Tópicos da Aula

1. Descrição de sistemas dinâmicos
   1.1. Sinais ?
   1.2. Sistemas ?
   1.3. Espaço de estados e FT
   1.4. Resposta de sistemas dinâmicos
   1.5. Sistemas dinâmicos equivalentes
2. Estabilidade de Sistemas Dinâmicos
3. Controlabilidade e Observabilidade
4. Controle Baseado no Observador

Descrição de Sistemas Dinâmicos

Não-Linear	**SISO**
Linear	**MIMO**
Sistemas Contínuos	sem Memória
Sistemas Discretos	**com Memória**
Não-Causal	Distríbuido
Causal	**Limitado**
Variante no Tempo	Estocástico
Invariante no Tempo	**Determinístico**
Espaço de Estado	Entrada-Saída

Espaço de Sinais

Sinais Define-se o conjunto

$$\mathcal{S}^k \triangleq \left\{ f \mid f(t) \in \mathbb{R}^k, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \right\}, \ \ k \in \mathbb{N}, \ \ k < \infty$$

Os elementos de $\mathcal{S}^k$ são denominados sinais

Espaços Vetoriais de Sinais são conjuntos de sinais, $\mathcal{S}^k$, com suas operações usuais de soma e multiplicação por escalar sob um corpo $\mathcal{F} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (f+g)(t) &= f(t) + g(t), \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \forall\, f, g \in \mathcal{S}^k \\ (\alpha f)(t) &= \alpha f(t) \end{aligned}$$

Espaço dos Sistemas Dinâmicos

Definição Um sistema é um mapeamento de um espaço de sinais de entrada com dimensão p, $\mathcal{S}_e^p$, em um outro espaço de sinais de saída com dimensão q, $\mathcal{S}_s^q$:

$$\begin{aligned} G \quad &: \quad \mathcal{S}_e^p \mapsto \mathcal{S}_s^q \\ &: \quad w \mapsto z = Gw \end{aligned}$$

⇝ G operador linear

⇝ Sistemas formam um espaço linear considerando as operações de soma (conexão em paralelo) e multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)w &= G_1 w + G_2 w, \\ (\alpha G)w &= \alpha(Gw) \end{aligned}$$

Descrição de Sistemas Dinâmicos

Sistema causal A saída no instante T depende apenas das entradas até o instante T

Invariância no Tempo Considere que $z(t)$ é a resposta de um sistema G para a entrada $w(t)$. Se a resposta para a entrada deslocada $w(t-T)$ é $z(t-T)$ o sistema é invariante no tempo

Linearidade Um sistema $G : \mathcal{S}_e^p \mapsto \mathcal{S}_s^q$ é linear se

$$G(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha G w_1 + \beta G w_2, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall w_1, w_2 \in \mathcal{S}_e$$

$\rightsquigarrow$ Qualquer sistema linear pode ser representado pelo operador integral

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau) w(\tau) d\tau$$

Descrição de Sistemas Dinâmicos

▷ Um sistema linear é causal sse $G(t,\tau) = 0, \quad \forall \tau > t$

▷ Um sistema linear é invariante no tempo (LIT) se $G(t,\tau) = G(t-\tau, 0), \quad \forall t, \tau$

$\therefore$ qualquer sistema LIT pode ser representado pela integral de convolução

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) w(\tau) d\tau$$

Função de transferência ? Basta tomar transformada de Laplace (ou $\mathcal{Z}$ se considerar convolução discreta) para obter

$$z(\zeta) = G(\zeta) w(\zeta)$$

sendo que ζ representa as variáveis s ou z

Descrição em Espaço de Estados

Definição Considere o sistema de equações na forma:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} \delta\left[x(t)\right] &= Ax(t) + Bw(t), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \tag{1}$$

▷ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – vetor de estado

▷ $w(t) \in \mathbb{R}^p$ – vetor de entrada

▷ $z(t) \in \mathbb{R}^q$ – vetor de saída

▷ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$

⇝ $\delta\left[x(t)\right]$ é um operador que indica

- $\dot{x}(t) \quad \longrightarrow$ sistemas a tempo contínuo – $\boldsymbol{\Sigma}_c$
- $x(t+1) \quad \longrightarrow$ sistemas a tempo discreto – $\boldsymbol{\Sigma}_d$

Descrição em Espaço de Estados

O sistema de equações, (1), é chamado de **representação por espaço de estados** do sistema dinâmico linear

$$\boldsymbol{G} \; : \; \mathbb{R}^n \oplus \boldsymbol{\mathcal{S}}_e^p \mapsto \boldsymbol{\mathcal{S}}_s^q ; \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{z}$$

- No caso que $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{0}$, o sistema é dito ser relaxado no instante $\boldsymbol{t}_0$ podendo-se escrever

$$\boldsymbol{G} \; : \; \boldsymbol{\mathcal{S}}_e^p \mapsto \boldsymbol{\mathcal{S}}_s^q$$

É bastante conveniente considerar o sistema relaxado da forma

$$\lim_{\boldsymbol{t}_0 \to -\infty} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{0}$$

Descrição em Espaço de Estados

Exemplo Considere o sistema dinâmico definido pela equação diferencial

$$\frac{d^3z(t)}{d^3t} + 2\frac{d^2z(t)}{d^2t} + 4\frac{dz(t)}{dt} + 6z(t) = 3w(t)$$

sendo w a entrada e z a saída. Escolhendo as variáveis de estado:

$$x_1 \triangleq z; \quad x_2 \triangleq \dot{z}; \quad x_3 \triangleq \ddot{z}$$

então

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -6x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3w \end{aligned}$$

Que pode ser colocada na forma matricial

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B} w(t) \\
z(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t)
\end{aligned}$$

Para a função de transferência

$$G(\zeta) = \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)}$$

- $G(\zeta)$ é própria sse $G(\infty) = \text{c}$, c $\in \mathbb{R}$
- $G(\zeta)$ é estritamente própria sse $G(\infty) = 0$
- $G(\zeta)$ é imprópria sse $G(\infty) = \infty$

$\rightsquigarrow$ Um pólo de uma função de transferência própria, é todo escalar λ tal que $|G(\lambda)| = \infty$, e um zero é um valor λ tal que $G(\lambda) = 0$

