

Álgebra Linear

1. Funções de Matriz Quadrada
2. Teorema de Cayley-Hamilton
3. + sobre Funções de Matriz Quadrada

Funções de Matriz Quadrada

~ Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associada a transformação linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Polinômios de matriz quadrada Para k positivo e $k \in \mathbb{Z}$, defina:

$$A^0 = I ; \quad A^k = AA \cdots A \text{ (} k \text{ vezes)}$$

Seja $f(\lambda)$ um polinômio em λ de grau finito como, por exemplo:

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

► Uma função $f(A)$ é definida da forma (é direto!):

$$f(A) \triangleq A^2 + 5A + 6I = (A + 2I)(A + 3I)$$

Esquentando os motores

- Como é sempre possível escrever $\hat{A} = Q^{-1}AQ$ ou $A = Q\hat{A}Q^{-1}$, sendo \hat{A} a representação de A na Forma Canônica de Jordan, então da $f(A)$ anterior:

$$\begin{aligned} f(A) &= f(Q\hat{A}Q^{-1}) \\ &= \underbrace{(Q\hat{A}Q^{-1})^2}_{(Q\hat{A}Q^{-1})(Q\hat{A}Q^{-1})} + 5Q\hat{A}Q^{-1} + 6I \\ &= Q(\hat{A}^2 + 5\hat{A} + 6I)Q^{-1} \\ &= Qf(\hat{A})Q^{-1} \end{aligned}$$

ou $f(\hat{A}) = Q^{-1}f(A)Q$

Funções de Matriz Quadrada

- Se A assume a forma bloco diagonal

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

com A_1 e A_2 matrizes quadradas de qualquer ordem, tem-se

$$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{f}(A) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(A_1) & 0 \\ 0 & \mathbf{f}(A_2) \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

Definição O polinômio mínimo de A é o polinômio mônico $\psi(\lambda)$ de menor grau tal que $\psi(A) = \mathbf{0}$ (mônico: o coeficiente do termo de grau mais alto é 1)

- ▶ Note que $f(A) = \mathbf{0}$ se e somente se $f(\hat{A}) = \mathbf{0}$ (matrizes similares têm o mesmo polinômio mínimo)
- ▶ Obter o polinômio mínimo diretamente de A não é tão trivial, **porém** o polinômio mínimo de uma matriz na forma de Jordan pode ser obtido por inspeção
- ▶ Se λ_i é um autovalor de A com multiplicidade n_i , o polinômio característico de A é dado por

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - A) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

Vamos avançar a discussão com Jordan?

Funções de Matriz Quadrada

- Suponha que a forma de Jordan de A é conhecida. Define-se como o **índice de λ_i** , dado por \bar{n}_i , a maior ordem de todos os blocos de Jordan associados a λ_i . Por exemplo, λ_1 tem multiplicidade 4 em todas as formas de Jordan abaixo:

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}; \quad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}; \quad \hat{A}_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

- Então os índices do autovalor λ_1 são, respectivamente, $\bar{n}_i = 1, 2, 3$ e 4

Funções de Matriz Quadrada

- Para as matrizes $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$, os polinômios mínimos são (por quê?):

$$\psi_1 = (\lambda - \lambda_1)^1; \quad \psi_2 = (\lambda - \lambda_1)^2; \quad \psi_3 = (\lambda - \lambda_1)^3; \quad \psi_4 = (\lambda - \lambda_1)^4$$

- ↝ Usando os índices \bar{n}_i de todos os autovalores λ_i , o polinômio mínimo pode ser expresso da forma:

$$\psi(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i} \quad (= 0)$$

com grau $\bar{n} = \sum \bar{n}_i \leq \sum n_i = n = \text{dimensão de } A$

- Note que o polinômio característico é sempre $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4$
- O polinômio mínimo é um fator do polinômio característico, porém, se os autovalores são todos distintos, os dois polinômios são iguais: $\sum \bar{n}_i = n$

Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Para a matriz na forma de Jordan

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \bar{n}_i = 4$$

Compute:

$$(\hat{A} - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (\hat{A} - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

$$(\hat{A} - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad (\hat{A} - \lambda I)^k = \mathbf{0} \text{ para } k \geq 4$$

- ▶ O índice de λ é $\bar{n}_i = 4$
- ▶ Portanto o polinômio mínimo é $\psi_4 = (\lambda - \lambda)^4$ e $\psi(A) = \mathbf{0}$, e nenhum outro polinômio de grau menor verifica a condição (pois $(\lambda - \lambda)^3 \neq 0$, $(\lambda - \lambda)^2 \neq 0$, $(\lambda - \lambda) \neq 0$)
- ▶ Neste caso em particular, **o polinômio mínimo se iguala ao polinômio característico: $\Delta(A) = \psi(A) = \mathbf{0}$**

