

## Normas de Sinais e Sistemas

1. Revisitando o espaço de sinais (Lebesgue)  $\mathcal{L}_2$ 
  - 1.1. Domínio do tempo  $\times$  domínio da frequência – Isomorfismo em Hilbert
  - 1.2. Identidade de Parseval
2. Espaço de Hardy  $\mathcal{H}_2$ 
  - 2.1. Funções analíticas e Teorema de Fatou
3. Revisitando o operador sistema dinâmico – Estabilidade  $\mathcal{L}_2$ 
  - 3.1. Espaços funcionais de matrizes racionais
4. Espaço  $\mathcal{L}_\infty$
5. Espaço de Hardy  $\mathcal{H}_\infty$
6. Normas de sinais estocásticos
7. Ganhos induzidos de sistemas
8. Cálculo das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  no espaço de estados

## Revisitando o espaço de sinais $\mathcal{L}_2$

Definem-se os subespaços do espaço de sinais  $\mathcal{S}^k$ :

$$\mathcal{S}_+^k \triangleq \left\{ f \in \mathcal{S}^k \mid f(t) \equiv 0 \forall t < 0 \right\}$$

$$\mathcal{S}_-^k \triangleq \left\{ f \in \mathcal{S}^k \mid f(t) \equiv 0 \forall t > 0 \right\}$$

Espaço de Lebesgue  $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ :

$$\mathcal{L}_2(-\infty, \infty) \triangleq \left\{ f \in \mathcal{S}^k \mid \|f\|_2 \triangleq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

Subespaços  $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$  e  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ :

$$\mathcal{L}_2(-\infty, 0] \triangleq \mathcal{S}_-^k \cap \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$$

$$\mathcal{L}_2[0, \infty) \triangleq \mathcal{S}_+^k \cap \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$$

## Revisitando o espaço de sinais $\mathcal{L}_2$

**Fato**  $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$  é um espaço de Hilbert

Se  $f \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$  e  $g \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$



$$\langle f, g \rangle = 0$$

$\therefore \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$  e  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$  são subespaços ortogonais do  $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ , ie  
 $\mathcal{L}_2(-\infty, 0] \perp \mathcal{L}_2[0, \infty)$  e  $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty) = \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \oplus \mathcal{L}_2[0, \infty)$

**Soma Direta** Sejam  $M, N \subset \mathcal{X}$ , onde  $\mathcal{X}$  é um espaço vetorial.  $\mathcal{X}$  é dito ser a soma direta de  $M$  e  $N$ , ie  $\mathcal{X} = M \oplus N$ , se  $M \cap N = \{0\}$  e todo elemento  $x \in \mathcal{X}$  pode ser expresso como  $x = z + y$ ,  $z \in M$ ,  $y \in N$

## Espaço de Lebesgue $\ell_2$

Espaço de Lebesgue das seqüências de quadrado somáveis:

$$\ell_2(-\infty, \infty) \triangleq \left\{ f \in \mathcal{S}_e^< \cup \mathcal{S}_e^> \mid \|f\|_2 \triangleq \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} \|f_i\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

$$\mathcal{S}_e^< \triangleq \{f \mid f = (\dots, f_{-3}, f_{-2}, f_{-1}), f_i \in \mathbb{R} \forall i < 0\}$$

$$\mathcal{S}_e^> \triangleq \{f \mid f = (0, f_1, f_2, f_3, \dots), f_i \in \mathbb{R}, \forall i \geq 0\}$$

$$\rightsquigarrow \ell_2(-\infty, 0) \triangleq \mathcal{S}_e^< \cap \ell_2(-\infty, \infty), \text{ e } \ell_2[0, \infty) \triangleq \mathcal{S}_e^> \cap \ell_2(-\infty, \infty)$$

$$\rightsquigarrow \forall f \in \ell_2(-\infty, 0) \text{ e } \forall g \in \ell_2[0, \infty) \text{ então}$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i^T g_i = 0, \text{ ie } \ell_2(-\infty, 0) \perp \ell_2[0, \infty)$$

## Sinais no Domínio da Freqüência

**Definição** Um sinal no domínio da freqüência pertence ao conjunto

$$\mathcal{S}_f^k \triangleq \left\{ f \mid f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^n, (f(j\omega))^* = f^T(-j\omega), \omega \in \mathbb{R} \right\}, k \in \mathbb{N}, k < \infty$$

sendo  $\omega$  a variável de freqüência em radianos/s

Espaço de Lebesgue no domínio da freqüência:

$$\mathcal{L}_2 \triangleq \left\{ f \in \mathcal{S}_f^k \mid \|f\|_2 \triangleq \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega) f(j\omega) d\omega \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

**Fato**  $\mathcal{L}_2$  é um espaço de Hilbert sob o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega) g(j\omega) d\omega$$

## Domínio do Tempo $\times$ Domínio da Freqüência

**Simbologia idêntica para norma e produto interno – tempo  $\times$  freqüência?**

**Transformada de Fourier** é um isomorfismo no espaço de Hilbert, entre  $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$  e  $\mathcal{L}_2$

**Isomorfismo?** Dois espaços de Hilbert são isomorfos se existe um mapeamento linear bijetivo de um para o outro que preserva o produto interno e a norma (do grego: **mesma forma**)

$\rightsquigarrow$  Para  $f \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ , Transformada de Fourier de  $f$ :

$$\hat{f}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} dt$$

sendo que **lim** denota a convergência na norma  $\mathcal{L}_2$ , ie

$$\left\| \hat{f} - \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} dt \right\|_2 \rightarrow 0, \text{ quando } T \rightarrow \infty$$

## Domínio do Tempo $\times$ Domínio da Freqüência

Identidade de Parseval ou Teorema de Plancherel:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Da identidade de Parseval:  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

↪ Parseval: a energia total no domínio do tempo é a mesma no domínio da freqüência

↪ O **contexto determina** se os sinais são elementos do  $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$  ou  $\mathcal{L}_2$

**Nota:** Transformada Inversa de Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1} [\hat{f}(j\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

## Espaço de Hardy $\mathcal{H}_2$



Godfrey Harold Hardy

*"... Hardy wrote many papers on the convergence of series and integrals and allied topics. Although this work established his reputation as an analyst, his greatest service to mathematics in this early period was a course of pure mathematics (1908). This work was the first rigorous English exposition of number, function, limit, and so on, adapted to the undergraduate, and thus it transformed university teaching".* J. C. Burkill – escrevendo sobre Hardy no período de 1901-1911

*"I wrote a great deal... but very little of any importance; there are not more than four of five papers which I can still remember with some satisfaction".*  
G. H. Hardy – escrevendo sobre o mesmo período



## Espaço de Hardy $\mathcal{H}_2$

**Funções Analíticas**  $f : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{X}$  ( $\mathcal{X}$  um espaço vetorial e  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  um intervalo aberto) é denominada **analítica em  $\mathcal{D}$**  se  $f \in \mathcal{C}^\infty$  e se para cada  $t_0 \in \mathcal{D}$

$$\exists \epsilon_0 > 0, \epsilon_0 \in \mathbb{R} : \forall t \in (t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0) \implies f(t) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0)}_{\text{Série de Taylor ao redor de } t_0}$$

Em outras palavras,  **$f$  é dita ser analítica em  $D$**  se a mesma é analítica em cada ponto  $t_0$  de  $\mathcal{D}$ , ie, pode ser representado por uma **série de potência convergente**

**Nota** Uma matriz racional  $G(s)$  é dita ser analítica em  $\Re(s) > 0$  se todos os elementos da matriz são **funções limitadas (analíticas em cada ponto)** no semiplano direito aberto. Particularmente, **todas as funções de transferência estáveis são analíticas no semiplano direito aberto**

