Método do Lugar das Raízes

1. Esboçando o Lugar das Raízes (LR)

Esboço do Lugar das Raízes – LR

▷ O procedimento para esboçar o gráfico do Lugar das Raízes pode ser realizado seguindo os passos ordenados a seguir

Passo 1 – Escreve-se a equação característica (EC) na forma

$$1 + F(s) = 0$$

e, se for necessário, a EC é re-arranjada de forma que o parâmetro de interesse a ser variado (K) apareça como fator multiplicador, i.e.:

$$1 + KP(s) = 0$$

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Passo 2 – Fatora-se $P(s)$ e escreve-se na forma de ganho, polos e zeros (iremos evidenciar os zeros e polos):

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^{M} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s + p_j)} = 0$$

▷ Note que n denota o número de polos finitos e M denota o número de zeros finitos

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Passo 3 – Marcam-se os zeros e polos no plano-s com símbolos próprios ("×" para polos e "o" para zeros). Para $0 \leq K < \infty$ a EC é da forma

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j) + K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i) = 0$$

▷ Note que para $K = 0$, então $\prod_{j=1}^{n}(s+p_j) = 0$ e as raízes da EC coincidem com os polos de $P(s)$!!

▷ Quando $K \to \infty$, então

$$\overset{0}{\cancel{\frac{1}{K}}}\prod_{j=1}^{n}(s+p_j) + \prod_{i=1}^{M}(s+z_i) \;=\; \prod_{i=1}^{M}(s+z_i) \;= 0$$

e as raízes da EC coincidem com os zeros de $P(s)$!!

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Portanto

O Lugar das Raízes da EC: $1 + KP(s) = 0$,
começa nos polos de $P(s)$ e termina
nos zeros de $P(s)$ quando K é variado de 0 a ∞

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Passo 4 – Localizam-se os seguimentos do LR que recaem sobre o eixo real

O Lugar das Raízes no eixo real recae sempre
sobre um trecho do eixo real à
esquerda de um número ímpar de polos e zeros
(Verificado pela condição de ângulo...)

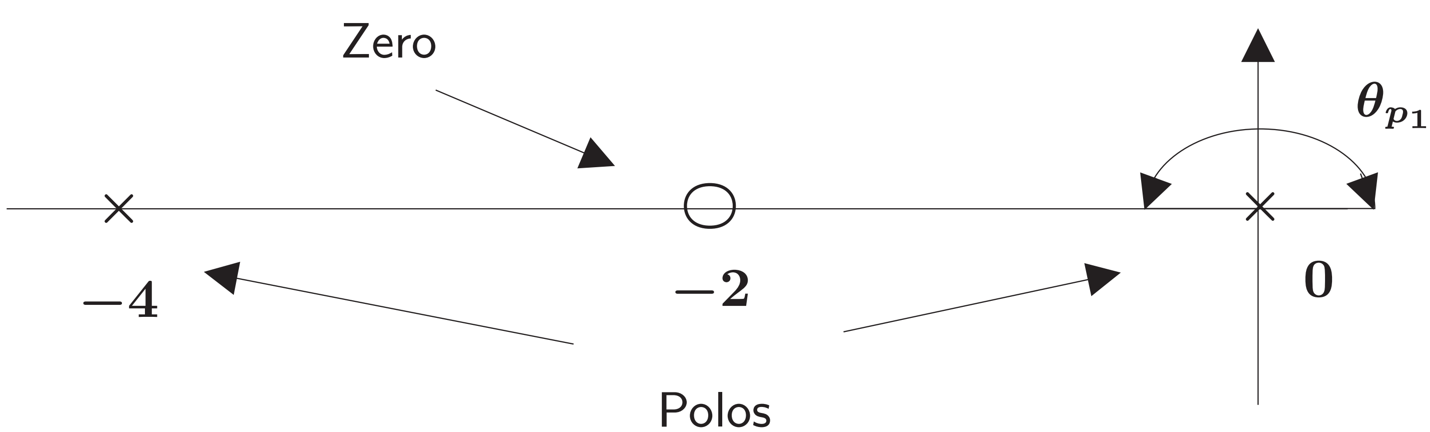
▷ Como normalmente $P(s)$ pode ter zeros em infinito, i.e., é uma função estritamente própria tal que a ordem do denominador é maior que a do numerador $n > M$, então $n - M$ ramos do LR tenderão a $n - M$ zeros em ∞

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Exemplo (Passo 1) EC: $\mathbf{1} + \boldsymbol{F(s)} = \mathbf{1} + \dfrac{\boldsymbol{K(\frac{1}{2}s+1)}}{\boldsymbol{s(\frac{1}{4}s+1)}} = \mathbf{0}$

(Passo 2) $\boldsymbol{F(s)}$ é reescrita na forma ganho-polo-zero $\mathbf{1} + \dfrac{\boldsymbol{2K(s+2)}}{\boldsymbol{s(s+4)}} = \mathbf{0}$

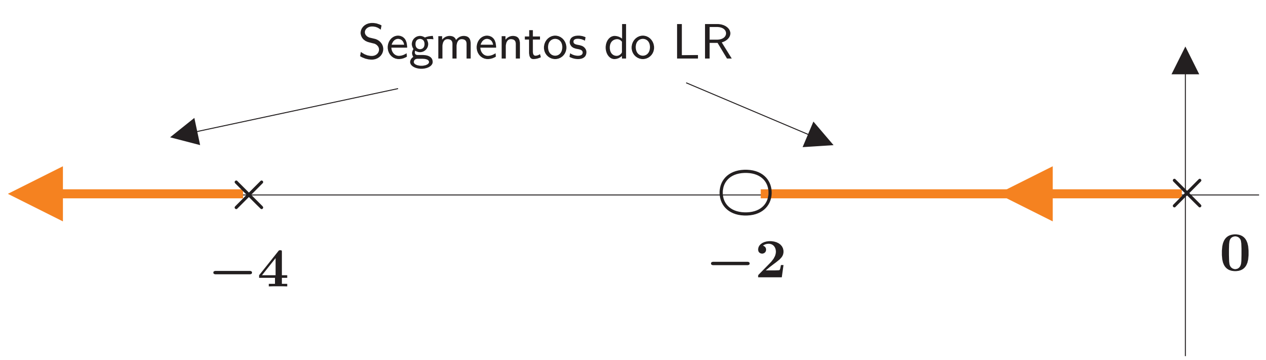
(Passo 3) Marcam-se os polos $(\mathbf{0},\ \mathbf{-4})$ e zero $(\mathbf{-2})$ com a simbologia adotada



