CPDEE
UFMG
CENTRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO
EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Fundamentos do Controle Robusto via Otimização

Prof. Reinaldo M. Palhares

Contato: Sala 2605 - BLOCO 1 — mailto:palhares@cpdee.ufmg.br

Quintas-feiras – 09h25-12h45

Linhas Gerais do Curso

Conceitos Preliminares

- Noções de álgebra linear
- Espaços lineares
- Descrição de sistemas dinâmicos lineares
- Fundamentos de otimização convexa

Normas de Sinais e Sistemas

- Espaços Normados. Espaços de Hardy $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Cálculo das normas

Modelos de Incerteza e Análise de Robustez

- Teorema do Ganho Pequeno. O problema de estabilização robusta

Linhas Gerais do Curso

Desigualdes (Igualdades) Matriciais

- Propriedades das equações algébricas de Riccati
- Complemento de Schur e positividade de matrizes
- Desigualdades matriciais lineares – LMIs – (*Linear Matrix Inequalities*)

Controle $\mathcal{H}_2$

- Relação entre LQR padrão e controle $\mathcal{H}_2$
- Realimentação de estados: Riccati e LMIs
- Controle robusto $\mathcal{H}_2$ por LMIs

Linhas Gerais do Curso

Controle $\mathcal{H}_\infty$

- Realimentação de estados: Riccati e LMIs
- Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ por LMIs

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

- Otimização multiobjetivo

Tópico extra: Controle Fuzzy por Modelos Takagi-Sugeno ...

Tópico extra: Filtragem/Estimação Robusta $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ ...

Aspectos Burocráticos

Avaliações

- Simulações computacionais (20 pontos)
- 1 prova (30 pontos)
- Trabalho intermediário: estudo e apresentação de um artigo recente envolvendo controle robusto (20 pontos)
- Trabalho final no formato de artigo – escolha livre de um tema a ser desenvolvido (30 pontos)

(Pré-)Requisitos

- Noções de controle clássico e moderno (+ para moderno)
- Paciência e perseverança...

Ferramentas Computacionais

- Utilização de pacotes computacionais específicos

LMILab ou SeDuMi (e suas interfaces)

LMITool

Docendo discimus

Problema geral

Dado um modelo (ou uma família de modelos) do sistema a ser controlado e um conjunto de especificações, encontrar um controlador *adequado*

Motivação e Contexto

Métodos tradicionais

- costumam ser bem sucedidos, porém quando fracassam *não há como afirmar que o controlador não exista*
- metodologia de projeto? dependem de experiência, talento e sorte

Métodos baseados em otimização

- O grande delimitador de águas não está nas características **lineares** ou **não-lineares**, mas sim entre **convexidade e não-convexidade** (Rockafellar)
- Computacionalmente bastante eficientes
- Caracteriza os limites de desempenho do sistema

Motivação e Contexto

Especificações de desempenho

- resposta adequada aos sinais de controle
- atenuação de pertubações
- limitação de sinais críticos

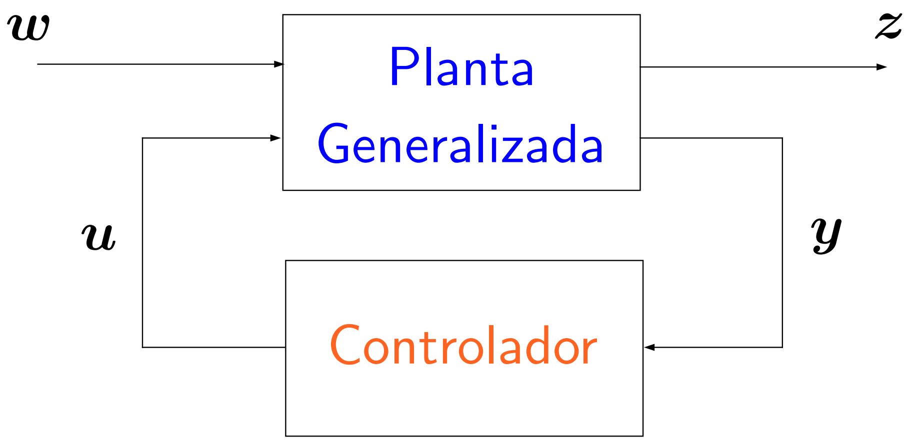
Especificações de robustez

- garantir um nível de desempenho frente a variações no sistema ou diferenças em relação ao seu modelo
- redução de índices de sensibilidade