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema Seja o polinômio característico de A dado por:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$$

Então: $\Delta(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0$, isto é:

toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaz sua própria equação característica $\Delta(\lambda)$

► Nota-se pelo Teorema que A^n pode ser escrita como uma combinação linear de $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$, i.e.: $A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \cdots - \alpha_{n-1} A - \alpha_n I$

Note que multiplicando-se a equação característica $\Delta(A) = 0$ por A tem-se:

$$A^{n+1} + \alpha_1 A^n + \cdots + \alpha_{n-1} A^2 + \alpha_n A = 0$$

tal que A^{n+1} pode ser escrita como combinação linear de $\{A, A^2, \dots, A^n\}$. Assim sucessivamente pode-se escrever qualquer relação via combinação linear

Para que serve o Teorema de Cayley-Hamilton?

Expressando um polinômio qualquer $f(\lambda)$ de grau n na forma:

$$f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + h(\lambda)$$

- ▶ $q(\lambda)$: quociente da divisão por $\Delta(\lambda)$ (polinômio característico)
- ▶ $h(\lambda)$: resto da divisão (grau menor que n)

Portanto, ao se dividir um polinômio qualquer $f(A)$ por seu polinômio característico avaliado em A , pelo Teorema de Cayley-Hamilton tem-se:

$$f(A) = q(A)\Delta(A) + h(A) = q(A) \cdot \mathbf{0} + h(A) = h(A)$$

Em outras palavras, $f(A)$ se iguala ao resto da divisão que é $h(A)$

Funções de Matriz Quadrada

↪ A ideia é definir "o resto da divisão" $h(\lambda)$ com grau $n - 1$ da forma:

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1}$$

sendo β_i , $i = 0, \dots, n - 1$, o total de n incógnitas a serem obtidas

► Se os n autovalores de A são distintos, as incógnitas β_i podem ser obtidas diretamente das n equações ao igualar:

$$f(\lambda_i) = q(\lambda_i) \underbrace{\Delta(\lambda_i)}_{=0} + h(\lambda_i) = h(\lambda_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

► Se A tem autovalores repetidos, a expressão acima tem que ser diferenciada (em relação ao autovalor λ) para fornecer novas equações da forma a seguir

Funções de Matriz Quadrada

Teorema Seja $f(\lambda)$ uma função dada e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com o polinômio característico:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{n_i} ; \quad n = \sum_{i=1}^m n_i$$

Defina o polinômio de grau $n - 1$ (com n coeficientes a determinar):

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_{n-1} \lambda^{n-1}$$

Os n coeficientes β_i podem ser obtidos do conjunto de n equações dadas por

$$f^{(\ell)}(\lambda_i) = h^{(\ell)}(\lambda_i) \quad \begin{cases} \ell = 0, 1, \dots, n_i - 1 \\ i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

sendo que $f^{(\ell)}(\lambda_i) \triangleq \frac{d^\ell f(\lambda)}{d\lambda^\ell} \Big|_{\lambda=\lambda_i}$; $h^{(\ell)}(\lambda_i) \triangleq \frac{d^\ell h(\lambda)}{d\lambda^\ell} \Big|_{\lambda=\lambda_i}$

Então $f(A) = h(A)$ e diz-se que $h(\lambda)$ é igual a $f(\lambda)$ no espectro (conjunto dos autovalores) de A

Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Obtenha A^{100} , sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$? Note que $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2$

- ▶ Faça: $h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda$, i.e., grau $n - 1 = 1$
- ▶ Espectro de A : $\lambda = 1$ (dois autovalores repetidos). Compute $f(\lambda) = \lambda^{100}$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = h(1) \Rightarrow 1^{100} = \beta_0 + \beta_1 \\ \frac{d}{d\lambda}f(1) = \frac{d}{d\lambda}h(1) \Rightarrow 100(1^{99}) = \beta_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_1 = 100 \text{ e } \beta_0 = -99$$

$$\text{Logo: } A^{100} = f(A) = h(A) = \beta_0 I + \beta_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Para $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, com $\left\{ \begin{array}{l} \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \\ n_1 = 2, \quad n_2 = 1 \end{array} \right.$

Obtenha e^{At} , i.e., se $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, encontre $f(A) = e^{At}$