Esboço do Lugar das Raízes – LR

(Passo 4) O critério de ângulo é satisfeito no segmento do eixo real entre os pontos $\mathbf{0}$ e $-\mathbf{2}$ (note que o polo $p_1 = 0$ contribui com -180^0, o zero $z = -2$ contribui com 0^0 e o polo em $p_2 = -4$ contribui com 0^0. No total -180^0). No trecho entre o zero $z = -2$ e o polo $p_2 = -4$ obtém-se 0^0 (contribuição de -180^0 de p_1, 180^0 de z e 0^0 de p_2). Por outro lado, entre o segmento $p_2 = -4$ e $-\infty$ a contribuição total dos polos e zero é de -180^0. Portanto, os trechos sobre o eixo real entre p_1 e z e entre p_2 e $-\infty$ fazem parte do LR

▷ Veja ainda que $n - M = 2 - 1 = 1$, i.e., 1 ramo tenderá a $-\infty$



Esboço do Lugar das Raízes – LR

Passo 5 – Determina-se o número de segmentos no Lugar das Raízes que usualmente é igual ao número de polos

▷ Note que normalmente as funções racionais consideradas $(P(s))$ são próprias (grau do numerador igual ao grau denominador, i.e., o número de polos finitos é igual ao número de zeros finitos) ou estritamente próprias (grau no numerador menor do que o grau denominador, i.e., o número de polos finitos é maior do que o número de zeros finitos). Então é razoável considerar que o número de segmentos no LR é igual ao número de polos

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Passo 6 – O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real no plano-s

▷ Isto é óbvio já que as raízes podem ser reais ou complexas conjugadas. No entanto, as raízes complexas conjugadas sempre aparecem aos pares (sendo assim, o eixo real funciona como um espelho)

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Passo 7 – (Assíntotas para zeros em infinito) Se houver zeros em ∞, quando $K \to \infty$ o LR terá segmentos que tenderão aos zeros em ∞, aproximando-os sobre assíntotas centradas em σ_A (denominado centróide) que é calculado como:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{polos de } P(s) - \sum \text{zeros de } P(s)}{n - M} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n - M}$$

▷ Lembre-se que n é o número de polos finitos e M o número de zeros finitos

Esboço do Lugar das Raízes – LR

O ângulo das assíntotas **em relação ao eixo real** é dado por:

$$\boxed{\phi_A = \frac{(2q+1)}{n-M}180^0, \quad q = 0,1,2,\ldots,(n-M-1)}$$

▷ Lembre-se que n é o número de polos finitos e M o número de zeros finitos

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Passo 8 – Determina(m)-se, quando for o caso, os pontos em que o LR cruza o eixo imaginário usando o critério de Routh-Hurwitz

▷ Claro que só faz sentido aplicar o critério de Routh-Hurwitz se há ramos do LR que surgem no semi-plano esquerdo e seguem para o semi-plano direito (ou vice-versa)

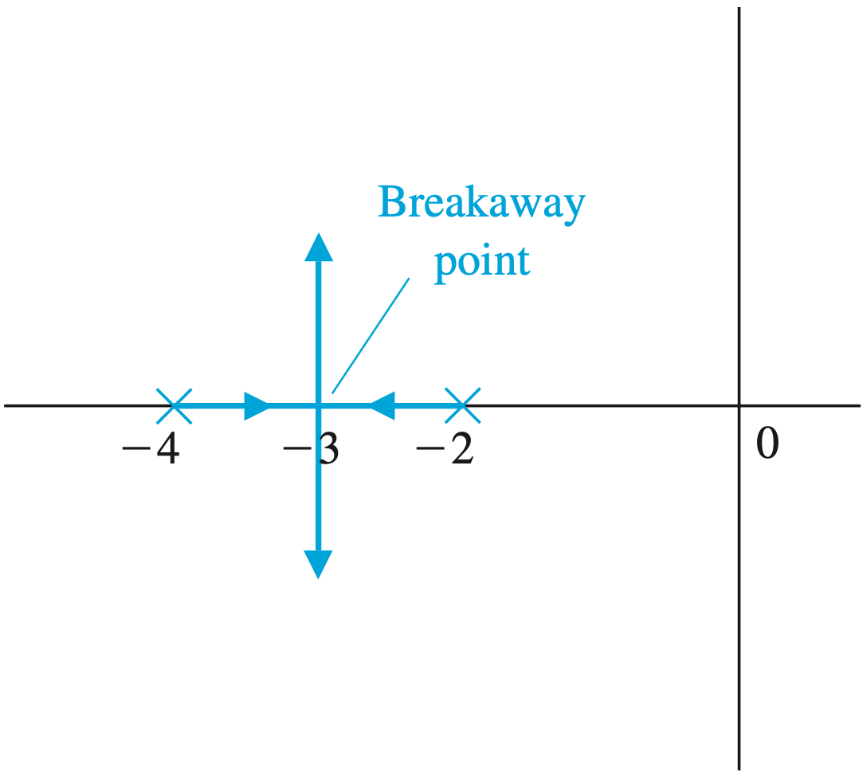
▷ Ao aplicar o critério de Routh-Hurwitz, se o LR cruza o eixo imaginário, então para um valor de $\boldsymbol{K}$ específico tem-se uma condição de estabilidade marginal e, então, uma (ou mais linhas) no arranjo de Routh se anula(m) para este valor de $\boldsymbol{K}$ e a linha logo acima gera o polinômio auxiliar – cujas raízes são puramente imaginárias. Em outras palavras, ar raízes estão sobre o eixo imaginário. Isto auxilia a concluir o esboço do LR

