

Espaços \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

1. Espaços de Hilbert
2. Espaços \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞
 - 2.1 Normas nos espaços \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞
3. Cálculo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no espaço de estados

Espaços Métricos

Definição Um espaço \mathcal{E} onde a distância entre dois pontos é definida, ie, $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}$, denomina-se um **espaço métrico**, e é denotado por (\mathcal{E}, d)

Definição Qualquer espaço vetorial \mathcal{X} é um espaço métrico quando defini-se $d(x, y) = \|y - x\|$, $x, y \in \mathcal{X}$.

Definição Um espaço métrico (\mathcal{E}, d) é denominado **completo** se toda seqüência de Cauchy de pontos em \mathcal{E} tem um limite em \mathcal{E} , ie,

$$\text{se } \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : d(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\| < \epsilon, \forall i, j > N$$

Obs: Intuitivamente, um espaço é completo se “não há buracos”, ou “não faltam pontos”. Por exemplo, o conjunto dos números racionais não é completo, pois para $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2$ (que é uma seqüência de Cauchy) converge para um número irracional: $\sqrt{2}$

Espaços de Hilbert

Definição Um espaço vetorial munido com uma estrutura adicional do tipo produto interno é denominado um **espaço com produto interno**

Desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ e $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$



David Hilbert

Definição Um espaço com produto interno que é **completo** com respeito a norma **induzida** pelo produto interno é denominado um **espaço de Hilbert**

Espaços de Hilbert

↪ Espaços de Hilbert generalizam certos operadores lineares tais como a T. de Fourier

Exemplos de espaços de Hilbert

1. Espaços \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n com produto interno definido como sendo $\langle x, y \rangle = \sum_k x_k^* y_k$
2. Espaço $\mathbb{C}^{n \times m}$ com produto interno

$$\langle A, B \rangle \triangleq \text{Traço} \{A^* B\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij} b_{ij}, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$$

3. Espaço $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ com produto interno: $\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traço} \{f^*(t)g(t)\} dt$

Espaço \mathcal{H}_2

\mathcal{H}_2 é o espaço das funções matriciais de uma variável complexa, $F(s)$, que são estáveis e têm **norma finita**, ie

$$\mathcal{H}_2 \triangleq \left\{ F \mid F(s) \text{ é estável;} \right. \\ \left. \|F\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [F^*(j\omega)F(j\omega)] d\omega \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

Nota Denota-se por $\mathbb{R}\mathcal{H}_2$ o subespaço do \mathcal{H}_2 , de todas as matrizes de transferência racionais estáveis e estritamente próprias

Espaço \mathcal{H}_∞

\mathcal{H}_∞ é o espaço das funções matriciais de uma variável complexa, $F(s)$, que são estáveis e têm **norma finita**, ie

$$\mathcal{H}_\infty \triangleq \left\{ F \mid F(s) \text{ é estável;} \right.$$
$$\left. \|F\|_\infty \triangleq \sup_{\text{Re}(s) > 0} \sigma_{max} [F(s)] = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{max} [F(s)] < \infty \right\}$$

Nota Denota-se por $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ o subespaço do \mathcal{H}_∞ , de todas as matrizes de transferência racionais estáveis e próprias

Espaços Funcionais de Matrizes Racionais

\mathbb{RL}_∞	Funções racionais próprias sem pólos no eixo imaginário	
\mathbb{RH}_∞	Funções racionais próprias e estáveis	$\mathbb{RH}_\infty \subset \mathbb{RL}_\infty$
\mathbb{RH}_∞^\perp	Funções racionais próprias e pólos em $\Re(s) > 0$	$\mathbb{RH}_\infty^\perp \subset \mathbb{RL}_\infty$
\mathbb{RL}_2	Funções racionais estritamente próprias sem pólos no eixo imaginário	$\mathbb{RL}_2 \subset \mathbb{RL}_\infty$
\mathbb{RH}_2	Funções racionais estritamente próprias e estáveis	$\mathbb{RH}_2 \subset \mathbb{RL}_2$
\mathbb{RH}_2^\perp	Funções racionais estritamente próprias e pólos em $\Re(s) > 0$	$\mathbb{RH}_2^\perp \subset \mathbb{RL}_2$

