Álgebra Linear

1. Funções de Matriz Quadrada
2. Teorema de Cayley-Hamilton

Funções de Matriz Quadrada

$\rightsquigarrow$ Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associada a transformação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Polinômios de matriz quadrada Para k positivo e $k \in \mathbb{Z}$, defina:

$$A^0 = \mathsf{I} \;\; ; \;\; A^k = AA \cdots A \; (k \text{ vezes})$$

Seja $f(\lambda)$ um polinômio em λ de grau finito como, por exemplo:

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

▶ Uma função $f(A)$ é definida da forma (é direto!):

$$f(A) \triangleq A^2 + 5A + 6\,\mathsf{I} = (A + 2\,\mathsf{I})(A + 3\,\mathsf{I})$$

Esquentando os motores

- Como é sempre possível escrever $\hat{A} = Q^{-1}AQ$ ou $A = Q\hat{A}Q^{-1}$, sendo $\hat{A}$ a representação de A na Forma Canônica de Jordan, então da $f(A)$ anterior:

$$
\begin{aligned}
f(A) &= f(Q\hat{A}Q^{-1}) \\
&= \underbrace{\left(Q\hat{A}Q^{-1}\right)^2}_{(Q\hat{A}Q^{-1})(Q\hat{A}Q^{-1})} + 5Q\hat{A}Q^{-1} + 6\mathbf{I} \\
&= Q\left(\hat{A}^2 + 5\hat{A} + 6\mathbf{I}\right)Q^{-1} \\
&= Qf(\hat{A})Q^{-1}
\end{aligned}
$$

ou $f(\hat{A}) = Q^{-1}f(A)Q$

Funções de Matriz Quadrada

- Se A assume a forma bloco diagonal

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

com A_1 e A_2 matrizes quadradas de qualquer ordem, tem-se

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{bmatrix} \quad ; \quad f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

Definição O polinômio mínimo de A é o polinômio mônico $\psi(\lambda)$ de menor grau tal que $\psi(A) = \mathbf{0}$ (mônico: o coeficiente do termo de grau mais alto é 1)

- Note que $f(A) = \mathbf{0}$ se e somente se $f(\hat{A}) = \mathbf{0}$ (matrizes similares têm o mesmo polinômio mínimo)

- Obter o polinômio mínimo diretamente de A não é tão trivial, porém o polinômio mínimo de uma matriz na forma de Jordan pode ser obtido por inspeção

- Se λ_i é um autovalor de A com multiplicidade n_i, o polinômio característico de A é dado por

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - A) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

Vamos avançar a discussão com Jordan?

Funções de Matriz Quadrada

- Suponha que a forma de Jordan de $\boldsymbol{A}$ é conhecida. Define-se como o índice de $\boldsymbol{\lambda_i}$, dado por $\bar{\boldsymbol{n}}_i$, a maior ordem de todos os blocos de Jordan associados a $\boldsymbol{\lambda_i}$. Por exemplo, $\boldsymbol{\lambda_1}$ tem multiplicidade $\boldsymbol{4}$ em todas as formas de Jordan abaixo:

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \; ; \; \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \; ; \; \hat{A}_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

- Então os índices do autovalor $\boldsymbol{\lambda_1}$ são, respectivamente, $\bar{\boldsymbol{n}}_i = \boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{2}$, $\boldsymbol{3}$ e $\boldsymbol{4}$

Funções de Matriz Quadrada

- Para as matrizes $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$, $\hat{A}_4$, os polinômios mínimos são (por quê?):

$$\psi_1 = (\lambda - \lambda_1)^1; \quad \psi_2 = (\lambda - \lambda_1)^2; \quad \psi_3 = (\lambda - \lambda_1)^3; \quad \psi_4 = (\lambda - \lambda_1)^4$$

$\rightsquigarrow$ Usando os índices $\bar{n}_i$ de todos os autovalores λ_i, o polinômio mínimo pode ser expresso da forma:

$$\psi(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i} \quad (= 0)$$

com grau $\bar{n} = \sum \bar{n}_i \leq \sum n_i = n =$ dimensão de A

- Note que o polinômio característico é sempre $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4$
- **O polinômio mínimo é um fator do polinômio característico, porém, se os autovalores são todos distintos, os dois polinômios são iguais:** $\sum \bar{n}_i = n$

Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Para a matriz na forma de Jordan

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \bar{n}_i = 4$$

Compute:

$$(\hat{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad (\hat{A} - \lambda \mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

$$(\hat{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad (\hat{A}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})^{k} = \mathbf{0} \text{ para } k \geq 4$$

