Análise Convexa

Análise Convexa

Definição Um conjunto $\mathcal{C}$ é dito ser afim se a reta que passa por dois pontos distintos quaisquer em $\mathcal{C}$ está em $\mathcal{C}$

Definição Dados dois pontos quaisquer p_1, $p_2 \in \mathcal{C}$, e um escalar real α, denomina-se

$$\alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2 \in \mathcal{C}$$

uma **combinação afim** de p_1 e p_2

Nota $\mathcal{C}$ é um conjunto afim se contém a combinação afim de quaisquer dois pontos em $\mathcal{C}$

Análise Convexa

Generalização Se $\mathcal{C}$ é um conjunto afim, $p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathcal{C}$, e $\sum_{k=1}^{j} \alpha_k = 1$, então

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_j p_j \in \mathcal{C}$$

Lema Se $\mathcal{C}$ é um conjunto afim e $p_0 \in \mathcal{C}$, então o conjunto

$$\mathcal{G} = \mathcal{C} - p_0 = \left\{ p - p_0 \;\middle|\; p \in \mathcal{C} \right\} \quad \text{é um subespaço}$$

Dem. Se $\mathcal{G}$ é um subespaço então, $\mathcal{G} \neq \emptyset$ e fechado sob as operações de soma e multiplicação por escalar. Suponha que $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ e $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, então $g_1 + p_0 \in \mathcal{C}$ e $g_2 + p_0 \in \mathcal{C}$ de modo que

$$\mu g_1 + \nu g_2 + p_0 = \mu \left(g_1 + p_0 \right) + \nu \left(g_2 + p_0 \right) + \left(1 - \mu - \nu \right) p_0 \in \mathcal{C}$$

como $\mathcal{C}$ é afim, e $\mu + \nu + (1 - \mu - \nu) = 1$, conclui-se que $\mu g_1 + \nu g_2 \in \mathcal{G}$ pois $\mu g_1 + \nu g_2 + p_0 \in \mathcal{C}$

Nota O conjunto afim $\mathcal{C}$ pode ser escrito como um subespaço mais uma constante da forma

$$\mathcal{C} = \mathcal{G} + p_0 = \left\{ g + p_0 \;\middle|\; g \in \mathcal{G} \right\}$$

Definição A dimensão de um conjunto afim $\mathcal{C}$ é a dimensão do subespaço $\mathcal{G} = \mathcal{C} - p_0$, sendo p_0 um elemento qualquer de $\mathcal{C}$

Exemplo $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = y, \;\; A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \;\; y \in \mathbb{R}^m\}$ é um conjunto afim?

Considere $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$, então para qualquer α,

$$\begin{aligned} A\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) &= \alpha A(x_1) + (1-\alpha)Ax_2 \\ &= \alpha y + (1-\alpha)y \\ &= y \end{aligned}$$

o que mostra que a combinação afim $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \mathcal{C}$.

Conjunto Convexo

Definição Um conjunto $\mathcal{C}$ é convexo se para qualquer par de pontos p_1 e p_2 em $\mathcal{C}$, e um escalar $\alpha \in [0, 1]$, a combinação convexa dada por $\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2 \in \mathcal{C}$

Nota Todo conjunto afim é convexo...

Generalização Qualquer ponto da forma

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_j p_j, \quad \text{sendo que} \quad \sum_{k=1}^{j} = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_j \geq 0$$

é uma combinação convexa dos pontos $p_1, \cdots, p_j$

Nota Convexidade pode ser definida para qualquer subconjunto de um espaço vetorial real ou complexo, inclusive o conjunto vazio

Exemplo Uma reta é afim

Exemplo Um segmento de reta (fechado) é convexo, mas não afim (a não ser que se reduz a um ponto)...