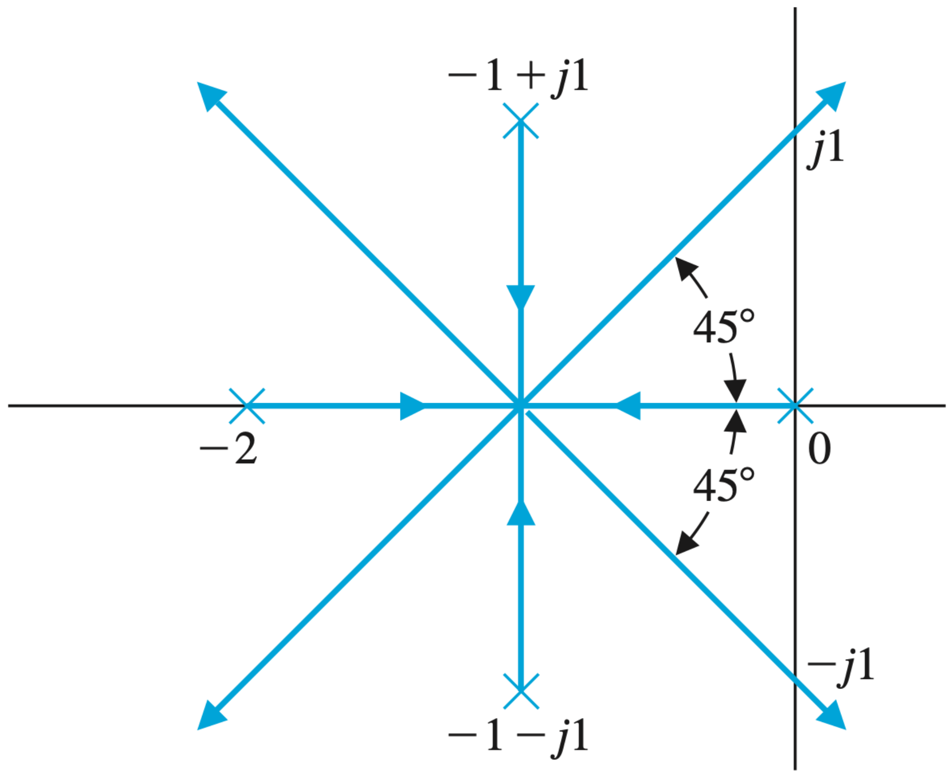
Esboço do Lugar das Raízes – LR

Passo 9 – Determina(m)-se o(s) ponto(s) de partida ou de chegada em relação ao eixo real (se houver)

▷ Note que o LR deixa de pertencer ao eixo real nos casos em que há multiplicidade de raízes, i.e., por exemplo, um par de raízes deixa de ser reais e passa a ser um par de raízes complexas conjugadas e, portanto, não podem mais ser representadas sobre o eixo real (vale o inverso também, um par de raízes complexas conjugadas que ao variar um parâmetro K passam a ser reais)

Exemplos





Esboço do Lugar das Raízes – LR

▷ O ponto de partida/chegada pode ser avaliado graficamente ou analiticamente. A maneira mais direta de se determinar o ponto de partida/chegada requer que se re-arranje a EC isolando o fator multiplicador K para que a EC apareça na forma

$$p(s) = K$$

Exemplo Para um sistema de 2a. ordem com $G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)}$ a EC é:

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K}{(s+2)(2+4)} = (s+2)(s+4) + K = 0$$

$$\Downarrow$$

$$K = p(s) = -(s+2)(s+4)$$

Esboço do Lugar das Raízes – LR

▷ Para este caso em particular, espera-se pelo esboço do LR que o ponto de partida no eixo real esteja próximo a $s = \sigma = -3$ (primeira figura da página 15)

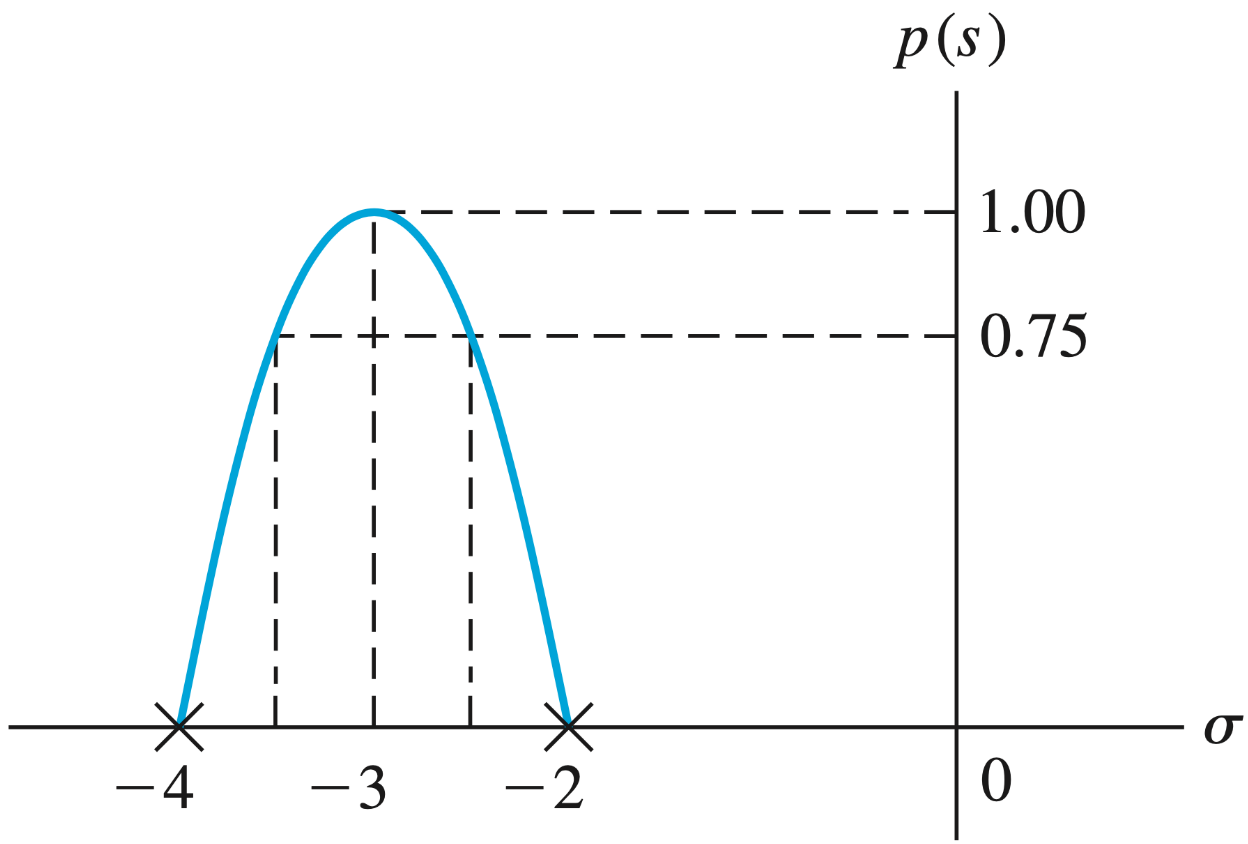
▷ Atribuindo-se vários valores para σ entre -2 e -4 pode-se calcular os respectivos valores para $p(s)$ da forma:

σ	-2	-2.25	-2.5	-2.75	-3	-3.25	-3.5	-3.75	-4
$p(s)$	0	0.44	0.75	0.94	1	0.94	0.75	0.44	0

Traça-se o gráfico de $p(s)$ versus σ e determina-se o ponto de máximo...

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Pode-se notar que o gráfico gerado da tabela é simétrico em relação a $\boldsymbol{\sigma = -3}$, i.e., o valor do máximo corresponde ao ponto de partida/chegada conforme ilustrado a seguir



Esboço do Lugar das Raízes – LR

▷ O mesmo resultado pode ser obtido analiticamente determinando-se o máximo de $K = p(s)$. Para tanto basta calcular:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{dp(s)}{ds} = 0$$

Exemplo Do exemplo anterior com

$$K = p(s) = -(s+2)(s+4) = -(s^2 + 6s + 8)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dp(s)}{ds} = -(2s+6) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$s = \sigma = -3$$

Esboço do Lugar das Raízes – LR

Exemplo Para um sistema com EC dada por

$$1 + KG(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

Obtém-se $n - M = 3 - 1 = 2$. Número de assíntotas? Duas (dois polos em malha fechada tenderão a dois zeros que estão em ∞), e os seus ângulos são:

$$\phi_A = \frac{(2q+1)}{n_p - n_z} 180^0 = \frac{(2(0)+1)}{2} 180^0 = 90^0$$

$$\phi_A = \frac{(2(1)+1)}{2} 180^0 = 270^0 = -90^0$$

Esboço do Lugar das Raízes – LR

A centróide está localizada em:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n - M} = \frac{[0 + (-2) + (-3)] - [-1]}{2} = -2$$

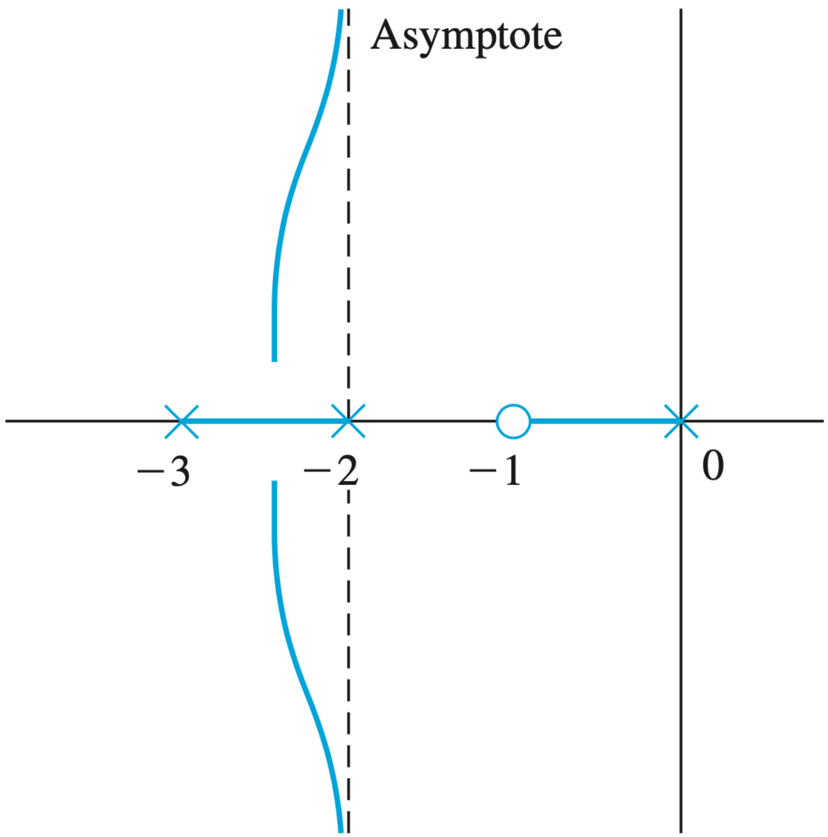
Cálculo do ponto de partida/chegada: $K = p(s) = \frac{-s(s+2)(s+3)}{(s+1)}$

