

Estabilização Robusta

1. Regiões LMIs: Alocação de pólos
2. Restrições sobre entrada e saída
3. Controlador baseado no observador e LMIs

Regiões LMIs e Alocação de pólos

Uma região LMI é uma subregião convexa do plano complexo, **simétrica** em relação ao eixo real e que pode ser definida como:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : L + zM + \bar{z}M^T < 0\}$$

sendo $L = L^T$ e M matrizes reais. A função matricial

$$f_{\mathcal{D}}(z) = L + zM + \bar{z}M^T < 0$$

é chamada função característica de \mathcal{D}

▷ Alocação de pólos em uma região LMI especificada pode ser caracterizada em termos dos elementos das matrizes L e M (l_{ij} e m_{ij}), de modo que a matriz A terá **autovalores em uma região determinada \mathcal{D}** sse $\exists P = P^T \succ 0$ tal que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{D}}(A, X) &= [l_{ij}X + m_{ij}AX + m_{ji}XA^T]_{1 \leq i, j \leq p} \\ &= L \otimes X + M \otimes (AX) + M^T \otimes (AX)^T \end{aligned}$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

▷ A é \mathcal{D} -estável, ie $\lambda(A) \in \mathcal{D}$, sse $\exists X = X^T$ tal que

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) \prec 0, \quad X \succ 0$$

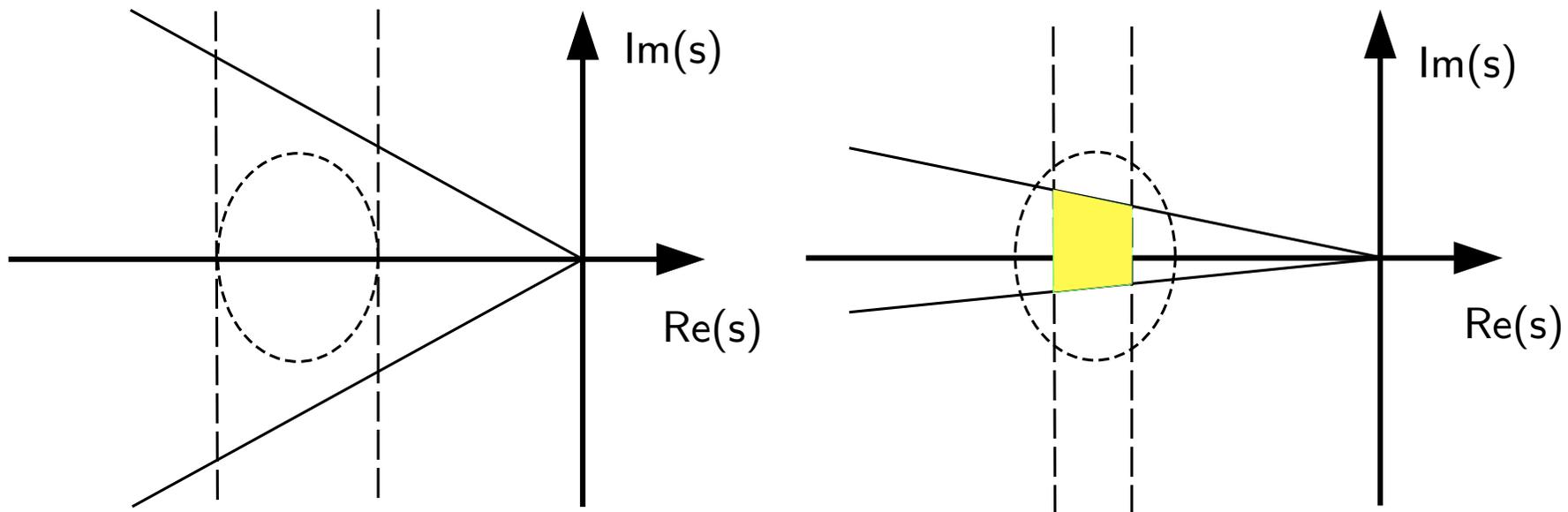
▷ Veja que $M_{\mathcal{D}}(A, X)$ e $f_{\mathcal{D}}(z)$ estão relacionados através da substituição $(X, AX, XA^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z})$

▷ $M_{\mathcal{D}}(A, X)$ pode ser visto como uma generalização da desigualdade de Lyapunov pois se \mathcal{D} é todo o semi-plano esquerdo, com $f_{\mathcal{D}}(z) = z + \bar{z} < 0$, então

$$M_{\mathcal{D}}(A, X) = AX + XA^T \prec 0, \quad X \succ 0$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

- Faixa, disco ou cone? Como proceder via LMIs?



