

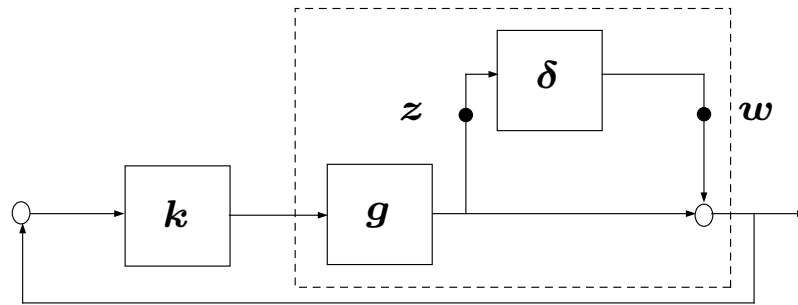
## Construindo os Fundamentos da Robustez

1. O problema do ganho pequeno, o problema de atenuação de distúrbios e o problema de estabilidade robusta
2. Teorema do ganho pequeno
3. Descrição de incertezas
4. Desigualdades de Riccati e Desigualdades Matriciais Lineares – LMIs
5. Estabilidade Interna e Funcionais de Lyapunov
  - 5.1. Teorema de Lyapunov
  - 5.2. Lema de Finsler
  - 5.2. Lema Projetivo
6. Estabilidade quadrática
7. Condições relaxadas de estabilidade: Lyapunov dependente de parâmetros
8. Bounded Real Lemma

## Motivação: O problema do ganho pequeno

- Por que introduzir a norma  $\mathcal{H}_\infty$  como um índice de medida?

⇒ Considere o problema de estabilidade robusta ilustrado abaixo:



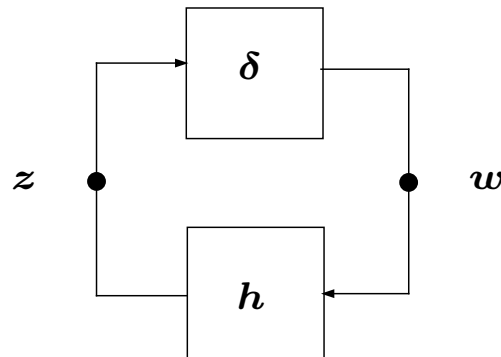
- $g$  é uma FT de um sistema LIT **nominal**
- $k$  é uma FT de um controlador LIT a ser projetado
- Se o sistema **real** é representado por  $(1 + \delta)g$ , então a modelagem do erro é representada por uma perturbação multiplicativa  $\delta$  na saída da planta. Considera-se  $\delta$  como um sistema LIT

## Motivação: O problema do ganho pequeno

Reescrevendo o sistema em termos de  $z$  e  $w$ , obtém-se

$$z = gk(z + w) \quad \longrightarrow \quad z = (1 - gk)^{-1}gkw$$

desta forma as **propriedades de estabilidade** do sistema anterior são as mesmas para o sistema descrito abaixo:



**Problema do ganho pequeno**

sendo que  $h = (1 - gk)^{-1}gk$

## Motivação: O problema do ganho pequeno

- Como analisar estabilidade no modelo equivalente em termos de  $h$  e  $\delta$ ?

Se a perturbação  $\delta$  e o sistema nominal em malha fechada  $h$  são estáveis, então:

**o critério de Nyquist garante que o sistema em malha fechada é estável se o diagrama de Nyquist de  $h\delta$  não envolve o ponto  $+1$  (veja que convencionamos realimentação positiva...)**

$\therefore$  para satisfazer o critério de estabilidade:  $1 - h(j\omega)\delta(j\omega) \neq 0$

$$\implies \sup_{\omega} |h(j\omega)\delta(j\omega)| < 1$$

assegura que o diagrama de Nyquist de  $h\delta$  não envolve o ponto  $+1$ , sendo uma **condição completa** para assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada!!

## Motivação: O problema do ganho pequeno

- Como  $\delta$  é desconhecido, pode-se obter uma condição suficiente alternativa:

$$\sup_{\omega} |h(j\omega)\delta(j\omega)| < \sup_{\omega} |h(j\omega)| \sup_{\omega} |\delta(j\omega)| < 1$$

Se  $\delta$  é estável e limitado em magnitude por  $\gamma$ , então:  $\sup_{\omega} |\delta(j\omega)| < \gamma$

$\therefore$  A malha de realimentação no sistema equivalente **será estável** se um controlador estabilizante poder ser projetado tal que:

$$\sup_{\omega} |h(j\omega)| = \sup_{\omega} \left| (1 - g(j\omega)k(j\omega))^{-1} g(j\omega)k(j\omega) \right| < \frac{1}{\gamma} !!$$

Especificamente em termos da norma- $\infty$ , a condição acima é denotada por:

$$\|h\|_{\infty} = \sup_{\omega} |h(j\omega)| < \frac{1}{\gamma} \quad (\text{valor de pico no diagrama de Bode...})$$

Particularmente, satisfaz a propriedade submultiplicativa:  $\|h\delta\|_{\infty} < \|h\|_{\infty} \|\delta\|_{\infty} < 1$

## Motivação: O problema do ganho pequeno

- Neste caso o problema de estabilidade robusta ótima pode ser colocado como um problema de otimização da forma:

Encontrar um controlador estabilizante  $k$  que minimiza  $\|(1 - gk)^{-1}gk\|_{\infty}$

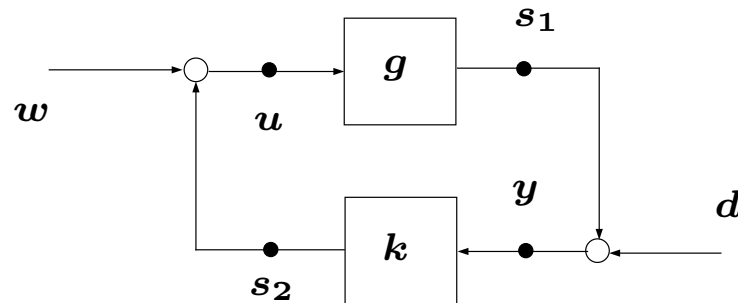
**Curiosidade:** Veja que se a planta é estável, para  $k = 0$  obtém-se  $\|(1 - gk)^{-1}gk\|_{\infty} = 0$  e  $\therefore k$  é ótimo sob a ótica acima...

Portanto, quando a planta é estável e **não há exigências de desempenho além da estabilidade**, a solução ótima é não utilizar realimentação...

- Em caso contrário,  $k = 0$  não é factível !!

## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

Considere o sistema abaixo:



### Problema de atenuação de distúrbios

- $g$  é uma FT racional estável
- $d$  é um sinal no domínio da frequência que representa um distúrbio desconhecido

**Objetivo:** Encontrar um controlador  $k$  tal que:

1. Estabiliza a malha
2. Minimiza a norma- $\infty$  da FT de  $d$  para  $y$

## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

Se  $w = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} y &= (1 - gk)^{-1}d \\ &= \left[ (1 - gk)^{-1} - gk(1 - gk)^{-1} + gk(1 - gk)^{-1} \right] d \\ &= \left[ (1 - gk)^{-1}(1 - gk) + gk(1 - gk)^{-1} \right] d \quad (\text{evidenciando } (1 - gk)^{-1}) \\ &= \left[ 1 + gk(1 - gk)^{-1} \right] d \quad (\text{não-linear em } k)\dots \end{aligned}$$

Define-se  $q \triangleq k(1 - gk)^{-1}$  (FT de  $d$  para  $u$ )

- Mapeamento em malha fechada de  $d$  para  $y$ :  $y = (1 + gq)d$  (afim no parâmetro desconhecido  $q$ )



## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

**Definição** O sistema de realimentação representando o problema de atenuação de distúrbios é **internamente estável** se cada FT de  $w$  e  $d$  para  $u$  e  $y$  é estável

Condição necessária e suficiente para o sistema ser internamente estável? Veja

$$\begin{aligned} u &= ky + w \\ y &= gu + d \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -g & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_X \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix}$$

isto é,  $X$  deve ser estável...

## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

E quanto a parametrização em  $q = k(1 - gk)^{-1}$ , com  $y = (1 + gq)d$ ? Veja que

$$\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -g & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 - gk \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{e } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -g & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_X &= \begin{bmatrix} 1 & k(1 - gk)^{-1} \\ 0 & (1 - gk)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 + gq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + qg & q \\ (1 + qg)g & 1 + qg \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\therefore$  Como  $g \in \mathbb{RH}_\infty$ ,  $X$  é estável (ie  $X \in \mathbb{RH}_\infty$ ) sse  $q$  é estável (ie  $q \in \mathbb{RH}_\infty$ )

## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

**Nota** A condição tal que  $\exists X(\infty)$  é conhecida como **condição bem posta** (*well-posedness condition*). Esta mesma condição é simples de ser colocada em variáveis de estado. Considere realizações para  $g$  e  $k$ , de modo que  $g(\infty) = r$  e  $k(\infty) = p$ , então a condição bem posta é equivalente a existir

$$\begin{bmatrix} 1 & -p \\ -r & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

**Lema** Suponha  $g$  estável. Então  $k$  é um controlador internamente estabilizante para a malha de realimentação do problema de atenuação de distúrbios sse  $q = k(1 - gk)^{-1}$  é estável. De forma equivalente,  $k$  é um controlador internamente estabilizante sse  $k = q(1 + qg)^{-1}$  para algum  $q$  estável

## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

Note que  $y = (1 + gq)d$ , definindo-se

$$h \triangleq (1 + gq) \longrightarrow q = g^{-1}(h - 1)$$

- Para estabilidade interna de  $h$ ,  $q$  deve ser estável
- Se  $g^{-1}$  é estável, para  $h = 0$ ,  $q = -g^{-1} \rightarrow$  atenuação de distúrbios perfeita ( $y = 0!!$ ). Possível de ser obtido? Veja que

$$h = 1 + gq = 1 + gk(1 - gk)^{-1} = (1 - gk)^{-1}(1 - gk + gk) = (1 - gk)^{-1}$$

então  $\|k\| \rightarrow \infty$ ,  $h \rightarrow 0$ ,  $\therefore q$  não é obtido através de uma realização de  $k$ ...

## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

- Por outro lado, para  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno, faça  $h = \epsilon$ , tal que  $q = -g^{-1}(1 - \epsilon)$  e

$$k = q(1 + qg)^{-1} = qh^{-1} = g^{-1}(h - 1)h^{-1} = -\frac{1 - \epsilon}{\epsilon}g^{-1}$$

- ∴ O controlador  $k$  é simplesmente  $g^{-1}$  junto com uma fator arbitrário de alto ganho
- Esta é uma conclusão esperada? Sim, pois do controle clássico sabe-se que altos ganhos melhora a atenuação de distúrbios... (lembrando que para altos ganhos, o sistema em malha fechada é estável se todos os zeros estão no semiplano esquerdo aberto)

## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

- E se  $g^{-1}$  não é estável?  $q$  será estável sse

$$h(z_i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

para cada zero,  $z_i$  de  $g$  tal que  $\Re(z_i) \geq 0$  (com multiplicidade 1)

**O Problema de Atenuação?** Encontrar uma FT  $h$  estável, de norma- $\infty$  mínima, satisfazendo a restrição acima (anulando o zero instável...)

- Então de  $h = 1 + gq$ , o  $q$  ótimo pode ser interpretado como a melhor aproximação inversa de  $-g$ , no sentido da norma- $\infty$ ...

## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

- Se eventualmente há alguma informação espectral sobre o distúrbio  $d$  como, por exemplo,  $d$  é limitada em baixas frequências, pode-se selecionar um filtro passa-baixas  $f(j\omega)$ , estável e de fase mínima

**O Problema de Atenuação?** Minimizar  $\|hf\|_\infty$

$$\text{Se } \|hf\|_\infty < 1 \Rightarrow |h(j\omega)| < |f^{-1}(j\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

- Como  $|f^{-1}(j\omega)| \ll 1$  para baixas frequências, implica que  $|h(j\omega)| \ll 1$  para baixas frequências...

**Qual a idéia?** Construir  $|h(j\omega)|$  pequeno para o domínio de frequências para o qual  $|d(j\omega)|$  é grande

## Motivação: O problema de atenuação ótima de distúrbios

∴ definindo-se  $\tilde{h} \triangleq hf$

$$\tilde{h} = f + f g q \quad \Rightarrow \quad q = g^{-1} f^{-1} (\tilde{h} - f)$$

$q$  é estável sse as restrições  $\tilde{h}(z_i) = f(z_i), i = 1, 2, \dots, m$  são satisfeitas

• Como  $\|\tilde{h}\|_\infty < 1 \Rightarrow |h(j\omega)| < |f^{-1}(j\omega)| \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Pode-se concluir que

$$|h(j\omega)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |f(j\omega)| \geq \frac{1}{\epsilon}$$

∴ Através da síntese de  $f$  pode-se obter um nível de atenuação apropriado desde que

$\exists k : \|\tilde{h}\|_\infty < 1$



## Motivação: Um problema de estabilidade robusta...

**O problema?** como determinar um controlador que assegure especificações de desempenho em malha fechada sem um modelo preciso para o processo

**O que se espera?** o controlador deve operar de forma “satisfatória” para toda uma família de modelos

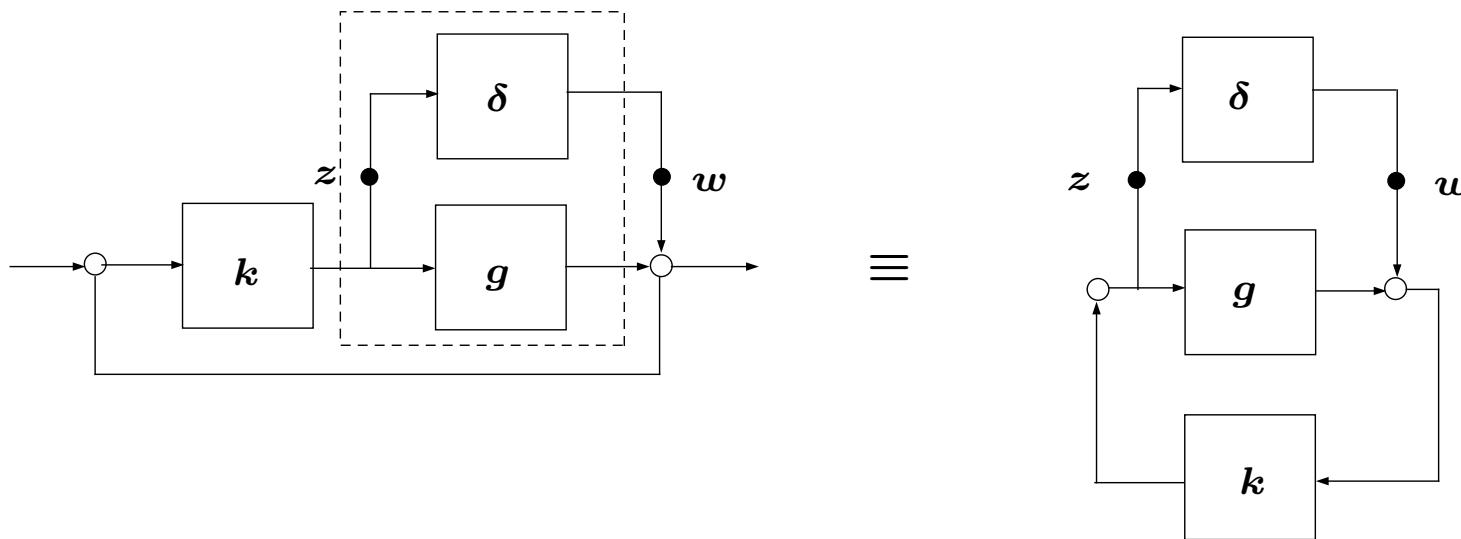
**Representação do modelo do erro?**  $g$  é a planta nominal e o modelo do erro é, por exemplo,  $g + \delta$ , sendo  $\delta \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$  e representa a dinâmica desconhecida...

**Problema de estabilização robusta?** Para  $g$  dado. Determine um controlador estabilizante  $k$  para toda a família de modelos  $g + \delta$ , para o qual  $\|\delta\|_\infty$  é maximizado...

- $k$  que maximiza  $\|\delta\|_\infty$  é robusto e ótimo no sentido que estabiliza a maior **bola** de modelos com centro em  $g$  !

## Motivação: Um problema de estabilidade robusta...

Diagrama ilustrativo do problema em questão:



Problema de estabilidade robusta

sendo que  $z = k(w + gz) = (1 - kg)^{-1}kw$

## Motivação: Um problema de estabilidade robusta...

- Se  $\delta$  e o modelo nominal em malha fechada são estáveis, pode-se concluir de um argumento de “ganho pequeno” baseado no critério de Nyquist que a malha fechada perturbada também será estável desde que seja satisfeito:

$$\|\delta\|_{\infty} \|(1 - kg)^{-1}k\|_{\infty} < 1$$

**Condição para satisfazer o problema de robustez ótimo?** um controlador estabilizante  $k$  que minimize  $\|(1 - kg)^{-1}k\|_{\infty}$

## Motivação: Um problema de estabilidade robusta...

Como garantir estabilidade interna? parametrizando em  $q = (1 - kg)^{-1}k$ , como  $g$  não necessariamente é estável...

$$\text{Veja que } \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -g & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + qg & q \\ (1 + qg)g & 1 + qg \end{bmatrix}$$

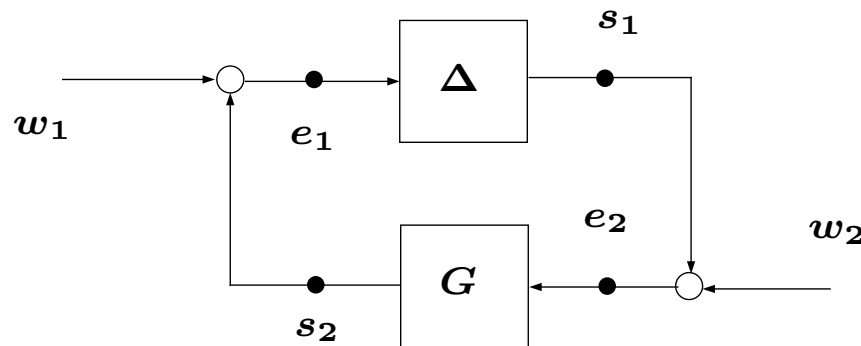
então a planta nominal em malha fechada é estável sse

1.  $q$  é estável
2.  $qg$  é estável
3. e  $(1 + qg)$  é estável

**Nota** Naturalmente se  $g$  é estável basta a condição 1...

## Teorema do Ganho Pequeno

Malha  $G - \Delta$  para análise de estabilidade



**Teorema do Ganho Pequeno** Suponha que  $G \in \mathbb{RH}_\infty$  e considere  $\gamma > 0$ . Então o sistema realimentado acima é internamente estável para todo  $\Delta \in \mathbb{RH}_\infty$  com

1.  $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$  sse  $\|G\|_\infty < \gamma$
2.  $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$  sse  $\|G\|_\infty \leq \gamma$

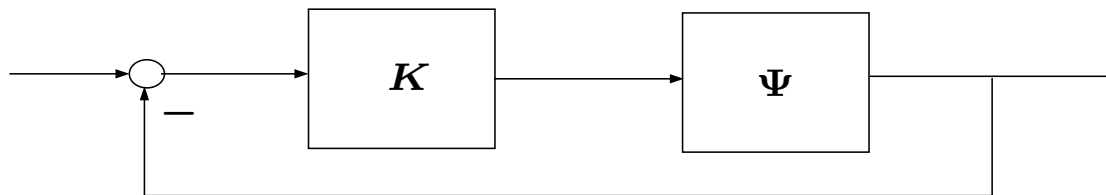
ie,  $e_1, e_2, s_1, s_2 \in \mathcal{L}_2, \forall w_1, w_2 \in \mathcal{L}_2$

## Descrição de Incertezas

Um fundamento da teoria de controle robusto: Modelagem de incertezas

- Incertezas não estruturadas. Considera-se a matriz de perturbação  $\Delta$  “completa”, sem estruturas particulares. Estabilidade?
- Incertezas estruturadas. A matriz de perturbação  $\Delta$  é bloco diagonal, com partições específicas

Modelo geral:



sendo  $\Psi$  o conjunto das plantas incertas...