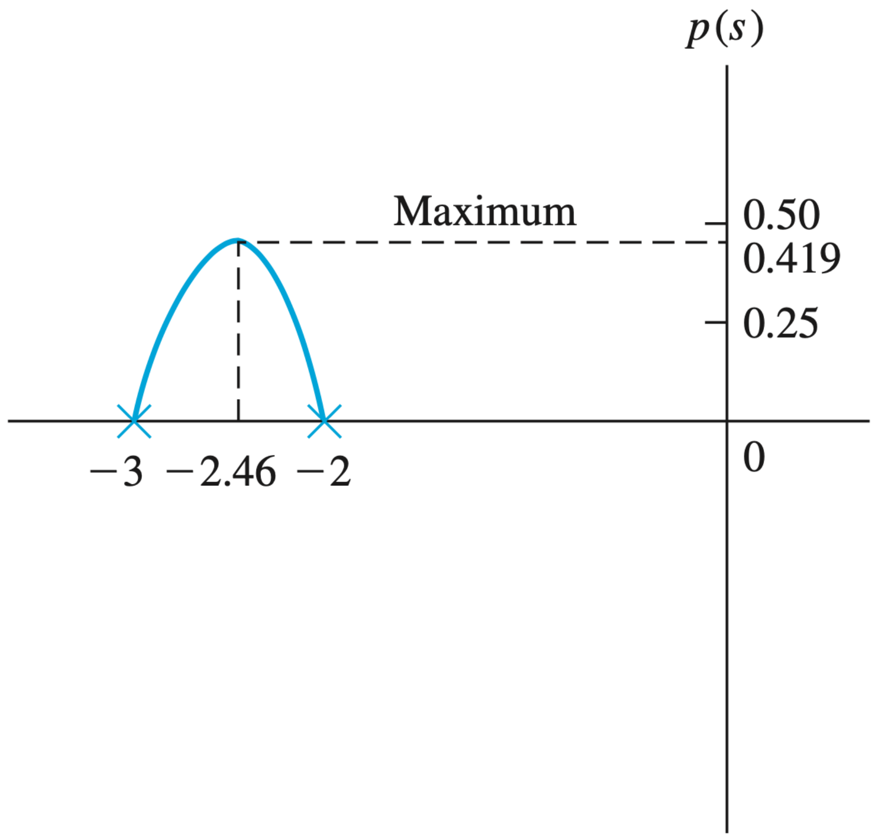
Deriva-se para se obter o ponto de partida/chegada:

$$\frac{dp(s)}{ds} = \frac{2s^3 + 8s^2 + 10s + 6}{(s+1)^2} = 0$$

com raízes $= \{-2.4656;\ -0.7672 \pm j0.7926\} \ \Rightarrow\ s = -2.4656$

Esboço do Lugar das Raízes – LR





Esboço do Lugar das Raízes – LR

Passo 10 – Para polos e zeros complexos conjugados deve-se determinar, respectivamente, o ângulo de partida do LR de cada polo e o ângulo de chegada em cada zero usando a condição de ângulo

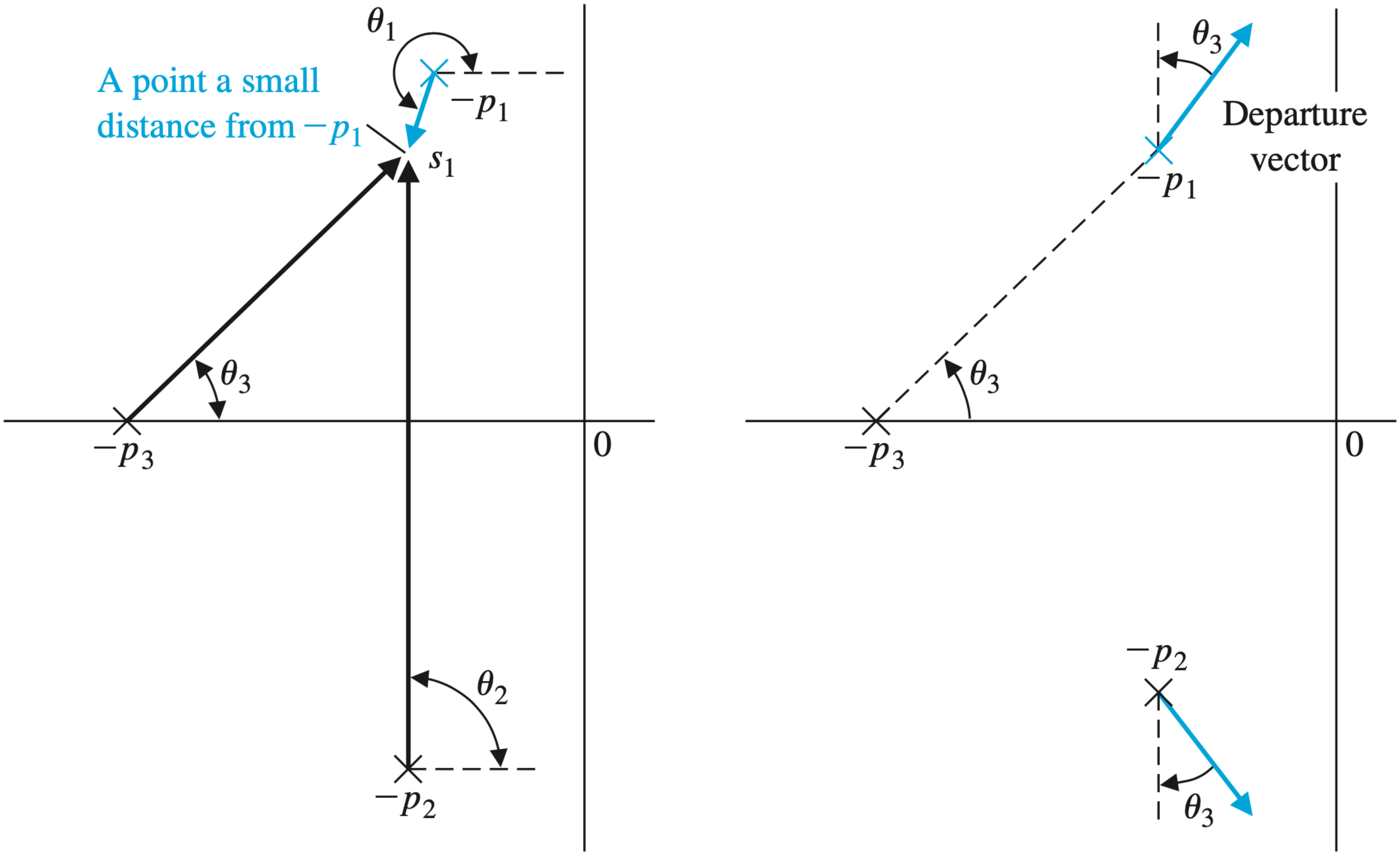
Exemplo Considere um sistema de 3a. ordem com dois polos complexos conjugados em p_1 e p_2 e com ganho em malha dado por:

$$L(s) = \frac{K}{(s+p_3)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

Usando a condição de ângulo, tem-se que em um ponto de teste s_1, que está a uma distância infinitesimal de p_1, a relação de ângulo (vide figura a seguir):

$$\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3} = \theta_{p_1} + 90^0 + \theta_{p_3} = +180^0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{p_1} = 90^0 - \theta_{p_3}$$

Esboço do Lugar das Raízes – LR



Esboço do Lugar das Raízes - LR

Passo 11 – Determina-se, se necessário, a localização de raízes específicas (s_κ, $\kappa = 1,2,\ldots,n_p$) que satisfazem a condição de ângulo

$$\angle P(s) = \pm 180^0 + q360^0, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Passo 12 – Determinação do valor do parâmetro K_{s_κ} para uma raiz específica s_κ aplicando a condição de ganho $|K_{s_\kappa} L(s)| = 1$, ou

$$K_{s_\kappa} = \left. \frac{\prod_{j=1}^{n} |(s + p_j)|}{\prod_{i=1}^{m} |(s + z_i)|} \right|_{s = s_\kappa}$$

Esboçando o LR – Um Exemplo Geral

Exemplo (Passo 1) Deseja-se traçar o gráfico do LR considerando a equação característica da forma:

$$\Delta(s) = 1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0 \quad , \quad 0 \leq K < \infty$$

(Passo 2) Determinam-se os polos

$$\Delta(s) = 1 + \frac{K}{s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)} = 0$$

Note que todos os zeros estão em ∞

Esboço do Lugar das Raízes – LR

(Passo 3) Localizam-se os polos no plano-s

(Passo 4) O LR tem um segmento sobre o eixo real entre $s = 0$ e $s = 4$

(Passo 5) Como o número de polos é $n = 4$, há 4 curvas no LR

(Passo 6) O gráfico é simétrico em relação ao eixo real

Esboço do Lugar das Raízes – LR

(Passo 7) Os ângulos das assíntotas são (note que $n = 4$ e $M = 0$):

$$\phi_A = \frac{(2q+1)}{n-M} 180^0, \quad q = 0,1,2,3$$

$$\phi_A = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0$$

A centróide das assíntotas está localizada no eixo real em:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n-M} = \frac{[0 + (-4) + (-4 - j4) + (-4 + j4)] - [0]}{4} = -3$$

Esboço do Lugar das Raízes – LR

(Passo 8) Cruza o eixo imaginário? Se sim, aplica-se o critério de Routh-Hurwtiz na EC: $s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K = 0$, e o arranjo de Routh é dado por

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 64 & K \\
s^3 & 12 & 128 & \\
s^2 & b_1 & K & \\
s^1 & c_1 & & \\
s^0 & K & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{cases}
b_1 = \dfrac{12(64) - 128}{12} = 53.33 \\[2ex]
c_1 = \dfrac{53.33(128) - 12K}{53.33} > 0
\end{cases}
$$

Logo, para manter estabilidade $K < 568.89$. Note que para $K = 568.89$ a linha s^1 se anula e obtém-se a equação auxiliar da linha logo acima dada por $53.33s^2 + 568.89 = 0$ cujas raízes são $\pm j3.266$. Estas são as coordenadas que o LR irá cruzar o eixo imaginário