## Espaço de Hardy $\mathcal{H}_2$

$\mathcal{H}_2$  é o espaço das funções de uma variável complexa que são analíticas no semiplano direito aberto e têm norma finita, ie

$$\mathcal{H}_2 \triangleq \left\{ f \mid ((f(s))^* = f^T(\bar{s}); \right.$$

$f(s = \alpha + j\omega)$  é analítica em  $\Re(s) > 0$ ;

$$\|f\|_2 \triangleq \left( \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha + j\omega) f(\alpha + j\omega) d\omega \right)^{1/2} < \infty \left. \right\}$$

## Espaço de Hardy $\mathcal{H}_2$

**Teorema de Fatou** Para qualquer  $f \in \mathcal{H}_2$ ,  $\exists$  uma função de fronteira:

$$f_f(j\omega) \triangleq \lim_{\alpha \downarrow 0} f(\alpha + j\omega)$$

Com as seguintes propriedades:

1.  $f_f \in \mathcal{L}_2$
2.  $f \mapsto f_f$  é linear e injetiva (ie,  $f_f$  é unicamente definida por  $\lim_{\alpha \downarrow 0} f(\alpha + j\omega)$ )
3.  $\|f_f\|_2 = \|f\|_2$

Conseqüência da propriedade 3  $\Rightarrow$  Norma  $\mathcal{H}_2$ :

$$\|f\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_f^*(j\omega) f_f(j\omega) d\omega \right)^{1/2}$$

(o supremum ocorre na fronteira com  $\alpha = 0$ )

## Espaço de Hardy $\mathcal{H}_2$

Do Teorema de Fatou,  $f \in \mathcal{H}_2 \mapsto f_f \in \mathcal{L}_2$  é linear, injetiva e preserva a norma



$\mathcal{H}_2$  é um subespaço fechado do  $\mathcal{L}_2$

Toda  $f \in \mathcal{H}_2$  é identificada com sua função fronteira  $f_f \in \mathcal{L}_2$

**Teorema de Paley-Wiener**  $\mathcal{H}_2$  é isomorfo a  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$  através da Transformada de Laplace, ie  $\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{L}_2[0, \infty)$

**Corolário** O espaço

$$\mathcal{H}_2^\perp \triangleq \{f \mid f(-s) \in \mathcal{H}_2\}$$

é isomorfo a  $\mathcal{L}_2(-\infty, 0]$  através da Transformada de Laplace, ie  $\mathcal{H}_2^\perp \cong \mathcal{L}_2(-\infty, 0]$

**Fato**  $\mathcal{H}_2 \perp \mathcal{H}_2^\perp$  e  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2^\perp$  !!

## Revistando o Operador Sistema Dinâmico

**Reapresentando um sistema de forma conveniente:** um sistema é um mapeamento de um espaço de sinais (seqüências), ie o espaço de entrada, para outro espaço de sinais (seqüências), ie o espaço de saída:

$$\begin{aligned} G & : \mathcal{S}_1^k \mapsto \mathcal{S}_2^k \\ & : w \mapsto z = Gw \end{aligned}$$

**Nota** Sistema  $G \equiv \Sigma$  ou  $G(\zeta)$  ( $\zeta = s$  ou  $z$ )

**Estabilidade  $\mathcal{L}_2$**  Um sistema  $G$  é estável se

$$z = Gw \in \mathcal{L}_2[0, \infty) \quad (w \in \ell_2[0, \infty))$$

sempre que

$$w \in \mathcal{L}_2[0, \infty) \quad (w \in \ell_2[0, \infty))$$

## Espaços Funcionais de Matrizes Racionais

Pode-se definir espaços de Hilbert ( $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{H}_2$ ) para elementos genéricos  $f \in \mathcal{X}$  onde

1.  $f \in \mathcal{X} \equiv \mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathcal{X} \equiv \mathbb{C}^n$  (casos anteriores)

2.  $f \in \mathcal{X} \equiv \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $f \in \mathcal{X} \equiv \mathbb{C}^{n \times m}$  (matrizes)

3.  $f \in \mathcal{X} \equiv \mathbb{R}Q(\zeta)$  ( $\mathbb{R}Q(\zeta)$  – espaço funcional de matrizes racionais)

↪ Generalizando o produto interno (que inclui o caso vetorial!):

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço} [f^T(t)g(t)] dt \quad \left( \langle f, g \rangle \triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{Traço} [f_i^T g_i] \right)$$

$$\langle f, g \rangle \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço} [f^*(j\omega)g(j\omega)] d\omega \quad (\text{inclusive } f \text{ e } g \in \mathbb{R}Q(s)!!)$$

## Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}_\infty$

Considere o sistema

$$G : \mathcal{L}_2(-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$$

- Como  $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$  é isomorfo a  $\mathcal{L}_2$ , um sistema (LIT) mapeia  $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$  no  $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$  (domínio do tempo) **sse** a função de transferência  $G(s)$  é tal que  $Gw \in \mathcal{L}_2$  para qualquer  $w \in \mathcal{L}_2$  (domínio da frequência)

↔ Condição **suficiente** para estabilidade  $\mathcal{L}_2$

$$\sup_{\omega} \sigma_{max}(G(j\omega)) < \infty$$

## Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}_\infty$

$$\begin{aligned}
 \text{pois } \|Gw\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w^*(j\omega) G^*(j\omega) G(j\omega) w(j\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)w(j\omega)\|^2 d\omega \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{max}(G(j\omega))^2 \|w(j\omega)\|^2 d\omega \\
 &\leq \sup_{\omega} \sigma_{max}(G(j\omega))^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|w(j\omega)\|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

Espaço  $\mathcal{L}_\infty$ :

$$\mathcal{L}_\infty \triangleq \left\{ G \mid \underbrace{\|G\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \sigma_{max}(G(j\omega))}_{\text{Norma } \mathcal{L}_\infty} < \infty \right\}$$

$$\therefore \|Gw\|_2 \leq \|G\|_\infty \|w\|_2, \forall w \in \mathcal{L}_2$$



## Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}_\infty$

$\therefore$  se  $G \in \mathcal{L}_\infty$  implica que  $G\mathcal{L}_2 \triangleq \{Gw \mid w \in \mathcal{L}_2\} \subset \mathcal{L}_2$

$\rightsquigarrow$  por outro lado, se  $G\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_2 \Rightarrow \|G\|_\infty < \infty$  ??

Escolha algum  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  e considere os vetores unitários  $v$  e  $u$  tais que

$$G(j\omega_0)v = \sigma_{max}(G(j\omega_0))u \quad (v \text{ é o vetor singular à direita})$$

Defina  $w(j\omega) = \sqrt{2\pi}v\delta^{1/2}(\omega - \omega_0)$  tal que

$$\begin{aligned} \|Gw\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}v^* G^*(j\omega)G(j\omega)v\sqrt{2\pi}\delta(\omega - \omega_0)d\omega \\ &= v^* G^*(j\omega_0)G(j\omega_0)v && (\text{prop. do deslocamento}) \\ &= \sigma_{max}(G(j\omega_0))^2 u^T u && (u \text{ unitário}) \\ &= \sigma_{max}(G(j\omega_0))^2 < \infty && (\text{se } Gw \in \mathcal{L}_2) \end{aligned}$$

## Espaço de Lebesgue $\mathcal{L}_\infty$

Quando  $G$  é racional

$G \in (\mathbb{R})\mathcal{L}_\infty$  sse  $G$  não tem pólos no eixo imaginário