► Considere $h(\lambda)$ com grau $n - 1 = 2$:

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 \quad \text{ou} \quad h(A) = f(A) = \beta_0\mathbf{I} + \beta_1A + \beta_2A^2$$

Então:

$$f(1) = h(1) \Rightarrow e^t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$$

$$f'(1) = h'(1) \Rightarrow te^t = \beta_1 + 2\beta_2$$

$$f(2) = h(2) \Rightarrow e^{2t} = \beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2$$

Funções de Matriz Quadrada

Então:

$$\beta_0 = -2te^t + e^{2t}; \quad \beta_1 = 3te^t + 2e^t - 2e^{2t}; \quad \beta_2 = e^{2t} - e^t - te^t$$

Logo:

$$f(A) = h(A) = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2$$

E, portanto:

$$e^{At} = f(A) = h(A) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & 0 & 2e^t - 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ -e^t + e^{2t} & 0 & 2e^{2t} - e^t \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

- ↪ Pode-se também obter $f(\hat{A})$ genérica para \hat{A} na forma de Jordan e, posteriormente, ajustar à uma escolha particular para $f(\lambda)$...

Exemplo Considere o bloco de Jordan: $\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$

- $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4$. Escolhendo (de maneira conveniente):

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1(\lambda - \lambda_1) + \beta_2(\lambda - \lambda_1)^2 + \beta_3(\lambda - \lambda_1)^3$$

A condição $f(\lambda) = h(\lambda)$ no espectro de \hat{A} fornece

$$\beta_0 = f(\lambda_1) ; \quad \beta_1 = \frac{f'(\lambda_1)}{1!} ; \quad \beta_2 = \frac{f''(\lambda_1)}{2!} ; \quad \beta_3 = \frac{f^{(3)}(\lambda_1)}{3!}$$

Funções de Matriz Quadrada

Portanto

$$f(\hat{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{I} + \frac{f'(\lambda_1)}{1!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I}) + \frac{f''(\lambda_1)}{2!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2 + \frac{f^{(3)}(\lambda_1)}{3!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^3$$

Usando a propriedade de $(\hat{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ (aqui para $k \geq 4$, $(\hat{A} - \lambda\mathbf{I})^k = 0$) tem-se:

$$f(\hat{A}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f''(\lambda_1)/2! & f^{(3)}(\lambda_1)/3! \\ 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f''(\lambda_1)/2! \\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_1) \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

Por exemplo, para $\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ e $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ tem-se:

$$e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2 e^{\lambda_1 t}}{2!} & \frac{t^3 e^{\lambda_1 t}}{3!} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2 e^{\lambda_1 t}}{2!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Considere uma matriz com dois blocos de Jordan:

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right]$$

- Se $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, então

$$e^{\hat{A}t} = \left[\begin{array}{ccccc} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2! & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array} \right]$$

Funções de Matriz Quadrada

- Se $f(\lambda) = (s - \lambda)^{-1}$, então

$$(s\mathbf{I} - \hat{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s - \lambda_1)} & \frac{1}{(s - \lambda_1)^2} & \frac{1}{(s - \lambda_1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s - \lambda_1)} & \frac{1}{(s - \lambda_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s - \lambda_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(s - \lambda_2)} & \frac{1}{(s - \lambda_2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(s - \lambda_2)} \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada

↝ O teorema de Cayley-Hamilton fornece uma **fórmula explícita para o cálculo da matriz inversa**, já que uma matriz deve satisfazer seu próprio polinômio característico. De fato, multiplicando $\Delta(A)$ por A^{-1} :

$$A^{-1} \Delta(A) = A^{-1} (A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I) = 0$$

$$(A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} I + \alpha_n A^{-1}) = 0$$

ou

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_n} [A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} A + \alpha_{n-1} I]$$

- ▶ Note que é necessário que $\alpha_n \neq 0$ tal que $\exists A^{-1}$
- ▶ Veja que a inversa de A é expressão de até $n - 1$ potências de A (de fato, uma combinação linear de $\{I, A, \dots, A^{n-2}, A^{n-1}\}$)

Funções de Matriz Quadrada & Série de Potência

- ~ Função de matriz quadrada definida como série de potência infinita...

