Noções de Álgebra Linear

Espaços Vetoriais Lineares

Definição Considere um corpo $\mathcal{F}$. Um espaço linear vetorial $\mathcal{X}$ é caracterizado por um conjunto de elementos (vetores) com duas operações

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathcal{X} \quad &\rightarrow \quad x + y \in \mathcal{X} && \text{(adição)} \\ \forall \alpha \in \mathcal{F}, x \in \mathcal{X} \quad &\rightarrow \quad \alpha x \in \mathcal{X} && \text{(multiplicação por escalar)} \end{aligned}$$

tais que satisfazem as seguintes propriedades

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{X} \quad \rightarrow \quad x + \mathbf{0} = x$
4. $\forall x \in \mathcal{X}, \ \exists -x \in \mathcal{X} \quad \rightarrow \quad x + (-x) = \mathbf{0}$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
6. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
7. $\exists 0, 1 \in \mathcal{F} \quad \rightarrow \quad 0x = \mathbf{0}, \quad 1x = x$

Exemplos

1. $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$; $\alpha \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^n$

2. $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{n\times m}$; $\alpha \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^{n\times m}$

3. $\mathcal{X} = H(a,b)$, conjunto das funções reais contínuas no intervalo (a,b)

Subespaço Vetorial Um subconjunto $\mathcal{M} \neq \emptyset$ de um espaço vetorial linear $\mathcal{X}$ é denominado um subespaço de $\mathcal{X}$, se $\forall x, y \in \mathcal{M}$ e $\alpha \in \mathcal{F}$

1. $x + y \in \mathcal{M}$

2. $\alpha x \in \mathcal{M}$

Exemplo $\mathcal{S} \triangleq \{A \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = -A^T\}$, pois (i) $\mathbf{0} = \mathbf{0}^T$ e portanto pertence a $\mathcal{S}$, e (ii) $A = -A^T$, $B = -B^T \rightarrow A + B = -(A+B)^T$

Dependência Linear Um conjunto de vetores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $x_i \in \mathcal{X}$, é **linearmente dependente** se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

Caso contrário, o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ é **linearmente independente – LI**.

Veja que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = X\alpha$

sendo $X \triangleq [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k]$, $\alpha \triangleq [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_k]^T$

Coordenadas em Espaços Lineares

Definição Qualquer conjunto de vetores linearmente independentes $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de um espaço linear $\mathcal{X}$ é chamado de **base** de $\mathcal{X}$

1. **Base unitária**

$$x_i \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad i = 1, 2, \ldots, n \ \text{ e o '1' na posição } i$$

2. **Base normal**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

3. **Base ortonormal**

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j = \begin{cases} 1 & \text{se } \ i = j \\ 0 & \text{se } \ i \neq j \end{cases}$$

Coordenadas em Espaços Lineares

Definição O número máximo de vetores linearmente independentes em um espaço linear $\mathcal{X}$ é denominado a **dimensão** de $\mathcal{X}$

Proposição Qualquer conjunto de n vetores LI qualifica uma base em um espaço linear $n-$dimensional

Lema Considere $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O sistema de equações

$$Qx = \mathbf{0}, \qquad x \triangleq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$$

possui uma solução **não-nula** sse Q é **singular**

Coordenadas em Espaços Lineares

Teorema Considere $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$. Então Q é **não-singular** sse o conjunto de vetores $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ é LI

Representação de vetores

Considere um conjunto de vetores $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, base no $\mathbb{R}^n$. Então todo vetor $y \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como **combinação linear**:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i = Q\alpha$$

Como Q é não-singular:

$\alpha = Q^{-1}y$ **representação** única de y na base $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$

Para outra base qualquer P, $y = P\zeta$, $\zeta = P^{-1}y = P^{-1}Q\alpha$!!!