Realizações

Uma matriz de transferência $\boldsymbol{G}(\zeta)$ é realizável se $\exists\ \boldsymbol{\Sigma}$, $\dim(\boldsymbol{\Sigma}) < \infty$, ou simplesmente $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$ tal que

$$\boldsymbol{G}(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right]$$

sendo $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$ denominada uma realização de $\boldsymbol{G}(\zeta)$

- $\boldsymbol{G}(\zeta)$ pode representar um sistema distribuído, porém não $\boldsymbol{\Sigma}$. Portanto nem toda $\boldsymbol{G}(\zeta)$ é realizável
- Se $\boldsymbol{G}(\zeta)$ é realizável ela tem infinitas realizações

Teorema $\boldsymbol{G}(\zeta)$ é realizável sse $\boldsymbol{G}(\infty) =$ constante

Resposta do Sistema Dinâmico

O sistema LIT

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} \delta\,[x(t)] &= Ax(t) + Bw(t), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{cases}$$

Tem como resposta (ou trajetória, ou solução):

$$\boldsymbol{\Sigma}_c : \quad \begin{cases} x(t) = e^{At}x(\mathbf{0}) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau \\ z(t) = Ce^{At}x(\mathbf{0}) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau + Dw(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_d : \quad \begin{cases} x(t) = A^t x(\mathbf{0}) + \sum_{\tau=1}^t A^{\tau-1}Bw(t-\tau) \\ z(t) = CA^t x(\mathbf{0}) + C\sum_{\tau=1}^t A^{\tau-1}Bw(t-\tau) + Dw(t) \end{cases}$$

Equações Dinâmicas Equivalentes – Mudança de Coordenadas

Para o sistema: $$\Sigma = \begin{cases} \delta\left[x(t)\right] &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Sistema dinâmico equivalente: $$\bar{\Sigma} = \begin{cases} \delta\left[\bar{x}(t)\right] &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}x(t) + Du(t) \end{cases}$$

- $\bar{x} = Px$, $\det(P) \neq \mathbf{0}$, $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$, $\bar{C} = CP^{-1}$
- $\lambda\left(A\right) = \lambda\left(\bar{A}\right)$?
- Com ζ representando s ou z obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{G}(\zeta) &= \bar{C}(\zeta\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} \\ &= CP^{-1}(\zeta\mathbf{I} - PAP^{-1})^{-1}PB + D \\ &= CP^{-1}P(\zeta P^{-1}P - A)^{-1}P^{-1}PB + D = G(\zeta) \end{aligned}$$

BIBO estabilidade Um sistema relaxado é denominado BIBO estável sse

$$\forall u(t) < \infty \quad \Rightarrow \quad y(t) < \infty$$

Teorema Um sistema é BIBO estável sse

$$\int_0^\infty |g(t)|dt \leq \mathrm{M} < \infty \qquad \left(\text{ou} \sum_0^\infty |g(t)|dt \leq \mathrm{M} < \infty\right)$$

sendo M uma contante e $g(t)$ o núcleo convolucional

⇝ Se $u(t)$ é um sinal de energia finita, ie

$$\left(\int_0^\infty |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathsf{M} < \infty \quad \text{então} \quad \left(\int_0^\infty |y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{\mathsf{M}} < \infty$$

ou seja, se $u(t) \in \mathcal{L}_2$ então $y(t) \in \mathcal{L}_2$ (Hipótese: BIBO estabilidade...)

Teorema $G(\zeta) = [g_{ij}(\zeta)]$, $i = r$, $j = m$, é BIBO estável sse

- pólos de $g_{ij}(s)$ têm parte real negativa
- pólos de $g_{ij}(z)$ têm módulo menor que 1

⇝ Os pólos de $G(\zeta) = C(\zeta\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$ são os autovalores de A

Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov

Considere o sistema dinâmico linear autônomo e relaxado da forma

$$\delta[x(t)] = Ax(t)$$

▷ Um ponto de equilíbrio é alcançado quando $\delta[x(t)] \equiv 0$

▷ No caso contínuo, todas as derivadas nulas significam que os estados não estão variando no tempo e portanto, são indicados como estados ou ponto de equilíbrio, x_e

Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov

Estabilidade no sentido de Lyapunov Seja $\mathcal{R}(\nu)$ a região que consiste de todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \nu, \qquad \nu > 0 \qquad \longrightarrow \quad x_0 = \text{estado inicial}$$

e seja $\mathcal{R}(\varepsilon)$ a região que consiste de todos os pontos tais que

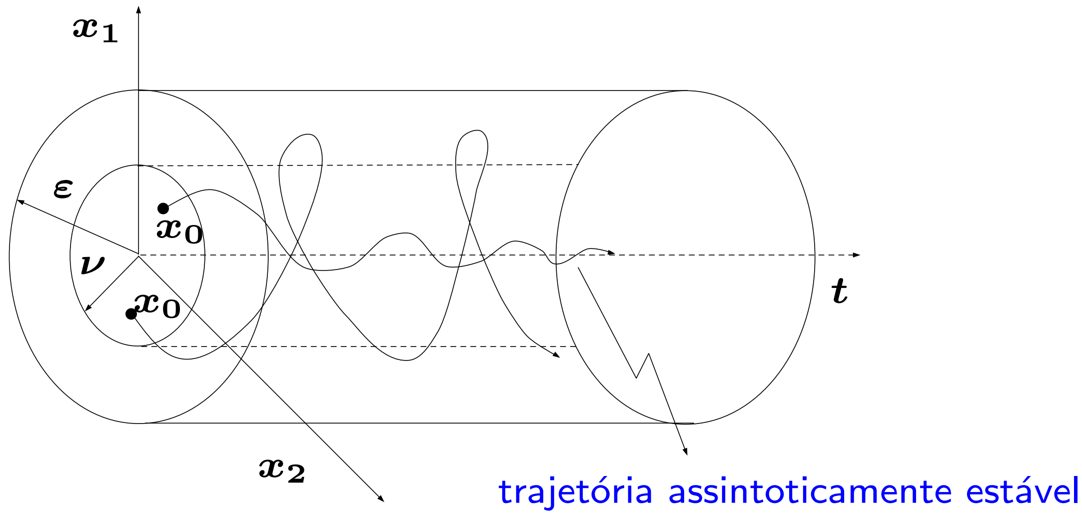
$$\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \; \varepsilon > \nu \quad \forall t > 0$$