## Incertezas Não Estruturadas

**Incertezas Aditivas** O modelo do erro é representado por uma perturbação aditiva no modelo nominal  $G$

$$\Psi = \{G + W_1 \Delta W_2\}$$

onde  $W_1$  e  $W_2$  são funções de ponderação em frequência, particularmente úteis para “redimensionar”  $\Delta$

**Teorema** Considere  $\Psi = \{G + W_1 \Delta W_2 \mid \Delta \in \mathbb{RH}_\infty\}$ ,  $\gamma > 0$ , e  $K$  um controlador estabilizante para a planta nominal  $G$ . Então o sistema em malha fechada é internamente estável

$$\forall \|\Delta\|_\infty < \gamma \quad \text{sse} \quad \|W_2 K (I + GK)^{-1} W_1\|_\infty \leq 1/\gamma$$

## Incertezas Não Estruturadas

**Incertezas Multiplicativa** O modelo do erro é representado por uma perturbação multiplicativa no modelo nominal  $G$

$$\Psi = \{(I + W_1 \Delta W_2) G\}$$

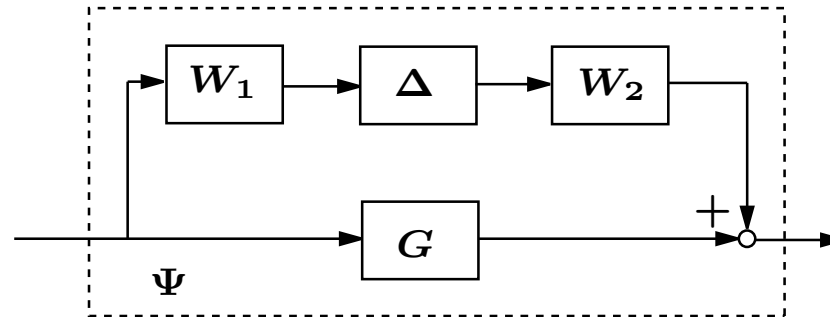
**Teorema** Considere  $\Psi = \{(I + W_1 \Delta W_2) G \mid \Delta \in \mathbb{RH}_\infty\}$ ,  $\gamma > 0$ , e  $K$  um controlador estabilizante para a planta nominal  $G$ . Então o sistema em malha fechada é internamente estável

$$\forall \|\Delta\|_\infty < \gamma \quad \text{sse} \quad \left\| W_2 \left[ I - (I + GK)^{-1} \right] W_1 \right\|_\infty \leq 1/\gamma$$

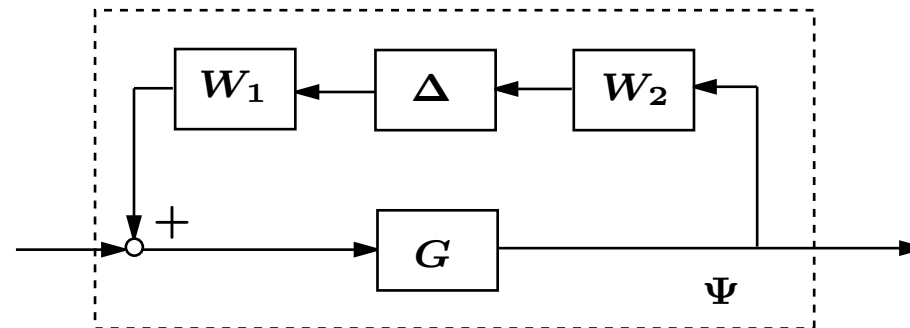
**Nota** há uma série de testes de estabilidade robusta para outros tipos de incertezas não estruturadas, para tanto pode-se consultar o livro do Zhou...



## Incertezas Não Estruturadas: diagrama de blocos

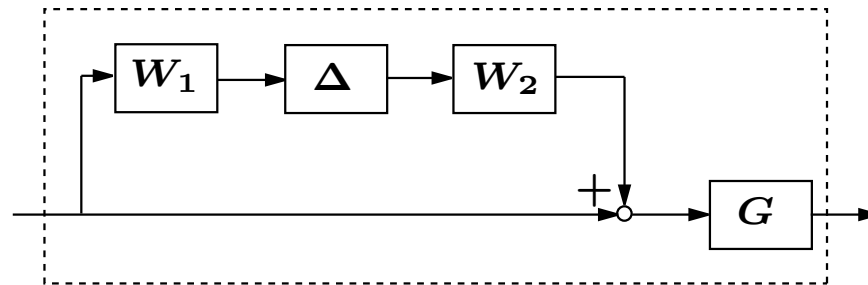


Incerteza aditiva:  $G + W_1 \Delta W_2$

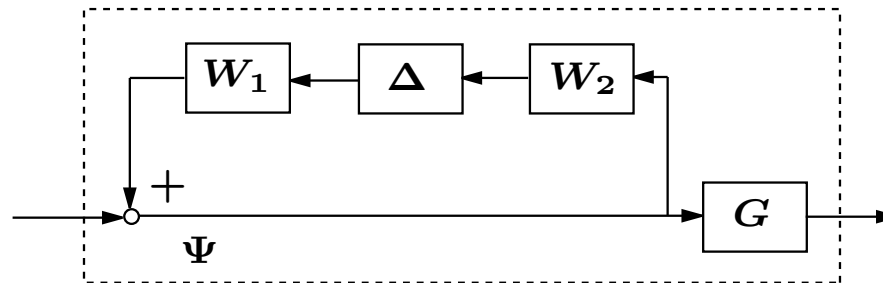


Incerteza aditiva inversa:  $G(I - W_1 \Delta W_2 G)^{-1}$

## Incertezas Não Estruturadas: diagrama de blocos

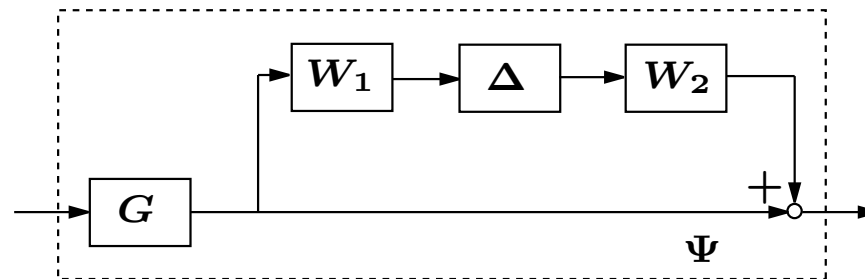


Incerteza multiplicativa na entrada:  $G(I + W_1 \Delta W_2)$

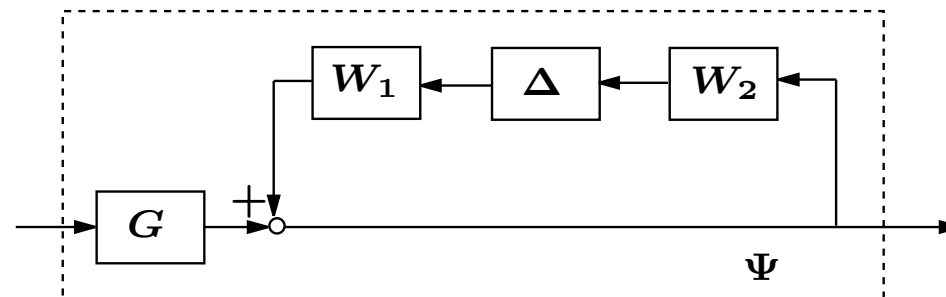


Incerteza multiplicativa inversa na entrada:  $G(I - W_1 \Delta W_2)^{-1}$

## Incertezas Não Estruturadas: diagrama de blocos



Incerteza multiplicativa na saída:  $(I + W_1 \Delta W_2)G$



Incerteza multiplicativa inversa na saída:  $(I - W_1 \Delta W_2)^{-1}G$

## Exemplo

1. Considere a planta incerta descrita da forma

$$G_p(s) = \frac{K}{\tau_p s + 1} ; \quad \tau_{min} \leq \tau_p \leq \tau_{max}$$

escolha  $\tau_p = \bar{\tau}(1 + r_p \Delta)$ , com  $|\Delta| \leq 1$  e

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} ; \quad r_p = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{\tau_{max} + \tau_{min}}$$

Encontre um modelo nominal  $G$  e uma função  $W_1$  que descreva as variações de incertezas

## Exemplo

Veja que substituindo  $\tau_p$

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \frac{K}{\bar{\tau}(1 + r_p \Delta)s + 1} \\ &= \frac{K}{\bar{\tau}s + r_p \Delta s + 1} \quad (\text{evidenciando } (1 + \bar{\tau}s)) \\ &= \frac{K}{1 + \bar{\tau}s} \frac{1}{1 + \frac{r_p \bar{\tau}s}{1 + \bar{\tau}s} \Delta} \\ &= G(s) (1 + W_1(s) \Delta)^{-1} \end{aligned}$$

sendo um descrição de incerteza do tipo multiplicativa inversa na entrada

## Exemplo

2. Considere a família de funções de transferência para a planta com amortecimento desconhecido, porém limitado

$$G_{\xi}(s) = \frac{1}{s^2 + \xi s + 1}, \quad 0.4 \leq \xi \leq 0.8$$

Obtém-se uma descrição completa para a variação de  $\xi$  em torno de 0.6, ie

$$\xi = 0.6 + 0.2\Delta, \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

Substituindo a descrição acima na família de funções de transferência obtém-se

$$G_{\xi}(s) = \frac{1}{s^2 + (0.6 + 0.2\Delta)s + 1}$$

e evidenciando o termo  $(s^2 + 0.6s + 1)$  obtém-se

$$G_{\xi}(s) = \left( \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1} \right) \left/ \left( 1 + \frac{0.2s\Delta}{s^2 + 0.6s + 1} \right) \right.$$

## Exemplo

Definindo-se a função de transferência da planta nominal para o valor  $\xi = 0.6$ :

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}$$

sendo a descrição para a incerteza:

$$|W_1| = |0.2s| \quad \text{e} \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