Operadores Lineares

Definição Denomina-se uma função de n variáveis, $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$, sendo $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$

Definição Qualquer função

$$T : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$$

onde $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços lineares sobre o mesmo corpo $\mathcal{F}$, é denominada **operador linear** sse

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2$$

$x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $Tx_1, Tx_2 \in \mathcal{Y}$, e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}$.

Operadores Lineares

Teorema Sejam dois espaços vetoriais tais que dim$(\mathcal{X}) = n$ e dim$(\mathcal{Y}) = m$. Então

$$T : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$$

é **unicamente** determinada pelos $'n'$ mapeamentos $y_i = Tx_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Além disso o operador T pode ser representado por uma matriz A de ordem $m \times n$, e a i-ésima coluna de A é a representação de y_i em relação a base $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de $\mathcal{X}$.

Subespaços Fundamentais

Considere o sistema de equações lineares

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} y = Ax$$

- $x_1, \ldots, x_n$ **entradas** do sistema
- $y_1, \ldots, y_m$ **saídas** do sistema
- a_{ij} **parâmetros** que caracterizam o **mapeamento** entrada-saída

Subespaços Fundamentais

Questões fundamentais

⇝ Caracterizar os conjuntos de saídas $y_1, \ldots, y_m$ que podem ser obtidos dadas as entradas $x_1, \ldots, x_n$ (**controlabilidade** da saída)

⇝ Dadas as saídas $y_1, \ldots, y_m$ identificar, se possível, o conjunto de entradas $x_1, \ldots, x_n$ que as geram (**observabilidade** da entrada)

O espaço vetorial linear como um todo desse problema específico pode ser decomposto como a soma de quatro subespaços fundamentais

Subespaços Fundamentais

Definição O **espaço colunas** de A é o espaço gerado pelas colunas de A, e é denominado espaço *range* de A ($\mathcal{R}(A)$). Por outro lado, o **espaço linhas** de A é o espaço gerado pelas linhas de A ($\mathcal{R}(A^*)$).

Exemplo $y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ está no espaço coluna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad ?$$

Em outras palavras, $y = Ax$, para algum x? Resposta positiva, pois as colunas de A geram todo o espaço 2-dimensional

- posto de colunas de A é a dimensão do $\mathcal{R}(A)$
- posto de linhas de A é a dimensão do $\mathcal{R}(A^*)$
- $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(A^*) = r = \text{posto}(A)$

Definição O **espaço nulo à direita (ou núcleo)** de A é o espaço gerado por todos os vetores x satisfazendo $Ax = 0$ ($\mathcal{N}(A)$). Por outro lado, o **espaço nulo à esquerda** de A é o espaço gerado por todos os vetores y satisfazendo $y^*A = 0$ ($\mathcal{N}(A^*)$).

Exemplo $x = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}^T$ está no espaço $\mathcal{N}(A)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad ?$$

Em outras palavras, $Ax = 0$? Como

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 100 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

portanto, a resposta é negativa

Subespaços Fundamentais

- Considere A de ordem $m \times n$

Dimensão dos quatro subespaços fundamentais: $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{N}(A^*)$?

$$r \triangleq \text{posto}(A) = \dim \mathcal{R}(A)$$

$$n \triangleq \text{colunas de } A$$

$$\therefore \quad r + \dim \mathcal{N}(A) = n \quad \longrightarrow \quad \dim \mathcal{N}(A) = n - r$$

$$r \triangleq \text{posto}(A^*) = \dim \mathcal{R}(A^*)$$

$$m \triangleq \text{linhas de } A$$

$$\therefore \quad r + \dim \mathcal{N}(A^*) = m \quad \longrightarrow \quad \dim \mathcal{N}(A^*) = m - r$$

Subespaços Fundamentais

- O espaço n-dimensional de entrada $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A)$
- O espaço m-dimensional de saída $\mathcal{Y} = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$

Teorema $\mathcal{R}(A^*)^\perp = \mathcal{N}(A)$ (ie, $\mathcal{R}(A^*)$ e $\mathcal{N}(A)$ são subespaços ortogonais)