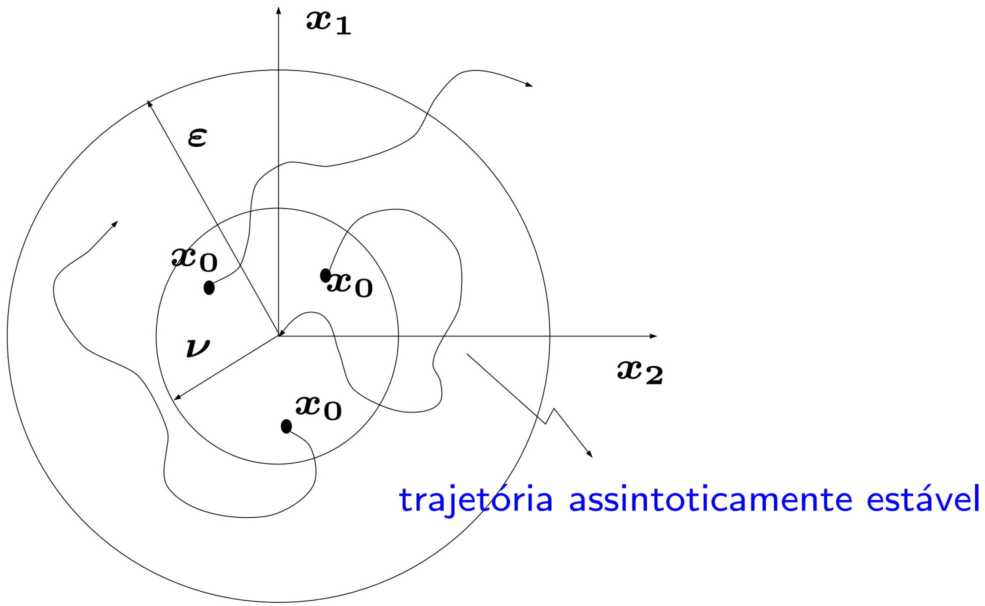
▷ Um estado de equilíbrio, x_e, do sistema autônomo é dito estável no sentido de Lyapunov se, correspondendo a cada $\mathcal{R}(\varepsilon)$ houver um $\mathcal{R}(\nu)$ tal que toda trajetória iniciada em $\mathcal{R}(\nu)$ está confinada em $\mathcal{R}(\epsilon)$ à medida que t cresce

Estabilidade Assintótica Um estado de equilíbrio, x_e, do sistema autônomo é dito ser **assintoticamente estável** se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução começando em $\mathcal{R}(\nu)$ converge para x_e, sem deixar $\mathcal{R}(\varepsilon)$, a medida que t aumenta

Instabilidade Um estado de equilíbrio do sistema autônomo é dito ser instável se, para algum escalar $\varepsilon > 0$, e todo escalar $\nu > 0$, há sempre um estado x_0 em $\mathcal{R}(\nu)$ tal que a trajetória iniciando neste estado deixa a região $\mathcal{R}(\varepsilon)$

Ilustração das definições





Como A é uma matriz quadrada $\Rightarrow \ \exists\, T \ : \ A = T'\Lambda T, \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

$\therefore$ pode-se relacionar os autovalores α_i de e^{At} (e A^t) com os autovalores de A:

$$\alpha_i = e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{(contínuo)}$$

$$\alpha_i = \lambda_i^t, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{(discreto)}$$

	Sistemas Contínuos $\dot{x}(t) = Ax(t)$	Sistemas Discretos $x(t+1) = Ax(t)$
Estabilidade Assintótica	$\Re\{\lambda_i\} < 0 \ \ \forall i$	$\|\lambda_i\| < 1 \ \ \forall i$
Instabilidade	$\Re\{\lambda_i\} > 0 \ \ \forall i$	$\|\lambda_i\| > 1 \ \ \forall i$

Controlabilidade e Observabilidade

Definição Um sistema dinâmico é denominado controlável se para qualquer estado inicial x_0 e para qualquer estado final x_f, existe uma entrada "u" que transfere x_0 para x_f em um tempo finito

⇝ Não há restrição quanto a trajetória do estado

Definição Um sistema dinâmico é denominado observável se para qualquer estado inicial desconhecido x_0, existe um tempo finito, $\tilde{t} > 0$, tal que o conhecimento da entrada u e a saída y em $[0, \tilde{t}\,]$ são suficientes para determinar unicamente o estado inicial x_0

Dois Problemas Básicos em Controle

$$\Sigma_d = \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0), \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1), \ldots \end{aligned}$$

de forma genérica para o instante t, obtém-se a resposta a uma seqüência de entrada não nula combinada com a resposta a condição inicial não nula

$$\begin{aligned} x(t) &= A^t x(0) + Bu(t-1) + ABu(t-2) + A^2 Bu(t-3) + \\ &\quad \ldots + A^{t-2} Bu(1) + A^{t-1} Bu(0) \end{aligned}$$

1. Problema de Controle de Sistemas Determinar uma seqüência $u(\ell)$, $\ell = 1, 2, \ldots, t$ que transfere $x(0) \longrightarrow 0$, $t < \infty$

Definem-se

$$\mathcal{U}_t \triangleq \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ u(t-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_t \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{t-1}B \end{bmatrix}$$

Portanto a resposta $x(t)$ pode ser reescrita da forma

$$x(t) = A^t x(0) + \mathcal{P}_t \mathcal{U}_t$$

Dois Problemas Básicos em Controle

Como deseja-se estabilidade, $x(t)$ é nulo

$$\therefore \quad \mathcal{P}_t \mathcal{U}_t = -A^t x(0)$$

- Para algum $x(0)$ dado. Solução?