Esboço do Lugar das Raízes – LR

(Passo 9) O ponto de partida (um ou mais de um?) é calculado fazendo

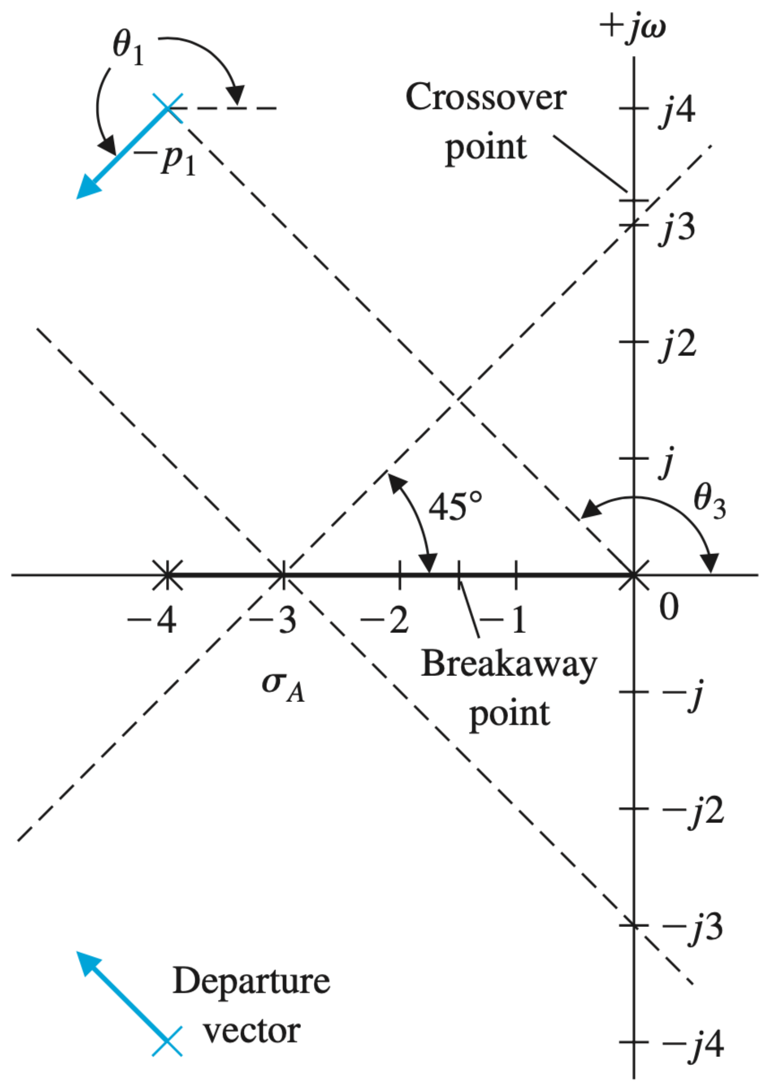
$$K = p(s) = -s(s+4)(s+4+j4)(s+4-j4)$$

e

$$\frac{dp(s)}{ds} = 4s^3 + 36s^2 + 128s + 128 = 0$$

com raízes em $\{-1.5767,\ -3.7117 \pm j2.5533\}$. Portanto o ponto de partida/chegada ocorre em $s = -1.5767$

Ângulos de Partida? – Polos Complexos



Ângulos de Partida – Polos Complexos

(Passo 10) O ângulo de partida para um dos dois polos complexos, por exemplo, $\boldsymbol{p_1}$, é obtido a partir da contribuição de cada polo na vizinhança de $\boldsymbol{p_1}$ usando a condição de ângulo. Isto resulta em

$$\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p=-4} + \theta_{p=0} = \theta_{p_1} + 90^0 + 90^0 + \theta_{p=0} = 180^0$$

Logo

$$\begin{aligned}
\theta_{p_1} &= -\theta_{p=0} \\
&= -\left[90^0 + \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right] \\
&= -(90^0 + 45^0) \\
&= -135^0 \\
&= 225^0
\end{aligned}$$

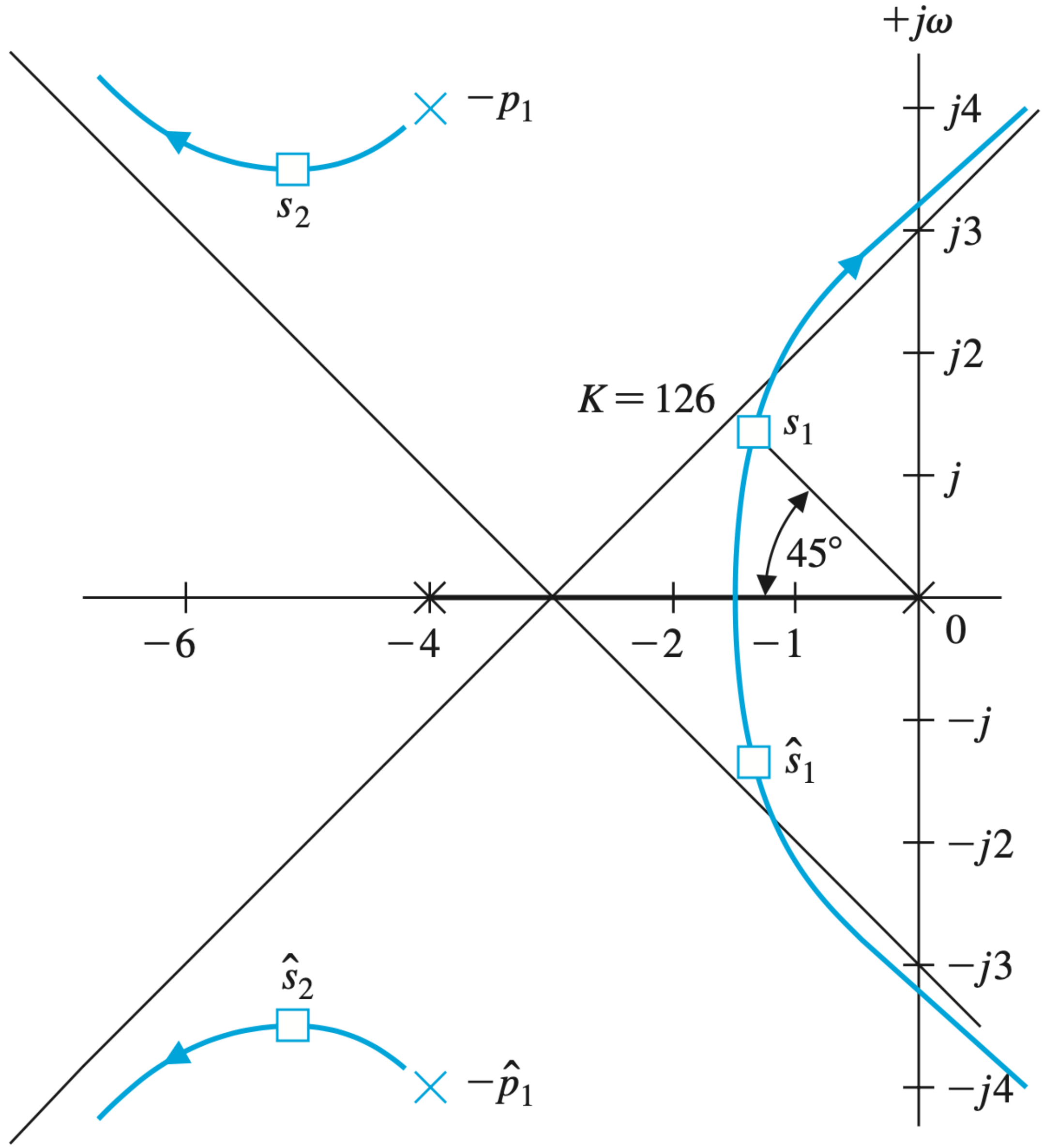
Esboço do Lugar das Raízes – LR

(Passo 11) Determinam-se as localizações de raízes específicas (se for necessário) que satisfazem a condição de ângulo