Exemplo Se $x \in \mathcal{N}(A)$ e $y \in \mathcal{R}(A^*)$ então $x^* y = 0$

MATLAB

`orth(A)` – base ortonormal para $\mathcal{R}(A)$, `null(A)` – base ortonormal para $\mathcal{N}(A)$, e `rank(A)` – posto de A

Exemplo Posto de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$?

a_1 e a_2 são LI. $a_3 = a_1 + a_2$. $a_4 = 2a_2$. A tem duas colunas LI $\therefore$ posto$(A) = 2$

Subespaços Fundamentais

Teorema Dado $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}$, existe uma solução $\boldsymbol{x}$ para $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, para qualquer $\boldsymbol{y}$, sse posto$(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}$ (posto completo de linhas)

Teorema Dado $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$. Se $\exists \boldsymbol{A}^{-1}$, então $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ tem uma única solução para todo $\boldsymbol{y}$, ie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$. Em particular, a única solução para $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

Construção dos Subespaços Fundamentais por DVS

Considere uma DVS de uma matriz A de ordem $m \times n$ e posto$(A) = r$:

$$A = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} = U\Sigma V^*, \quad \Sigma_1 > 0,\ UU^* = \mathbf{I},\ VV^* = \mathbf{I}$$

Teorema

1. U_1 é uma base ortogonal para $\mathcal{R}(A)$, e todas as matrizes no $\mathcal{R}(A)$ são dadas por U_1K_1, para qualquer matriz K_1 com r linhas

2. U_2 é uma base ortogonal para $\mathcal{N}(A^*)$, e todas as matrizes no $\mathcal{N}(A^*)$ são dadas por U_2K_2, para qualquer matriz K_2 com $m - r$ linhas

3. V_1 é uma base ortogonal para $\mathcal{R}(A^*)$, e todas as matrizes no $\mathcal{R}(A^*)$ são dadas por V_1P_1, para qualquer matriz P_1 com r linhas

4. V_2 é uma base ortogonal para $\mathcal{N}(A)$, e todas as matrizes no $\mathcal{N}(A)$ são dadas por V_2P_2, para qualquer matriz P_2 com $n - r$ linhas

Produto Interno

A função $\langle x, y \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ é um **produto interno** se satisfaz os seguintes axiomas

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
2. $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Representação usual para vetores do $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Vetores ortogonais – $x \perp y$

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Norma Vetorial

A função $\|x\| : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ é uma **norma** se satisfaz os seguintes axiomas

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
3. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Normas usuais para vetores no $\mathbb{C}^n$

- **Norma-r** $\quad \|x\|_r \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad 1 \leq r < \infty$

- **Norma-∞** $\quad \|x\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Norma Vetorial

- **Norma-2 ou Norma Euclidiana** $\|x\|_2 \triangleq \sqrt{x^T x} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Nota Interpretação gráfica ? A norma-2 é o comprimento do vetor a partir da origem

MATLAB

`norm(x,1)` – norma-1

`norm(x,2)` ou `norm(x)` – norma-2

`norm(x,inf)` – norma-∞

Espaços Normados

Definição Um espaço linear $\mathcal{X}$ no qual uma norma é definida denomina-se **espaço normado**

Definição Considere $A : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$. O operador é **limitado** se

$$\exists c < \infty \quad : \quad \|Ax\| < c\|x\|, \; \forall x \in \mathcal{X}$$

Definição Considere $A : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$. A **norma de A é a menor constante c**

Portanto a **norma de um operador linear** pode ser caracterizada por

$$\|A\| \triangleq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Espaços Métricos

Definição Um espaço $\mathcal{E}$ onde a distância entre dois pontos é definida, ie, $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}$, e satisfaz