- Note que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, o posto de $\mathcal{P}_t$ não irá aumentar se $t > n$

- Existe uma seqüência de controle $\mathcal{U}_t$ que transfere o estado de $x(0)$ para a origem,

se posto$(\mathcal{P}_t) = n$, neste caso o sistema é dito ser controlável e

$$\mathcal{U}_t = -\mathcal{P}_t' \left[\mathcal{P}_t \mathcal{P}_t'\right]^{-1} A^t x(0)$$

- Se $t = n$, então $\mathcal{U}_t = -\mathcal{P}_t^{-1} A^t x(0)$

2. Reconstruindo o Estado Inicial

Para $u(t)$ conhecido. Determinar o estado inicial *desconhecido* a partir do conhecimento da seqüência de saída $y(\ell)$ para $\ell = 0, 1, 2, \ldots, t$

Defini-se

$$\mathcal{Y}_t \triangleq \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Dois Problemas Básicos em Controle

onde

$$
\begin{aligned}
y(0) &= Cx(0) + Du(0) \\
y(1) &= Cx(1) + Du(1) = C\left(Ax(0) + Bu(0)\right) + Du(1) \\
y(2) &= Cx(2) + Du(2) = C\left(A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)\right) + Du(2) \\
&\ \vdots \\
y(t) &= C\left(A^t x(0) + A^{t-1}Bu(0) + A^{t-2}Bu(1) + \ldots\right. \\
&\quad \left. + ABu(t-2) + Bu(t-1)\right) + Du(t)
\end{aligned}
$$

Dois Problemas Básicos em Controle

$$\therefore \quad \mathcal{Y}_t = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^t \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_t} x(0) + \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ CA^{t-1}B & CA^{t-2}B & CA^{t-3}B & \cdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(t) \end{bmatrix} \right.}_{\Gamma}$$

- Como Γ é precisamente determinado, obtém-se $\widetilde{\mathcal{Y}}_t = \mathcal{Y}_t - \Gamma$

$$\therefore \quad \widetilde{\mathcal{Y}}_t = \mathcal{Q}_t \, x(0)$$

- Se cada vetor $y(i)$ tem r componentes, a matriz $\mathcal{Q}_t$ tem ordem $rt \times n$. Existe solução **se posto($\mathcal{Q}_t$) $= n$, neste caso o sistema é dito ser observável** (detalhe, o posto de $\mathcal{Q}_t$ não aumenta para $t > n - 1$!)

$$\therefore \quad x(0|t) = \left[\mathcal{Q}_t' \mathcal{Q}_t\right]^{-1} \mathcal{Q}_t' \, \widetilde{\mathcal{Y}}_t$$

Controlabilidade

Teorema As afirmações a seguir são equivalentes:

1. O par (A, B) é controlável $\quad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m})$
2. A matriz L_c de ordem $n \times n$ da forma

$$L_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau \quad \left(= \sum_{\tau=0}^{t} A^\tau BB^T \left(A^\tau\right)^T \right)$$

é não singular $\forall t > 0$. Particularmente se A é estável, então $L_c \succ 0$ tal que

$$AL_c + L_cA^T = -BB^T \quad \text{(para sistemas contínuos)}$$

$$AL_cA^T - L_c = -BB^T \quad \text{(para sistemas discretos)}$$

Neste caso, L_c é denominado **Gramiano de Controlabilidade**

3. A matriz de controlabilidade

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times nm}, \qquad \text{tem posto } n$$

Observabilidade

Teorema As afirmações a seguir são equivalentes:

1. O par (A, C) é observável $(A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{r \times n})$

2. A matriz L_o de ordem $n \times n$ da forma

$$L_o(t) = \int_0^t e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \quad \left(= \sum_{\tau=0}^{t} (A^\tau)^T C^T C A^\tau \right)$$

é não singular $\forall t > 0$. Particularmente se A é estável, então $L_o \succ 0$ tal que

$$A^T L_o + L_o A = -C^T C \qquad \text{(para sistemas contínuos)}$$

$$A^T L_o A - L_o = -C^T C \qquad \text{(para sistemas discretos)}$$

Neste caso, L_o é denominado **Gramiano de Observabilidade**

3. A matriz de observabilidade

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} C & CA & \cdots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{nr \times n}, \qquad \text{tem posto } n$$

Controlabilidade, Observabilidade e MATLAB

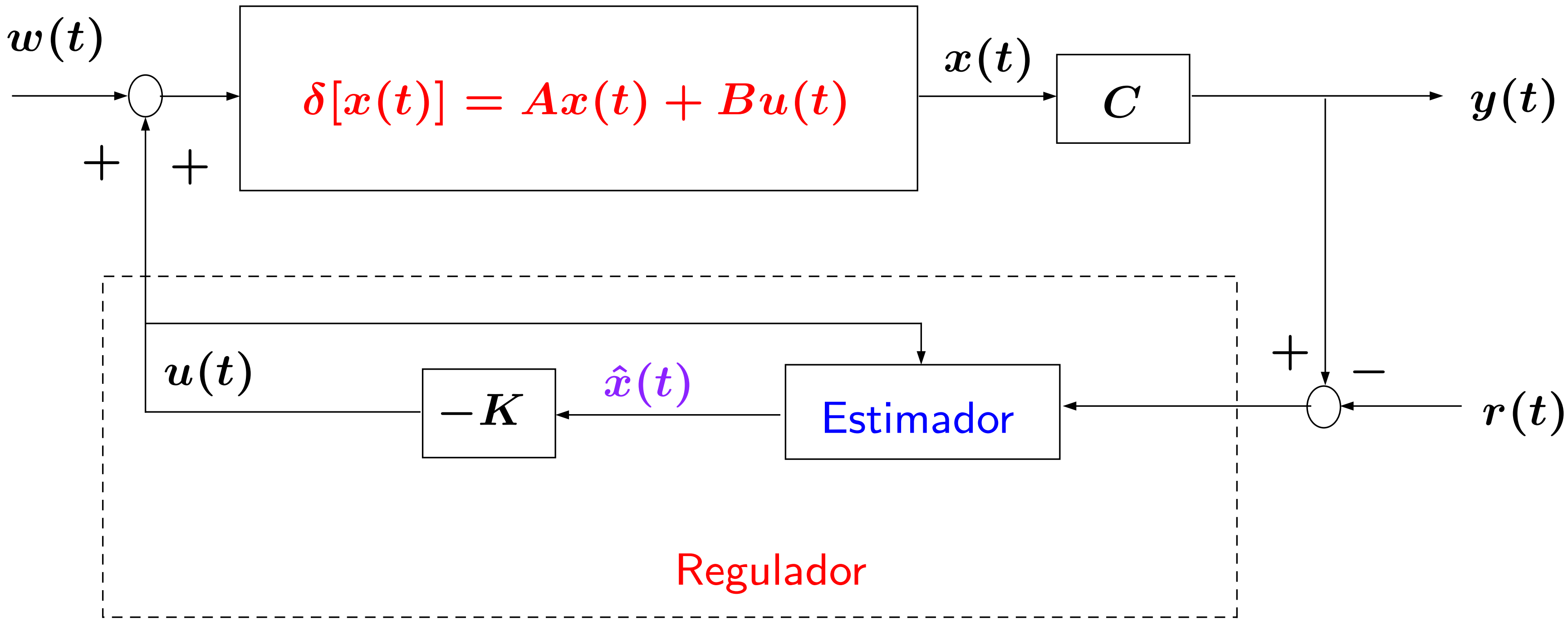
- ▷ MATLAB: `rank(ctrb(C))` – posto da matriz de controlabilidade