Conjuntos Convexos

Exemplo Um conjunto elipsoidal da forma

$$\mathcal{C} = \left\{ p \,\middle|\, (p - p_c)^T P^{-1} (p - p_c) \leq 1, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad P = P^T \succ 0 \right\}$$

é convexo. p_c é o centro do elipsóide e $\sqrt{\lambda(P)}$ fornecem o tamanho dos semi eixos

Teorema

1. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são conjuntos convexos então $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ é convexo
2. Se $\mathcal{C}$ é um conjunto convexo então

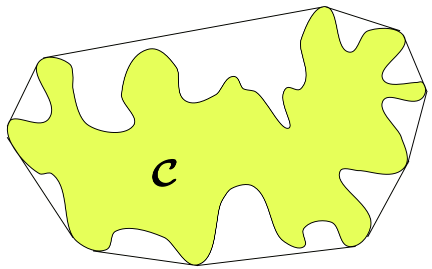
$$\alpha\mathcal{C} \triangleq \{p_2 \mid p_2 = \alpha p_1; \ \alpha \in \mathbb{R}; \ p_1 \in \mathcal{C}\} \qquad \text{é convexo}$$

3. A intersecção de uma coleção de conjuntos convexos é convexo

Dem. 3) Se $p_1, p_2 \in \bigcap_n \mathcal{C}_n$ então $p_1, p_2 \in \mathcal{C}_n, \forall n$. Como $\mathcal{C}_n$ é convexo, então para qualquer $\alpha \in [0,1]$, $\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2 \in \mathcal{C}_n$, $\forall n$. Portanto, $\forall \alpha \in [0,1]$, $\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2 \in \bigcap_n \mathcal{C}_n$

Casca Convexa

Definição Dado um conjunto $\mathcal{C}$ qualquer, o menor conjunto convexo que contém $\mathcal{C}$ é denominado **casca convexa** (e denotado por $\text{co}\{\mathcal{C}\}$)



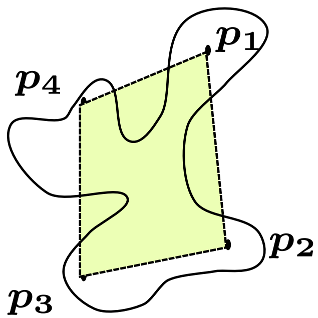
Em outras palavras, a casca convexa de $\mathcal{C}$ é intersecção de todos os conjuntos convexos contendo $\mathcal{C}$. Ou a combinação convexa de todos os pontos em $\mathcal{C}$

Definição $\forall \mathcal{C} \neq \emptyset, \mathcal{C} \subset \mathcal{X}, \exists\, \text{co}\{\mathcal{C}\}$ (sendo $\mathcal{X}$ um espaço vetorial)

Vértices

Fato A combinação convexa pode ser generalizada para n pontos em $\mathcal{C}$

$$p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i, \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$



Definição Todo ponto $\bar{p} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ tal que $\nexists p_1, p_2 \in \mathcal{C}$, $p_1 \neq p_2$, que satisfaça $\bar{p} = \alpha p_1 + (1-\alpha)p_2, \alpha \in (0,1)$ é denominado **ponto extremo ou vértice**

Teorema Qualquer conjunto convexo e compacto é a casca convexa de seus vértices

Cones

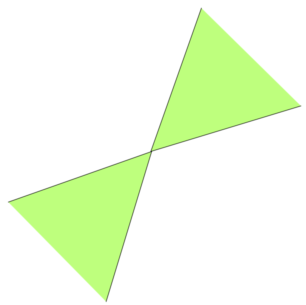
Definição Um conjunto $\mathcal{C}$ é um **cone** se $\forall p \in \mathcal{C}$ e $\alpha \geq 0$ implica $\alpha p \in \mathcal{C}$

Definição Um **cone convexo** é um cone + conjunto convexo, ie para qualquer $p_1, p_2 \in \mathcal{C}$ e $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \in \mathcal{C}$

Nota O cone acima tem vértice em $\mathbf{0}$ e arestas cruzando os pontos p_1 e p_2

Exemplos

1. Cone:



2. Cone convexo?

Cones

3. Conjunto das matrizes simétricas semidefinidas positivas

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\succeq}^{n} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = A^T, \quad A \succeq \mathbf{0}\}$$

é um cone convexo: se $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ e $B, C \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\succeq}^{n}$, então $\alpha_1 B + \alpha_2 C \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\succeq}^{n}$

Veja que isto é um conseqüência direta da caracterização de uma forma quadrática semidefinida positiva. Por exemplo, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$x^T \left(\alpha_1 B + \alpha_2 C\right) x = x^T \alpha_1 B x + x^T \alpha_2 C x \geq 0$$

se $B \succeq \mathbf{0}$, $C \succeq \mathbf{0}$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$