Neste caso,  $\sigma_{max}(G(j\omega))$  é uma função contínua de  $\omega$  e

$$\|G\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \sigma_{max}(G(j\omega)) < \gamma \quad \forall \omega$$

$\therefore$  Os limites sobre  $\|G\|_\infty$  são equivalentes a limites uniformes sobre  $\sigma(G(j\omega))$ , de modo que pode-se utilizar a notação mais compacta  $\|G\|_\infty < \gamma$

## Espaço de Hardy $\mathcal{H}_\infty$

Suponha que  $G$  seja uma função de transferência de um sistema LIT então  $G$  é estável

$$\text{sse } z = Gw \in \mathcal{H}_2 \text{ sempre que } w \in \mathcal{H}_2$$

pois  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$  é isomorfo ao  $\mathcal{H}_2$

### Condição necessária para estabilidade

- como  $z \in \mathcal{H}_2$  requer  $z$  analítica no semi-plano direito aberto
- $\therefore$  Condição necessária para estabilidade –  $G$  analítica em  $\Re(s) > 0$

### Condição suficiente para estabilidade

- $\|z\|_2 < \infty$ , basta  $\sup_{\alpha > 0} \left\{ \sup_{\omega} \sigma_{max}(G(\alpha + j\omega)) \right\} < \infty$

## Espaço de Hardy $\mathcal{H}_\infty$

$$\begin{aligned}
 \text{pois } \|Gw\|_2^2 &= \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(\alpha + j\omega)w(\alpha + j\omega)\|^2 d\omega \\
 &\leq \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{max}(G(\alpha + j\omega))^2 \|w(\alpha + j\omega)\|^2 d\omega \\
 &\leq \left\{ \sup_{\alpha > 0} \sup_{\omega} \sigma_{max}(G(\alpha + j\omega))^2 \right\} \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|w(\alpha + j\omega)\|^2 d\omega \\
 &= \sup_{\alpha > 0} \sup_{\omega} \sigma_{max}(G(\alpha + j\omega))^2 \|w\|_2^2
 \end{aligned}$$

Espaço  $\mathcal{H}_\infty$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_\infty &\triangleq \left\{ G \mid G \text{ é analítica em } \Re(s) > 0; \right. \\
 &\quad \left. \|G\|_\infty \triangleq \sup_{\alpha > 0} \left\{ \sup_{\omega} \sigma_{max}(G(\alpha + j\omega)) \right\} < \infty \right\}
 \end{aligned}$$

## Espaço de Hardy $\mathcal{H}_\infty$

**Nota** Um sistema que tem função de transferência no  $\mathcal{H}_\infty$  é um sistema estável



De fato, uma função de transferência  $G$  define um sistema estável *see*  $G \in \mathcal{H}_\infty$

**Simbologia** O mesmo símbolo  $\|\cdot\|_\infty$  denota as normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{L}_\infty$ . Veja que o limite

$$G_f(j\omega) = \lim_{\alpha \downarrow 0} G_f(\alpha + j\omega) \text{ existe para quase todo } \omega \text{ se } G \in \mathcal{H}_\infty$$

Além disso,  $G \mapsto G_f$  é linear, injetiva e  $\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{max}(G_f(j\omega))$

$\therefore$  pode-se escrever  $G(j\omega)$  ao invés de  $G_f(j\omega)$ , tal que  $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{L}_\infty$

**Nota** Para  $G$  racional,  $G \in (\mathbb{R})\mathcal{H}_\infty$  sse  $G$  não tem pólos em  $\Re(s) \geq 0$

## Espaços Funcionais de Matrizes Racionais

$\mathbb{RL}_\infty$	Funções racionais próprias sem pólos no eixo imaginário	
$\mathbb{RH}_\infty$	Funções racionais próprias e estáveis	$\mathbb{RH}_\infty \subset \mathbb{RL}_\infty$
$\mathbb{RH}_\infty^\perp$	Funções racionais próprias e pólos em $\Re(s) > 0$	$\mathbb{RH}_\infty^\perp \subset \mathbb{RL}_\infty$
$\mathbb{RL}_2$	Funções racionais estritamente próprias sem pólos no eixo imaginário	$\mathbb{RL}_2 \subset \mathbb{RL}_\infty$
$\mathbb{RH}_2$	Funções racionais estritamente próprias e estáveis	$\mathbb{RH}_2 \subset \mathbb{RL}_2$
$\mathbb{RH}_2^\perp$	Funções racionais estritamente próprias e pólos em $\Re(s) > 0$	$\mathbb{RH}_2^\perp \subset \mathbb{RL}_2$

## Exemplo

Considere as funções racionais abaixo e determine quais funções pertencem ao  $\mathbb{R}\mathcal{L}_\infty$ ,  $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathbb{R}\mathcal{L}_2$ ,  $\mathbb{R}\mathcal{H}_2$  e  $\mathbb{R}\mathcal{H}_2^\perp$

$$F_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)} = \underbrace{\frac{1}{5(s+2)}}_{\in \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty, \in \mathbb{R}\mathcal{L}_2} + \underbrace{\frac{1}{5(s-3)}}_{\in \mathbb{R}\mathcal{H}_2^\perp}$$

$$F_2(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}; \quad F_3(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}\mathcal{H}_2, \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty}$ 
   
  $\underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty, \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty}$

$$F_4(s) = \underbrace{\frac{s-1}{s}}_{\text{pólo em } j\omega}; \quad F_5(s) = \underbrace{\left[ 1 \quad \frac{s-1}{s+1} \quad \frac{1}{s+2} \right]}_{\in \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty}$$

## Exemplo

Considere o sistema LIT e **estável**:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.83 & 0 & 0 \\ -0.83 & -0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.70 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & -0.70 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0.40 & 0 \\ 0.60 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.30 & 0 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix} w(t)$$

Valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  ?? busca "exaustiva" do máximo do valor singular máximo sob o domínio  $\omega$ ... (Detalhe:  $A$  é estável?)