Exemplo

Considere as funções racionais abaixo e determine quais funções pertencem ao $\mathbb{R}\mathcal{L}_\infty$, $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$, $\mathbb{R}\mathcal{L}_2$, $\mathbb{R}\mathcal{H}_2$ e $\mathbb{R}\mathcal{H}_2^\perp$

$$F_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)} = \underbrace{\frac{1}{5(s+2)}}_{\in \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty, \in \mathbb{R}\mathcal{L}_2} + \underbrace{\frac{1}{5(s-3)}}_{\in \mathbb{R}\mathcal{H}_2^\perp}$$

$$F_2(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}; \quad F_3(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}\mathcal{H}_2, \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty, \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty}$

$$F_4(s) = \underbrace{\frac{s-1}{s}}_{\text{pólo em } j\omega}; \quad F_5(s) = \underbrace{\left[\frac{1}{s-1} \quad \frac{s-1}{s+1} \quad \frac{1}{s+2} \right]}_{\in \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty}$$

Exemplo

Considere o sistema LIT e **estável**:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.83 & 0 & 0 \\ -0.83 & -0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.70 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & -0.70 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0.40 & 0 \\ 0.60 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.30 & 0 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix} w(t)$$

Valor da norma \mathcal{H}_∞ ?? Por definição busca "exaustiva" do máximo do valor singular máximo sob o domínio ω ... (Detalhe: A é estável?)

Exemplo

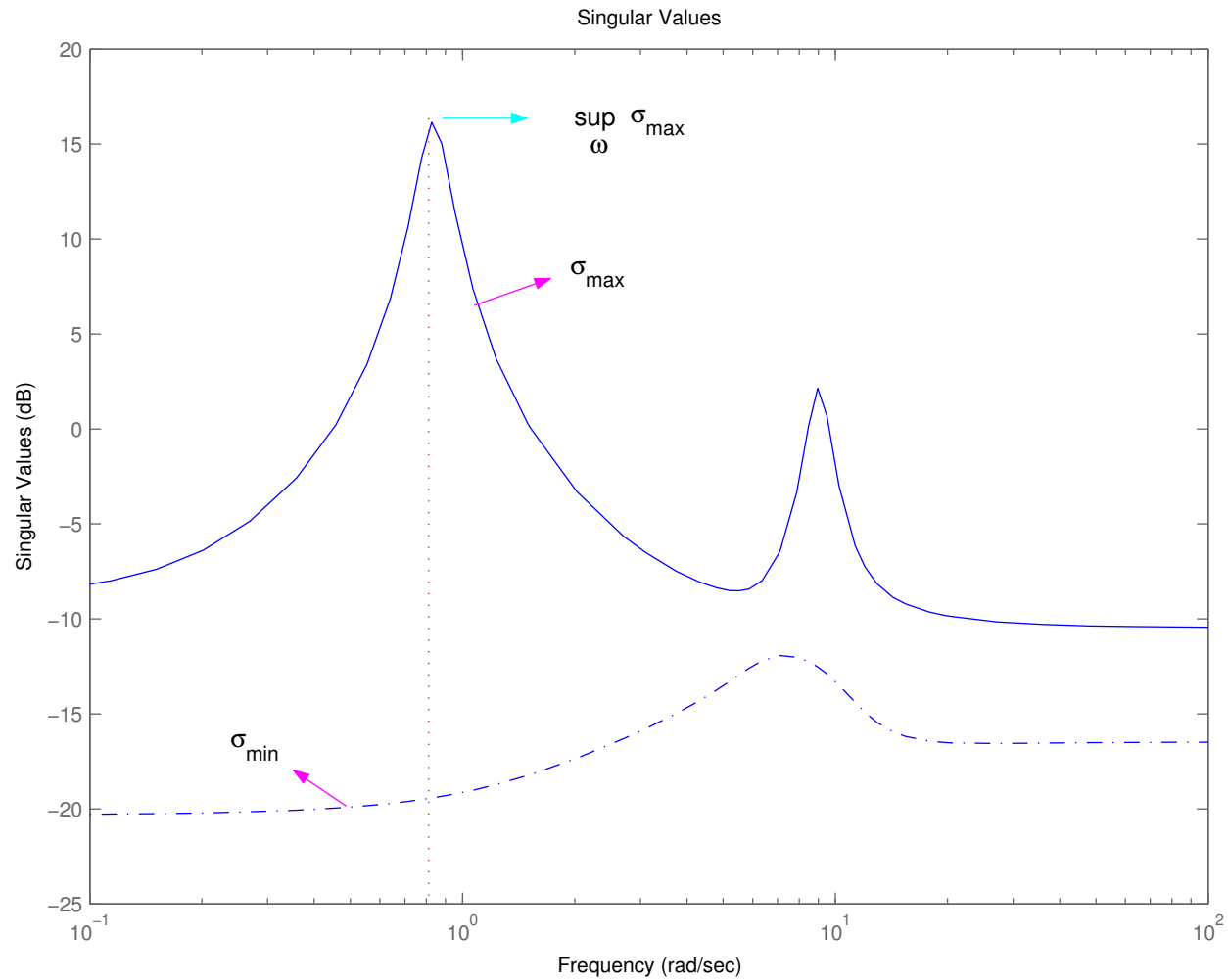


Diagrama de Valores Singulares – MATLAB: σ Re: $\|H\|_{\infty} = 6.4405 = 16.1784\text{db}$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_2 em Espaço de Estados

- Calcular a norma \mathcal{H}_2 pela definição no domínio da frequência? é uma tarefa árdua...