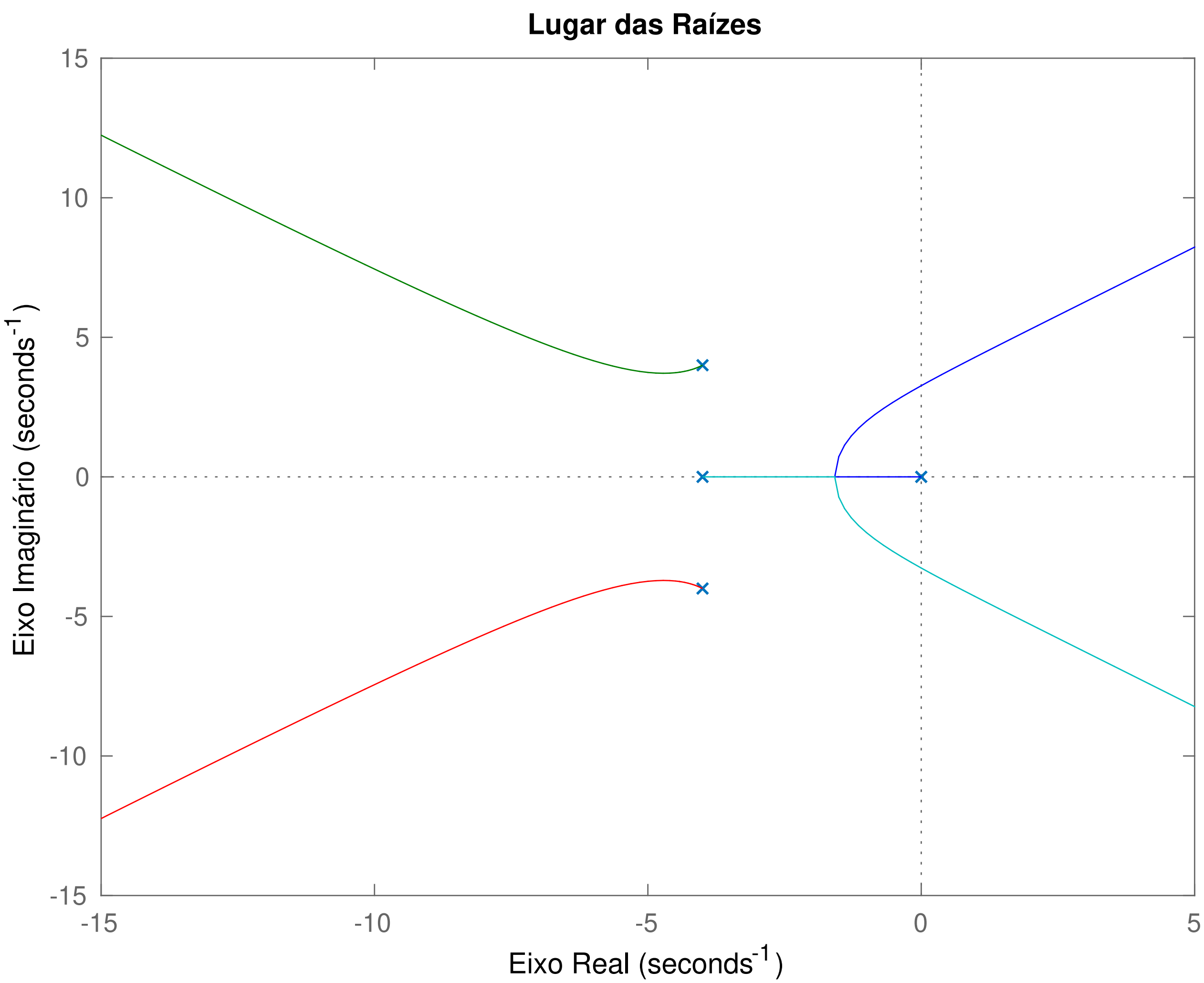
(Passo 12) Determina-se o valor do ganho $\boldsymbol{K}$ em pontos específicos $\boldsymbol{s = s_{\kappa}}$, $\boldsymbol{\kappa = 1{,}2, \ldots ,n}$

▷ E o gráfico ?

Esboço do Lugar das Raízes – LR



Matlab



Lugar das Raízes
15
10
5
0
-5
-10
-15
-15
-10
-5
0
5
Eixo Imaginário (seconds^{-1})
Eixo Real (seconds^{-1})

Cálculo do Ângulo de Partida – Outro olhar

(Revendo o Passo 10) Ângulo de partida em relação ao polo complexo p_1:

$$\begin{aligned}
\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p=-4} + \theta_{p=0} &= 180^0 \\
\theta_{p_1} - 270^0 - 270^0 + \theta_{p=0} &= 180^0 \\
\theta_{p_1} - 540^0 + \theta_{p=0} &= 180^0 \\
\theta_{p_1} - 180^0 + \theta_{p=0} &= 180^0 \\
\theta_{p_1} &= 360^0 - \theta_{p=0}
\end{aligned}$$

$$\theta_{p=0} = -\left[180^0 + \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right] = -(180^0 + 45^0) = -225^0$$

Logo

$$\theta_{p_1} = 360^0 - (-225^0) = 585^0 = 225^0$$

Cálculo do Ângulo de Partida – Outro olhar

(Revendo o Passo 10) Se a condição de ângulo é -180^0:

$$
\begin{aligned}
\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p=-4} + \theta_{p=0} &= -180^0 \\
\theta_{p_1} - 270^0 - 270^0 + \theta_{p=0} &= -180^0 \\
\theta_{p_1} - 540^0 + \theta_{p=0} &= -180^0 \\
\theta_{p_1} - 180^0 + \theta_{p=0} &= -180^0 \\
\theta_{p_1} &= 0^0 - \theta_{p=0}
\end{aligned}
$$

$$\theta_{p=0} = -\left[180^0 + \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right] = -(180^0 + 45^0) = -225^0$$

Logo

$$\theta_{p_1} = -(-225^0) = 225^0$$