# Exemplo

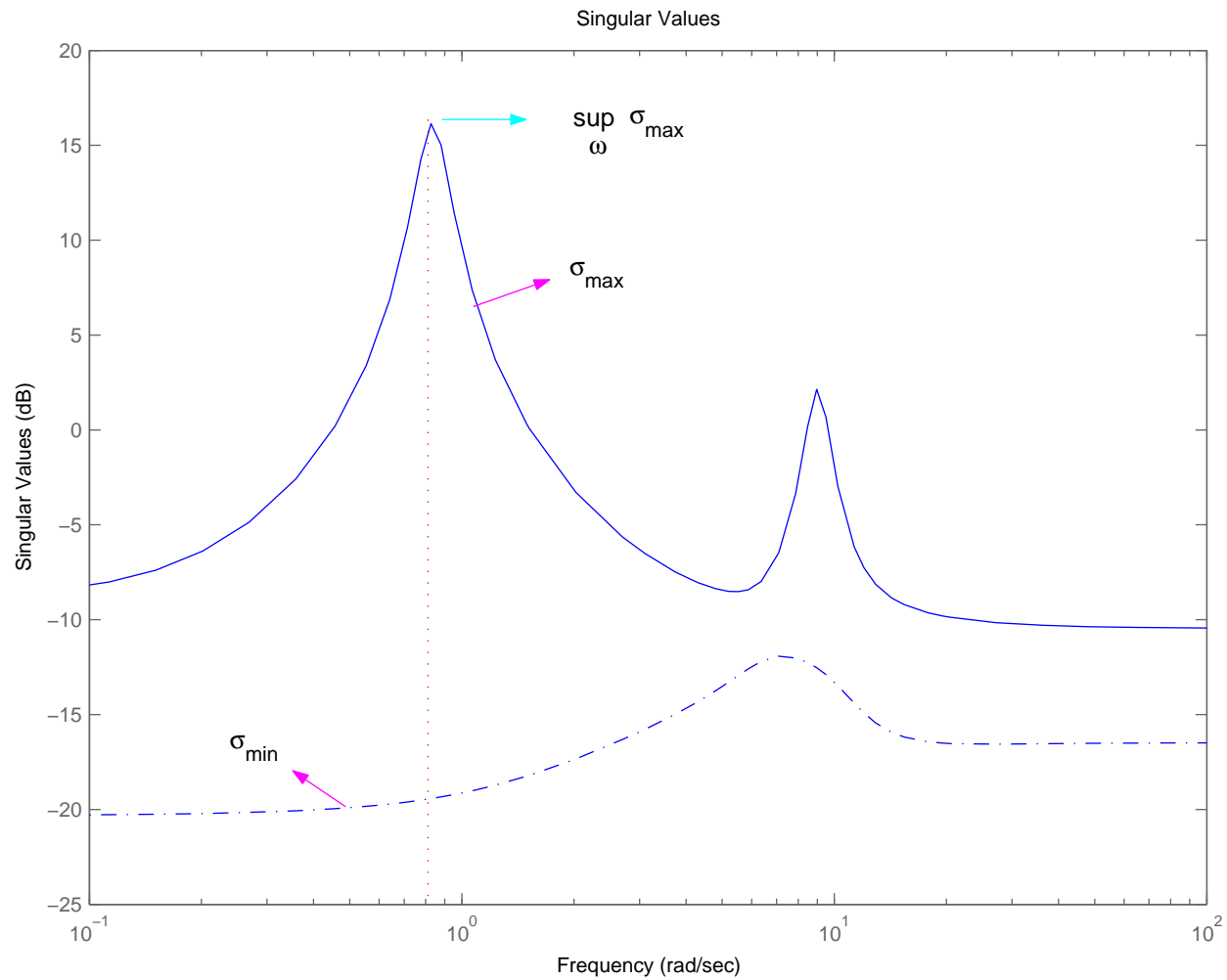


Diagrama de Valores Singulares – MATLAB: sigma

## Normas de Sinais Estocásticos – Norma rms (Root-Mean-Square)

Para um sinal  $f$  modelado como um processo estocástico<sup>a</sup> estacionário<sup>b</sup>, a “medida” deste sinal é definida como:

$$\|f\|_{\text{rms}} \triangleq [\mathcal{E}\{f^*(t)f(t)\}]^{1/2}$$

- $\mathcal{E}(\cdot)$  denota a esperança matemática ou a média
- Como  $f$  é estacionário,  $\|f\|_{\text{rms}}$  não depende de  $t$
- Para sinais estocásticos assintoticamente estacionários

$$\|f\|_{\text{rms}} \triangleq \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{f^*(t)f(t)\} \right]^{1/2}$$

---

<sup>a</sup> Uma variável aleatória  $x$  é uma regra que associa para todo resultado  $\xi$  de um experimento  $\mathcal{I}$  um número  $x(\xi)$ . Um processo estocástico  $x(t)$  é uma regra que associa para todo  $\xi$  uma função  $x(t, \xi)$

<sup>b</sup> As propriedades estatísticas são invariantes para um deslocamento da origem

## Normas de Sinais Estocásticos

**Autocorrelação** A matriz de autocorrelação de um sinal estocástico estacionário  $f$  é:

$$R_{ff}(\tau) \triangleq \mathcal{E} \{f(t)f^*(t + \tau)\}$$

**Covariância** A matriz de covariância de um sinal estocástico estacionário  $f$  é:

$$C_{ff} \triangleq \mathcal{E} \{f(t)f^*(t)\} = R_{ff}(0) \quad (\text{para } f \text{ assintoticamente estacionário})$$

- Norma rms e autocorrelação

$$\begin{aligned} \|f\|_{\text{rms}}^2 &= \mathcal{E} \{f^*(t)f(t)\} = \mathcal{E} \{\text{Traço} [f(t)f^*(t)]\} \\ &= \text{Traço} [\mathcal{E} \{f(t)f^*(t)\}] \\ &= \text{Traço} [C_{ff}] = \text{Traço} [R_{ff}(0)] \end{aligned}$$

- $R_{ff}(\tau) = R_{ff}^*(-\tau)$

## Normas de Sinais Estocásticos

**Densidade espectral de potência do sinal  $f$**  é a Transformada de Fourier da autocorrelação (supondo que existe), ie:

$$S_{ff}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$\therefore$  a partir da transformada inversa de Fourier, obtém-se

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

**Sinal de Potência**  $f$  é um **sinal de potência** se existe  $R_{ff}(\tau) < \infty, \forall \tau$ , bem como a função de densidade espectral de potência  $S_{ff}(j\omega)$

## Normas de Sinais Estocásticos

Define-se a potência de um sinal como sendo:

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{P}}^2 &\triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{f^*(t)f(t)\} \\ &= \text{Traço} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{f(t)f^*(t)\} \right] \\ &= \text{Traço} [R_{ff}(0)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço} [S_{ff}(j\omega)] d\omega\end{aligned}$$

- O conjunto dos sinais  $f$  que têm potência finita é denotado por  $\mathcal{P}$
- Pode-se interpretar o termo com a integral da seguinte forma: uma potência média do sinal é a integral das contribuições em cada frequência

## Normas de Sinais Estocásticos

**Definição** O sinal  $f$  é dito ter densidade espectral de potência limitado se  $\|S_{ff}(j\omega)\|_{\infty} < \infty$ . O conjunto dos sinais  $f$  que têm densidade espectral de potência finita é denotado por  $\mathcal{S}_p$

A norma densidade espectral de potência é definida como sendo

$$\|f\|_{\mathcal{S}_p}^2 \triangleq \|S_{ff}(j\omega)\|_{\infty} = \sup_{\omega} \sigma_{max}(S_{ff}(j\omega))$$

- Se  $f$  é um ruído branco com média zero e covariância unitária<sup>a</sup>

$$S_{ff}(j\omega) = \mathbf{I}$$

---

<sup>a</sup>Ruído branco é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, ie o que ocorre em um momento não depende de outro, e uniformemente distribuído – constante em todo o intervalo

## Normas de Sinais Estocásticos

$\mathcal{S}_p$

$$\|S_{ff}(j\omega)\|_{\infty} < \infty$$

$S_{ff}(j\omega)$  tem características fixas no espectro de frequência

$\therefore$  pode-se modelar sinais com propriedades estatísticas conhecidas

$\mathcal{P}$

$$\sqrt{\text{Traço}[R_{ff}(0)]} < \infty$$

$\therefore$  pode-se modelar sinais com espectro desconhecido porém com potência finita

## Ganhos Induzidos de Sistemas

- Para sistemas LIT as normas denotam uma medida do “tamanho” do sistema...
- Generalizando, o **ganho induzido (norma induzida)** de um operador sistema é definido como:

$$\|G\| \triangleq \sup_{\|w\| \neq 0} \frac{\|Gw\|}{\|w\|}$$

∴ O ganho induzido é o fator máximo pelo qual o sistema pode quantificar o “tamanho” (em norma) de um sinal atuando sobre o mesmo

Por que considerar ganho induzido? relação entre sinais de entrada × sinais saída com propriedades diferentes...