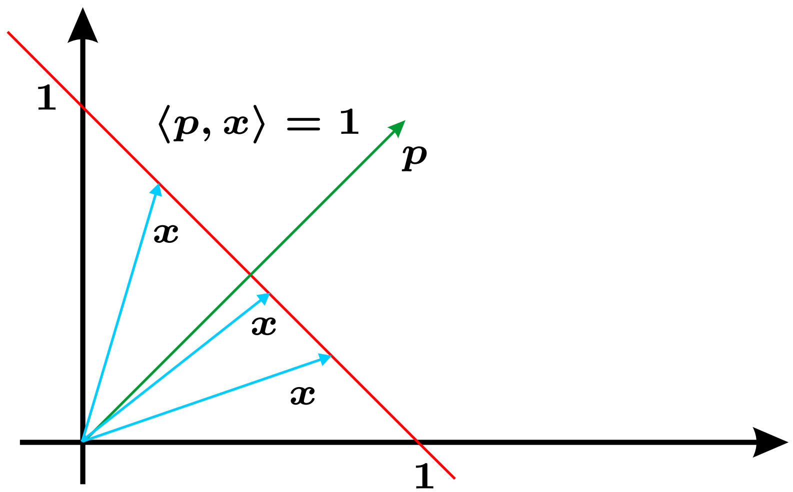
Hiperplanos ou Funções Afins

Definição Denomina-se um hiperplano em $\mathcal{X}$ um conjunto

$$H = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid p^T x = b, \quad 0 \neq p \in \mathcal{X}, \quad b \in \mathbb{R} \right\}$$

e $p \perp H$. Naturalmente a função afim $p^T x - b$ é nula em $\mathcal{X}$

Para $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ e $b = 1$, se $p^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ e H é o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^2$ tal que gera-se a reta na figura abaixo



Hiperplanos

$\rightsquigarrow$ Um hiperplano é um subespaço linear onde dim(H) =dim$(\mathcal{X}) - 1$. Exemplo: a reta é um subespaço linear do $\mathbb{R}^2$...

$\rightsquigarrow$ Para $x_1, x_2 \in H$ e $\alpha \geq 0 \quad \longrightarrow \quad x_3 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in H$?

$$p^T x_3 = \alpha p^T x_1 + (1-\alpha)p^T x_2 = \alpha b + (1-\alpha)b = b$$

$\rightsquigarrow$ Um hiperplano divide o espaço em dois **semi-espaços fechados**:

$$H_{\leq} = \left\{x \in \mathcal{X} \mid p^T x \leq b\right\} \text{ e } H_{\geq} = \left\{x \in \mathcal{X} \mid p^T x \geq b\right\}$$

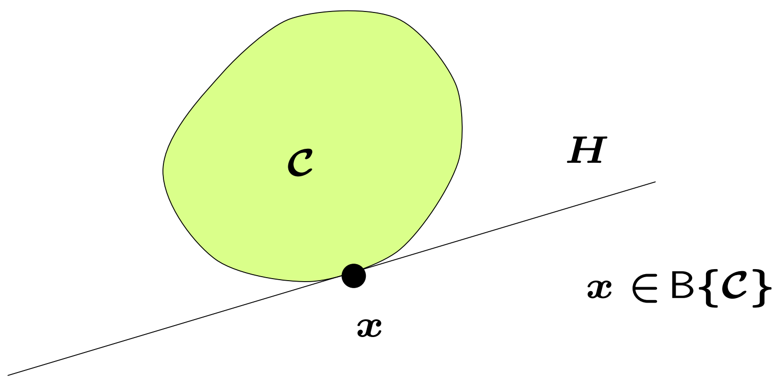
$H_{\geq}$ é o semi-espaço na direção de p e $H_{\leq}$ na direção de $-p$. Estes **semi-espaços são convexos**, porém não-afins

Hiperplanos Suporte

Definição Um hiperplano $\boldsymbol{H}$ é denominado **hiperplano suporte** de um conjunto convexo $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, se $\boldsymbol{\mathcal{C}} \subset \boldsymbol{H}_{\leq}$ (ou $\boldsymbol{\mathcal{C}} \subset \boldsymbol{H}_{\geq}$) e $\boldsymbol{H}$ tem pontos em comum com $\mathrm{B}\{\boldsymbol{\mathcal{C}}\}$

⇝ Em outras palavras, H é um hiperplano suporte de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ se

