se deseja obter uma intersecção entre as mesmas que não seja vazia. Ie, não há como obter regiões LMIs desconexas

▷ Quer obter um único controlador quando se considera duas ou mais regiões LMIs? Basta para tanto que se fixe a matriz de Lyapunov adotada, ie imponha

$$P = P_F = P_D = P_C = P_H$$

▷ Extensão imediata para sistemas com incertezas politópicas

Restrições sobre a entrada de controle Quando a condição inicial, $x(0)$, é conhecida, pode-se encontrar um limitante superior para a norma da entrada do sinal de controle $u(t) = Kx(t)$ de um sistema incerto (politópico)

A restrição $\|u(t)\| \leq \mu$ é imposta para todos os instantes $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & Y \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad \begin{bmatrix} Y & Z^T \\ Z & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$$

são factíveis, onde $Y \succ 0$ e Z satisfazem as condições de estabilidade, $\forall i = 1, \ldots, \kappa$,

$$A_i Y + Y A_i^T + B_{ui} Z + Z^T B_{ui}^T \prec 0 \qquad \text{(Caso contínuo)}$$

$$\begin{bmatrix} Y & Y A_i^T + Z^T B_{ui}^T \\ A_i Y + B_{ui} Z & Y \end{bmatrix} \succ 0 \qquad \text{(Caso discreto)}$$

Neste caso, o ganho estabilizante é: $K = ZY^{-1}$...

E se $x(0)$ não é precisamente conhecido? Pode-se estender os resultados para o caso onde $x(0)$ está contido em um politopo (ou elipsóide)...

Por exemplo, suponha que $\|x(0)\| \leq 1$, então

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & Y \end{bmatrix} \succeq 0 \Longrightarrow Y - x(0)x(0)^T \succeq 0 \Longrightarrow Y \succeq \mathbf{I}$$

Obtendo-se assim as LMIs:

$$Y \succeq \mathbf{I}, \qquad \begin{bmatrix} Y & Z^T \\ Z & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$$

Restrições sobre Sinais de Entrada e Saída

Restrições sobre o pico do sinal de saída Suponha que a condição inicial, $x(0)$, é conhecida e o sistema incerto considerado seja da forma

$$\begin{cases} \delta[x(t)] & = & Ax(t) + B_u x(t), \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) & = & C_y x(t) \qquad\qquad \text{sendo } (A, B, C) \in \mathcal{P} \end{cases}$$

A restrição $\|y(t)\| \leq \phi$ é imposta para todos os instantes $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & Y \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad \begin{bmatrix} Y & Y C_{yi}^T \\ C_{yi} Y & \phi^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0$$

são factíveis, $\forall i = 1, \ldots, \kappa$, onde $Y \succ 0$ satisfaz a LMI de estabilidade (contínuo ou discreto) como no caso anterior para entrada de controle

Questão 5 – Sistema de Tanques Interativos (STI) Este sistema piloto é composto de dois tanques conectados, utilizando sensores e atuadores industriais[a]. As matrizes do modelo em espaço de estado são

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma & 0 \\ -\gamma & \delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ D_{zu} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

onde x_1 e x_2 são os níveis de cada tanque, e $\dot{x}_3 = x_2$ é um estado extra adicionado para evitar erros em estado estacionário em x_2 (ie, um integrador...). As matrizes C_z, e D_{zu} ponderam os estados e o controle

[a] V.J.S.L. Jr. et al., "Robust pole location for an interacting tank system with uncertain parameters". *IEEE 28th IECON*, pp. 1618-1623, 2002.

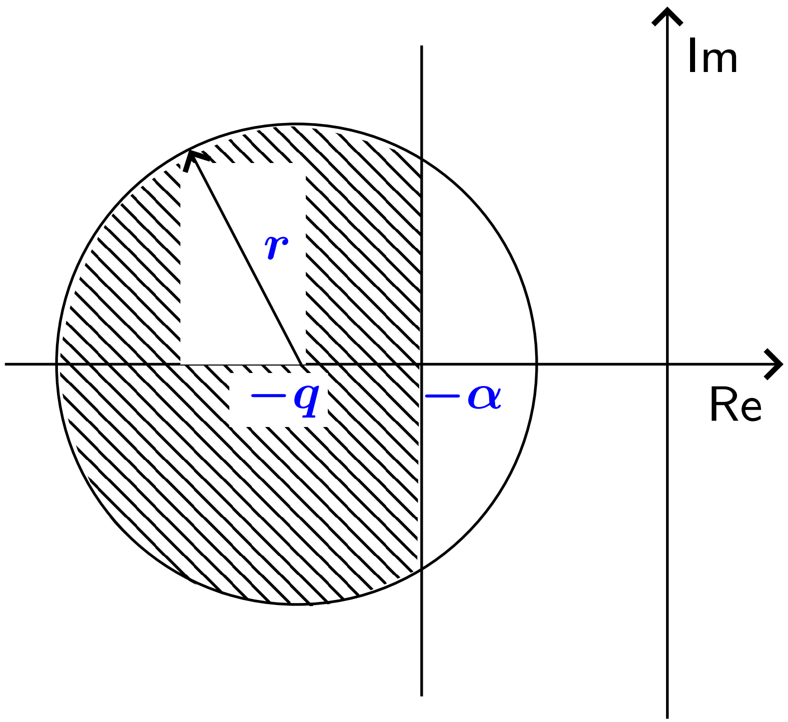
Exercícios

Usando dados experimentais, o comportamento do sistema pode ser representado por um politopo com $\kappa = 3$ vértices, onde os valores dos parâmetros de cada ponto de operação são listados na Tabela abaixo

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
$\gamma \times 10^{-2}$	3.576	3.576	2.262
$\delta \times 10^{-2}$	-3.583	-3.579	-2.264
$b_{11} \times 10^{-3}$	6.201	12.294	12.109
$b_{22} \times 10^{-3}$	8.248	2.181	1.822

Encontre o controlador robusto $\mathcal{H}_2$, o custo garantido $\mathcal{H}_2$ e as respectivas normas $\mathcal{H}_2$ em cada vértice, quando considera-se alocar os pólos em malha fechada em uma região LMI do tipo:

Exercícios



Região LMI: intersecção de um disco com um semi-plano

sendo $\boldsymbol{\alpha = 0.2}$, $\boldsymbol{q = 2.31}$, e $\boldsymbol{r = 2.3}$

Exercícios

Questão 6 Considere o modelo de suspensão ativa de um automóvel estudado no bloco 3. Sendo as matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{k}{m_1} & 0 & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{k_t}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}; \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e 231.12Kg $\leq m_1 \leq 346.68$Kg, $m_2 = 28.58$Kg, $k = 10000$N/m, $c = 850$Ns/m e $k_t = 155900$N/m

Exercícios

Pondere a saída controlada, z, da forma

$$C_z = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^4 \end{bmatrix} ; \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Obtenha o controlador $\mathcal{H}_2$ para o modelo nominal ($m_1 = 288.19$Kg) e apresente a resposta temporal para $x_1(t)$ considerando realimentação (suspensão ativa) e o sistema sem realimentação (suspensão passiva) a pertubações da pista modeladas como:
   (a) impulso
   (b) $w(t) = 0.6\text{sen}(8\pi t) + 0.75\text{sen}(12\pi t) + 0.9\text{sen}(16\pi t) + 0.5\text{sen}(20\pi t)$

2. Obtenha o controlador robusto $\mathcal{H}_2$ para o modelo incerto e para as mesmas pertubações, obtenha a resposta para $x_1(t)$ considerando o sistema incerto (simule para vários pontos no intervalo de incerteza)