- O índice de $\boldsymbol{\lambda}$ é $\bar{n}_i = 4$

- Portanto o polinômio mínimo é $\psi_4 = (\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda})^4$ e $\psi(A) = \mathbf{0}$, e nenhum outro polinômio de grau menor verifica a condição (pois $(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda})^3 \neq \mathbf{0}$, $(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda})^2 \neq \mathbf{0}$, $(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}) \neq \mathbf{0}$)

- Neste caso em particular, **o polinômio mínimo se iguala ao polinômio característico:** $\boldsymbol{\Delta}(A) = \psi(A) = \mathbf{0}$

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema Seja o polinômio característico de A dado por:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

Então: $\Delta(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n \mathbf{I} = \mathbf{0}$, isto é:
toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfaz sua própria equação característica $\Delta(\lambda)$

- Nota-se pelo Teorema que A^n pode ser escrita como uma combinação linear de $\{\mathbf{I}, A, \ldots, A^{n-1}\}$, i.e.: $A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \cdots - \alpha_{n-1} A - \alpha_n \mathbf{I}$

Note que multiplicando-se a equação característico $\Delta(A) = \mathbf{0}$ por A tem-se:

$$A^{n+1} + \alpha_1 A^n + \cdots + \alpha_{n-1} A^2 + \alpha_n A = \mathbf{0}$$

tal que A^{n+1} pode ser escrita como combinação linear de $\{A, A^2 \ldots, A^n\}$.
Assim sucessivamente pode-se escrever qualquer relação via combinação linear

Para que serve o Teorema de Cayley-Hamilton?

Expressando um polinômio qualquer $f(\lambda)$ de grau n na forma:

$$f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + h(\lambda)$$

- $q(\lambda)$: quociente da divisão por $\Delta(\lambda)$ (polinômio característico)
- $h(\lambda)$: resto da divisão (grau menor que n)

Portanto, ao se dividir um polinômio qualquer $f(A)$ por seu polinômio característico avaliado em A, pelo Teorema de Cayley-Hamilton tem-se:

$$f(A) = q(A)\Delta(A) + h(A) = q(A) \cdot \mathbf{0} + h(A) = h(A)$$

Em outras palavras, $f(A)$ se iguala ao resto da divisão que é $h(A)$

Funções de Matriz Quadrada

⇝ A ideia é definir "o resto da divisão" $h(\lambda)$ com grau $n-1$ da forma:

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1}$$

sendo β_i, $i = 0, \ldots, n-1$, o total de n incógnitas a serem obtidas

▶ Se os n autovalores de A são distintos, as incógnitas β_i podem ser obtidas diretamente das n equações ao igualar:

$$f(\lambda_i) = q(\lambda_i)\,\underbrace{\Delta(\lambda_i)}_{=0} + h(\lambda_i) = h(\lambda_i) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

▶ Se A tem autovalores repetidos, a expressão acima tem que ser diferenciada (em relação ao autovalor λ) para fornecer novas equações da forma a seguir

Funções de Matriz Quadrada

Teorema Seja $f(\lambda)$ uma função dada e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com o polinômio característico:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \quad ; \quad n = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

Defina o polinômio de grau $n-1$ (com n coeficientes a determinar):

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1}$$

Os n coeficientes β_i podem ser obtidos do conjunto de n equações dadas por

$$f^{(\ell)}(\lambda_i) = h^{(\ell)}(\lambda_i) \quad \begin{cases} \ell = 0, 1, \ldots, n_i - 1 \\ i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

sendo que $f^{(\ell)}(\lambda_i) \triangleq \left.\dfrac{d^\ell f(\lambda)}{d\lambda^\ell}\right|_{\lambda=\lambda_i} \quad ; \quad h^{(\ell)}(\lambda_i) \triangleq \left.\dfrac{d^\ell h(\lambda)}{d\lambda^\ell}\right|_{\lambda=\lambda_i}$

Então $f(A) = h(A)$ e diz-se que $h(\lambda)$ é igual a $f(\lambda)$ no espectro (conjunto dos autovalores) de A

Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Obtenha A^{100}, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$? Note que $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2$

- Faça: $h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda$, i.e., grau $n - 1 = 1$
- Espectro de A: $\lambda = 1$ (dois autovalores repetidos). Compute $f(\lambda) = \lambda^{100}$

$$\left.\begin{aligned} f(1) = h(1) \;&\Rightarrow\; 1^{100} = \beta_0 + \beta_1 \\ \frac{d}{d\lambda}f(1) = \frac{d}{d\lambda}h(1) \;&\Rightarrow\; 100(1^{99}) = \beta_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \beta_1 = 100 \text{ e } \beta_0 = -99$$