Especificações de controlador

- Linear, não-linear, invariante no tempo, gain-scheduling, ...
- centralizado, descentralizado, ordem reduzida

Representação do Sistema de Controle



w – entradas exógenas

u – entradas controladas

z – saídas reguladas

y – saídas medidas

Planta generalizada

- evidencia os tipos de sinais acessíveis ao controlador
- incluem informação sobre onde os sinais exógenos atuam
- explicita a presença das saídas reguladas (analogia com o LQR ou LQG)
- especificações são formuladas em termos de $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{z}$

$$\Updownarrow$$

função de transferência em malha fechada

Planta generalizada

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix}$$

sendo

$$z = P_{zw}w + P_{zu}u$$

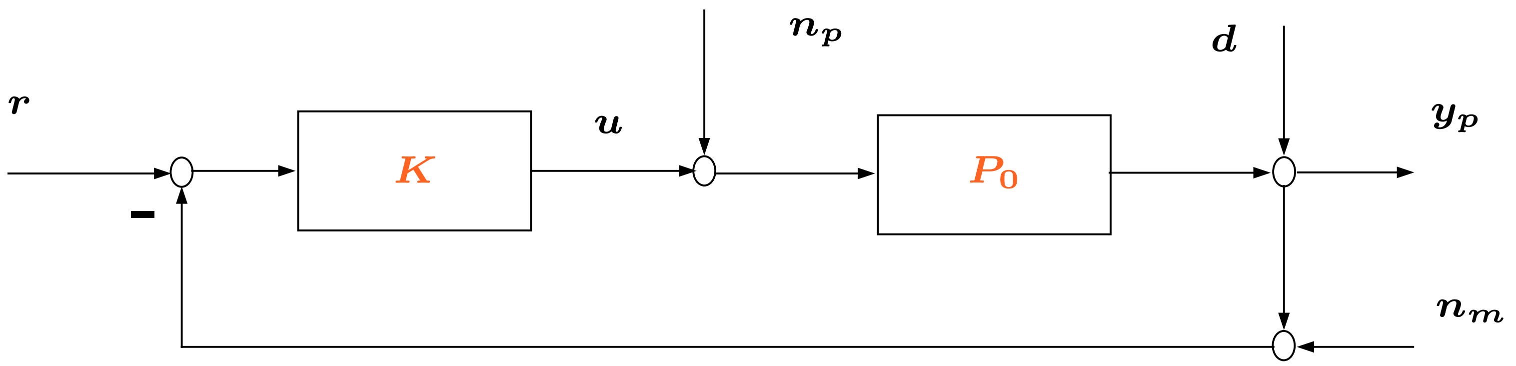
$$y = P_{yw}w + P_{yu}u$$

- Controlador: $u = Ky$

$$\therefore \quad z = (P_{zw} + P_{zu}K\underbrace{(I - P_{yu}K)^{-1}}_{\text{det}(I - P_{yu}K) \neq 0}P_{yw})w \iff z = T_{zw}w$$