- ▷ MATLAB: `rank(obsv(O))` – posto da matriz de observabilidade

- ▷ MATLAB: `gram, dgram` – Gramiano de Controlabiliade ou Observabilidade (a tempo contínuo ou discreto)

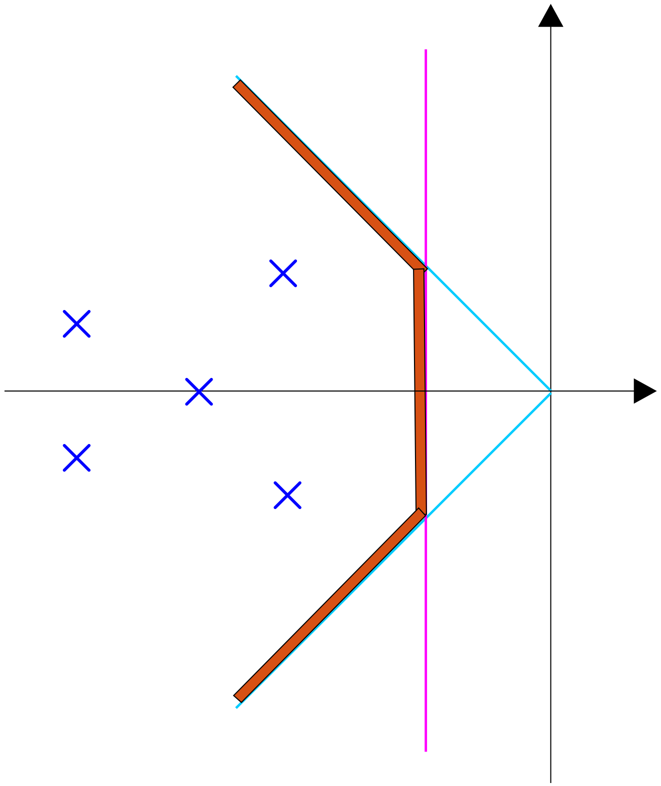
- ▷ No último caso exigisse estabilidade para o sistema...

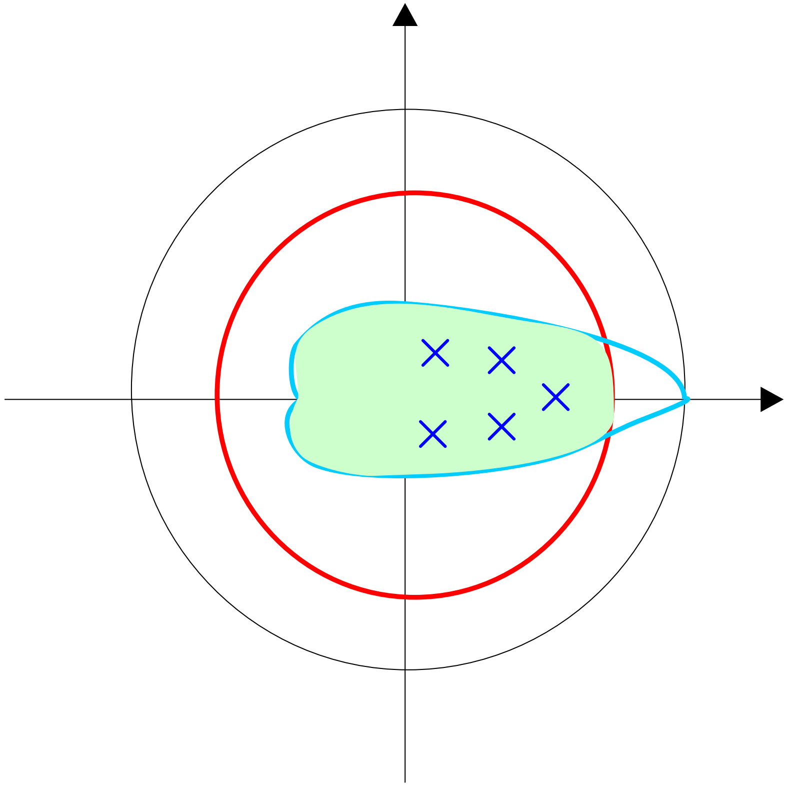
Controle por Realimentação



Princípio da Separação Obtenção do ganho K e Estimador são independentes

Realimentação de Estado – Um Tour por Alocação de Pólos


Plano-s


Plano-z

Realimentação de Estado – Um Tour por Alocação de Pólos

Fazendo $C = \mathbf{I}$ (todos os estados mensuráveis) e $D = \mathbf{0}$

$$\Sigma = \begin{cases} \delta[x(t)] & = & Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = \mathbf{0} \\ y(t) & = & x(t) \end{cases}$$

Lei de controle : $u(t) = -Ky(t) = -Kx(t) \quad \Rightarrow \quad \delta[x(t)] = (A - BK)x(t)$

Transformada do sistema em malha fechada: $(\zeta\mathbf{I} - A + BK)\,X(\zeta) = \mathbf{0}$

Autovalores em malha fechada desejados : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Então K é solução do sistema: $|\zeta\mathbf{I} - A + BK| = (\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)\ldots(\zeta - \lambda_n)$

Matlab

- `acker` – Sistemas SISO, pólos repetidos, $n = 10$
- `place` – Sistemas MIMO, pólos distintos

Exemplo Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \end{cases}$$

Autovalores em malha fechada desejados: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$