1. $d(x, y) \geq 0 \; \forall \; x, y \in \mathcal{E}$
2. $d(x, y) = d(y, x) \; \forall \; x, y \in \mathcal{E}$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \; \forall \; x, y, z \in \mathcal{E}$ (desigualdade triangular)
4. $d(x, y) = 0$ sse x e y coincidem (são iguais)

denomina-se um **espaço métrico**, e é denotado por $(\mathcal{E}, d)$

Definição Qualquer espaço vetorial $\mathcal{X}$ é um espaço métrico quando defini-se $d(x, y) = ||y - x||$, $x, y \in \mathcal{X}$

Exemplo Métrica discreta é definida como $d(x, y) = 0$ se $x = y$ senão 1. $(\mathcal{E}, d)$ é um espaço métrico discreto se é munido da métrica discreta

Definição Um espaço métrico $(\mathcal{E}, d)$ é denominado **completo** se toda seqüência de Cauchy de pontos em $\mathcal{E}$ tem um limite em $\mathcal{E}$, ie,

$$\text{se } \forall \epsilon > 0,\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad d(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\| < \epsilon, \ \ \forall i, j > N$$

Obs: Intuitivamente, um espaço é completo se "não há buracos", ou "não faltam pontos". Por exemplo, o conjunto dos números racionais não é completo, pois para $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2$ (que é uma seqüencia de Cauchy) converge para um número irracional: $\sqrt{2}$

Obs: $\mathbb{R}^n$ com qualquer das métricas usuais (euclidiana ou máximo – $d(x, y) = \max\{|x - y|, 1\}$) é completo

Espaços de Banach

Stefan Banach

30/03/1892 Cracóvia (Polônia)
†31/08/1945 Lvov (Ucrânia)

Definição Um espaço vetorial normado e completo é denominado um **espaço de Banach**

⇝ Normalmente espaços de Banach são espaços de dimensão infinita contendo funções

Exemplo $\mathcal{L}_p^n[0,\infty)$ – espaço de Lebesgue das funções mensuráveis $f:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,r}} \triangleq \begin{cases} \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_r^p dt\right)^{1/p} < \infty, & \text{para } 1\leq p<\infty \\ \sup_t \|f(t)\|_r < \infty, & \text{para } p=\infty \end{cases}$$

onde $\|\cdot\|_r$ é a norma vetorial-r

$$\|f\|_r \triangleq \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^n |f_i(t)|^r\right)^{1/r}, & \text{for } 1\leq r<\infty \\ \max_{i\in[1,n]} |f_i(t)|, & \text{para } r=\infty \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ **No geral**, $r=2$ e para **evitar confusão**: $\mathcal{L}_p\equiv\mathcal{L}_{p,2}$. Exemplos: $\mathcal{L}_\infty$ e $\mathcal{L}_2$

Espaços de Hilbert

Definição Um espaço vetorial munido com uma estrutura adicional do tipo produto interno é denominado um **espaço com produto interno**

Desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ e $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$

David Hilbert

23/01/1862 (Rússia)
†14/02/1943 (Alemanha)

Definição Um espaço com produto interno que é **completo** com respeito a norma **induzida** pelo produto interno é denominado um **espaço de Hilbert**

Espaços de Hilbert

Corolário Um espaço de Hilbert é um espaço de dimensão infinita

$\therefore$ Um espaço de Hilbert é um espaço de Banach, porém o contrário não é verdadeiro

$\rightsquigarrow$ Espaços de Hilbert generalizam certos operadores lineares tais como a T. de Fourier

Exemplos de espaços de Hilbert

1. Espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ com produto interno definido como sendo $\langle x, y \rangle = \sum_k x_k^* y_k$
2. Espaço $\mathbb{C}^{n\times m}$ com produto interno

$$< A, B > \;\triangleq\; \text{Traço}\,\{A^* B\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{a}_{ij} b_{ij}, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$$

3. Espaço $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ com produto interno: $< f, g > \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço}\,\{f^*(t)g(t)\}\,dt$

Autovalores e Autovetores

Definição Um escalar $\boldsymbol{\lambda}$ é denominado um **autovalor** de $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se $\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, satisfazendo

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}$$

Tal $\boldsymbol{x}$ é denominado um **autovetor** de $\boldsymbol{A}$ associado ao autovalor $\boldsymbol{\lambda}$

Como calcular autovalor ? Basta escrever $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\boldsymbol{x}$ da forma

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

▷ Se $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})$ é não singular, então a **única** solução é $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$!!