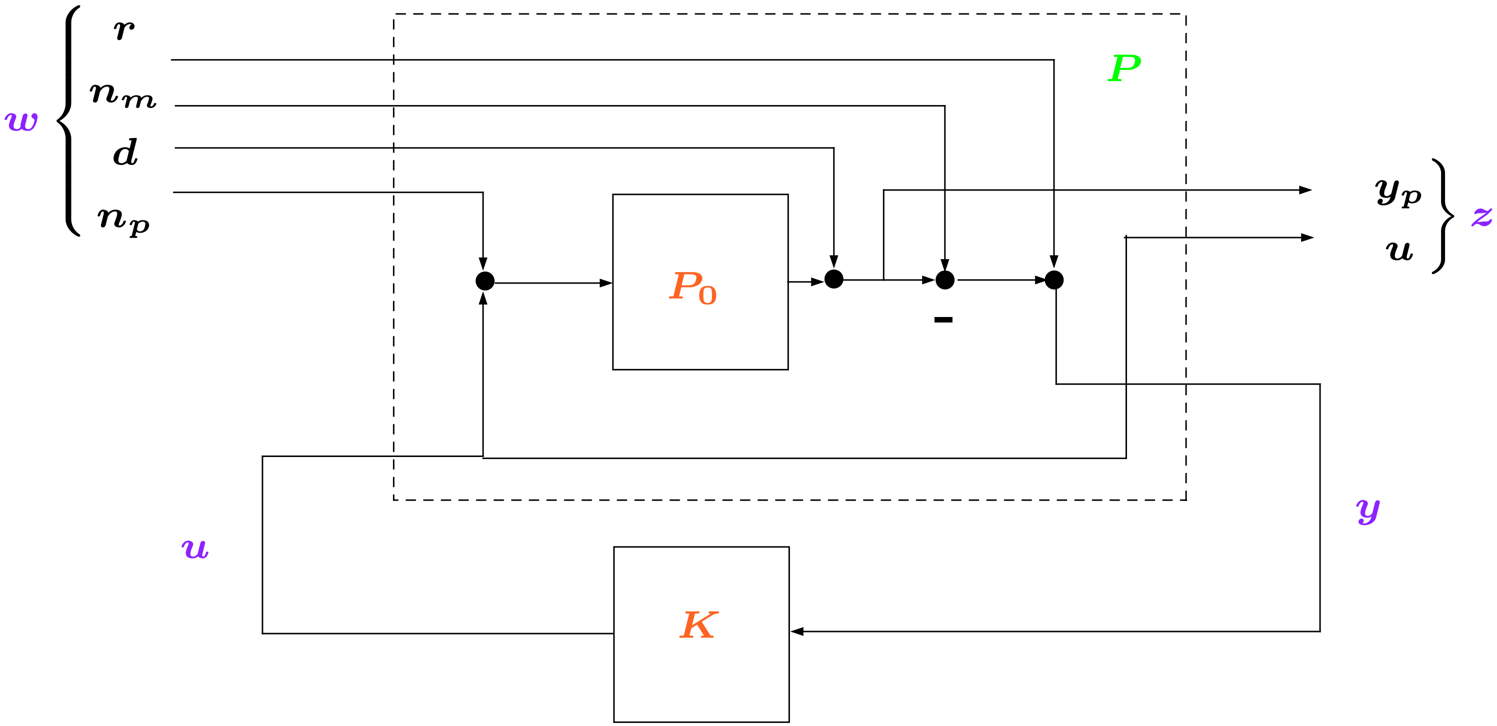
Planta generalizada

Sistema clássico com um grau de liberdade



Planta generalizada

Representação na forma padrão



sendo $y \triangleq r - y_p - n_m$

Planta generalizada

1. $z = P_{zw} w \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_p \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & P_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ n_m \\ d \\ n_p \end{bmatrix}$

2. $z = P_{zu} u \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_p \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

3. $y = P_{yw} w \quad \longrightarrow \quad y = r - y_p - n_m = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ n_m \\ d \\ n_p \end{bmatrix}$

3. $y = P_{yu} u \quad \longrightarrow \quad y = r - y_p - n_m = -P_0 u$

Planta generalizada

Veja então que a planta generalizada é descrita da forma

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$P(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & P_0 & P_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -P_0 & -P_0 \end{array}\right]$$

Realização em espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) & = & C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) & = & C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D$$

sendo $B = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yw} \end{bmatrix}$

Em particular

$$P_{zw} = C_z \left(sI - A\right)^{-1} B_w + D_{zw} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_z & D_{zw} \end{array}\right]$$