Logo: $A^{100} = f(A) = h(A) = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Para $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, com $\begin{cases} \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \\ n_1 = 2, \; n_2 = 1 \end{cases}$

Obtenha e^{At}, i.e., se $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, encontre $f(A) = e^{At}$

- Considere $h(\lambda)$ com grau $n - 1 = 2$:

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 \quad \text{ou} \quad h(A) = f(A) = \beta_0 \mathsf{I} + \beta_1 A + \beta_2 A^2$$

Então:

$$\begin{aligned} f(1) = h(1) \quad &\Rightarrow \quad e^t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \\ f'(1) = h'(1) \quad &\Rightarrow \quad te^t = \beta_1 + 2\beta_2 \\ f(2) = h(2) \quad &\Rightarrow \quad e^{2t} = \beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2 \end{aligned}$$

Funções de Matriz Quadrada

Então:

$$\beta_0 = -2te^t + e^{2t};\ \ \beta_1 = 3te^t + 2e^t - 2e^{2t};\ \ \beta_2 = e^{2t} - e^t - te^t$$

Logo:

$$f(A) = h(A) = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 A + \beta_2 A^2$$

E, portanto:

$$e^{At} = f(A) = h(A) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & 0 & 2e^t - 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ -e^t + e^{2t} & 0 & 2e^{2t} - e^t \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

$\rightsquigarrow$ Pode-se também obter $f(\hat{A})$ genérica para $\hat{A}$ na forma de Jordan e, posteriormente, ajustar à uma escolha particular para $f(\lambda)$...

Exemplo Considere o bloco de Jordan: $\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$

- $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4$. Escolhendo (de maneira conveniente):

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1(\lambda - \lambda_1) + \beta_2(\lambda - \lambda_1)^2 + \beta_3(\lambda - \lambda_1)^3$$

A condição $f(\lambda) = h(\lambda)$ no espectro de $\hat{A}$ fornece

$$\beta_0 = f(\lambda_1) \; ; \quad \beta_1 = \frac{f'(\lambda_1)}{1!} \; ; \quad \beta_2 = \frac{f''(\lambda_1)}{2!} \; ; \quad \beta_3 = \frac{f^{(3)}(\lambda_1)}{3!}$$

Funções de Matriz Quadrada

Portanto

$$f(\hat{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{I} + \frac{f'(\lambda_1)}{1!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I}) + \frac{f''(\lambda_1)}{2!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2 + \frac{f^{(3)}(\lambda_1)}{3!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^3$$

Usando a propriedade de $(\hat{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ (aqui para $k \geq 4$, $(\hat{A} - \lambda\mathbf{I})^k = 0$) tem-se:

$$f(\hat{A}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f''(\lambda_1)/2! & f^{(3)}(\lambda_1)/3! \\ 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f''(\lambda_1)/2! \\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_1) \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

Por exemplo, para $\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ e $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ tem-se:

$$e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \dfrac{t^2 e^{\lambda_1 t}}{2!} & \dfrac{t^3 e^{\lambda_1 t}}{3!} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \dfrac{t^2 e^{\lambda_1 t}}{2!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Considere uma matriz com dois blocos de Jordan:

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

- Se $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, então

$$e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2! & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

- Se $f(\lambda) = (s-\lambda)^{-1}$, então

$$(s\mathsf{I} - \hat{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-\lambda_1)} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-\lambda_1)} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_2)} & \frac{1}{(s-\lambda_2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_2)} \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

$\rightsquigarrow$ O teorema de Cayley-Hamilton fornece uma fórmula explícita para o cálculo da matriz inversa, já que uma matriz deve satisfazer seu próprio polinômio característico. De fato, multiplicando $\Delta(A)$ por A^{-1}:

$$A^{-1}\Delta(A) = A^{-1}\left(A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n \mathbf{I}\right) = \mathbf{0}$$

$$\left(A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{I} + \alpha_n A^{-1}\right) = \mathbf{0}$$

ou

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_n}\left[A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2}A + \alpha_{n-1}\mathbf{I}\right]$$

- Note que é necessário que $\alpha_n \neq 0$ tal que $\exists A^{-1}$

- Veja que a inversa de A é expressão de até $n-1$ potências de A (de fato, uma combinação linear de $\{\mathbf{I}, A, \ldots, A^{n-2}, A^{n-1}\}$)