▷ Porém $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, então $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})$ deve ser necessariamente singular, ou de forma equivalente, $\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ ...

▷ Toda raíz de $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\lambda}) = \det\,(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})$ é uma autovalor de $\boldsymbol{A}$

Teoria de Matrizes

Traço Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o traço de A, denotado por Tr$\{A\}$ ou Traço$\{A\}$, é definido como sendo:

$$Tr\,\{A\} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ie, é a soma dos elementos da diagonal principal

Propriedades

1. Tr$\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
2. Tr$\{A+B\}$ = Tr$\{B+A\}$ = Tr$\{A\}$ + Tr$\{B\}$
3. Tr$\{AB\}$ = Tr$\{B^T A^T\}$= Tr$\{BA\}$= Tr$\{A^T B^T\}$ (se existirem multiplicações)
4. Tr$\{A^T A\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$

Forma Quadrática e Sinais de Matrizes

Simetria $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ser simétrica se $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$

Nota Todos os autovalores de uma matriz simétrica são **reais**

Endomorfismo Toda matriz simétrica pode ser diagonalizada, mesmo para autovalores repetidos (MATLAB: `jordan`)

Definição Qualquer função $\boldsymbol{V} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ da forma $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é denominada uma forma quadrática

ou na forma expandida

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$$

Forma Quadrática e Sinais de Matrizes

Formas Quadráticas Definidas Considere $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$

1. $\boldsymbol{P}$ é **definida positiva** **(definida negativa)** se $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ $(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$. Simbologia: $\boldsymbol{P} \succ \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{P} \prec \mathbf{0})$

2. $\boldsymbol{P}$ é **semi-definida positiva** **(semi-definida negativa)** se $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ $(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$. Simbologia: $\boldsymbol{P} \succcurlyeq \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{P} \preccurlyeq \mathbf{0})$

Fatos Matriciais

Teorema Considere $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então

1. $\boldsymbol{P} \succ \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{P} \prec \mathbf{0}$) sse $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{P}) > \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{P}) < \mathbf{0}$)
2. $\boldsymbol{P} \succcurlyeq \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{P} \preccurlyeq \mathbf{0}$) sse $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{P}) \geq \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{P}) \leq \mathbf{0}$)
3. $\boldsymbol{P}$ é **indefinida** sse $\boldsymbol{P}$ tem autovalores positivos e negativos

Fato Dado $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ então

1. $\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}$ ou $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T$ é simétrica
2. $\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} \succeq \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T \succeq \mathbf{0}$
3. $\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} \succ \mathbf{0}$ se posto$(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{n}$ (posto completo de colunas)
4. $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T \succ \mathbf{0}$ se posto$(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{m}$ (posto completo de linhas)

Valores Singulares

- ▷ Dado $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- ▷ Define-se $\boldsymbol{M} \triangleq \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} \quad \therefore \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^T \succeq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- ▷ Portanto todos os autovalores de $\boldsymbol{M}$ são reais e não negativos
- ▷ $\boldsymbol{r}$ indica o número de autovalores positivos de $\boldsymbol{M}$
- ⇝ Então os autovalores de $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}$ podem ser ordenados da forma

$$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \cdots \geq \lambda_r^2 > 0 = \lambda_{r+1}^2 = \cdots = \lambda_n^2$$

Denote por $\overline{n} = \min(m, n)$. Então o conjunto

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \lambda_{\overline{n}}$$

é denominado de **valores singulares** de $\boldsymbol{H}$. Em outras palavras, os valores singulares de $\boldsymbol{H}$ (denotado por $\boldsymbol{\sigma}$) são obtidos de:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\lambda(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})}, \qquad \textbf{MATLAB: } \texttt{sigma}}$$