▷ Polinômio característico:

$$(s+3)(s+4) = s^2 + 7s + 12 = |s\mathbf{I} - A + BK| = s^2 + (K_2 - 3)s + 2K_1$$

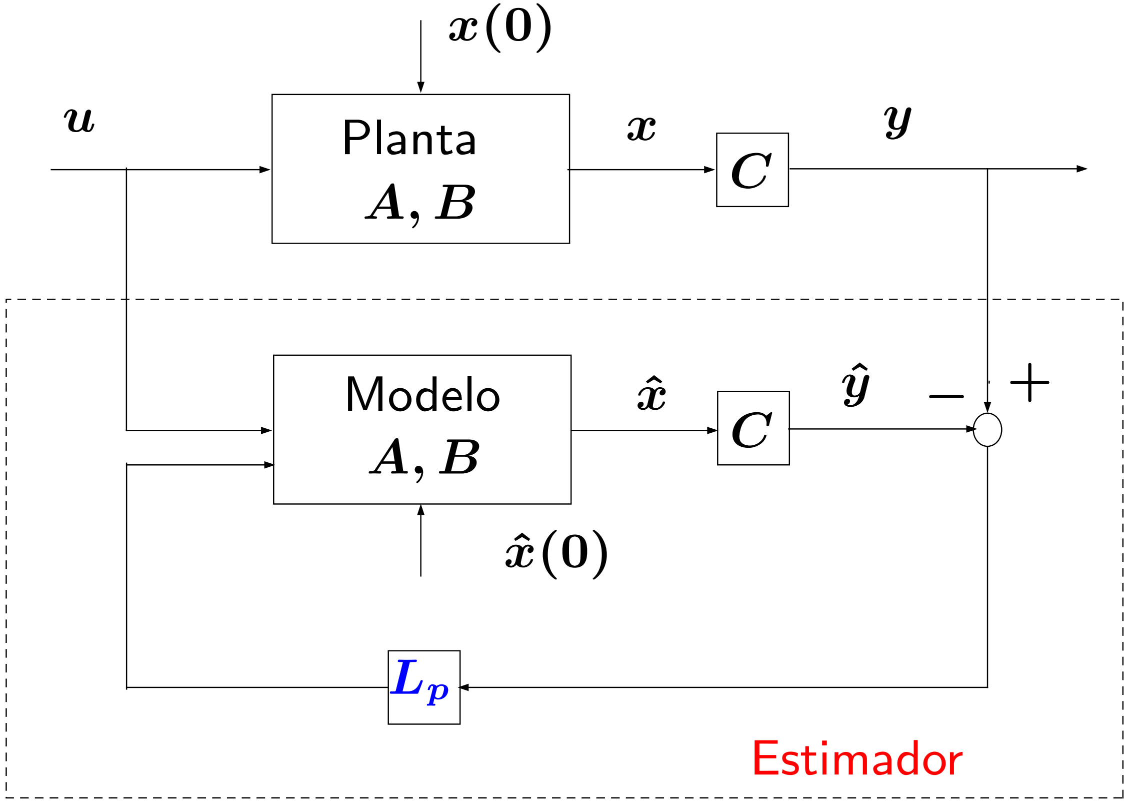
e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2K_1 = 12 \\ K_2 - 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Estimador – Observador

$\rightsquigarrow$ $\quad y(t) \neq x(t)$, estimar (reconstruir) $x(t)$

Lei de controle: $u(t) = -K\hat{x}(t)$



Estimador – Observador

$$\therefore\ \delta[\hat{x}(t)] = A\,\hat{x}(t) + Bu(t) + L_p(y(t) - \hat{y}(t))$$
$$= A\,\hat{x}(k) + Bu(t) + L_pC(x(t) - \hat{x}(t))$$

Erro de estimativa, $\widetilde{x} \triangleq x - \hat{x}$:

$$\delta[\widetilde{x}(t)] = A\,x(t) + Bu(t) - A\,\hat{x}(t) - Bu(t) - L_pC\,\widetilde{x}(t)$$
$$= (A - L_pC)\,\widetilde{x}(t)$$

- **Se** $(A - L_pC)$ **for assintoticamente estável**, então $\widetilde{x}(\infty) \to 0$, $\forall\,\widetilde{x}(0)$
- Como calcular L_p ? Autovalores para o erro de estimativa: $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Então

$$|\zeta I - A + L_pC| = (\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)\cdots(\zeta - \lambda_n) = 0$$

Controle Baseado no Observador

Regulador: Lei de Controle + Observador

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta[\hat{x}(t)] & = & \underbrace{(A - BK - L_p C)}_{A_C}\, \hat{x}(t) + \underbrace{L_p}_{B_C}\, y(t) \\ u(t) & = & -\underbrace{K}_{C_C}\, \hat{x}(t) \end{array}\right. \implies \frac{U(\zeta)}{Y(\zeta)} = C_C\,(\zeta \mathbf{I} - A_C)^{-1} B_C$$

Sistema em malha fechada aumentado:

$$\begin{bmatrix} \delta[\tilde{x}(t)] \\ \delta[x(t)] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - L_p C & 0_{n\times n} \\ BK & A - BK \end{bmatrix}}_{2n\times 2n} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}}_{2n\times 1}$$

$\therefore$ Princípio da Separação: $|\zeta I - A + BK| \times |\zeta I - A + L_p C| = 0$!!

Seleção dos pólos do erro de estimativa ?