## Ganhos Induzidos de Sistemas

Sinais de entrada  $w \in \mathcal{S}_p$  e saída  $z \in \mathcal{P}$

$w$  – sinal do tipo ruído branco e densidade espectral de potência  $S_{ww}(j\omega) = \mathbf{I}$

Modelo entrada-saída:  $z(t) = g(t) * w(t)$

Matriz de autocorrelação do sinal de saída  $z(t)$ :

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= \mathcal{E}\{z(t)z^*(t + \tau)\} \\ &= \mathcal{E}\{g(t) * w(t)w^*(t + \tau) * g^*(t + \tau)\} \\ &= \mathcal{E}\{g(t) * R_{ww}(\tau) * g^*(t + \tau)\} \end{aligned}$$

Densidade espectral de potência do sinal de saída (tomando a transformada de Fourier)

$$S_{zz}(j\omega) = G(j\omega)S_{ww}(j\omega)G^*(j\omega)$$

## Ganhos Induzidos de Sistemas

$$\text{e } \therefore \|z\|_{\mathcal{P}} = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço}\{G(j\omega)S_{ww}(j\omega)G^*(j\omega)\}d\omega \right]^{1/2}$$

como, por hipótese,  $S_{ww}(j\omega) = \mathbf{I}$

$$\|z\|_{\mathcal{P}} = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço}\{G(j\omega)G^*(j\omega)\}d\omega \right]^{1/2} = \|G\|_2$$

- conclui-se que a norma na saída é  $\|z\|_{\mathcal{P}}^2, \forall w \in \mathcal{S}_p$ , com  $S_{ww}(j\omega) = \mathbf{I}$

Em outras palavra:  $\|G\| \triangleq \|z\|_{\mathcal{P}}^2 = \|G\|_2^2$ , onde  $\|G\|_2^2$  é a norma  $\mathcal{H}_2$

a norma  $\mathcal{H}_2$  é o ganho induzido  $\mathcal{S}_p \mapsto \mathcal{P}$

## Ganhos Induzidos de Sistemas

Sinais de entrada  $w \in \mathcal{S}_p$  e saída  $z \in \mathcal{S}_p$

$w$  – ruído branco e densidade espectral de potência  $S_{ww}(j\omega) = \mathbf{I}$

Densidade espectral de potência do sinal de saída

$$S_{zz}(j\omega) = G(j\omega)S_{ww}(j\omega)G^*(j\omega) = G(j\omega)G^*(j\omega)$$

Tomando-se  $\sigma_{max}(G(j\omega)) = \|G\|_\infty$

obtém-se a norma  $\mathcal{L}_\infty$  da saída  $\|S_{zz}(j\omega)\|_\infty = \|G\|_\infty^2$

a norma  $\mathcal{L}_\infty$  é o ganho induzido  $\mathcal{S}_p \mapsto \mathcal{S}_p$

## Ganhos Induzidos de Sistemas

Sinais de entrada  $w \in \mathcal{L}_2$  e saída  $z \in \mathcal{L}_2$

- A estabilidade  $\mathcal{L}_2$ , com  $G$  analítica em  $\Re(s) > 0$ , foi utilizada para caracterizar o espaço  $\mathcal{H}_\infty$  ...

- Particularmente mostrou-se que para satisfazer a estabilidade  $\mathcal{L}_2$ :

$$\|z\|_2^2 = \|Gw\|_2^2 \leq \sup_w \sigma_{max}(G(j\omega))^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|w(j\omega)\|^2 d\omega = \|G\|_\infty^2 \|w\|_2^2$$

- O ganho induzido  $\mathcal{L}_2$  gera a norma  $\mathcal{H}_\infty$  ??

Note que particularmente vale:

$$\frac{\|Gw\|_2^2}{\|w\|_2^2} \leq \|G\|_\infty^2, \quad \text{ou} \quad \frac{\|Gw\|_2}{\|w\|_2} \leq \|G\|_\infty$$

## Ganhos Induzidos de Sistemas

Pode-se mostrar (veja página 101 no Zhou) que  $\|G\|_\infty$  é o menor limitante superior, escolhendo uma frequência  $\omega_{max}$  para a qual

$$\|G\|_\infty = \sigma_{\max}(G(j\omega_{max}))$$

de modo que

$$\begin{aligned}\|z\|_2^2 &= \|Gw\|_2^2 \\ &\approx \sigma_{\max}(G(j\omega_{max}))^2 \|w\|_2^2 \\ &= \|G\|_\infty^2 \|w\|_2^2\end{aligned}$$

Tal que o ganho induzido  $\mathcal{L}_2$  é equivalente a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , ie

$$\|G\|_\infty = \sup_{\|w\| \neq 0} \frac{\|Gw\|_2}{\|w\|_2} = \sup_{\|w\|=1} \|Gw\|_2$$

## Ganhos Induzidos de Sistemas

$\therefore$  a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é o ganho induzido  $\mathcal{L}_2$

**Nota** Pode-se estabelecer a seguinte relação, para  $\|G\|_\infty \leq \gamma$ , da forma:

$$\|z\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w\|_2^2$$

Esta descrição será bastante utilizada para sistemas incertos onde o modelo não é precisamente conhecido e uma única descrição da matriz de transferência não é obtida. Porém é possível encontrar um **limitante**  $\gamma$  para o ganho induzido  $\mathcal{L}_2$ . De modo que **minimizar  $\gamma$ , minimiza a relação entrada-saída em norma  $\mathcal{H}_\infty$**

## Ganhos Induzidos de Sistemas

	Norma Induzida
$w \in \mathcal{L}_2 \mapsto z \in \mathcal{L}_2$	$\ G\ _\infty$
$w \in \ell_2 \mapsto z \in \ell_2$	$\ G\ _\infty$ (Ao invés de sinais, seqüências...)
$w \in \mathcal{L}_\infty \mapsto z \in \mathcal{L}_\infty$	$\ G\ _1$ (Norma $\mathcal{L}_1$ – peak-to-peak)
$w \in \mathcal{L}_2 \mapsto z \in \mathcal{L}_\infty$	$\ G\ _2$ (Norma $\mathcal{H}_2$ generalizada – energy-to-peak)
$w \in \mathcal{S}_p \mapsto z \in \mathcal{S}_p$	$\ G\ _\infty$
$w \in \mathcal{S}_p \mapsto z \in \mathcal{P}$	$\ G\ _2$
$w \in \mathcal{P} \mapsto z \in \mathcal{P}$	$\ G\ _\infty$

## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_2$ em Espaço de Estados

- Calcular a norma  $\mathcal{H}_2$  pela definição no domínio da frequência? é uma tarefa árdua...

Porém em espaço de estados...

**Teorema** Considere  $G(\zeta) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_2$  da forma

$$G(\zeta) = C(\zeta I - A)^{-1}B \quad (\zeta = s, z)$$

Então a norma  $\mathcal{H}_2$  é dada por

$$\|G\|_2^2 = \text{Traço}\{B^T L_o B\} = \text{Traço}\{C L_c C^T\}$$

onde  $L_o \succeq 0$  e  $L_c \succeq 0$  são os **Grammianos de Observabilidade e Controlabilidade** que satisfazem, respectivamente,

$$\mathcal{G}_c(L_c) = 0, \quad \mathcal{G}_o(L_o) = 0$$



## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_2$ em Espaço de Estados

Definem-se os mapeamentos  $\mathcal{G}_c : \mathcal{S}_n \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  da forma:

$$\mathcal{G}_c(L_c) = AL_c + L_cA^T + BB^T \quad (\text{para sistemas contínuos})$$

$$\mathcal{G}_c(L_c) = AL_cA^T - L_c + BB^T \quad (\text{para sistemas discretos})$$

e  $\mathcal{G}_o : \mathcal{S}_n \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  da forma:

$$\mathcal{G}_o(L_o) = A^T L_o + L_oA + C^T C \quad (\text{para sistemas contínuos})$$

$$\mathcal{G}_o(L_o) = A^T L_oA - L_o + C^T C \quad (\text{para sistemas discretos})$$

