Álgebra Linear

1. $+$ sobre Funções de Matriz Quadrada
2. Equação de Sylvester
3. Formas Quadráticas
4. Sinais de Matrizes
5. Normas de Matrizes

Funções de Matriz Quadrada

$\rightsquigarrow$ Função de matriz quadrada definida como série de potência infinita...

Suponha que $f(\lambda)$ possa ser definida como:

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \lambda^i$$

com raio de convergência ρ. Se todos os autovalores de A têm magnitude menor do que ρ, então $f(A)$ pode ser definida como:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i A^i$$

Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Considere uma matriz $\hat{A}$ na forma de Jordan e seja

$$f(\lambda) = f(\lambda_1) + \frac{f'(\lambda_1)}{1!}(\lambda - \lambda_1) + \frac{f''(\lambda_1)}{2!}(\lambda - \lambda_1)^2 + \cdots$$

Então

$$f(\hat{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{I} + \frac{f'(\lambda_1)}{1!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I}) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda_1)}{(n-1)!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^{n-1} + \cdots$$

Note que $(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^k = \mathbf{0}$ para $k \geq n$, i.e., a série infinita pode ser truncada! Por exemplo, considere um único bloco de Jordan de ordem 4, então $f(\hat{A})$ reduz-se a:

$$f(\hat{A}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f''(\lambda_1)/2! & f^{(3)}(\lambda_1)/3! \\ 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f''(\lambda_1)/2! \\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_1) \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

Note que e^{At} pode ser descrita via série de Taylor por:

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda^k$$

que converge para todo λ e t finitos. Então,

$$e^{At} = \mathsf{I} + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

- Pode-se usar a descrição por série como um método numérico para computar exponenciais de matrizes

MATLAB – cômputo de exponencial de matriz, aproximação de Padé: `expm` ou `expmdemo1`

Computação Simbólica no MATLAB com `exmp`

Remeta-se ao Exemplo da pag. 16 - Aula 8. Obtenha e^{At} para:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[0 0 -2;0 1 0;1 0 3];
>> syms t;
>> expAt = expm(A*t)