Desta forma a família de funções de transferência pode ser denotada por:

$$G_\xi(s) = \frac{G}{1 + W_1 \Delta G} = G (1 + W_1 \Delta G)^{-1}$$

estando no formato do tipo incerteza aditiva inversa

## Exemplo

3. Considere a planta incerta associada ao retardo no tempo  $T$ :

$$G_T(s) = G(s) e^{-Ts} \quad \text{com} \quad T_1 \leq T \leq T_2$$

Determine uma função  $W_1$  que descreva as variações de incerteza do retardo no tempo  $T$  na forma de incerteza multiplicativa de entrada:

$$G_T(s) = G(s)(1 + W_1\Delta), \quad |\Delta| \leq 1$$

Veja que do formato de incerteza multiplicativa acima:

$$G_T/G - 1 = W_1\Delta$$

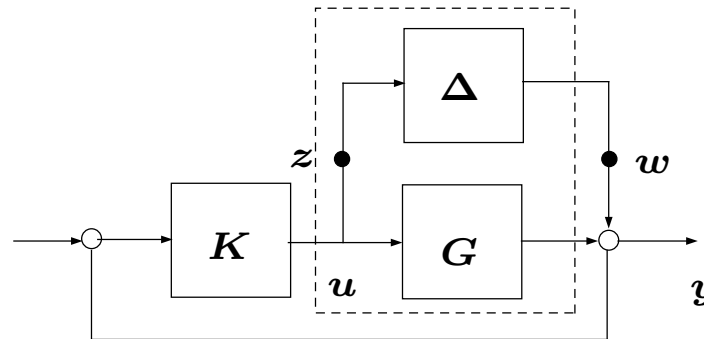
$$|G_T/G - 1| = |W_1|$$

$$\left| (Ge^{-Ts})/G - 1 \right| = |W_1|$$

$$\therefore |W_1| = |e^{-Tj\omega} - 1| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

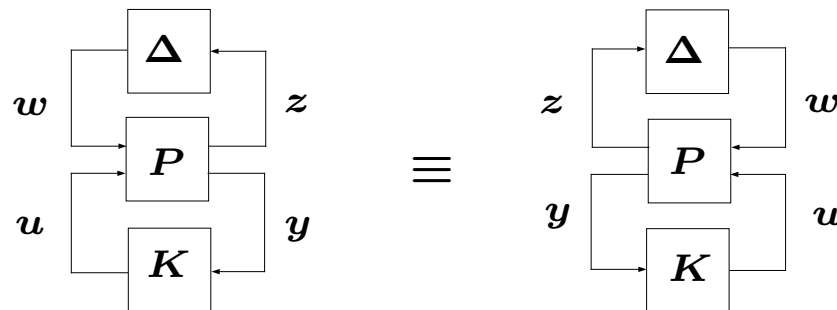


# Incertezas não Estruturadas



Realimentação com Incerteza Aditiva  $\Delta$ , e planta nominal  $G$

Equivalência no formato da planta generalizada?



Planta Generalizada: Quanto vale  $P$ ?

## Incertezas não Estruturadas

Veja que do primeiro diagrama clássico:

$$z = u$$

$$u = Ky$$

$$w = \Delta z$$

$$y = w + Gu$$

$$\therefore \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

sendo  $P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G \end{bmatrix}$

## Incertezas Estruturadas

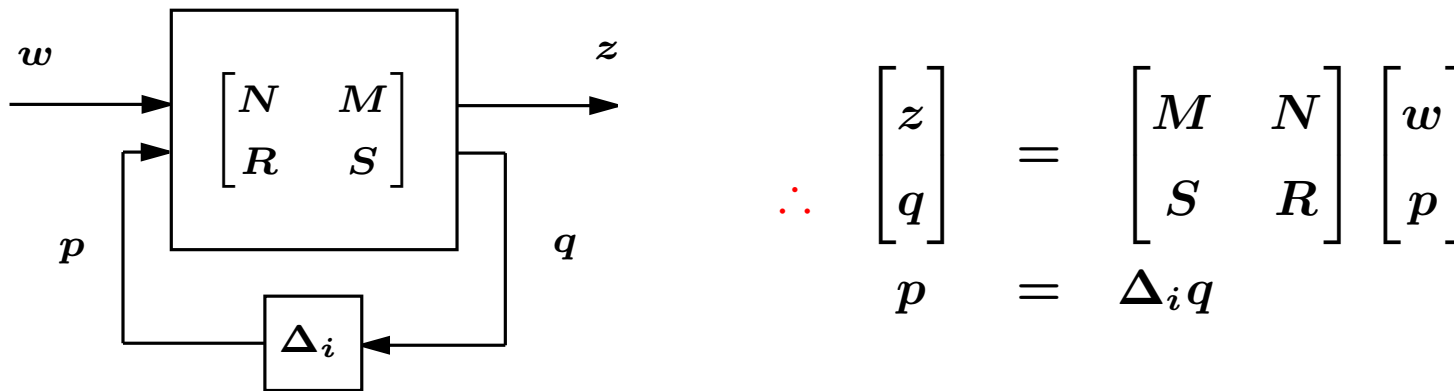
A matriz de incerteza  $\Delta$  é bloco diagonal, ie

$$\Delta = \text{diag}\{\Delta_i\}$$

sendo  $\Delta_i$  um bloco matricial

- Incertezas Lineares Fracionais
- O que dizer sobre a estabilidade do sistema realimentado em malha fechada?

## Incertezas Lineares Fracionais – TLF inferior $\mathcal{F}_i(P, \Delta_i)$

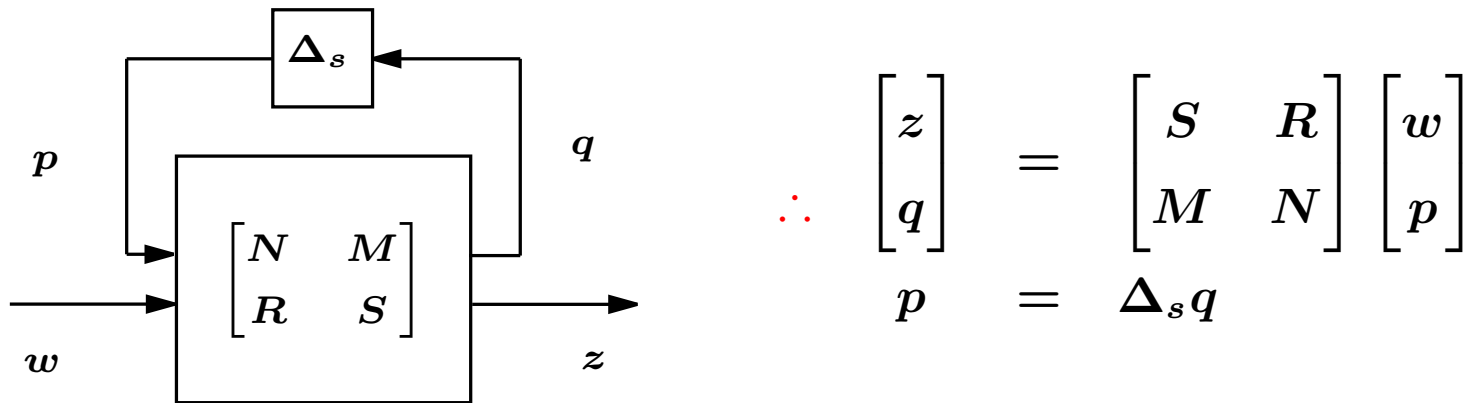


Se  $\exists (\mathbf{I} - R\Delta_i)^{-1}$ , então  $w \mapsto z$  é definido por

$$\mathcal{F}_i(P, \Delta_i) \triangleq M + N\Delta_i (\mathbf{I} - R\Delta_i)^{-1} S$$

veja que  $q = Sw + R\Delta_i q = (\mathbf{I} - R\Delta_i)^{-1} Sw$  e  $z = Mw + N\Delta_i q \dots$

## Incertezas Lineares Fracionais – TLF superior $\mathcal{F}_s(P, \Delta_s)$



Se  $\exists (\mathbf{I} - M\Delta_s)^{-1}$ , então  $w \mapsto z$  é definido por

$$\mathcal{F}_s(P, \Delta_s) \triangleq S + R\Delta_s (\mathbf{I} - N\Delta_s)^{-1} M$$

veja que  $q = N\Delta_s q + Mw = (\mathbf{I} - M\Delta_s)^{-1} Nw$  e  $z = R\Delta_s q + Sw \dots$

## Generalizando a interpretação para $\mathcal{F}_s(P, \Delta_s)$

- $S$  é um mapeamento nominal de  $\mathcal{F}_s(P, \Delta_s)$
- $\Delta$  é uma perturbação em  $\mathcal{F}_s(P, \Delta_s)$
- $R, N, M$  são direções “conhecidas” (TF) de como a perturbação age sobre o mapeamento nominal,  $S$
- A perturbação é gerada por uma **matriz diagonal quadrada**  $n_q \times n_p$ , onde  $n_p = n_q = h_1 + \dots + h_N$

$$\Delta \triangleq \text{diag} \{ \delta_1 \mathbf{I}_{h_1}, \dots, \delta_N \mathbf{I}_{h_N} \}$$

sendo que  $|\delta_i| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ , implicando  $\|\Delta\| \leq 1$

**Nota**  $\Delta$  pode ser “visto” como uma matriz de realimentação. Portanto ao invés de  $\Delta$  pode-se escrever  $K$  e a TLF descreve a planta generalizada

## Outros modelos: Incertezas Limitadas em Norma

Modelo incerto no espaço de estado para a planta generalizada

$$\begin{aligned}\delta[x(t)] &= (A + \Delta A)x(t) + (B_u + \Delta B_u)u(t) + (B_w + \Delta B_w)w(t) \\ y(t) &= (C_y + \Delta C_y)x(t) + (D_{yu} + \Delta D_{yu})u(t) + (D_{yw} + \Delta D_{yw})w(t) \\ z(t) &= (C_z + \Delta C_z)x(t) + (D_{zu} + \Delta D_{zu})u(t) + (D_{zw} + \Delta D_{zw})w(t)\end{aligned}$$

sendo que  $\Delta(\cdot) \triangleq E_{(\cdot)}\Delta F_{(\cdot)}$ , para  $(\cdot) = A, B_u, B_w, C_y, C_z, D_{yu}, D_{yw}, D_{zu}, D_{zw}$

$\Delta$  é uma matriz desconhecida satisfazendo  $\|\Delta\| < 1$

e  $E_{(\cdot)}$  e  $F_{(\cdot)}$  são matrizes conhecidas e indicam as direções de entrada de  $\Delta$

- Conjunto de incertezas  $\mathcal{D}$  é um conjunto limitado em norma:

$$\begin{aligned}(A_\Delta, B_{u\Delta}, \dots, D_{zw\Delta}) \in \mathcal{D} \triangleq \{(\cdot) + E_{(\cdot)}\Delta F_{(\cdot)} \mid \\ \|\Delta\| < 1, \Delta \in \mathbb{C}^{n_\Delta \times n_\Delta}, (\cdot) = A, B_u, B_w, C_y, C_z, D_{yu}, D_{yw}, D_{zu}, D_{zw}\}\end{aligned}$$

## Outros modelos: Incertezas Politópicas

Para o mesmo modelo incerto anterior o conjunto incerto é um politopo:

$$\mathcal{P} \triangleq \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & B_{u1} & B_{w1} \\ C_{y1} & D_{yu1} & D_{yw1} \\ C_{z1} & D_{zu1} & D_{zw1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A_\kappa & B_{u\kappa} & B_{w\kappa} \\ C_{y\kappa} & D_{yu\kappa} & D_{yw\kappa} \\ C_{z\kappa} & D_{zu\kappa} & D_{zw\kappa} \end{bmatrix} \right\}$$

- Interpretação? Qualquer ponto extremo do politopo representa um conjunto particular de matrizes  $(A, B_u, \dots, D_{zw})$ , correspondendo a um modo particular do sistema
- Como mudar de um modo para outro? É arbitrário e pode ser instantâneo...
- Modelo nominal? Ao contrário do caso limitado em norma, não há a necessidade de um modelo nominal



## Exemplo

Como representar o sistema incerto abaixo?