Suponha que $f(\lambda)$ possa ser definida como:

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \lambda^i$$

com raio de convergência ρ . Se todos os autovalores de A têm magnitude menor do que ρ , então $f(A)$ pode ser definida como:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i A^i$$

+ sobre Funções de Matriz Quadrada

Exemplo Considere uma matriz \hat{A} na forma de Jordan e seja

$$f(\lambda) = f(\lambda_1) + \frac{f'(\lambda_1)}{1!}(\lambda - \lambda_1) + \frac{f''(\lambda_1)}{2!}(\lambda - \lambda_1)^2 + \dots$$

Então

$$f(\hat{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{I} + \frac{f'(\lambda_1)}{1!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I}) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda_1)}{(n-1)!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^{n-1} + \dots$$

Note que $(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^k = \mathbf{0}$ para $k \geq n$, i.e., a série infinita pode ser truncada! Por exemplo, considere um único bloco de Jordan de ordem 4, então $f(\hat{A})$ reduz-se a:

$$f(\hat{A}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f''(\lambda_1)/2! & f^{(3)}(\lambda_1)/3! \\ 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f''(\lambda_1)/2! \\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_1) \end{bmatrix}$$

Funções de Matriz Quadrada & Série de Potência

Note que e^{At} pode ser descrita via série de Taylor por:

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda^k$$

que converge para todo λ e t finitos. Então,

$$e^{At} = I + At + \frac{t^2}{2!} A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!} A^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

- ▶ Pode-se usar a descrição por série como um método numérico para computar exponenciais de matrizes

MATLAB – cômputo de exponencial de matriz, aproximação de Padé: `expm` ou `expmdemo1`

Computação Simbólica no MATLAB com exemp

Remeta-se ao exemplo da pag. 15. Obtenha e^{At} para:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[0 0 -2;0 1 0;1 0 3];
>> syms t;
>> expAt = expm(A*t)
expAt =
[ 2*exp(t) - exp(2*t) , 0 , 2*exp(t) - 2*exp(2*t) ]
[ 0 , exp(t) , 0 ]
[ exp(2*t) - exp(t) , 0 , 2*exp(2*t) - exp(t) ]
```

Funções de Matriz Quadrada & Série de Potência

Propriedades de e^{At}

$$e^{At} = \mathbf{I} + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

$$e^0 = \mathbf{I}$$

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$$

► Veja que para $t_2 = -t_1$:

$$e^{At_1}e^{-At_1} = e^{A \cdot 0} = \mathbf{I} \Rightarrow e^{-At_1} = \mathbf{I}/e^{At_1}$$



$$[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$$

Funções de Matriz Quadrada & Série de Potência

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} e^{At} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^k \\ &= A \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \right) A\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A}$$

- ▶ Note que $e^{(A+B)t} \neq e^{At}e^{Bt}$ a menos se $AB = BA$
- ▶ Relação de Euler: $e^{Ai} = \cos A + i \sin A$

Funções de Matriz Quadrada & Série de Potência

↪ Relembrando a Transformada de Laplace de $f(t)$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Particularmente a Transformada abaixo é de interesse:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = s^{-(k+1)}$$

Portanto

$$\mathcal{L}[e^{At}] = \sum_{k=0}^{\infty} s^{-(k+1)} A^k = s^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} s^{-k} A^k = s^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (s^{-1} A)^k$$

Funções de Matriz Quadrada & Série de Potência

- ▶ Como a série infinita

$$\sum_{k=0}^{\infty} (s^{-1} \lambda)^k = 1 + s^{-1} \lambda + s^{-2} \lambda^2 + \cdots = (1 - s^{-1} \lambda)^{-1}$$

converge para $|s^{-1} \lambda| < 1$, conclui-se que

$$\begin{aligned}s^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (s^{-1} A)^k &= s^{-1} I + s^{-2} A + s^{-3} A^2 + \cdots \\&= s^{-1} (I - s^{-1} A)^{-1} \\&= [s(I - s^{-1} A)]^{-1} \\&= (sI - A)^{-1}\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$$

Funções de Matriz Quadrada

- ▶ Embora se tenha usado o fato de que os autovalores de $s^{-1}A$ têm que ter módulo menor do que 1, $\mathcal{L}[e^{At}] = (s\mathbf{I} - A)^{-1}$ vale para todo ‘ s ’ exceto ‘ s ’ igual a um autovalor de A
- ▶ Pode-se obter o mesmo resultado aplicando-se Laplace em $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}e^{At}\right] &= \mathcal{L}[Ae^{At}] \\ s\mathcal{L}[e^{At}] - e^0 &= A\mathcal{L}[e^{At}]\end{aligned}$$

ou

$$(s\mathbf{I} - A)\mathcal{L}[e^{At}] = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[e^{At}] = (s\mathbf{I} - A)^{-1}$$