Região de alocação dos pólos em malha fechada: caso contínuo no tempo

Regiões LMIs e Alocação de pólos

1. Região semiplano: $\text{Re}(z) < \sigma_S$

$$z + \bar{z} = (\sigma + j\omega) + (\sigma - j\omega) = 2\sigma < 2\sigma_S \Rightarrow z + \bar{z} - 2\sigma_S < 0$$

Para semiplano no lado esquerdo do plano complexo, $\sigma_S = -\alpha$, $\alpha > 0$, ou

$$z + \bar{z} + 2\alpha < 0$$

que resulta na LMI

$$AP_F + P_F A^T + 2\alpha P_F \prec 0$$

► Considerando o sistema em malha fechada, ie para $A + B_u K$, obtém-se

$$(A + B_u K)P_F + P_F (A + B_u K)^T + 2\alpha P_F \prec 0$$

que resulta, com a mudança de variável linearizante, $Z_F = K P_F$,

$$AP_F + P_F A^T + B_u Z_F + Z_F^T B_u^T + 2\alpha P_F \prec 0, \quad P_F \succ 0 \text{ e } K = Z_F P_F^{-1}$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

2. Região do tipo disco de raio r e centrado em $(c, 0)$:

$$\begin{aligned} |z - c| < r &\Rightarrow |\sigma - c + j\omega| < r \Rightarrow \sqrt{(\sigma - c)^2 + \omega^2} < r \\ &\Rightarrow (\sigma - c)^2 + \omega^2 - r^2 < 0 \end{aligned}$$

elevando ao quadrado e somando e subtraindo $j\omega c$ e $j\omega\sigma$ obtém-se

$$\sigma^2 - \sigma c - \sigma c + c^2 + \omega^2 - r^2 + j\omega c - j\omega c + j\omega\sigma - j\omega\sigma < 0$$

\Updownarrow

$$(\sigma - j\omega)(\sigma + j\omega) - (\sigma - j\omega)c - (\sigma + j\omega)c + c^2 - r^2 < 0$$

\Updownarrow

$$\bar{z}z - \bar{z}c - cz + c^2 - r^2 < 0 \Rightarrow (\bar{z} - c)(z - c) - r^2 < 0$$

\Updownarrow

$$(\bar{z} - c)\frac{1}{r}(z - c) - r < 0$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

Aplicando o complemento de Schur na desigualdade:

$$(\bar{z} - c)r^{-1}(z - c) - r < 0$$

obtém-se a LMI

$$\begin{bmatrix} -r & z - c \\ \bar{z} - c & -r \end{bmatrix} \prec 0$$

Para um disco centrado em $c = -q$, com $q > 0$ segue

$$\begin{bmatrix} -r & z + q \\ \bar{z} + q & -r \end{bmatrix} \prec 0$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

Veja que

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -r & z + q \\ \bar{z} + q & -r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}}_L + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_M z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M^T} \bar{z} < 0$$

que resulta na LMI, substituindo $(P_D, AP_D, P_D A^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z})$

$$\begin{bmatrix} -rP_D & AP_D + qP_D \\ P_D A^T + qP_D & -rP_D \end{bmatrix} < 0$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

▷ Considerando o sistema em malha fechada, ie para $A + B_u K$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -rP_D & (A + B_u K)P_D + qP_D \\ P_D(A + B_u K)^T + qP_D & -rP_D \end{bmatrix} \prec 0$$

que resulta, com a mudança de variável linearizante, $Z_D = KP_D$,

$$\begin{bmatrix} -rP_D & AP_D + B_u Z_D + qP_D \\ P_D A^T + Z_D^T B_u^T + qP_D & -rP_D \end{bmatrix} \prec 0, \quad K = Z_D P_D^{-1}$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

Outras regiões LMIs

3. Cone descrito como

$$|\operatorname{Im}(z)| < \beta |\operatorname{Real}(z)| : f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -(z + \bar{z}) & \frac{1}{\beta}(z - \bar{z}) \\ \frac{1}{\beta}(z - \bar{z}) & -(z + \bar{z}) \end{bmatrix} \prec 0$$

resulta na LMI

$$\begin{bmatrix} -(AP_C + P_C A^T) & \frac{1}{\beta}(AP_C - P_C A^T) \\ \frac{1}{\beta}(AP_C - P_C A^T) & -(AP_C + P_C A^T) \end{bmatrix} \prec 0$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