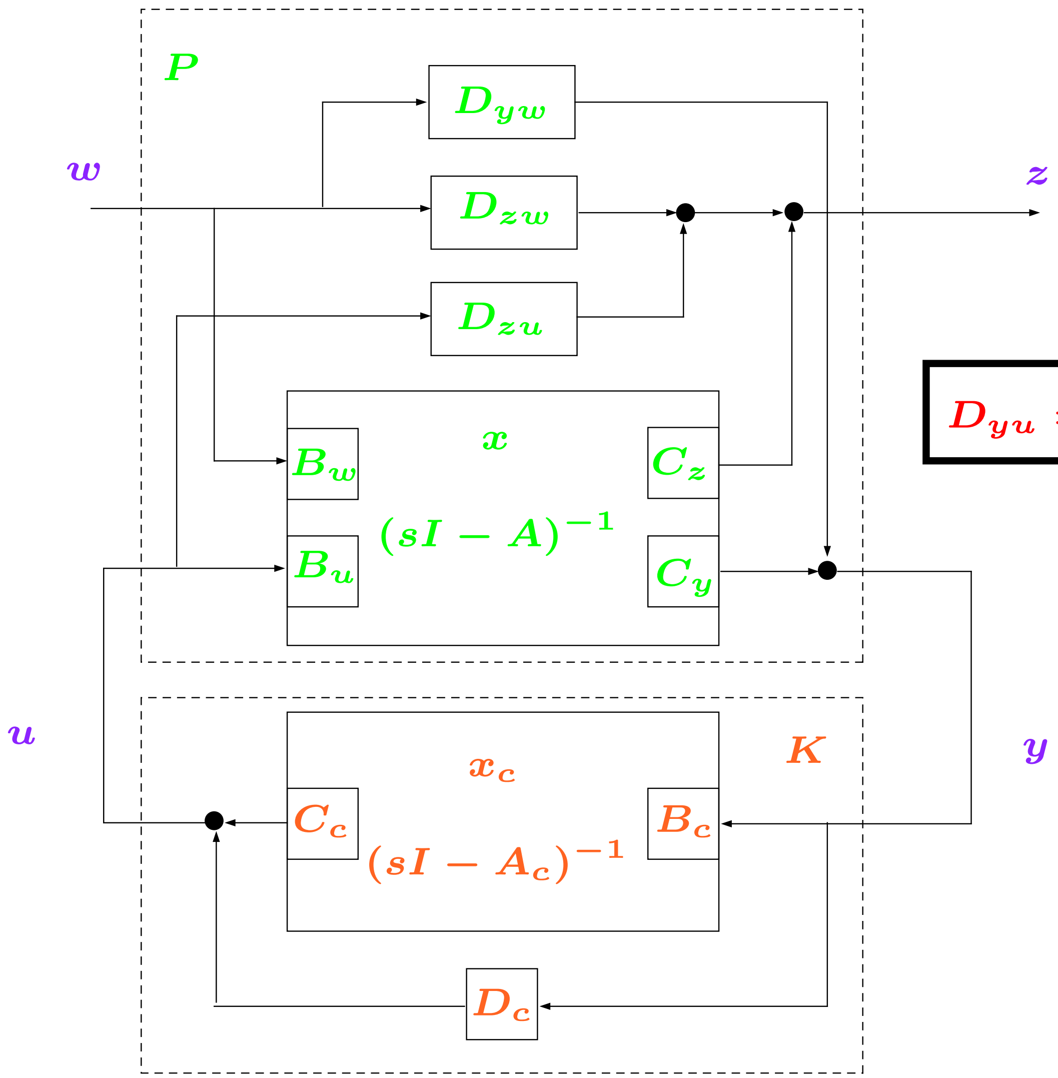
Realização – Controlador

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) & = & A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) & = & C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$K(s) = C_c \left(sI - A_c\right)^{-1} B_c + D_c$$

Planta generalizada



$$\boxed{D_{yu} = 0}$$

Incertezas

Quando modelam-se sistemas dinâmicos, pode-se defrontar com uma série de fontes de incertezas como