**Nota**  $\mathcal{S}_n$  – espaço de Banach das matrizes simétricas reais, definida pela métrica induzida pela norma

## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_2$ em Espaço de Estados

**Demonstração** Considerando o caso contínuo, veja que

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \begin{cases} Ce^{At}B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\text{pois } \mathbb{R}\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{L}_2[0; \infty))$$

$$\begin{aligned} \therefore \|G\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{Traço}\{g^T(t)g(t)\}dt = \int_0^\infty \text{Traço}\{g(t)g^T(t)\}dt \\ &= \int_0^\infty \text{Traço}\{B^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B\} dt = \int_0^\infty \text{Traço}\{C e^{At} B B^T e^{A^T t} C^T\} dt \end{aligned}$$

- Grammianos de controlabilidade e observabilidade:

$$L_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad \text{e} \quad L_o = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

satisfazendo, respectivamente,  $\mathcal{G}_c(L_c) = \mathbf{0}$  e  $\mathcal{G}_o(L_o) = \mathbf{0}$

$$\therefore \|G\|_2^2 = \text{Traço}\{B^T L_o B\} = \text{Traço}\{C L_c C^T\}$$

## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_2$ em Espaço de Estados

$$\text{(Caso discreto)} \quad g(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \begin{cases} CA^t B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|G\|_2^2 &= \sum_{t=0}^{\infty} \text{Traço}\{g^T(t)g(t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} \text{Traço}\{g(t)g^T(t)\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \text{Traço}\{B^T (A^t)^T C^T C A^t B\} = \sum_{t=0}^{\infty} \text{Traço}\{C A^t B B^T (A^t)^T C^T\} \end{aligned}$$

- Grammianos de controlabilidade e observabilidade:

$$L_c = \sum_{t=0}^{\infty} A^t B B^T (A^t)^T \quad \text{e} \quad L_o = \sum_{t=0}^{\infty} (A^t)^T C^T C A^t$$

satisfazendo, respectivamente,  $\mathcal{G}_c(L_c) = \mathbf{0}$  e  $\mathcal{G}_o(L_o) = \mathbf{0}$

$$\therefore \|G\|_2^2 = \text{Traço}\{B^T L_o B\} = \text{Traço}\{C L_c C^T\}$$

## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Espaço de Estados

Considere : 
$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad G(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$$

Cálculo pela definição da norma:  $\|G\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \sigma_{max}(G(j\omega))$

- Busca exaustiva no espectro de frequência
- Necessário limites inferior,  $\omega_i$ , e superior,  $\omega_s$
- Problemas?
  1. determinar o domínio e o espaçamento entre as frequências a serem testadas (problema evidente:  $A$  tem autovalores com parte real pequena, por exemplo, sistemas que representam estruturas mecânicas levemente amortecidas)
  2. grande esforço computacional (como saber quando  $\sigma_{max}(G(j\omega))$  se aproxima  $\|G\|_\infty$  ?)

## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Espaço de Estados

Estratégia Alternativa? considerar diretamente a realização  $\{A, B, C, D\}$  de  $G(s)$  e uma matriz específica: **Matriz Hamiltoniana**

$$\begin{aligned}
 M_\gamma &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D & \gamma I \\ \gamma I & -D^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & B^T \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -A^T - C^TDR^{-1}B^T \end{bmatrix}; \quad (R \triangleq \gamma^2 I - D^TD)
 \end{aligned}$$

- $M_\gamma$  satisfaz a propriedade

$$J^{-1}M_\gamma J = -M_\gamma^T, \quad \text{onde } J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

em outras palavras,  $M_\gamma$  é uma matriz simplética, isto é, os autovalores (aos pares) são simétricos em relação ao eixo imaginário

## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Espaço de Estados

Relação entre valores singulares de  $G(j\omega)$  e os **autovalores imaginários de  $M_\gamma$  ??**

**Teorema** Considere que  $A$  não tem autovalores (puramente) imaginários,  $\gamma > 0$  não é um valor singular de  $D$  e  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . Então,  $\gamma$  é um valor singular de  $G(j\omega_0)$  se e somente se  $M_\gamma - j\omega_0 I$  é singular

**Demonstração:** (**Necessidade**). Suponha que  $\gamma$  é um valor singular de  $G(j\omega_0)$ . Então existe um vetor singular não nulo  $u$  associado ao valor singular  $\gamma$  tal que

$$G(j\omega_0)u = \gamma v$$

$$G(j\omega_0)^* v = \gamma u$$

de modo que

$$\begin{aligned} (C(j\omega_0 I - A)^{-1}B + D)u &= \gamma v \\ (B^T(-j\omega_0 I - A^T)^{-1}C^T + D^T)v &= \gamma u \end{aligned}$$

## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Espaço de Estados

Definem-se

$$\begin{aligned} r &\triangleq (j\omega_0 \mathbf{I} - A)^{-1} B u \\ s &\triangleq (-j\omega_0 \mathbf{I} - A^T)^{-1} C^T v \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} -Du + \gamma v &= Cr \\ \gamma u - D^T v &= B^T s \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -D & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & -D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cr \\ B^T s \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & -D^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

garantindo que

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Espaço de Estados

Retornando a definição de  $r$  e  $s$  obtém-se também

$$\begin{aligned} (j\omega_0 \mathbf{I} - A)r &= Bu \\ (-j\omega_0 \mathbf{I} - A^T)s &= C^T v \end{aligned} \Rightarrow j\omega_0 \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & -D^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & B^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = j\omega_0 \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

Desta forma

$$M_\gamma \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = j\omega_0 \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad (M_\gamma - j\omega_0 \mathbf{I}) \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore M_\gamma - j\omega_0 \mathbf{I}$  é singular



## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Espaço de Estados

(Suficiência). Segue diretamente da hipótese que  $M_\gamma$  tem autovalores  $j\omega_0$ , e retornando os passos acima... estabelecendo portanto que  $\gamma$  é um valor singular de  $G(j\omega_0)$

**Nota** A conclusão óbvia deste teorema é que  $\gamma$  é um valor singular de  $G(j\omega_0)$  se  $M_\gamma$  tem autovalor igual a  $j\omega_0$  (puramente imaginário)

**Teorema**  $G(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$  e  $\gamma > \sigma_{max}(D) > 0$ .  $\|G\|_\infty \geq \gamma$  se  $M_\gamma$  tem autovalores (puramente) imaginários

**Demonstração** Como  $\gamma > \sigma_{max}(D) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sigma_{max}\{G(j\omega)\}$  e  $\sigma_{max}\{G(j\omega)\}$  é uma função contínua de  $\omega$ , segue que

$$\|G\|_\infty \geq \gamma \text{ sse } \exists \omega_0 : \sigma_{max}\{G(j\omega_0)\} = \gamma$$

e portanto este Teorema segue imediatamente do Teorema anterior

## Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$ em Espaço de Estados

- Se  $G(s) \in \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty$ , ie,  $A$  não é estável, mas não possui autovalores no eixo imaginário, então o Teorema anterior continua válido! Basta trocar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  pela norma  $\mathcal{L}_\infty$ . Além disso, o Teorema anterior implica no resultado dual a seguir

**Teorema**  $G(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$  e  $\gamma > \sigma_{max}(D) > 0$ .  $\|G\|_\infty \leq \gamma$  sse  $M_\gamma$  **não tem autovalores (puramente) imaginários**

**Nota** Os autovalores imaginários da matriz Hamiltoniana

$$M_{\gamma=\|G\|_\infty}$$

são exatamente as frequências para as quais  $\sigma_{max}(G(j\omega)) = \|G\|_\infty$