2 a 6 vezes mais rápidos do que os pólos da lei de controle, $u = -K\hat{x}$. Por que? A resposta global do sistema é dominada pelos pólos da lei de controle

Notas

- A ordem do regulador é a mesma da planta e do estimador, n
- Em regime, $x(\infty) = 0$ (sistema estável) e portanto $y(\infty) = 0$. A técnica empregada assegura **regulação** com as características impostas pelos autovalores de $(A - BK)$

MATLAB Função de transferência do controlador é obtida fazendo

```
[num,dem] = ss2tf(Ac,Bc,Cc,Dc)
```

sendo, $A_c = A - BK - L_pC$, $B_c = L_p$, $C_c = -K$ e $D_c = 0$

Exemplo Considere o modelo contínuo em variáveis de estado para $1/s^2$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{cases}$$

▷ Se alocar os pólos do controlador em

$$s_{1,2} = -0.707 \pm j0.707 \quad (\xi = 0.707, \quad \omega_n = 1\text{rad/s})$$

obtém-se $K = \begin{bmatrix} 1 & 1.4142 \end{bmatrix}$

Controle Baseado no Observador

▷ Se os pólos do estimador são alocados em $\omega_n = 5$rad/s e $\xi = 0.5$, obtém-se

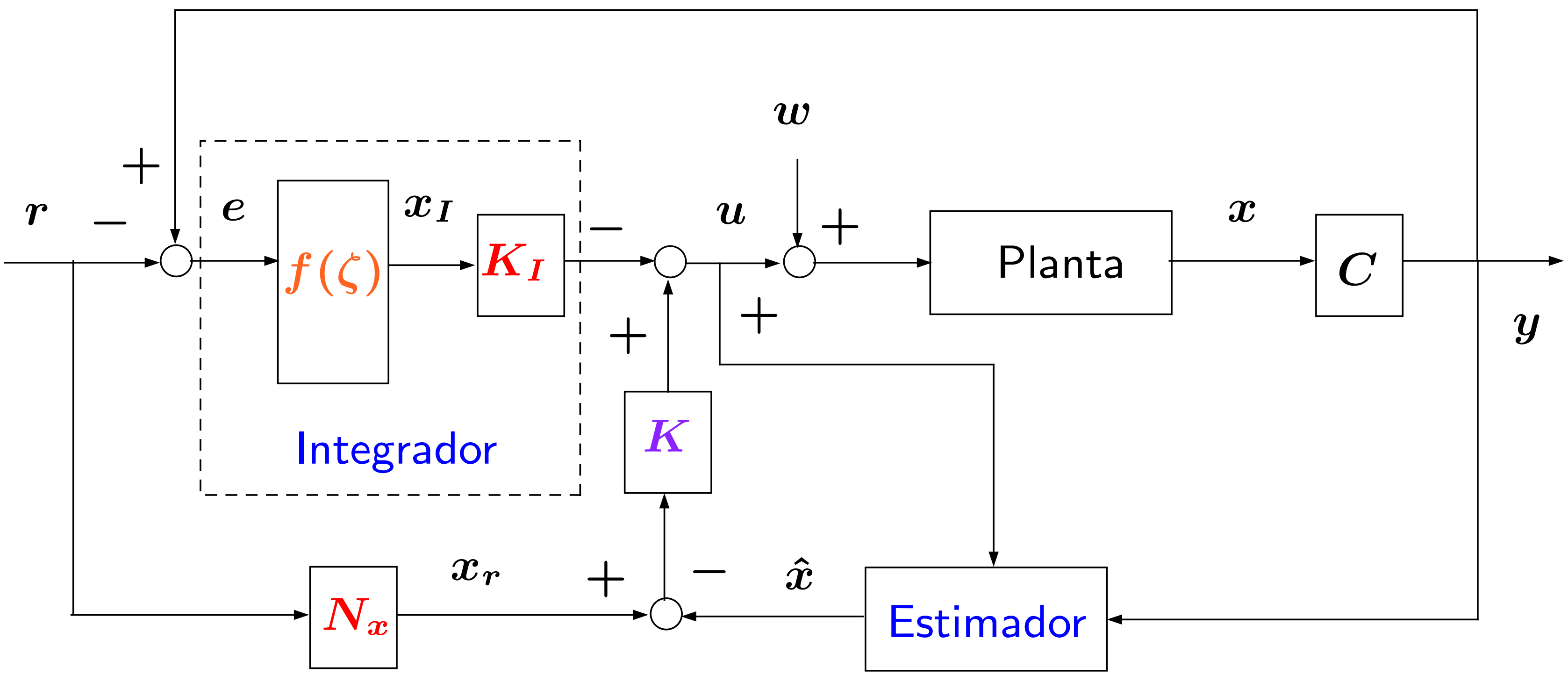
$$L_p = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Controle baseado no observador:

$$D(s) = \frac{-40.4(s + 0.619)}{(s + 3.21 + j4.77)(s + 3.21 - j4.77)}$$

Sistema com Entradas Externas

Rastreamento Robusto e Rejeição de Distúrbios Controle Integral



onde $f(\zeta)$ denota $\dfrac{1}{s}$ ou $\dfrac{1}{z-1}$, respectivamente para contínuo ou discreto

Controle Integral

Modelo considerado:

$$\begin{cases} \delta[x(t)] & = & Ax(t) + Bu(t) + Bw(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases}$$

Resultado esperado?

1. $y(t) \rightarrow r(t) \equiv \mathbf{1}, \quad \forall t > t_0$
2. rejeitar $w =$ sinal constante, porém de magnitude desconhecida

O que fazer? Integrar o erro... Da figura anterior $e(t) = y(t) - r(t)$, e portanto

$$e(t) = \dot{x}_I(t) = Cx(t) - r(t) \qquad \text{(a tempo contínuo)}$$

$$\text{ou} \quad e(t) = x_I(t+1) - x_I(t) = Cx(t) - r(t) \qquad \text{(a tempo discreto)}$$

Controle Integral

Definindo-se: $\eta(t) = \begin{bmatrix} x_I(t) & x(t) \end{bmatrix}^T$

Obtém-se o modelo da planta aumentada:

$$\begin{cases} \delta[\eta(t)] &= A_\eta^\zeta\,\eta(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}}_{B_\eta} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}}_{B_\eta} w(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \eta(t) \end{cases}$$

onde para ζ apropriado:

$$A_\eta^s = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \text{ (contínuo)}, \qquad A_\eta^z = \begin{bmatrix} 1 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \text{ (discreto)}$$

Controle Integral

Lei de controle:

$$\begin{aligned} u(t) &= -K_I x_I(t) + K(x_r(t) - x(t)) \\ &= -K_I x_I(t) - Kx(t) + KN_x r(t) \\ &= -\underbrace{\begin{bmatrix} K_I & K \end{bmatrix}}_{K_\eta} \eta(t) + KN_x r(t) \end{aligned}$$