1. $\inf\{p^T x \mid x \in \mathcal{C}\} = b$ (então $\mathcal{C} \subset H_{\geq}$)
2. ou $\sup\{p^T x \mid x \in \mathcal{C}\} = b$ (então $\mathcal{C} \subset H_{\leq}$)

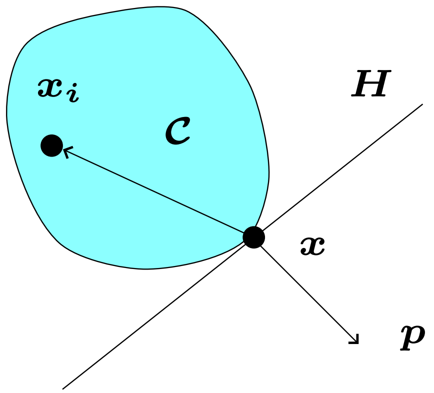


Hiperplanos Suporte

Teorema Considere um conjunto convexo $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$. Se $x \notin \text{int}\{\mathcal{C}\}$ e $\text{int}\{\mathcal{C}\} \neq \emptyset$

$$\Downarrow$$

$$\exists H \ : \ x \in H \ \text{ e } \ \mathcal{C} \subset H_{\leq} \ \text{ ou } \ \mathcal{C} \subset H_{\geq}$$



1. $p^T(x_i - x) \leq 0, \quad \forall x_i \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \subset H_{\leq}$
2. $p^T(x_i - x) \geq 0, \quad \forall x_i \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \subset H_{\geq}$

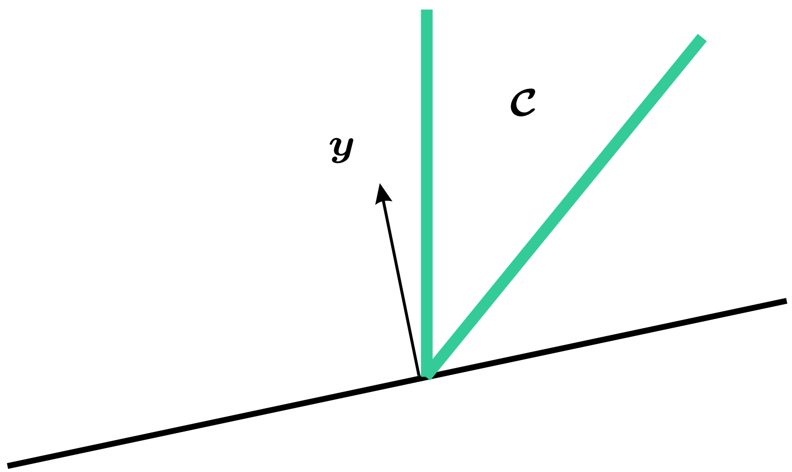
Cone Dual

Definição Considere um cone $\mathcal{C}$. O conjunto

$$\mathcal{C}^* \triangleq \{y \mid x^T y \geq 0, \ \ \forall x \in \mathcal{C}\}$$

é chamado cone dual de $\mathcal{C}$

Interpretação $y \in \mathcal{C}^*$ sse $-y$ é normal a um hiperplano que suporta $\mathcal{C}$ na origem

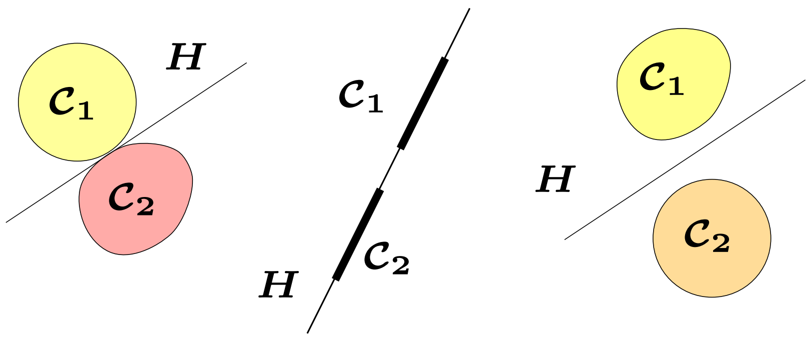


Note que o semi-espaço com o y normal e interno contém o cone $\mathcal{C}$, então $y \in \mathcal{C}^*$