**Nota** A conclusão acima sugere um algoritmo de bissecção...

## Um Algoritmo de Bisseção

Definem-se  $\gamma_{li}$  e  $\gamma_{ls}$ : respectivamente, um limitante inferior e superior para  $\|G\|_\infty$

$$\gamma_I = \gamma_{li};$$

$$\gamma_S = \gamma_{ls};$$

repita {

$$\gamma = (\gamma_I + \gamma_S)/2;$$

Construa  $M_\gamma$ ;

se  $M_\gamma$  não tem autovalores (puramente) imaginários

$$\gamma_S = \gamma;$$

senão

$$\gamma_I = \gamma; }$$

até  $\{\gamma_S - \gamma_I \leq 2\epsilon\gamma_I\}$ .

onde  $\epsilon$  é um escalar positivo “suficientemente” pequeno

## Um Algoritmo de Bisseção

- Ao final:  $(\gamma_I + \gamma_S)/2 \rightarrow \|G\|_\infty$  com precisão relativa de  $\epsilon$ , ie

$$\left| (\gamma_I + \gamma_S)/2 - \|G\|_\infty \right| \leq \epsilon \|G\|_\infty$$

Escolha apropriada para os limitantes:

$$\gamma_{li} \triangleq \max \left\{ \sigma_{max}(D), \sqrt{\text{Traço}[L_c L_o / n]} \right\}, \quad \gamma_{ls} \triangleq \sigma_{max}(D) + 2\sqrt{n \text{ Traço}[L_c L_o]}$$

onde  $n$  é a ordem da matriz  $A$  e  $L_c$  e  $L_o$  são, respectivamente, os Grammianos de controlabilidade e observabilidade

**Referência para  $\gamma_{li}$  e  $\gamma_{ls}$ :** K. Glover, “All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $\mathcal{L}_\infty$ -error bounds”, International Journal of Control, Vol. 39, pp. 1115-1193, 1984

## Ilustrando o Algoritmo de Bisseção

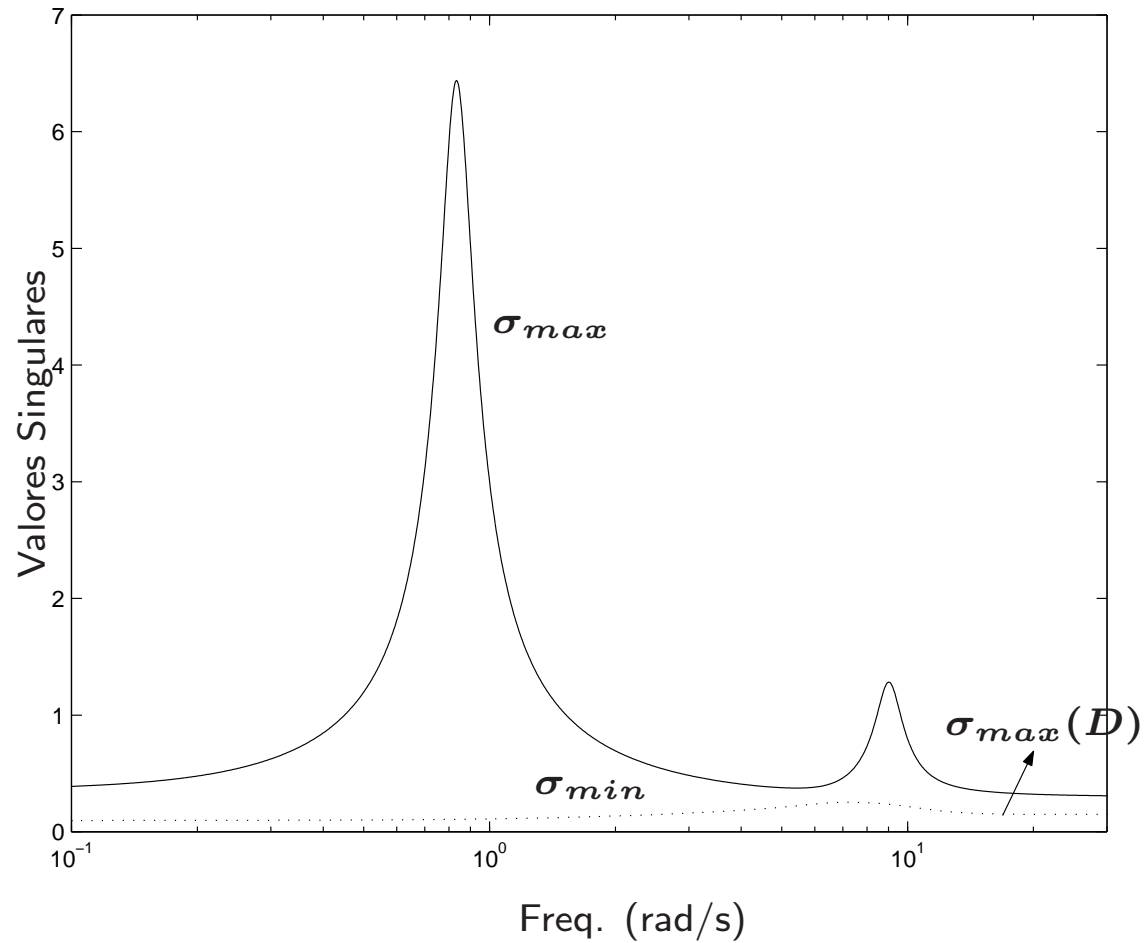
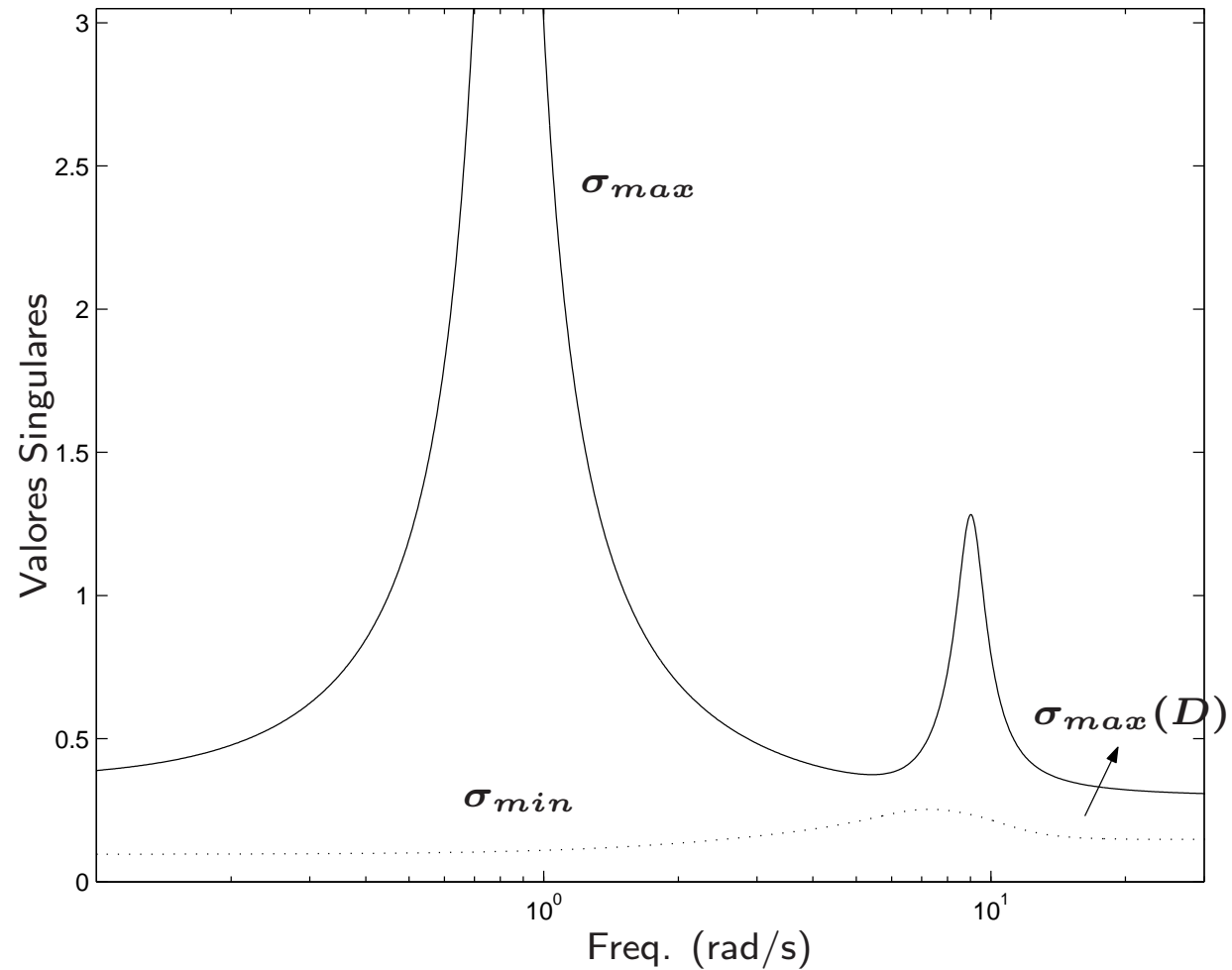
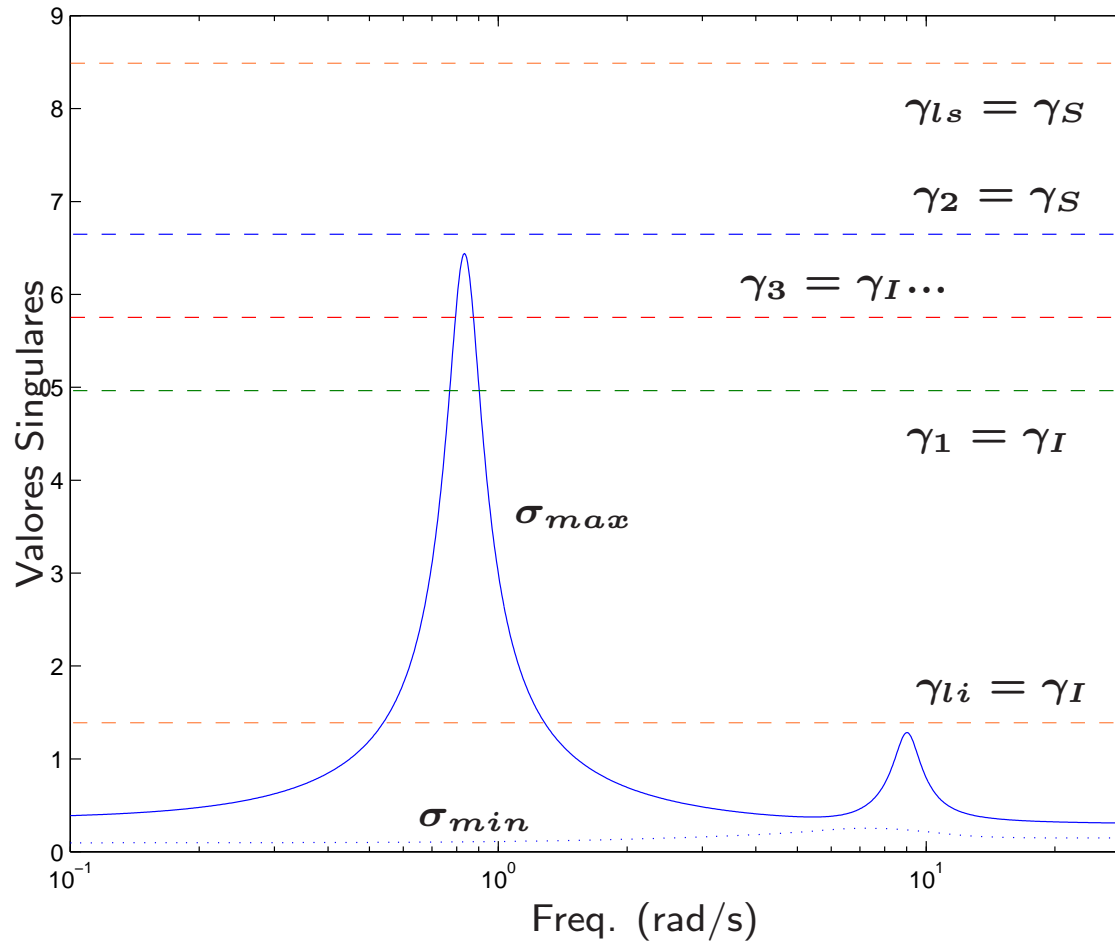