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \alpha - 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}}_{A_{\Delta}} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - \beta \end{bmatrix}}_{B_{u\Delta}} u(t)$$

$$\text{sendo } |\alpha - 0.5| \leq 0.3, \quad |\beta - 0.5| \leq 0.3$$

Suponha que  $\alpha_n = \beta_n = 0.5$  sejam os valores **nominais**

## Exemplo

Conjunto limitado em norma? É completamente definido pelas matrizes

$$A_{\Delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}}_{A_n} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}}_{E_A} \Delta \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F_A}$$

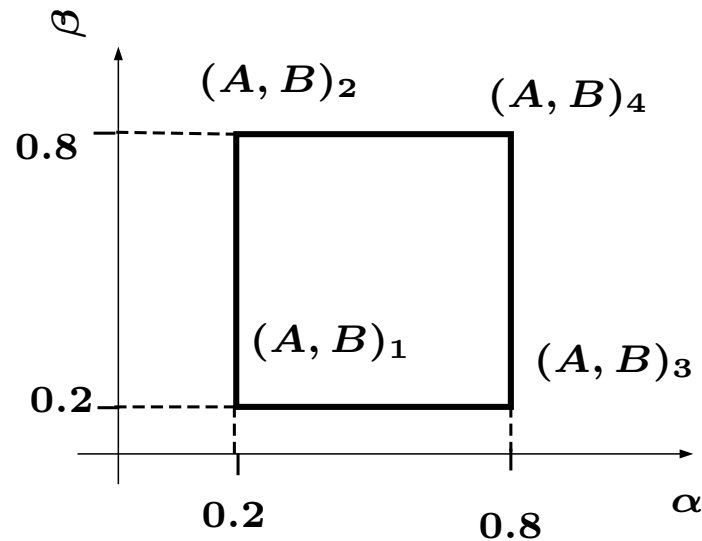
$$B_{u\Delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}}_{A_n} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}}_{E_B} \Delta \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{F_B}$$

e os parâmetros incertos  $\alpha$  e  $\beta$  são representados em  $\Delta$ ,  $\|\Delta\| \leq 1$ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\alpha - 0.5}{0.1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta - 0.5}{0.3} \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \frac{\alpha - 0.5}{0.3} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\beta - 0.5}{0.3} \right| \leq 1$$

## Exemplo

Conjunto politópico? Veja que  $|\alpha - 0.5| \leq 0.3 \therefore 0.2 \leq \alpha \leq 0.8$  (e  $0.2 \leq \beta \leq 0.8$ ).  
Desse modo as matrizes extremas são geradas pelos quatro vértices do retângulo:



Isto é,  $\kappa = 4$ , ou  $\kappa = 2^n$ ,  $n$  = número de combinações de  $\alpha$  e  $\beta$

## Exemplo

Politopo:

$$\mathcal{P} = \text{co} \left\{ \left( \begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix} \right); \left( \begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right); \dots \right. \\ \left. \left( \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix} \right); \left( \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

- Não há a necessidade de um modelo nominal...

## Equações Algébricas de Riccati

Define-se a matriz Hamiltoniana  $2n \times 2n$ , com  $\lambda(M) \neq j\omega$

$$M \triangleq \begin{bmatrix} A & -BB^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix}, \quad \text{sendo } A, BB^T, C^T C \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Definem-se os subespaços  $\mathcal{X}_-(M)$  (correspondente a  $\Re(\lambda(M)) < 0$ ) e  $\mathcal{X}_+(M)$  (correspondente a  $\Re(\lambda(M)) > 0$ )

- Como construí-los? Gera-se uma base  $M_B$  formada pelos autovetores de  $M$

$$M_B = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{bmatrix}$$

onde  $[X_1 \ X_2]^T$  corresponde aos autovetores associados a  $\Re(\lambda(M)) < 0$ , e  $[X_3 \ X_4]^T$  corresponde aos autovetores associados a  $\Re(\lambda(M)) > 0$

## Equações Algébricas de Riccati

então  $\mathcal{X}_-(M) = \mathfrak{S} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{X}_+(M) = \mathfrak{S} \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$

- Definem-se  $X \triangleq X_2 X_1^{-1}$  (se  $\exists X_1^{-1}$  !!)

$$\text{Ric} : \text{dom}(\text{Ric}) \mapsto X \quad \Rightarrow \quad X = \text{Ric}(M)$$

$$\text{dom}(\text{Ric}) \triangleq \left\{ M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid \lambda(M) \neq j\omega \right\}$$

**Lema**  $M \in \text{dom}(\text{Ric})$  e  $X = \text{Ric}(M)$ . Então

- $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $X$  satisfaz:  $R(X) = A^T X + X A - X B B^T X + C^T C = 0$
- $A - B B^T X$  é estável

## Equações Algébricas de Riccati

**Nota**  $M \in \text{dom}(\text{Ric})$  sse  $(A, B)$  é estabilizável e  $(A, C)$  é detectável

**Lema**  $(A, B)$  estabilizável e  $(A, C)$  detectável. Então a equação de Riccati,  $R(X) = 0$ , tem uma **única solução**  $X = X^T \succeq 0$ , e  $A - BB^T X$  é estável

● Definem-se os conjuntos

$$R_{=} \triangleq \left\{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T, R(X) = 0 \right\}$$

$$R_{\preceq} \triangleq \left\{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T, R(X) \preceq 0 \right\}$$

**Teorema** Considere  $BB^T \succeq 0$ . Se  $R_{\preceq} \neq \emptyset$ , então  $\exists X_+ \in R_{=}$  tal que

$$X_+ \succeq X \quad \forall X \in R_{\preceq}$$

$X_+$  é chamada de solução maximal de  $R(X) = 0$ , é única e  $A - BB^T X_+$  é estável

## Desigualdades Matriciais Lineares – LMIs

Revisitando as LMIs (Linear Matrix Inequality) Forma canônica

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i \succeq \mathbf{0}$$

sendo  $x$  um vetor de  $n$  variáveis de decisão e as matrizes  $A_i = A_i^T$  são dadas (Simetria é necessária)

- As LMIs são restrições convexas em  $x$ , ie  $\{x \mid A(x) \succeq \mathbf{0}\}$  é convexo (veja bloco 2)

Problema de Otimização LMI Minimizar  $c^T x$  sujeito a

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \preceq \mathbf{0}$$



# Desigualdades Matriciais Lineares – LMIs

## Exemplos simples de LMIs

- Restrições lineares típicas ( $Ax \leq b$ )

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$A(x) \succeq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \text{diag}\{b_i - a_i^T x\}$$

- O caso escalar

$$y \geq x \quad \Rightarrow \quad A(x) = y - x \geq 0$$

- Estudo do sinal de uma matriz com elementos lineares

$$P \succ \mathbf{0}$$

sendo  $P = P^T$

## Complemento de Schur

Se estiver em dificuldades para obter LMIs... **A receita é o complemento de Schur**, que transforma desigualdades não-lineares (porém convexas) em LMIs

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{array}{l} P_{22} \succ 0 \\ P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T \succ 0 \end{array}$$

ou

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{array}{l} P_{11} \succ 0 \\ P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12} \succ 0 \end{array}$$

- Inicialmente proposto para o estudo de sinais de Matrizes ...

## Aplicando o Complemento de Schur ...

- Restrições quadráticas,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , e  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$(x^T - \tilde{x}^T)Q^{-1}(x - \tilde{x}) \leq q \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} q & (x^T - \tilde{x}^T) \\ (x - \tilde{x}) & Q \end{bmatrix} \preceq 0$$

- Desigualdade de Riccati “modificada”

$$AX + XA^T - BB^T + XC^T CX \preceq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} AX + XA^T - BB^T & XC^T \\ CX & -I \end{bmatrix} \preceq 0$$

linear na “variável” matricial  $X$

## Aplicando o Complemento de Schur ...

- Grammianos de Controlabilidade contínuo e discreto com desigualdade

$$AL_c + L_c A^T + BB^T \preceq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{já é uma LMI !!}$$

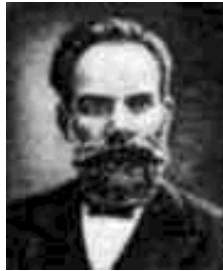
$$AL_c A^T - L_c + BB^T \preceq 0$$

também é uma LMI, porém aplicar Schur é bastante interessante ...

$$AL_c L_c^{-1} L_c A^T - L_c + BB^T \preceq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} L_c & AL_c & B \\ L_c A^T & L_c & 0 \\ B^T & 0 & I \end{bmatrix} \preceq 0$$

## Teorema de Lyapunov

Em 1899, Lyapunov apresentou uma forma de determinar a estabilidade de um conjunto de equações diferenciais ordinárias utilizando desigualdades matriciais lineares (certamente esta foi a primeira LMI que se tem notícia...)



Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

**Teorema de Lyapunov** Considere o sistema  $\delta[x(t)] = Ax(t)$ . O sistema é assintoticamente estável ( $x(t) \equiv \mathbf{0}$  é o estado de equilíbrio) sse  $\exists P = P^T \succ \mathbf{0}$ :

1.  $A^T P + PA \prec \mathbf{0}$  (caso a tempo contínuo)
2.  $A^T P A - P \prec \mathbf{0}$  (caso a tempo discreto)

## Teorema de Lyapunov

**Demonstração** 1. (Linhas gerais) Escolha uma função de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0, \quad \text{ie } P \succ 0$$

Derivando em relação as trajetórias  $x(t)$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= (Ax(t))^T Px(t) + x^T(t)P(Ax(t)) \\ &= x^T(t)(A^T P + PA)x(t)\end{aligned}$$

Como  $V(x(t)) > 0$ , para estabilidade assintótica  $\dot{V}(x(t)) < 0$ , então

$$A^T P + PA \prec 0$$

## Teorema de Lyapunov

**Demonstração** 2. (Linhas gerais) Escolha uma função de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0, \quad \text{ie } P \succ 0$$

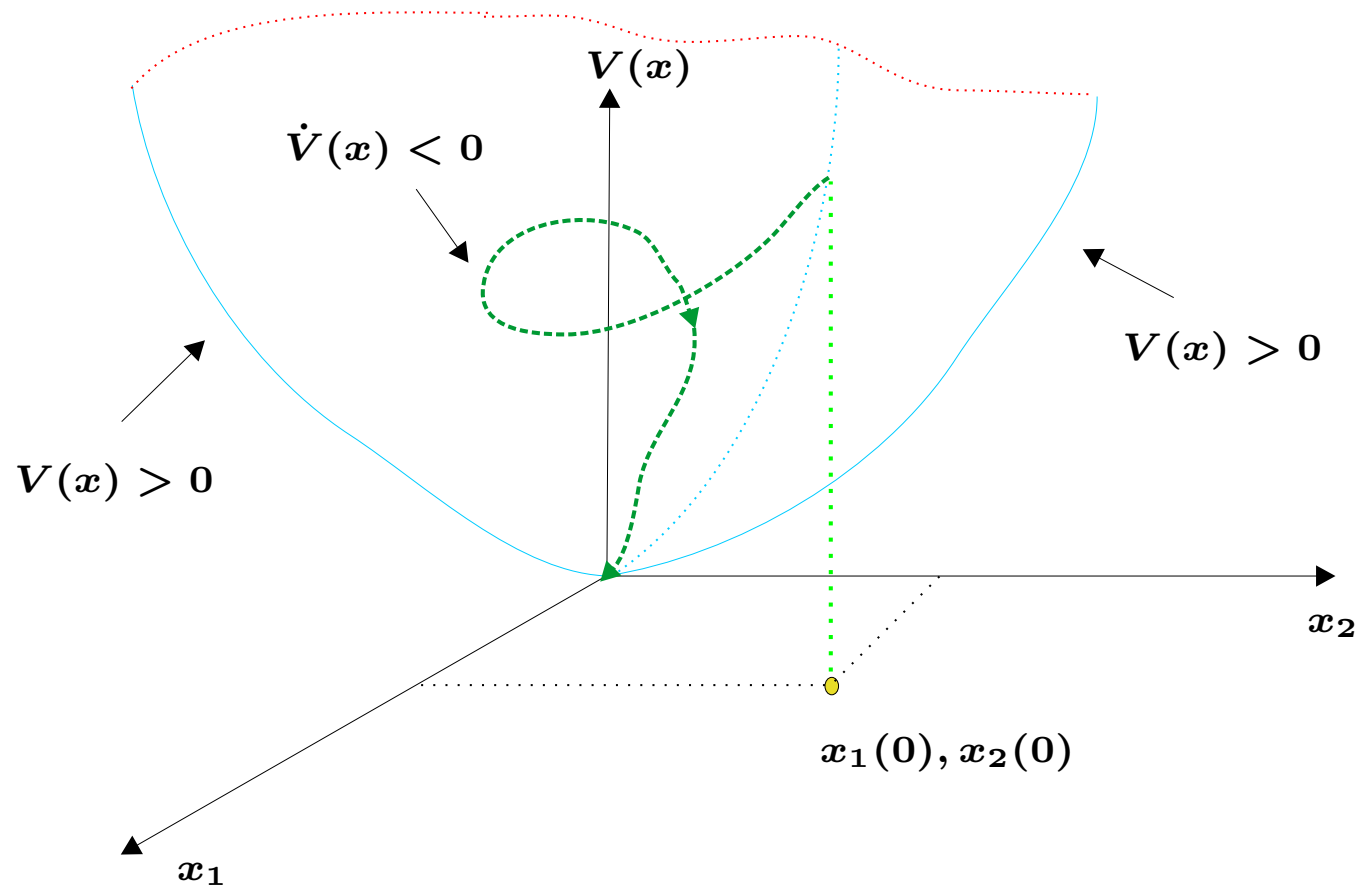
então tomando-se a **diferença** ao longo das trajetórias  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= V(x(t+1)) - V(x(t)) \\ &= x^T(t+1)Px(t+1) - x^T(t)Px(t) \\ &= x(t)^T A^T P A x(t) + x^T(t)Px(t) \\ &= x^T(t)(A^T P A - P)x(t) \end{aligned}$$

Como  $V(x(t)) > 0$ , para estabilidade assintótica  $\Delta V(x(t)) < 0$ , então

$$A^T P A - P \prec 0$$

# Interpretação Geométrica do Teorema de Lyapunov





## Estudo de Estabilidade Usando LMIs

O estudo de estabilidade usando LMI advém da [desigualdade matricial de Lyapunov](#) ...

$$F(x) = A^T P + P A \prec 0$$

Para verificar se o sistema autônomo é assintoticamente estável, é necessário e suficiente verificar se as LMIs abaixo são **factíveis**

$$\begin{cases} A^T P + P A \prec 0 \\ P \succ 0 \end{cases}$$

com  $P = P^T$

- O mesmo vale para um sistema autônomo discreto ...

## Estudo de Estabilidade Usando LMIs

**Exemplo** Estude a estabilidade dos sistemas descritos por

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -9 & -3 & -2 \end{bmatrix} x(t) \quad \text{e} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -9 & -3 & -2 \end{bmatrix} x(t)$$

utilizando as LMIs

**Solução** utilizar programação... Neste exemplo



## Estudo de Estabilidade Usando LMIs

Script para solucionar a desigualdade de Lyapunov: `estabilidade.m`

```
function [P]=estabilidade(A)
% Exemplo de estudo de estabilidade usando LMIs
% matriz "A" atribuída na entrada da função

setlmis([]);           % início da montagem das LMIs

P=lmivar(1,[size(A,2) 1]); % P=P' - variável matricial nxn

                        % Forma padrão no LMILab => LMI < 0 (definida negativa)

lmiterm([1 1 1 P],1,A,'s'); % LMI #1: PA+A'P<0 => 's' de simetria (bloco 1,1)
lmiterm([-2 1 1 P],1,1);   % LMI #2: P>0 (bloco 1,1)

lmis=getlmis;          % "juntando" as LMIs #1 e #2

[tmin,xfeasp]=feasp(lmis); % Teste de factibilidade da LMIs.
                        % Se tmin<0 a LMI é factível.
```

## Estudo de Estabilidade Usando LMIs

```
if tmin < 0
    P=dec2mat(lmis,xfeasp,P);    % "Remonta" a variável matricial P
                                % a partir das variáveis de decisão
                                % armazenadas em "xfeasp"

    disp('Sistema estável');
    disp('P='), disp(P)
    disp('Autovalores de P')
    disp(eig(P))
    disp('Autovalores de A')
    disp(eig(A))
else
    disp('Sistema instável')
end
```

▷ Resultado esperado? Verifique ...

## Estudo de Estabilidade Usando LMIs

► Utilizando a função `lyap` no MATLAB é possível verificar a estabilidade de um sistema autônomo também. Na prática o teste de estabilidade é o mesmo, porém `lyap` utiliza uma **equação de Lyapunov**:  $\exists P = P^T \succ 0$  tal que

$$AP + PA^T = -I \quad (\text{Naturalmente garante } AP + PA^T \prec 0)$$

**Exercício Computacional** Escreva uma função para o problema de otimização abaixo e compare o resultado com a função `lyap` considerando o **primeiro** exemplo da página 58

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{P=P^T} & \text{Tr}\{P\} \\ \text{sujeito a} & P \succ 0 \\ & AP + PA^T \prec -I \end{array} \right.$$

Por que os resultados são iguais?

## Lema de Finsler

Para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $\text{posto}(B) < n$ ). As afirmações a seguir são equivalentes

1.  $x^T P x < 0, \quad \forall x \neq 0 : Bx = 0$
2.  $B^{\perp T} P B^{\perp} \prec 0$ , onde  $B B^{\perp} = 0$
3.  $\exists \mu \in \mathbb{R} : P - \mu B^T B \prec 0$
4.  $\exists G \in \mathbb{R}^{n \times m} : P + G B + B^T G^T \prec 0$

Bastante útil para “desacoplar” variáveis matriciais... É um caso de versão especializada do Lema da Eliminação ou Projetivo a seguir

**Referência** M. C. de Oliveira and R. E. Skelton, “On stability tests for linear systems”. *In the proceedings of the 15th Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.