Hiperplanos Separadores

Definição Um hiperplano $\boldsymbol{H}$ é denominado **hiperplano separador** se para dois conjuntos convexos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ $\quad \exists \boldsymbol{H} \ : \ \mathcal{C}_1 \subset \boldsymbol{H}_{\leq}$ **e** $\mathcal{C}_2 \subset \boldsymbol{H}_{\geq}$

$\rightsquigarrow$ Os conjuntos são estritamente separáveis se $\mathcal{C}_1 \subset \boldsymbol{H}_{<}$ e/ou $\mathcal{C}_2 \subset \boldsymbol{H}_{>}$



+ Exemplo Se $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, então o hiperplano $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ separa $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}2$

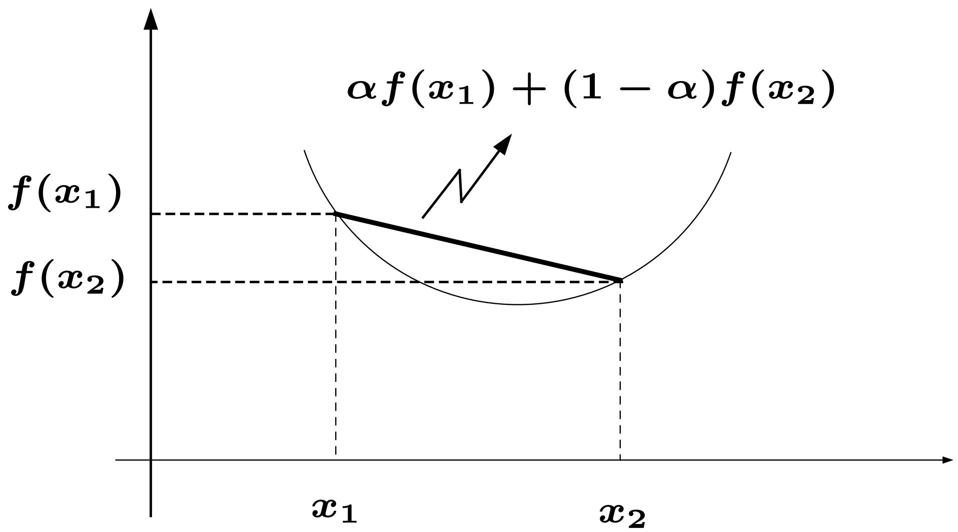
Funções Convexas

Definição Considere um conjunto convexo $\mathcal{C}$. $f : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ é denominada uma **função convexa** se $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

⇝ Considerando desigualdade estrita, então f é **estritamente convexa**

⇝ f é **côncava** se $-f$ é convexa



Funções Convexas

Definição Considere um conjunto convexo $\mathcal{C}$. $f : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ é denominada uma **função quasi-convexa** se $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ e $\forall \alpha \in (0,1)$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

Teorema Se $f : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathbb{R}$ e $g : \mathcal{C}_2 \mapsto \mathbb{R}$ são convexas sobre os conjuntos convexos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ então

1. αf é convexa em $\mathcal{C}_1$, $\forall \alpha \geq 0$
2. $f + g$ é convexa em $\mathcal{C}_1 \bigcap \mathcal{C}_2$

Teorema $\mathcal{C}$ e $f : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ convexos.

$$f\left(\sum_k \alpha_k x_k\right) \leq \sum_k \alpha_k f(x_k), \quad x_k \in \mathcal{C}, \ \alpha_k \geq 0, \ \sum_k \alpha_k = 1$$

Mínimo de Função Convexa

Teorema Considere um conjunto convexo não-vazio $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ e $f : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ uma função convexa. Então

1. f é contínua no int$\{C\}$
2. O conjunto $\bar{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ no qual f atinge seu mínimo é convexo
3. Qualquer **mínimo local é também mínimo global** de f

Dem. 3) Suponha que $x^* \in \mathcal{C}$ é um mínimo local de f e que $\exists x \in \mathcal{C}$ tal que $f(x) < f(x^*)$. Sobre o seguimento $\alpha x + (1-\alpha)x^*$, $0 < \alpha < 1$, obtém-se

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha)x^*\right) = f\left(x^* + \alpha(x - x^*)\right) \leq f(x^*) + \alpha \underbrace{\left(f(x) - f(x^*)\right)}_{<0} < f(x^*)$$