Diagrama de Valores Singulares – Veja que não é em dB

## Ilustrando o Algoritmo de Bisseção – ZOOM



## Ilustrando o Algoritmo de Bisseção



## Exercícios

1. Considere o sistema LIT:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.83 & 0 & 0 \\ -0.83 & -0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.70 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & -0.70 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0.40 & 0 \\ 0.60 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.30 & 0 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix} w(t) \end{cases}$$

Calcule a norma  $\mathcal{H}_\infty$  utilizando Bisseção. (Re:  $\|H\|_\infty \doteq 6.4405\dots$ )

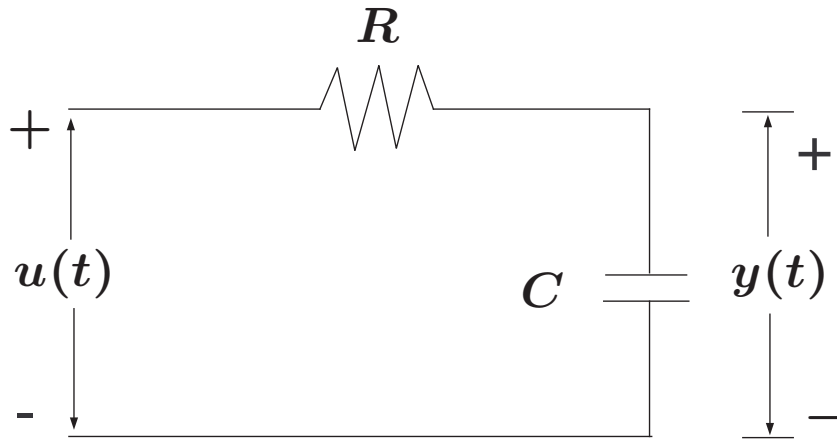


## Exercícios

2. Calcule a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema anterior considerando  $D = \mathbf{0}$
3. Mostre que se a matriz Hamiltoniana,  $M_\gamma$ , tem autovalores puramente imaginários então  $M_\gamma^2$  tem autovalores reais não-positivos
4. Comente se há condições de observabilidade, controlabilidade ou estabilidade em relação ao sistema  $\Sigma = \{A, B, C, D\}$ , quando se demonstrou que  $\gamma$  é um valor singular de  $(G(j\omega_0))$  sse  $M_\gamma - j\omega_0 I$  é não-singular

## Exercícios

5. Considere o circuito abaixo



1. Encontre a equação dinâmica (faça  $\tau \triangleq RC$ ) e calcule a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de  $u \rightarrow y$  (pela definição e pela matriz Hamiltoniana)
2. Qual o significado do resultado calculado?