- Incertezas paramétricas (estruturadas)
  - Parâmetros físicos que variam entre limites dados
  - Incerteza intervalar ($\mathcal{L}_\infty$)
  - Incerteza elipsoidal ($\mathcal{L}_2$)
- Incertezas não-paramétricas (não-estruturadas)
  - Dinâmicas não-modeladas
  - Modos truncados em altas-freqüências
  - Não-linearidades
  - Efeitos da linearização, variação no tempo

Incertezas

- Como transpor incertezas ?
  - Controle adaptativo
  - Controle preditivo
  - **Controle robusto**

Deseja-se uma única lei de controle válida para todo o domínio de incertezas adotado

Objetivos do Controle

- Minimizar distúrbios externos frutos de irregularidades do asfalto

  ⇝ **Conforto é a palavra de ordem**

  ⇝ **Inovação introduzida na F-1 desde 1987 e consagrada em 91/92 pela Williams**

- Uma variação da suspensão ativa veicular é o denominado ABC *(Active Body Control, ou controle ativo da carroceria)*

  ⇝ Corrige inclinação da carroceria

  ⇝ Em frações de segundo o sistema reequilibra o carro na curva, evitando capotamento

Suspensão Ativa Veicular: FW14 da Williams

Modelo FW14 da Williams 91/92. A suspensão ativa trabalhava por computador, absorvendo as imperfeições do asfalto. Era como se Nigel Mansell e Ricardo Patrese dirigissem num tapete nas onduladas ruas do principado de Mônaco

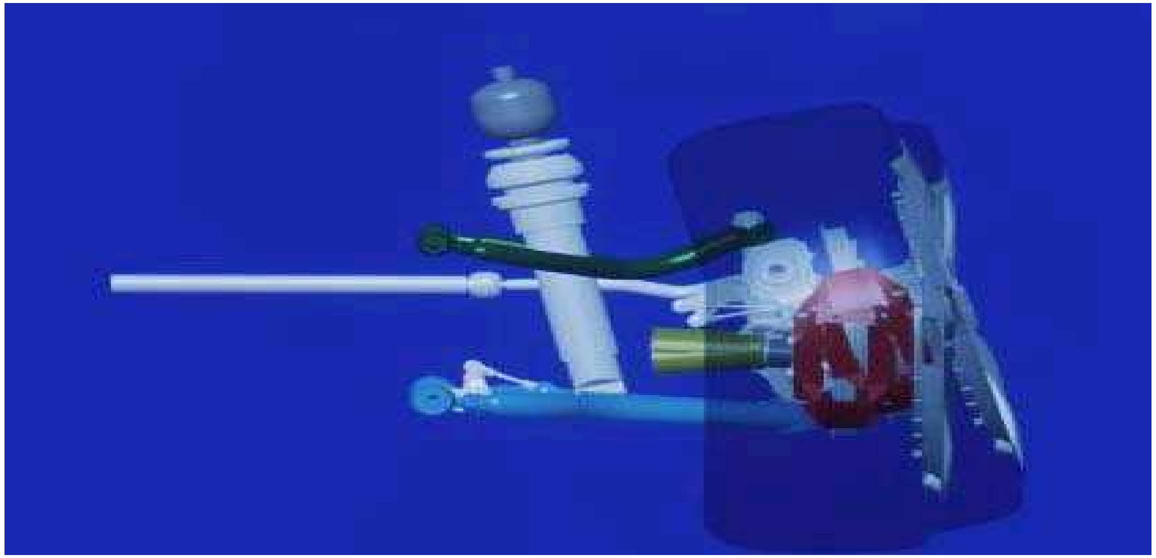
- Em 94, os sistemas de suspensão ativa foram proibidos na F-1...