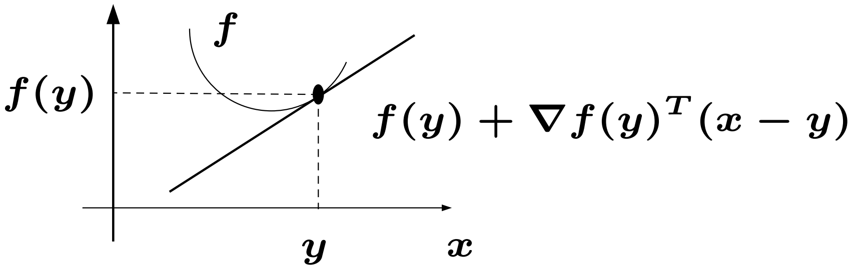
o que contradiz, para $\alpha \to 0^+$, que x^* é um mínimo local

Teoremas de Funções Convexas

Teorema Considere $f \in C^1$. Então f é convexa sobre um conjunto convexo $\mathcal{C}$ sse

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T(x-y), \;\; \forall x, y \in \mathcal{C}$$

onde $\nabla f(y) = \{\partial f / \partial y_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ **é o vetor gradiente**



Teorema Considere $f \in C^2$. Então f é convexa sobre um conjunto convexo $\mathcal{C}$ sse $\nabla^2 f(x) \succcurlyeq \mathbf{0}$, em $\mathcal{C}$. Onde $\nabla^2 f(x) = \left\{ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ **é a matriz Hessiana**

Teoremas de Funções Convexas

Teorema Considere $f \in C^1$, uma função convexa sobre o conjunto convexo não-vazio $\mathcal{C}$. Se existe um ponto $x^* \in \mathcal{C}$ tal que

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{C}$$

então x^* é um **mínimo global** de f em $\mathcal{C}$

⇝ Se f for **estritamente convexa**, ie

$$f(x) > f(y) + \nabla f(y)^T(x - y), \quad x, y \in \mathcal{C}, \quad x \neq y$$

então $x^* \in \mathcal{C}$, tal que $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) > 0$ é um **mínimo global estrito** de f em $\mathcal{C}$

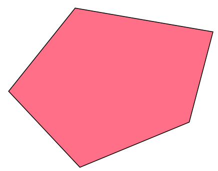
Conjunto Poliedral

Definição A intersecção de um número finito de subespaços fechados é denominado **conjunto poliedral**

Exemplo $\mathcal{C} \triangleq \{x \mid Ax \leq y, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$

Nota Conjuntos poliedrais são convexos e fechados, mas podem não ser limitados

Definição Um conjunto poliedral limitado é denominado **politopo**



Em outras palavras, um politopo é a casca convexa de um conjunto finito de vértices

Portanto todo elemento no politopo pode ser gerado pela **combinação convexa** dos seus vértices

Desigualdades Matriciais Lineares – LMIs

Denomina-se uma desigualdade matricial linear (LMI) em x a descrição:

$$A(x) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n \preceq B$$

onde $B, A_i \in \mathcal{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T\}$, $i = 1, \ldots, n$

Note a grande similaridade com uma desigualdade linear,

$$a^T x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_p a_p \leq b, \quad b, a_i \in \mathbb{R}$$

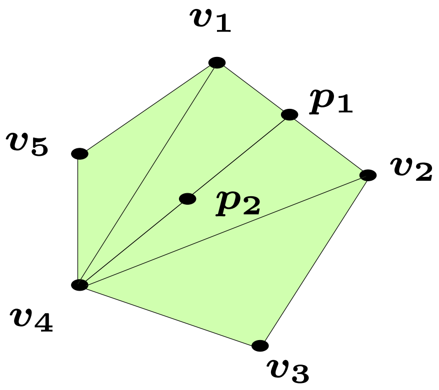
Nota O conjunto solução de uma LMI, ie $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \preceq B\}$ é convexo

Por quê? Definindo-se uma função afim $f \ : \ \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{S}^n$, da forma $f(x) = B - A(x)$, então $\{x \mid f(x) \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}^n_{\succeq}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B - A(x) \in \mathcal{S}^n_{\succeq}\}$ é a imagem inversa do cone das matrizes semi-definidas positivas, que é convexo...

Nota A imagem é $\{f(x) \mid x \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n\}$...