expAt =

[ 2*exp(t) - exp(2*t),      0,          2*exp(t) - 2*exp(2*t)]
[              0,         exp(t),                       0    ]
[   exp(2*t) - exp(t),      0,            2*exp(2*t) - exp(t)]
```

Funções de Matriz Quadrada

Propriedades de e^{At}

$$e^{At} = \mathsf{I} + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

$$\begin{aligned} e^{0} &= \mathsf{I} \\ e^{A(t_1+t_2)} &= e^{At_1}e^{At_2} \end{aligned}$$

- Veja que para $t_2 = -t_1$:

$$e^{At_1}e^{-At_1} = e^{A\cdot 0} = \mathsf{I} \Rightarrow e^{-At_1} = \mathsf{I}/e^{At_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$$

Funções de Matriz Quadrada

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^k$$
$$= A\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k\right) A$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A}$$

- Note que $e^{(A+B)t} \neq e^{At}e^{Bt}$ a menos se $AB = BA$
- Relação de Euler: $e^{Ai} = \cos A + i \,\mathrm{sen} A$

Funções de Matriz Quadrada

⇝ Relembrando a Transformada de Laplace de $f(t)$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Particularmente a Transformada abaixo é de interesse:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = s^{-(k+1)}$$

Portanto

$$\mathcal{L}\left[e^{At}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^{-(k+1)} A^k = s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} s^{-k}A^k = s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(s^{-1}A\right)^k$$

Funções de Matriz Quadrada

- Como a série infinita

$$\sum_{k=0}^{\infty}(s^{-1}\lambda)^k = 1 + s^{-1}\lambda + s^{-2}\lambda^2 + \cdots = (1 - s^{-1}\lambda)^{-1}$$

converge para $\mid s^{-1}\lambda \mid < 1$, conclui-se que

$$\begin{aligned} s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(s^{-1}A)^k &= s^{-1}\mathbf{I} + s^{-2}A + s^{-3}A^2 + \cdots \\ &= s^{-1}(\mathbf{I} - s^{-1}A)^{-1} \\ &= [s(\mathbf{I} - s^{-1}A)]^{-1} \\ &= (s\mathbf{I} - A)^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \quad \mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (s\mathbf{I} - A)^{-1}}$$

Funções de Matriz Quadrada

- Embora se tenha usado o fato de que os autovalores de $s^{-1}A$ têm que ter módulo menor do que 1, $\mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (s\mathbf{I} - A)^{-1}$ vale para todo 's' exceto 's' igual a um autovalor de A

- Pode-se obter o mesmo resultado aplicando-se Laplace em $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}e^{At}\right] &= \mathcal{L}\left[Ae^{At}\right] \\ s\mathcal{L}\left[e^{At}\right] - e^{\mathbf{0}} &= A\mathcal{L}\left[e^{At}\right] \end{aligned}$$

ou

$$(s\mathbf{I} - A)\mathcal{L}\left[e^{At}\right] = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (s\mathbf{I} - A)^{-1}$$

Equação de Sylvester

A equação abaixo é denominada Equação de Sylvester:

$$\boldsymbol{AM} + \boldsymbol{MB} = \boldsymbol{C}$$

- Matrizes dadas: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}}$
- Matriz incógnita: $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}}$ (Objetivo: obter uma solução $\boldsymbol{M}$)
- Defini-se o mapeamento: $\boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{M}) \triangleq \boldsymbol{AM} + \boldsymbol{MB}$

Equação de Sylvester

⇝ Pode-se reescrever a equação de Sylvester como um conjunto de equações lineares. Lembre-se que M é a matriz incógnita. Por exemplo, considere $n = 3$, $m = 2$ tal que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{21} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}+b_{11} & a_{23} & 0 & b_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{11} & 0 & 0 & b_{21} \\ b_{12} & 0 & 0 & a_{11}+b_{22} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{12} & 0 & a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & b_{12} & a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{22} \end{bmatrix}}_{\text{É uma matriz quadrada de dimensão } nm \times nm!!} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix}$$

► De maneira genérica, a equação de Sylvester pode ser escrita como $\mathcal{S}(M) = C$, mapeamento $\mathbb{R}^{n\times m} \mapsto \mathbb{R}^{n\times m}$

Equação de Sylvester

⇝ Um autovalor de $\mathcal{S}$ pode ser definido como um escalar η se $\exists M \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\mathcal{S}(M) = \eta M$$

Considerando $\mathcal{S}$ como uma matriz quadrada de ordem nm, há nm autovalores η_k, $k = 1,2,\ldots,nm$, que são descritos da forma:

$$\eta_k = \lambda_i + \mu_j \quad , i = 1, 2, \ldots, n \;\; ; \;\; j = 1, 2, \ldots, m$$

sendo λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ autovalores de A e μ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ autovalores de B

▶ De fato, considerando $u \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ um autovetor à direita de A associado a λ_i, e $v \in \mathbb{R}^{1\times m}$ um autovetor à esquerda de B associado a μ_j, tem-se:

$$Au = \lambda_i u \quad ; \quad vB = v\mu_j$$

Aplicando a transformação $\mathcal{S}$ na matriz $uv \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tem-se

$$\mathcal{S}(uv) = Auv + uvB = \lambda_i uv + uv\mu_j = (\lambda_i + \mu_j)uv$$

Equação de Sylvester

- Como o determinante de uma matriz é igual ao produto de todos os seus autovalores; uma matriz é não singular se e somente se nenhum autovalor é nulo
- Se não existe nenhum i e j tais que $\lambda_i + \mu_j = 0$, então a matriz quadrada de ordem nm definida por $\mathcal{S}$ é não singular e, para cada C, a solução M da equação de Sylvester é única
- Se $\lambda_i + \mu_j = 0$ para algum i e j, dado C, a solução pode existir ou não. Se C pertence ao range de $\mathcal{S}$, existem múltiplas soluções

$\rightsquigarrow$ Se $B = A'$, então $AM + MA' = C$ é denominada Equação de Lyapunov com $C, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $C = C'$ então $M = M'$

MATLAB $M = \texttt{lyap}(A,B,-C)$

Formas Quadráticas

Uma forma quadrática é definida como:

$$x^*Mx$$

sendo que $x^*Mx \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{C}^n$

- Já que $x^*Mx \in \mathbb{R}$, então $(x^*Mx)^* = (x^*M^*x) = (x^*Mx)$. Ou:

$$x^*Mx - x^*M^*x = 0 \ , \ \ x^*(M - M^*)x = 0 \ \ \Rightarrow \ \ M = M^*$$

- Toda forma Hermitiana pode ser escrita como x^*Mx, com $M = M^*$

Exemplos

Exemplo $M = \begin{bmatrix} 2 & 3j \\ 3j & 4 \end{bmatrix}$, considerando $x = \begin{bmatrix} 1-j \\ 2+2j \end{bmatrix}$

$$x^* M x = \begin{bmatrix} 1+j & 2-2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3j \\ 3j & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-j \\ 2+2j \end{bmatrix} = 36$$

de fato, para todo $\mathbf{0} \neq x \in \mathbb{C}^2$ obtém-se:

$$x^* M x = 2x_1^* x_1 + \underbrace{3x_1^* x_2 + 3x_2^* x_1}_{\text{(têm sinal contrário!)}} + 4x_2^* x_2 = 2\|x_1\| + 4\|x_2\| \in \mathbb{R}$$

Exemplos

Exemplo $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}^2$

$$x'Mx = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 > 0 \;\; \forall\, x_1{,}x_2 \neq 0$$

Exemplos $\|Bx\|^2 = x'B'Bx$; $\sum_{i=2}^{n}(x_{i+1} - x_i)^2$; $\|Fx\|^2 - \|Gx\|^2$

Unicidade da forma quadrática Se $x'Ax = x'Bx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e as matrizes A e B são simétricas, então $A = B$

Formas Quadráticas

Suponha que uma matriz simétrica M é decomposta na forma $M = QDQ'$, sendo D uma matriz diagonal contendo os autovalores reais de M ordenados:

$$\lambda_{\max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n = \lambda_{\min}$$

e $Q' = Q^{-1}$ uma matriz ortogonal. Então a forma quadrática:

$$x'Mx = x'QDQ'x = (Q'x)'D(Q'x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (q_i' x)^2$$

$$\leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^{n} (q_i' x)^2 = \lambda_{\max} \|x\|^2$$

De forma similar pode-se obter: $x'Mx \geq \lambda_{\min} \|x\|^2$. Portanto

$$\lambda_{\min} x'x = \lambda_{\min} \|x\|^2 \leq x'Mx \leq \lambda_{\max} \|x\|^2 = \lambda_{\max} x'x, \ \forall x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n$$

Formas Quadráticas

Propriedades de Matrizes Hermitianas: $M = M^*$ ou $M = M'$ se $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Autovalores reais
- Forma de Jordan diagonal
- Autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais
- Toda matriz Hermitiana M pode ser transformada por uma matriz unitária P (isto é, $P^{-1} = P^*$) em uma matriz diagonal com elementos reais:

$$\hat{M} = PMP^*$$

Sinais de Matrizes

$\rightsquigarrow$ Uma matriz M é definida positiva sse $x^*Mx > 0$, $\forall\ x \neq 0$, $x \in \mathbb{C}^n$.
Simbologia: $M > 0$ (lê-se: a matriz M é definida positiva)

$\rightsquigarrow$ Uma matriz M é semidefinida positiva sse $x^*Mx \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{C}^n$. Simbologia: $M \geq 0$ (lê-se: a matriz M é semidefinida positiva)

$\rightsquigarrow$ Uma matriz M é definida negativa se $-M$ é (semi)definida positiva. Simbologia: $M < 0$ (lê-se: a matriz M é definida negativa)

Teorema Uma matriz Hermitiana M, $n \times n$, é definida positiva (semidefinida positiva) se, e somente se, qualquer uma das condições abaixo é satisfeita:

- Todos os autovalores de M são positivos (não negativos)
- Existe uma matriz não singular N, $n \times n$ (uma matriz singular N, $n \times n$, ou uma matriz $m \times n$ com $m < n$) tal que $M = N^*N$

Sinais de Matrizes

Demonstração da segunda condição

▷ Suponha que $\exists N$ não singular tal que $M = N^*N$. Então

$$x^*Mx = x^*N^*Nx = (Nx)^*(Nx) = \|Nx\|_2^2 \geq 0, \quad \forall x$$

Se N é não-singular, então $Nx = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e, portanto, M é definida positiva. Se N é singular, existe $x \neq 0$ tal que $Nx = 0$ e M é semidefinida positiva