Suspensão Ativa Veicular: Novo Mercedes-Benz CL

Kart de luxo: em curvas, arrancadas e frenagens, a inclinação do novo CL (à esq.) ficou até 68% menor do que a do antigo

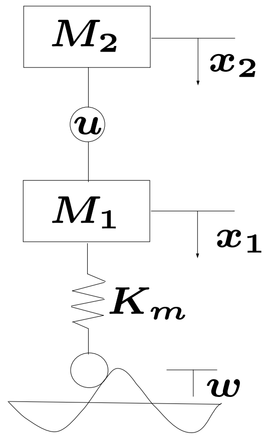
Fonte: DaimlerChrysler

Suspensão Ativa Veicular: Novo Mercedes-Benz CL



A cambagem é realmente ativa, no sentido de se tornar mais negativa (rodas mais afastadas no ponto de contato com o solo) quando um princípio de derrapagem é detectado. Em caso de frenagem intensa, todas as quatro rodas inclinam-se em tempo extremamente reduzido, o que reduz a distância de parada

Modelo Matemático? Diagrama de blocos: 1/4 do veículo



1. M_1 – massa do conjunto da roda
2. M_2 – porção da massa do veículo (correspondendo a $1/4$ de sua massa total)
3. "u" e K_m – atuador e rigidez do pneu (uma mola...)
4. x_1 e x_2 – deslocamento da roda e do corpo do veículo, respectivamente
5. x_3 e x_4 – velocidade relativas às massas M_1 e M_2, respectivamente
6. w – distúrbio externo

Utilizando as Leis de Newton para o movimento...

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \text{Força}$$

do sistema: x_1 e x_2 – deslocamento das massas M_1 e M_2

$$\therefore \quad \begin{array}{rcl} x_3 & = & \dot{x}_1 \\ x_4 & = & \dot{x}_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \dot{x}_3 & = & \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_4 & = & \ddot{x}_2 \end{array}$$

$$M_2\ddot{x}_2 = u \quad \longrightarrow \quad \dot{x}_4 = u/M_2$$

$$M_1\ddot{x}_1 + K_m(x_1 - w) = -u \quad \longrightarrow \quad \dot{x}_3 = -\frac{1}{M_1}u - \frac{K_m}{M_1}x_1 + \frac{K_m}{M_1}w$$

Representação em espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_m/M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_m/M_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_w} w(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/M_1 \\ 1/M_2 \end{bmatrix}}_{B_u} u(t) \\ y(t) = Ix(t) \end{cases}$$

⇝ Considere que a massa do veículo, M_2, **não seja precisamente conhecida** e varie no intervalo $[258,\ 358]$ (carro com um passageiro – 240Kg + 75/4Kg – e carro com cinco passageiros + bagagem – 240Kg + 5×75/4 Kg + 100/4 Kg)

Robustez

Questão de **análise de robustez**: o sistema em malha fechada permanece **estável** para todos os valores possíveis de $\boldsymbol{M_2}$?

1. $\boldsymbol{M_2}$ influi na matriz de realimentação $\boldsymbol{B_u}$ ...

2. Como projetar uma **única** lei de controle que garanta não apenas estabilidade, mas satisfaça alguma especificação de desempenho ?

Exercício

Considere o sistema de suspensão com $\boldsymbol{M_2}$, valor médio do intervalo de variação permitido, $\boldsymbol{M_1 = 28,58Kg}$ e $\boldsymbol{K_m = 10.000N/m}$, responda:

- O sistema em malha aberta é estável?

Bibliografia Básica

1. Palhares, R. M.; Gonçalves, E. N. (2007) **Desigualdades Matriciais Lineares em Controle**. Em: Luis Antônio Aguirre - Editor. (Org.). Enciclopédia de Automática. 1 ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, v. 1, p. 155-195.

2. Boyd, S.; El-Ghaoui, L.; Feron, E.; Balakrishnan, V. (1994), **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**, SIAM Press.

   `http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/`

3. Zhou, K.; Doyle, J. C.; Glover, K. (1996), **Robust and Optimal Control**, Prentice-Hall.

4. Scherer, C.; Gahinet, P.; Chilali, M. (1997), *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization*, **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 42, n. 7, pp. 896-911.

5. Adams, R. A. (1975), **Sobolev Spaces**, Academic.

6. Artigos recentes em periódicos especializados