Porém em espaço de estados...

Teorema Considere $G(\zeta) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_2$ da forma

$$G(\zeta) = C(\zeta I - A)^{-1}B \quad (\zeta = s, z)$$

Então a norma \mathcal{H}_2 é dada por

$$\|G\|_2^2 = \text{Traço}\{B^T L_o B\} = \text{Traço}\{C L_c C^T\}$$

onde $L_o \succeq 0$ e $L_c \succeq 0$ são os **Grammianos de Observabilidade e Controlabilidade** que satisfazem, respectivamente,

$$\mathcal{G}_c(L_c) = 0, \quad \mathcal{G}_o(L_o) = 0$$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_2 em Espaço de Estados

Definem-se os mapeamentos $\mathcal{G}_c : \mathcal{S}_n \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ da forma:

$$\mathcal{G}_c(L_c) = AL_c + L_cA^T + BB^T \quad (\text{para sistemas contínuos})$$

$$\mathcal{G}_c(L_c) = AL_cA^T - L_c + BB^T \quad (\text{para sistemas discretos})$$

e $\mathcal{G}_o : \mathcal{S}_n \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ da forma:

$$\mathcal{G}_o(L_o) = A^T L_o + L_oA + C^T C \quad (\text{para sistemas contínuos})$$

$$\mathcal{G}_o(L_o) = A^T L_oA - L_o + C^T C \quad (\text{para sistemas discretos})$$

Nota \mathcal{S}_n – espaço das matrizes simétricas reais

Cálculo da Norma \mathcal{H}_2 em Espaço de Estados

Demonstração Considerando o caso contínuo, veja que

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \begin{cases} Ce^{At}B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|G\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{Traço}\{g^T(t)g(t)\}dt = \int_0^\infty \text{Traço}\{g(t)g^T(t)\}dt \\ &= \int_0^\infty \text{Traço}\{B^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B\} dt = \int_0^\infty \text{Traço}\{C e^{At} B B^T e^{A^T t} C^T\} dt \end{aligned}$$

• Grammianos de controlabilidade e observabilidade:

$$L_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad \text{e} \quad L_o = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

satisfazendo, respectivamente, $\mathcal{G}_c(L_c) = \mathbf{0}$ e $\mathcal{G}_o(L_o) = \mathbf{0}$

$$\therefore \|G\|_2^2 = \text{Traço}\{B^T L_o B\} = \text{Traço}\{C L_c C^T\}$$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_2 em Espaço de Estados

$$\text{(Caso discreto)} \quad g(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \begin{cases} CA^t B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|G\|_2^2 &= \sum_{t=0}^{\infty} \text{Traço}\{g^T(t)g(t)\} = \sum_{t=0}^{\infty} \text{Traço}\{g(t)g^T(t)\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \text{Traço}\{B^T (A^t)^T C^T C A^t B\} = \sum_{t=0}^{\infty} \text{Traço}\{C A^t B B^T (A^t)^T C^T\} \end{aligned}$$

- Grammianos de controlabilidade e observabilidade:

$$L_c = \sum_{t=0}^{\infty} A^t B B^T (A^t)^T \quad \text{e} \quad L_o = \sum_{t=0}^{\infty} (A^t)^T C^T C A^t$$

satisfazendo, respectivamente, $\mathcal{G}_c(L_c) = \mathbf{0}$ e $\mathcal{G}_o(L_o) = \mathbf{0}$

$$\therefore \|G\|_2^2 = \text{Traço}\{B^T L_o B\} = \text{Traço}\{C L_c C^T\}$$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_∞ em Espaço de Estados

Bounded Real Lema – Contínuo

$\gamma > 0$ dado e (A, B, C, D) realização de $G(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$. Então equivalem-se

1. $\|G\|_\infty \leq \gamma$

2. $\exists P = P^T \succ 0$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_∞ em Espaço de Estados

Bounded Real Lema – Contínuo

Linhas gerais do que seria uma “demonstração”

(2) \Leftrightarrow (1). Selecione uma função de Lyapunov:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0, \quad \text{ie } P \succ 0$$

Tomando a derivada ao longo das trajetórias $x(t)$ para entrada nula ($w \equiv 0$)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= 2\dot{x}^T(t)Px(t) \\ &= x^T(t) \left(A^T P + P A \right) x(t) \end{aligned}$$

para estabilidade assintótica, $\dot{V}(x(t)) < 0$, o que é atendido no bloco (1,1) da LMI no item 2

Cálculo da Norma \mathcal{H}_∞ em Espaço de Estados

Bounded Real Lema – Contínuo

O quesito estabilidade está atendido. O que dizer a respeito do critério de desempenho \mathcal{H}_∞ ?