## Lema Projetivo

Para  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dados. As afirmações a seguir são equivalentes

1.  $\exists X \in \mathbb{R}^{m \times q}$  satisfaz

$$BXC + (BXC)^T + P \prec 0$$

2. As seguintes condições são verificadas

$$\begin{aligned} B^\perp P B^{\perp T} &\prec 0 \\ C^{T\perp} P C^{T\perp T} &\prec 0 \end{aligned}$$

ie  $X$  é eliminado

## Estabilidade Quadrática

**Definição** Um sistema dinâmico incerto

$$\delta[x(t)] = Ax(t), \quad A \in \mathcal{P} \triangleq \left\{ A \mid A = \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i A_i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i = 1 \right\}$$

é dito ser **quadraticamente estável**

1. **se** para sistemas a tempo contínuo

$$\exists P = P^T \succ 0 : A^T P + P A \prec 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}$$

2. **se** para sistemas a tempo discreto

$$\exists P = P^T \succ 0 : A^T P A - P \prec 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}$$



## Estabilidade Quadrática

Para o caso 1, a estabilidade quadrática é verificada se para a mesma matriz de Lyapunov  $P$ :

$$\exists P = P^T \succ 0 : \begin{cases} A_1^T P + P A_1 \prec 0 \\ A_2^T P + P A_2 \prec 0 \\ \vdots \\ A_\kappa^T P + P A_\kappa \prec 0 \end{cases}$$

Para o caso 2, a estabilidade quadrática é verificada se para a mesma matriz de Lyapunov  $P$ :

$$\exists P = P^T \succ 0 : \begin{cases} A_1^T P A_1 - P \prec 0 \\ A_2^T P A_2 - P \prec 0 \\ \vdots \\ A_\kappa^T P A_\kappa - P \prec 0 \end{cases}$$

## Estabilizabilidade Quadrática

**Definição** Um sistema dinâmico incerto

$$\delta[x(t)] = Ax(t) + B_u u(t)$$

$$(A, B_u) \in \mathcal{P} \triangleq \left\{ (A, B_u) \mid (A, B_u) = \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i (A_i, B_{ui}), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i = 1 \right\}$$

é dito ser **quadraticamente estabilizável** por realimentação de estados,  $u(t) = Kx(t)$

1. **se** para sistemas a tempo contínuo

$$\exists P = P^T \succ 0 : (A + B_u K)^T P + P(A + B_u K) \prec 0 \quad \forall (A, B_u) \in \mathcal{P}$$

2. **se** para sistemas a tempo discreto

$$\exists P = P^T \succ 0 : (A + B_u K)^T P(A + B_u K) - P \prec 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}$$

particularmente  $K \in \{K \mid A + B_u K \text{ é assintoticamente estável}\}$

## Como obter $K$ ?

Vamos considerar sistemas a tempo discreto (o caso contínuo é trivial),

$$(A_i + B_{ui}K)^T P (A_i + B_{ui}K) - P \prec 0 \quad \forall i = 1, \dots, \kappa$$

$\Leftrightarrow$  por Schur...

$$\begin{bmatrix} P & (A_i + B_{ui}K)^T \\ A_i + B_{ui}K & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0 \quad \forall i = 1, \dots, \kappa$$

Pré- e pós-multiplicando pela transformação de similaridade  $\text{diag}\{P^{-1}, I\}$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & (A_i + B_{ui}K)^T \\ A_i + B_{ui}K & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \succ 0$$

## Como obter $K$ ?

$$\text{ie } \begin{bmatrix} P^{-1} P P^{-1} & P^{-1} (A_i + B_{ui} K)^T \\ (A_i + B_{ui} K) P^{-1} & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0$$

fazendo duas mudanças de variáveis **linearizantes**

$$Y \triangleq P^{-1} \quad \text{e} \quad Z \triangleq K P^{-1} = K Y$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Y & Y A_i^T + Z^T B_{ui}^T \\ A_i Y + B_{ui} Z & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad \forall i = 1, \dots, \kappa$$

sendo  $K = Z Y^{-1}$  (ie, independente das matrizes incertas  $A$  e  $B_u$  !!)

- Basta resolver um problema de factibilidade nas variáveis matricias  $Y$  e  $Z$ , nos vértices  $i = 1, \dots, \kappa$

## Exercício

**Exercício Computacional** Considere o sistema a tempo discreto dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t) \end{array} \right.$$

Considere dois casos para a variação dos parâmetros incertos do modelo:

**Caso a** –  $0.7 \leq \alpha \leq 1$  e  $1 \leq \beta \leq 2$

**Caso b** –  $0.5 \leq \alpha \leq 1$  e  $0.5 \leq \beta \leq 8$

**Nota** O modelo incerto é instável para combinações em malha aberta...

**Objetivo** Encontre ganhos de realimentação  $K$  que estabilize quadraticamente o sistema incerto em malha fechada para os dois casos (Detalhe: Verifique se a estabilidade é garantida, e.g., nos vértices)

## Relaxando a estabilidade quadrática ...

- Veja que para estabilidade quadrática foi imposto a mesma matriz de Lyapunov  $P$  para garantir estabilidade para todo o sistema incerto
- Não é difícil supor que algum **conservativismo** está sendo introduzido quando se analisa estabilidade para uma mesma matriz de Lyapunov
- Há resultados alternativos que relaxam a análise, possibilitando lidar com “múltiplas” funções de Lyapunov



Como isso é possível?



Eliminando a dependência explícita da matriz de Lyapunov com a variável de controle !!  
le, a matriz de Lyapunov está "livre" e o ganho do controlador não depende da(s)  
matriz(es) de Lyapunov

## Condições Relaxadas para Estabilidade

A. Considerando sistemas a tempo contínuo

**Lema Projetivo Recíproco** Considere  $P = P^T \succ 0$  uma matriz dada. As seguintes afirmações são equivalentes

1.  $\Psi + S + S^T \prec 0$
2. a LMI abaixo é factível em relação a  $W$

$$\begin{bmatrix} \Psi + P - (W + W^T) & S^T + W^T \\ S + W & -P \end{bmatrix} \prec 0$$

**Referência** P. Apkarian, H. D. Tuan and J. Bernussou, “Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and  $\mathcal{H}_2$  synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46(12)**, pp. 1941–1946, 2001.

## Condições Relaxadas para Estabilidade

Dica para Demonstração? (2)  $\Rightarrow$  (1). Considere a transformação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi + P - (W + W^T) & S^T + W^T \\ S + W & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \Rightarrow \Psi + S + S^T \prec \mathbf{0}$$

(1)  $\Rightarrow$  (2). Quer tentar?



## Condições Relaxadas para Estabilidade – Contínuo

**Teorema** As afirmações abaixo são equivalentes

1. para  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ,  $A$  é estável
2.  $\exists X = X^T \succ 0 : A^T X + XA \prec 0$
3.  $\exists X = X^T$  e  $V$  tal que

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) & V^T A + X & V^T \\ A^T V + X & -X & 0 \\ V & 0 & -X \end{bmatrix} \prec 0$$

4. **Dual:**  $\exists X = X^T$  e  $V$  tal que

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) & V^T A^T + X & V^T \\ AV + X & -X & 0 \\ V & 0 & -X \end{bmatrix} \prec 0$$

## Condições Relaxadas para Estabilidade – Contínuo

A equivalência dos itens (2) e (3) é fruto da aplicação direta do **Lema Projetivo Recíproco**, ie para

$$AY + YA^T \prec 0, \quad \text{onde } Y \triangleq X^{-1}$$
$$\Updownarrow \text{ com } \Psi \triangleq 0 \text{ e } S^T = AY$$

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) + P & AY + W^T \\ YA^T + W & -P \end{bmatrix} \prec 0$$

pré- e pós-multiplicando por  $\text{diag}\{I, Y^{-1}\}$  com  $X \triangleq Y^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) + P & A + W^T X \\ A^T + XW & -XPX \end{bmatrix} \prec 0$$

## Condições Relaxadas para Estabilidade – Contínuo

pré- e pós-multiplicando por  $\text{diag}\{W^{-T}, I\}$  e  $\text{diag}\{W^{-1}, I\}$  com  $V \triangleq W^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) + V^T P V & V^T A + X \\ A^T V + X & -X P X \end{bmatrix} \prec 0$$

⇕ aplicando Schur em  $V^T P V \dots$

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) & V^T A + X & V^T \\ A^T V + X & -X P X & 0 \\ V & 0 & -P^{-1} \end{bmatrix} \prec 0$$

usando a **mudança de variável linearizante**  $P \triangleq X^{-1}$ , obtém-se o resultado. Porém, algum **conservativismo** também é introduzido ... a forma dual é obtida fazendo  $A \rightarrow A^T$

- Onde está o segredo? A matriz de Lyapunov  $X$  “está livre”, ie não faz parte do produto cartesiano com a matriz do sistema,  $A$  !!

## Controle ? – Contínuo

Para estabilização com realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$ , basta manipular a LMI em (4) (forma dual), para o sistema em malha fechada  $(A + B_u K)$ , com a mudança de variável

$$Z \triangleq KV \quad \Rightarrow \quad K = ZV^{-1}$$

para o sistema incerto com  $(A, B_u) \in \mathcal{P}$  basta resolver o problema de factibilidade

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) & V^T A_i^T + Z^T B_{ui}^T + X_i & V^T \\ A_i V + B_{ui} Z + X_i & -X_i & 0 \\ V & 0 & -X_i \end{bmatrix} \prec 0 \quad \forall i = 1, \dots, \kappa$$

tal que  $K = ZV^{-1}$

- $K$  é única. Porém há  $i$  variáveis matriciais de Lyapunov,  $X_i$  ! Grau de liberdade com  $V$  fazendo o papel da Lyapunov na construção do controlador  $K$

## Condições Relaxadas para Estabilidade

B. Considerando sistemas a tempo discreto

**Teorema** As afirmações abaixo são equivalentes

1. para  $x(t+1) = Ax(t)$ ,  $A$  é estável

2.  $\exists X = X^T \succ 0 : A^T X A - X \prec 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & A^T X \\ X A & X \end{bmatrix} \succ 0$

3.  $\exists X = X^T$  e  $V$  tal que

$$\begin{bmatrix} X & A^T V^T \\ V A & V + V^T - X \end{bmatrix} \succ 0$$

● Novamente a matriz de Lyapunov  $X$  está livre ...