Norma Matricial

Voltando a definição de **norma de um operador linear**

$$\|A\|_r \triangleq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r} = \sup_{\|x\|_r = 1} \|Ax\|_r$$

$\rightsquigarrow$ $\|A\|_r$ é denominada norma matricial induzida por uma norma vetorial r. Para diferentes $\|x\|$, tem-se diferentes $\|A\|$

1. $\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right)$ $\Leftrightarrow$ A maior soma absoluta das colunas

2. $\|A\|_2 = \left(\lambda_{max}(A^T A) \right)^{\frac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow$ Valor singular máximo de A

3. $\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right)$ $\Leftrightarrow$ A maior soma absoluta das linhas

Norma Matricial

Exemplo Normas 1, 2 e ∞ de $A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$?

$$\|A\|_1 = \max\{3 + |-1|;\ 2 + 0\} = 4$$

$$\|A\|_2 = 3.7$$

$$\|A\|_\infty = \max\{3 + 2;\ |-1| + 0\} = 5$$

Norma Matricial

⇝ Interpretação gráfica ? Considere por exemplo a norma $\|A\|_1$. Note que $y = Ax$ e

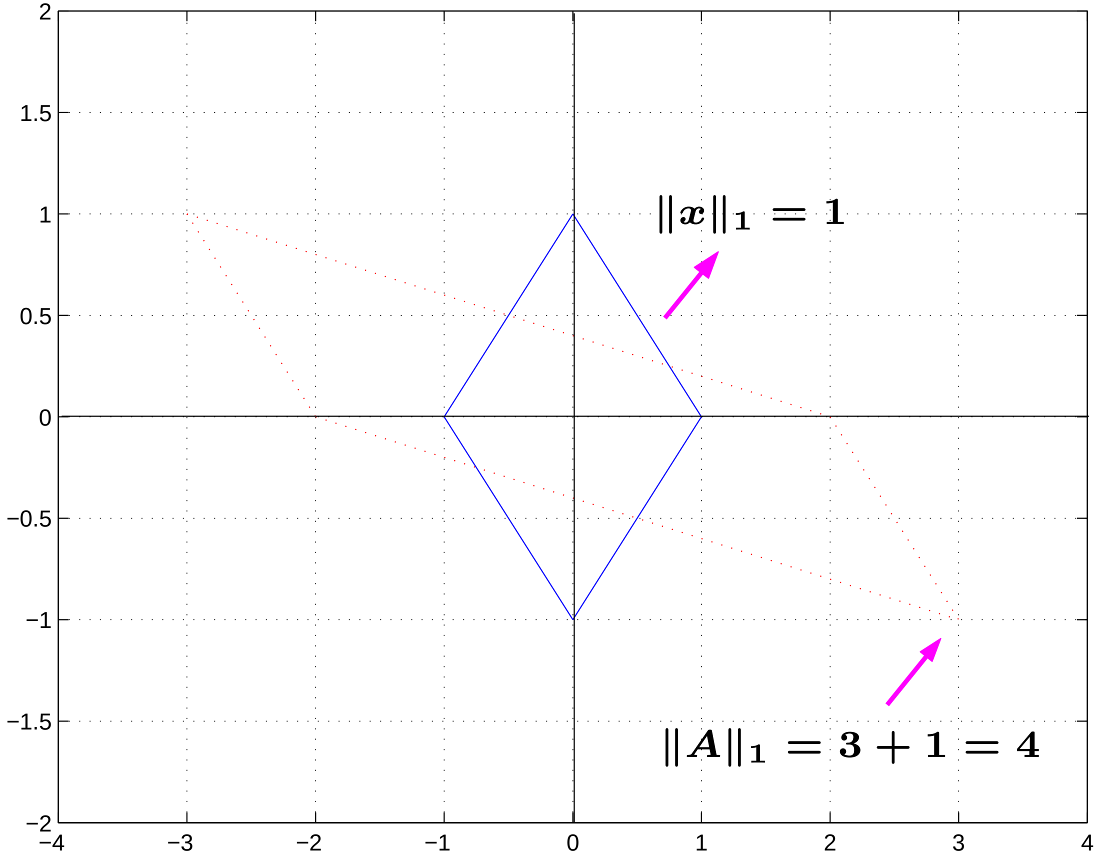
$$\|x\|_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