Como $G(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$, pode-se considerar o **ganho induzido \mathcal{L}_2** , do sinal de entrada $w(t) \in \mathcal{L}_2$ para a saída $z(t) \in \mathcal{L}_2$ (que equivale a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência $G(s)$ de w para z). Logo

$$\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2$$

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt$$

$$\int_0^\infty \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \right\} dt < 0$$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_∞ em Espaço de Estados

Bounded Real Lema – Contínuo

Defini-se o índice de desempenho \mathcal{I}_∞

$$\mathcal{I}_\infty \triangleq \int_0^\infty \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \right\}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\infty &= \int_0^\infty \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(x(t)) - \dot{V}(x(t)) \right\} dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(x(t)) \right\} dt \\ &\quad + V(x(t)) \Big|_{t=0} - V(x(t)) \Big|_{t \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

como $G(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ e supondo **condições iniciais nulas**:

$$V(x(t)) \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad V(x(t)) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_∞ em Espaço de Estados

Bounded Real Lema – Contínuo

- Note que $G : w \mapsto z$ e $G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$

$$\therefore z(t) = Cx(t) + Dw(t)$$

Logo utilizando a função de Lyapunov para entrada não-nula w

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\infty = & \int_0^\infty \left\{ x^T(t) \left(A^T P + P A + C^T C \right) x(t) \right. \\ & + 2w^T(t) \left(B^T P + D^T C \right) x(t) \\ & \left. - w^T(t) \left(\gamma^2 \mathbf{I} - D^T D \right) w(t) \right\} dt \end{aligned}$$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_∞ em Espaço de Estados

Bounded Real Lema – Contínuo

Definindo-se $\eta(t) \triangleq \begin{bmatrix} x^T(t) & w^T(t) \end{bmatrix}^T$

$$\mathcal{I}_\infty = \int_0^\infty \eta^T(t) \underbrace{\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + CD \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 I + D^T D \end{bmatrix}}_{\Psi} \eta(t) dt$$

para atender ao índice de desempenho \mathcal{H}_∞ , **necessariamente**, $\mathcal{I}_\infty < 0$, ie $\Psi \prec 0$.

- Aplicando Schur em $\Psi \prec 0$ obtém-se a LMI no item 2! Portanto, se o item 2 é satisfeito, **garante-se** $\|G\|_\infty < \gamma$...

Cálculo da Norma \mathcal{H}_∞ em Espaço de Estados

Aplicando o complemento de Schur?

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & (PB + C^T D) \\ (PB + C^T D)^T & -(\gamma^2 I - D^T D) \end{bmatrix} \prec 0$$

||

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ PB^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \prec 0$$

⇕ (Schur...)

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_∞ em Espaço de Estados

Bounded Real Lema – Discreto

$\gamma > 0$ dado e (A, B, C, D) realização de $G(z) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$. Então equivalem-se

1. $\|G\|_\infty \leq \gamma$

2.

$$\begin{bmatrix} P & 0 & A^T P & C^T \\ 0 & I & B^T P & D^T \\ PA & PB & P & 0 \\ C & D & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0$$

Cálculo da Norma \mathcal{H}_∞ em Espaço de Estados

Bounded Real Lema – Discreto

Linhas gerais de uma "demonstração".

(2) \Leftrightarrow (1). Pode ser obtido a partir dos mesmos passos considerados no caso contínuo, bastando para tanto selecionar uma função de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0 \quad \text{tal que} \quad \Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) < 0$$

O índice de desempenho neste caso é fruto do ganho induzido ℓ_2 , ie

$$\mathcal{I}_\infty = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \right\}$$

Ao final basta utilizar um simples argumento de Schur ...

Exercício

Considere o sistema LIT e estável:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.83 & 0 & 0 \\ -0.83 & -0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.70 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & -0.70 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0.40 & 0 & 0.40 & 0 \\ 0.60 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.30 & 0 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix} w(t)$$

Calcule a norma \mathcal{H}_∞ utilizando a LMI da condição 2 do Bounded Real Lemma na página 15