▶ N pode ser obtida por fatoração de Cholesky (de fato, Cholesky é aplicável a matrizes definidas positivas...)

Sinais de Matrizes

Exemplo $M = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ é definida positiva, pois

Autovalores de M: $\boldsymbol{\lambda_1 = 0.3820 \; ; \; \lambda_2 = 2.6180}$

$$\boldsymbol{M = N'N \quad ; \quad N = \texttt{chol}(M) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \det(N) = 1 \neq 0}$$

Propriedades – Sinais de Matrizes

Nota Dada uma matriz $\boldsymbol{H}$, sabemos que $\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}$ ou $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}'$ é simétrica. Então:

- A matriz simétrica $\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}$ é sempre semidefinida positiva; será definida positiva se $\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}$ for não singular (invertível). O mesmo vale para $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}'$
- Como $\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}'$ são matrizes simétricas semidefinidas positivas, seus autovalores são reais e não negativos
- Se $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}$ tem n autovalores e $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}'$ tem m autovalores
- Se $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem posto completo de colunas n, então $\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}$ é definida positiva
- Se $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem posto completo de linhas m, então $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}'$ é definida positiva

Decomposição em Valores Singulares

Seja $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e defina $M = H'H$ (simétrica, $n \times n$ e semidefinida positiva). Então todos os autovalores de M são reais e não negativos (zero ou positivos). Seja r o número de autovalores positivos ($\therefore$ M tem posto r)

Os n autovalores de $M = H'H$ podem ser arranjados na forma

$$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \cdots \geq \lambda_r^2 > 0 = \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n$$

▷ λ_i^2 , $i = 1, 2, \ldots, n$: autovalores de $H'H$

▷ λ_i , $i = 1, 2, \ldots, \bar{n}$: valores singulares de H (denotado por σ_i)

sendo $\bar{n} \triangleq \min\{n, m\}$

Decomposição em Valores Singulares

Exemplo $\quad H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M = H'H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

- $\bar{n} \triangleq \min\{n,m\} = 2$
- Autovalores de M: $4.5616; 0.4384; 0$
- Valores singulares de H: $2.1358 = \sqrt{4.5616}$; $0.6622 = \sqrt{0.4384}$
- Autovalores de HH': 4.5616; 0.4384
- Valores singulares de H': $2.1358 = \sqrt{4.5616}$; $0.6622 = \sqrt{0.4384}$

$\rightsquigarrow$ Note que os autovalores de $H'H$ diferem dos de HH' apenas no número de zeros, e H e H' têm os mesmos valores singulares

Decomposição em Valores Singulares

Teorema – Decomposição em Valores Singulares – Toda matriz H $m \times n$ pode ser escrita na forma

$$H = RSQ'$$

com $R'R = RR' = \mathsf{I}_m$, $Q'Q = QQ' = \mathsf{I}_n$ e S uma matriz $m \times n$ com os valores singulares de H na diagonal

As colunas de Q (R) são autovetores ortonormais de $H'H$ (HH'). O posto de H é igual ao número de valores singulares diferentes de zero. Se o posto de H é r, as r primeiras colunas de R formam uma base ortonormal para o range de H, e as últimas $(n - r)$ colunas de Q formam uma base para o espaço nulo de H

MATLAB `[R,S,Q]=svd(H)`

Norma de Matrizes

$$\hookrightarrow \qquad \|A\|_r \triangleq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r} = \sup_{\|x\|_r=1} \|Ax\|_r$$

sendo $\sup$ o supremo ou o menor limitante superior

$\leadsto$ $\|A\|_r$ é denominada norma matricial induzida por uma norma vetorial r. Para diferentes $\|x\|$, tem-se diferentes $\|A\|$

1. $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ $\Leftrightarrow$ A maior soma absoluta das colunas
2. $\|A\|_2 = \sqrt{(\lambda_{\max}(A'A))}$ $\Leftrightarrow$ Valor singular máximo de A
3. $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ $\Leftrightarrow$ A maior soma absoluta das linhas

Norma de Matrizes

Exemplo Normas 1, 2 e ∞ de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$?

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\{3 + |-1|;\ 2 + 0\} = 4$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = 3.7$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\{3 + 2;\ |-1| + 0\} = 5$$

MATLAB `norm(A,r)`, $r = 1{,}2$ ou $r =$inf

Norma Matricial

⇝ Interpretação gráfica ? Considere por exemplo a norma $\|A\|_1$. Note que $y = Ax$ e

$$\|x\|_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

portanto

$$y_1 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad y_2 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_4 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Norma Matricial