portanto

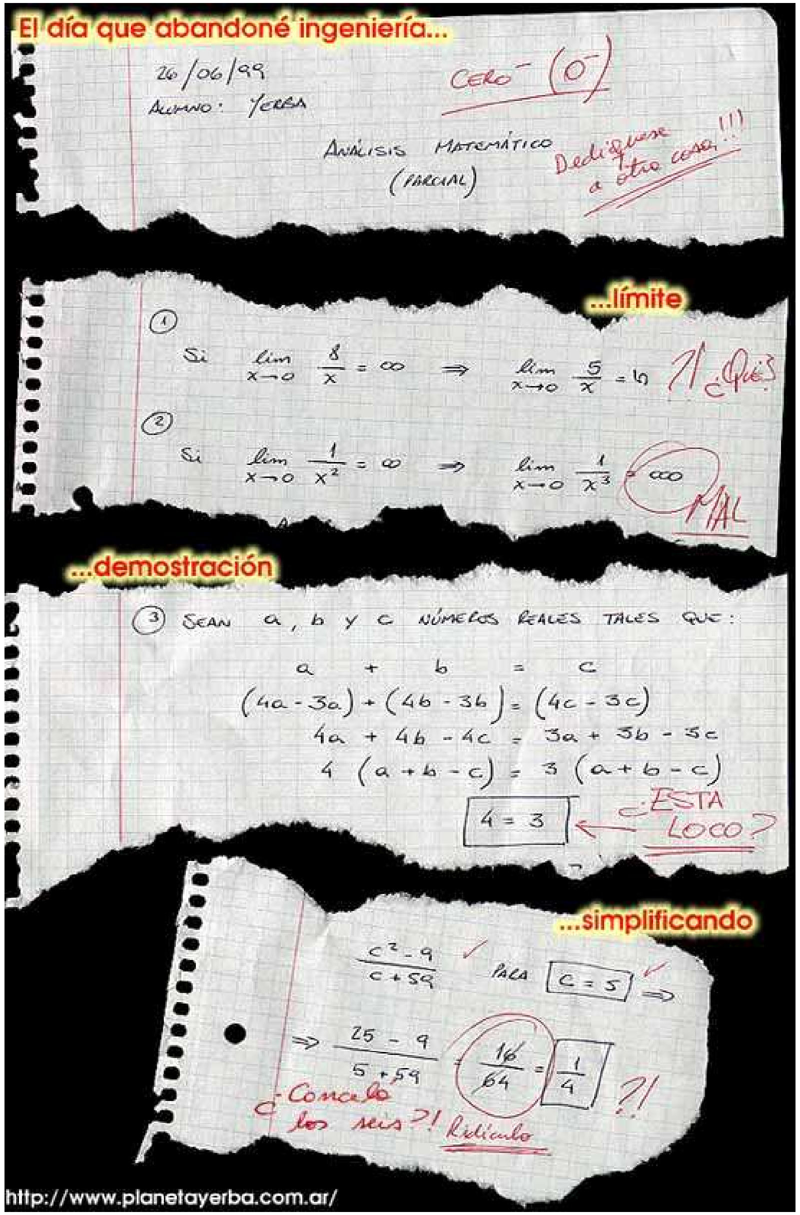
$$y_1 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad y_2 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_4 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Norma Matricial



MATLAB `norm(A,r)`, $r = 1, 2$ ou $r =$inf



Motivando o estudo...