## Condições Relaxadas para Estabilidade – Discreto

(2)  $\Rightarrow$  (3). Pré- e pós-multiplicando a desigualdade de Lyapunov da forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}\mathbf{X}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{A}^T \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\mathbf{A} & -\mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}^{-1} \mathbf{V}^T \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

onde  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T = \mathbf{X}$  (mantendo a similaridade!), obtém-se

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{A}^T \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V}\mathbf{A} & -\mathbf{V}\mathbf{X}^{-1} \mathbf{V}^T \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

## Condições Relaxadas para Estabilidade – Discreto

como qualquer matriz  $RQR^T \succeq 0$ , com  $Q \succ 0$ , então particularmente, para  $X \succ 0$

$$\begin{aligned}
 (X - V)X^{-1}(X - V)^T &\succeq 0 \\
 XX^{-1}X - XX^{-1}V^T - VX^{-1}X + VX^{-1}V^T &\succeq 0 \\
 -VX^{-1}V^T &\succeq -(V^T + V - X)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} X & A^T V^T \\ V A & V^T + V - X \end{bmatrix} \succ 0$$

## Condições Relaxadas para Estabilidade – Discreto

(3)  $\Rightarrow$  (2)

Pré- e pós-multiplicando a desigualdade em (3) por  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{A}^T \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} \mathbf{A} & \mathbf{V}^T + \mathbf{V} - \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$$



$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{A} - \mathbf{X} \prec \mathbf{0}$$



## Condições Relaxadas para Estabilidade – Discreto

**Reformulação geral**  $A$  é estável sse existe  $X$  e  $V$  com

$$\begin{bmatrix} -X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T \\ -I \end{bmatrix} V^T \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \prec 0$$



Ou em um modelo geral:  $P + VB + B^T V \prec 0$

## Condições Relaxadas para Estabilidade – Discreto

- Veja que da condição de estabilidade de  $x(t+1) = Ax(t)$  com  $V(x(t)) = x^T(t)Xx(t) \succ 0$ , obtém-se

$$\Delta V(x(t)) = x^T(t+1)Xx(t+1) - x^T(t)Xx(t) \prec 0$$

$$\therefore \Delta V(x(t)) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\text{e } x(t+1) = Ax(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix} = 0$$

atribuindo-se **no item 4 do Lema de Finsler**

$$x \leftarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \end{bmatrix}, \quad P \leftarrow \begin{bmatrix} -X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}, \quad B^T \leftarrow \begin{bmatrix} A^T \\ -I \end{bmatrix}, \quad G \leftarrow \begin{bmatrix} F \\ V \end{bmatrix}, \quad B^\perp \leftarrow \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}$$

para  $F = 0$  obtém-se as condições (2) e (3) anteriores... [Quer tentar?](#)

## Controle ? – Discreto

Tomando a forma dual da LMI em (3), considerando o sistema em malha fechada  $(A + B_u K)$  e a mudança de variável

$$Z \triangleq KV \quad \Rightarrow \quad K = ZV^{-1}$$

para o sistema incerto com  $(A, B_u) \in \mathcal{P}$  basta resolver o problema de factibilidade

$$\begin{bmatrix} X_i & A_i V + B_{ui} Z \\ V^T A_i^T + Z^T B_{ui}^T & V^T + V - X_i \end{bmatrix} \succ 0 \quad \forall i = 1, \dots, \kappa$$

tal que  $K = ZV^{-1}$

## Bounded Real Lema – Contínuo

$\gamma > 0$  dado e  $(A, B, C, D)$  realização de  $G(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ . Então equivalem-se

1.  $\|G\|_\infty \leq \gamma$
2.  $\sigma_{max}(D) < \gamma$  e  $\lambda(M_\gamma) \neq j\omega$ . Sendo  $(R \triangleq \gamma^2 I - D^T D)$

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^T C & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^T C)^T \end{bmatrix}$$

3.  $\sigma_{max}(D) < \gamma$ ,  $M_\gamma \in \text{dom}(\text{Ric})$  e  $P = \text{Ric}(M_\gamma) \succ 0$  satisfaz

$$A^T P + PA + C^T C + (PB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(PB + C^T D)^T = 0$$

4.  $\exists P = P^T \succ 0$  satisfazendo  $\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} \prec 0$

## Bounded Real Lema – Contínuo

Linhas gerais do que seria uma “demonstração”

- (1)  $\Leftrightarrow$  (2) Direto do fato que  $\|G\|_\infty \leq \gamma$  sse  $M_\gamma$  **não tem autovalores (puramente) imaginários**
- (2)  $\Leftrightarrow$  (3) A equação de Riccati está associada com a matriz Hamiltoniana  $M_\gamma$ . Portanto para  $P \succ \mathbf{0}$  é necessário que  $\lambda(M_\gamma) \neq j\omega$ , com  $(A, B)$  estabilizável e  $(A, C)$  detectável...

## Bounded Real Lema – Contínuo

(3)  $\Leftrightarrow$  (4) “facilmente” demonstrado utilizando o complemento de Schur

$$A^T P + PA + C^T C + (PB + C^T D)(\gamma^2 \mathbf{I} - D^T D)^{-1} (PB + C^T D)^T \preceq 0$$

$\Updownarrow$  (Schur...)

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & (PB + C^T D) \\ (PB + C^T D)^T & -(\gamma^2 \mathbf{I} - D^T D) \end{bmatrix} \prec 0$$

||

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ PB^T & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \mathbf{I} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \prec 0$$

$\Updownarrow$  (Schur...)

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 \mathbf{I} & D^T \\ C & D & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

## Bounded Real Lema – Contínuo

(4)  $\Leftrightarrow$  (1). Selecione uma função de Lyapunov:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0, \quad \text{ie } P \succ 0$$

Tomando a derivada ao longo das trajetórias  $x(t)$  para entrada nula ( $w \equiv 0$ )

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= 2\dot{x}^T(t)Px(t) \\ &= x^T(t) \left( A^T P + P A^T \right) x(t)\end{aligned}$$

para estabilidade assintótica,  $\dot{V}(x(t)) < 0$ , o que é atendido no bloco (1,1) da LMI no item 4

## Bounded Real Lema – Contínuo

O quesito estabilidade está atendido! O que dizer a respeito do critério de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ ?

Como  $G(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ , veja que se pode considerar o ganho induzido  $\mathcal{L}_2$ , do sinal de entrada  $w(t) \in \mathcal{L}_2$  para a saída  $z(t) \in \mathcal{L}_2$  (que equivale a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência  $G(s$ )). Logo

$$\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2$$

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt$$

$$\int_0^\infty \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \right\} dt < 0$$



## Bounded Real Lema – Contínuo

Defini-se o índice de desempenho  $\mathcal{I}_\infty$

$$\mathcal{I}_\infty \triangleq \int_0^\infty \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \right\}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\infty &= \int_0^\infty \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(x(t)) - \dot{V}(x(t)) \right\} dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(x(t)) \right\} dt \\ &\quad + V(x(t)) \Big|_{t=0} - V(x(t)) \Big|_{t \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

como  $G(s) \in \mathbb{RH}_\infty$  e supondo **condições iniciais nulas**:

$$V(x(t)) \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad V(x(t)) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

## Bounded Real Lema – Contínuo

- Note que  $G : w \mapsto z$  e  $G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$

$$\therefore z(t) = Cx(t) + Dw(t)$$

Logo utilizando a função de Lyapunov para entrada não-nula  $w$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\infty = & \int_0^\infty \left\{ x^T(t) (A^T P + PA + C^T C) x(t) \right. \\ & + 2w^T(t) (B^T P + D^T C) x(t) \\ & \left. - w^T(t) (\gamma^2 I - D^T D) w(t) \right\} dt \end{aligned}$$

## Bounded Real Lema – Contínuo

Definindo-se  $\eta(t) \triangleq \begin{bmatrix} x^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix}^T$

$$\mathcal{I}_\infty = \int_0^\infty \eta^T(t) \underbrace{\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + CD \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 I + D^T D \end{bmatrix}}_{\Psi} \eta(t) dt$$

para atender ao índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , **necessariamente**,  $\mathcal{I}_\infty < 0$ , ie  $\Psi \prec 0$ .

- Aplicando Schur em  $\Psi \prec 0$  obtém-se a LMI no item 4! Portanto, se o item 4 é satisfeito, **garante-se**  $\|G\|_\infty < \gamma$  ...

**Nota:** Por outro lado,  $\Psi$  também é equivalente a (**desigualdade**) de Riccati no item 3 quando se aplica Schur, portanto vale também **(3)  $\Leftrightarrow$  (1)**

## Bounded Real Lema – Discreto

$\gamma > 0$  dado e  $(A, B, C, D)$  realização de  $G(z) \in \mathbb{RH}_\infty$ . Então equivalem-se

1.  $\|G\|_\infty \leq \gamma$
2.  $\exists P = P^T \succ 0$  satisfazendo a Equação Algébrica de Riccati

$$A^T P A - P + \gamma^{-2} C^T C - \Upsilon \Gamma^{-1} \Upsilon^T = 0$$

condição:  $\exists \Gamma^{-1}$

sendo  $\Gamma \triangleq (-I + \gamma^{-2} D^T D + B^T P B)$  e  $\Upsilon \triangleq (A^T P B + \gamma^{-2} C^T D)$

## Bounded Real Lema – Discreto

3.  $\exists P = P^T \succ 0$  satisfazendo

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \gamma^{-2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0$$

4.

$$\begin{bmatrix} P & 0 & A^T P & C^T \\ 0 & I & B^T P & D^T \\ PA & PB & P & 0 \\ C & D & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0$$

## Bounded Real Lema – Discreto

Linhas gerais de uma "demonstração".

(2)  $\Leftrightarrow$  (1). Pode ser entendido de forma análoga ao caso contínuo considerando a matriz simplética (Hamiltoniana) associada a equação algébrica de Riccati discreta:

$$M_{\gamma}^d = \begin{bmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{B} (\mathcal{A}^T)^{-1} \mathcal{C} & -\mathcal{B} (\mathcal{A}^T)^{-1} \\ -(\mathcal{A}^T)^{-1} \mathcal{C} & (\mathcal{A}^T)^{-1} \end{bmatrix}$$

sendo  $\mathcal{A} \triangleq A + B (\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C$ ,  $\mathcal{B} \triangleq -B (\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T$  e  $\mathcal{C} \triangleq C^T (\gamma^2 I - D D^T)^{-1} C$

**Nota:** A propriedade de simetria dos autovalores da matriz Hamiltoniana  $M_{\gamma}^d$  é em relação ao círculo de raio unitário. Portanto para obter a equivalência entre (1) e (2), é necessário que  $|\lambda(M_{\gamma}^d)| \neq 1$ . Exceto isto todas as outras propriedades para Riccati no caso contínuo são equivalentes (inclusive a construção da solução)

## Bounded Real Lema – Discreto

(2)  $\Leftrightarrow$  (3). Schur ...

(3)  $\Leftrightarrow$  (4). Schur ...

(4)  $\Leftrightarrow$  (2). Schur ...

(4)  $\Leftrightarrow$  (1). Pode ser obtido a partir dos mesmos passos considerados no caso contínuo, bastando para tanto selecionar uma função de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0 \quad \text{tal que} \quad \Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) < 0$$

O índice de desempenho neste caso é fruto do ganho induzido  $\ell_2$ , ie

$$\mathcal{I}_\infty = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \right\}$$

Ao final basta utilizar um simples argumento de Schur ...

## Exercício

Considere o sistema LIT do bloco anterior:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.83 & 0 & 0 \\ -0.83 & -0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.70 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & -0.70 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0.40 & 0 \\ 0.60 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.30 & 0 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix} w(t) \end{cases}$$

Compute a norma  $\mathcal{H}_\infty$  utilizando o Bounded Real Lemma - Contínuo - item 4 descrito por LMIs. (Re:  $\|H\|_\infty \doteq 6.4405\dots$ )