Politopo

Exemplo Politopo: $\mathcal{P} = \text{co}\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$



Todo $p \in \mathcal{P}$ é escrito da forma: $p = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i v_i, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 1$

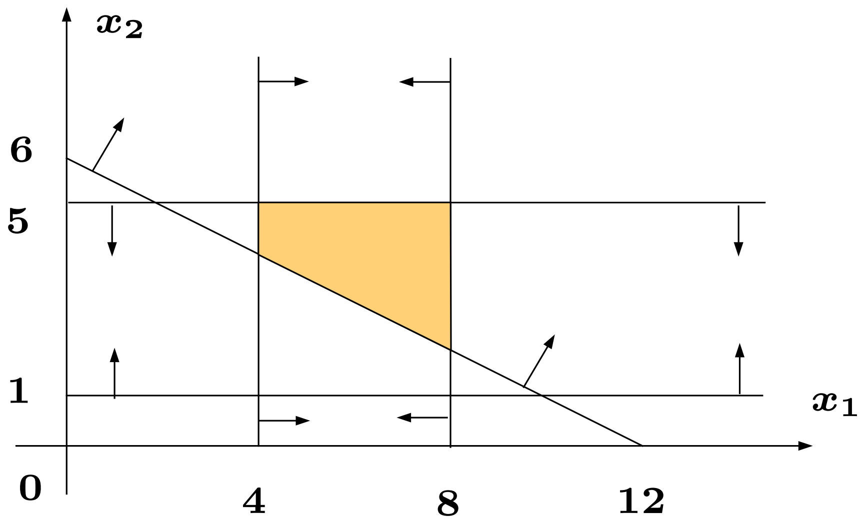
Da figura,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + 0v_3 + 0v_4 + 0v_5 \\ p_2 &= \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + 0v_3 + \frac{1}{3}v_4 + 0v_5 \\ p_2 &= \frac{1}{3}v_4 + \frac{2}{3}p_1 \end{aligned}$$

Um problema de otimização padrão

$$\min_{x} \quad x_2 \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c^T x$$

$$\text{s.a} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}x_1 + x_2 & \geq & 6 \\ x_1 + 0x_2 & \geq & 4 \\ 0x_1 + x_2 & \geq & 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 0x_2 \leq 8 \\ 0x_1 + x_2 \leq 5 \end{array} \right.$$



Estendendo os conceitos

Suponha que a matriz $A \in \mathcal{P}$ onde $\mathcal{P}$ é um politopo, ie $\mathcal{P} = \text{co}\{A_1, A_2, \ldots, A_\kappa\}$

em outras palavras $\mathcal{P} \triangleq \{A \mid A = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i A_i, \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i = 1\}$

Então para o problema de otimização:

$$\min_{X} \quad \text{Traço}\{X\}$$

$$\text{s.a} \quad X \in \mathcal{R}_i, \quad i = 1, \ldots, \kappa$$

sendo $\mathcal{R}_i \triangleq \left\{X \mid A_i XBC + (A_i XBC)^T + Q \preccurlyeq 0, \ Q = Q^T, \exists C^{-1}\right\}$

$\rightsquigarrow$ Geram-se κ restrições sendo que os **vértices** do politopo são elementos **matricias** !!

Exercitando a fé ...

Exercício 1. Mostre que qualquer norma é uma função convexa.

Exercício 2. Considere um escalar não-negativo, $\boldsymbol{\lambda}$, e define-se o seguinte conjunto:

$$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \boldsymbol{A} \succcurlyeq \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\}$$

Suponha que $\boldsymbol{A} \in \mathrm{B}\{\mathcal{K}\}$ onde $\mathrm{B}\{\cdot\}$ denota a fronteira de um conjunto $\{\cdot\}$.

1. Caracterize o espectro de $\boldsymbol{A}$

Exercício 3. Considere uma matrix positiva semi-definida $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Mostre que o conjunto $\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \boldsymbol{X} \succcurlyeq \boldsymbol{Y}\}$ é um cone convexo em $\mathbb{C}^{n \times n}$. (Dica: mostre que o conjunto é convexo para então mostrar que é um cone)

Exercício 4. Mostre que o problema de otimização a seguir é convexo:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{P}} & \text{Traço}\{\boldsymbol{P}\} \\ \text{s.a} & \boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{L}} \end{array}$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{L}} \triangleq \{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{0}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T,\ \boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$