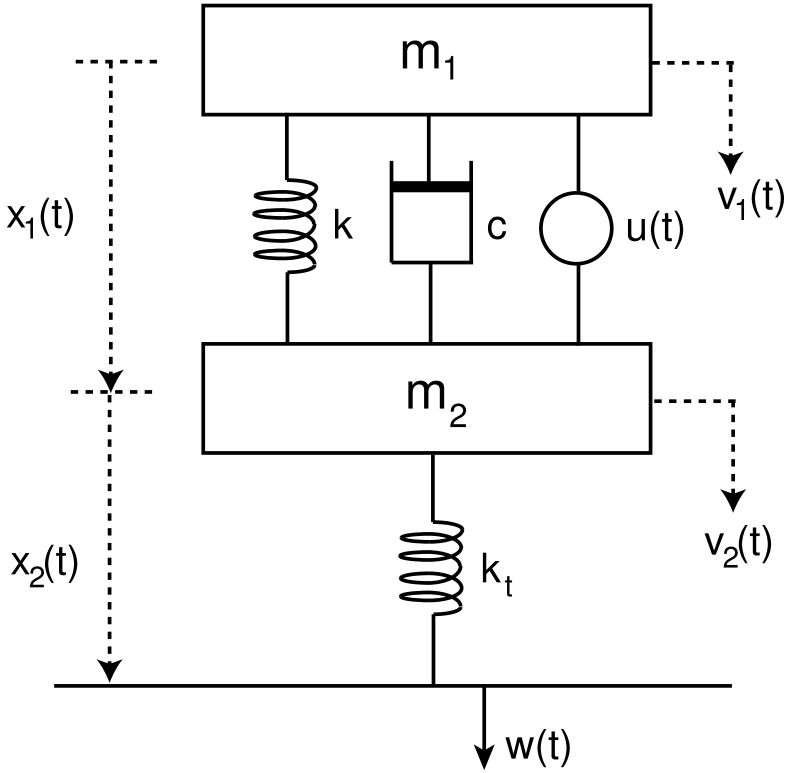
Cálculo de N_x:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ \bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \mathbf{I} & B \\ C_r & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

onde C_r é qq matriz tal que $y_r(t) = C_r x(t) = r(t)$ (em regime)

Exercício

Considere o modelo de suspensão ativa de um automóvel como ilustrado abaixo



Referência M. M. ElMadany and M. I. AL-Majed. "Quadratic synthesis of active controls for a quarter-car model". *Journal of Vibration and Control*, **7**, pp. 1237 - 1252, 2001

Exercício

Sendo que m_1 corresponde a um $1/4$ da massa do automóvel, m_2 é a massa da roda, k_t é a constante de elasticidade do pneu, c é o amortecimento da suspensão, k é constante de mola passiva da suspensão e $w(t)$ é uma perturbação de velocidade relacionada com a imperfeição da pista. As equações de movimento do sistema são

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1(t)}{dt} = v_2(t) - v_1(t) \\[2ex]
\dfrac{dx_2(t)}{dt} = w(t) - v_2(t) \\[2ex]
m_1 \dfrac{dv_1(t)}{dt} = u(t) - kx_1(t) - c[v_1(t) - v_2(t)] \\[2ex]
m_2 \dfrac{dv_2(t)}{dt} = -u(t) + kx_1(t) + k_t x_2(t) + c[v_1(t) - v_2(t)]
\end{cases}
$$

Variáveis de estado: deslocamento da suspensão, x_1; deslocamento da roda, x_2; velocidade da massa do carro, $x_3 = v_1$; velocidade da massa da roda, $x_4 = v_2$

Exercício

Modelo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{k}{m_1} & 0 & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{k_t}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}; \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo 231.12Kg $\leq m_1 \leq 346.68$Kg, $m_2 = 28.58$Kg, $k = 10000$N/m, $k_t = 155900$N/m, and $c = 850$Ns/m

Exercício

1. Considerando realimentação completa de estados, projete um controlador (se existir) que garanta em malha fechada pólos com $\xi \geq 0.7$ e $\omega_n \geq 1$rad/s, para as variações *nos extremos* da massa m_1 (Durante o projeto do controlador, desconsidere o distúrbio).

2. Obter a resposta para cada variável de estado $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, 5$ a uma pertubação da pista modelada como

   - $w(t) = 0.6\text{sen}(8\pi t) + 0.75\text{sen}(12\pi t) + 0.9\text{sen}(16\pi t) + 0.5\text{sen}(20\pi t)$

3. Qual controlador escolher?

4. Repita considerando apenas x_1 e x_2 mensuráveis

Exercício – Modelo Epidemiológico

Expansão de uma doença epidêmica (ou, usando um trocadilho, expansão da divulgação de uma nova idéia (ou vírus) através de uma população (ou rede))

A expansão de uma doença epidêmica pode ser representada por um conjunto de equações não-lineares:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & -a_1x_1(t) - a_2x_1(t)x_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & a_2x_1(t)x_2(t) - a_3x_2(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) & = & a_1x_1(t) + a_3x_2(t) \end{array}\right.$$

onde x_i, $i = 1, 2, 3$ representa a população dividida em três grupos. Sendo que o grupo x_1 é suscetível à doença epidemiológica, x_2 é o grupo infectado com a doença, e o grupo x_3 foi removido da população inicial devido a imunização, morte, ou simplesmente porque se recuperou e é isolado do grupo x_1 que é suscetível à doença. x_1x_2 representa a interação binária entre os suscetíveis e os infectados. A taxa the novos indivíduos suscetíveis à doença é adicionada a população pela entrada $u_1(t)$, e a taxa de novos indivíduos infectados é acrescida à população pela entrada $u_2(t)$. Para uma população isolada (fechada), $u_1(t) = u_2(t) \equiv 0$.

Exercício – Modelo Epidemiológico

⇝ No geral, a_1, a_2 e a_3 são taxas médias por unidade de tempo, suponha constantes

1. Considerando um sistema epidêmico fechado com modelo linear:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -a_1x_1(t) - a_2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_2x_1(t) - a_3x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= a_1x_1(t) + a_3x_2(t) \end{cases}$$

analise a estabilidade. Qual o significado neste modelo de sistema estável, marginalmente estável ou instável?

2. Para $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.25$ e $a_3 = -0.25$ encontre uma lei de realimentação tal que as taxas adicionadas as populações x_1 e x_2 estabilize o modelo, ie

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

qual a interpretação física dessa ação?