▷ Considerando o sistema em malha fechada para $A + B_u K$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -((A + B_u K)P_C + P_C(A + B_u K)^T) & \frac{1}{\beta}((A + B_u K)P_C - P_C(A + B_u K)^T) \\ \frac{1}{\beta}((A + B_u K)P_C - P_C(A + B_u K)^T) & -((A + B_u K)P_C + P_C(A + B_u K)^T) \end{bmatrix} \prec 0$$

que resulta, com a mudança de variável linearizante, $Z_C = K P_C$,

$$\begin{bmatrix} -(AP_C + B_u Z_C + P_C A^T + Z_C^T B_u^T) & \frac{1}{\beta}(AP_C + B_u Z_C - P_C A^T - Z_C^T B_u^T) \\ \frac{1}{\beta}(AP_C + B_u Z_C - P_C A^T - Z_C B_u^T) & -(AP_C + B_u Z_C + P_C A^T + Z_C B_u^T) \end{bmatrix} \prec 0$$

$$P_C \succ 0, \quad K = Z_C P_C^{-1}$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

4. Faixa horizontal $|\text{Im}(z)| < \omega$: $f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -2\omega & \bar{z} - z \\ z - \bar{z} & -2\omega \end{bmatrix} \prec 0$

resulta na LMI

$$\begin{bmatrix} -2\omega P_H & P_H A^T - A P_H \\ A P_H - P_H A^T & -2\omega P_H \end{bmatrix} \prec 0$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

▷ Considerando o sistema em malha fechada para $A + B_u K$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -2\omega P_H & P_H(A + B_u K)^T - (A + B_u K)P_H \\ (A + B_u K)P_H - P_H(A + B_u K)^T & -2\omega P_H \end{bmatrix} \prec 0$$

que resulta, com a mudança de variável linearizante, $Z_H = K P_H$,

$$\begin{bmatrix} -2\omega P_H & P_H A^T + Z_H^T B_u^T - A P_H - B_u Z_H \\ A P_H + B_u Z_H - P_H A^T - Z_H B_u^T & -2\omega P_H \end{bmatrix} \prec 0$$

$$K = Z_H P_H^{-1}$$

Regiões LMIs e Alocação de pólos

- ▶ Todas as regiões LMIs podem ser estendidas para sistemas a tempo discreto!!!
Basta que se escolha de forma apropriada os elementos que a caracterizam
- ▶ Pode-se **combinar** duas ou mais regiões LMIs facilmente... No entanto, só é possível utilizá-las quando se deseja obter uma **intersecção** entre as mesmas que não seja vazia. Ie, não há como obter regiões LMIs **desconexas**
- ▶ Quer obter um **único controlador** quando se considera **duas ou mais regiões LMIs**?
Basta para tanto que se fixe a matriz de Lyapunov adotada, ie imponha

$$P = P_F = P_D = P_C = P_H$$

- ▶ Extensão imediata para sistemas com incertezas politópicas

Restrições sobre Sinais de Entrada e Saída

Restrições sobre a entrada de controle Quando a condição inicial, $x(0)$, é conhecida, pode-se encontrar um limitante superior para a norma da entrada do sinal de controle $u(t) = Kx(t)$ de um **sistema incerto** (politópico)

A restrição $\|u(t)\| \leq \mu$ é imposta para todos os instantes $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & Y \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} Y & Z^T \\ Z & \mu^2 I \end{bmatrix} \succeq 0$$

são factíveis, onde $Y \succ 0$ e Z satisfazem as condições de estabilidade, $\forall i = 1, \dots, \kappa$,

$$A_i Y + Y A_i^T + B_{ui} Z + Z^T B_{ui}^T \prec 0 \quad (\text{Caso contínuo})$$

$$\begin{bmatrix} Y & Y A_i^T + Z^T B_{ui}^T \\ A_i Y + B_{ui} Z & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad (\text{Caso discreto})$$

Neste caso, o ganho estabilizante é: $K = ZY^{-1}$...

Restrições sobre Sinais de Entrada e Saída

E se $x(0)$ não é precisamente conhecido? Pode-se estender os resultados para o caso onde $x(0)$ está contido em um **politopo** (ou elipsóide)...

Por exemplo, suponha que $\|x(0)\| \leq 1$, então

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & Y \end{bmatrix} \succeq 0 \implies Y - x(0)x(0)^T \succeq 0 \implies Y \succeq I$$

Obtendo-se assim as LMIs:

$$Y \succeq I, \quad \begin{bmatrix} Y & Z^T \\ Z & \mu^2 I \end{bmatrix} \succeq 0$$

Restrições sobre Sinais de Entrada e Saída

Restrições sobre o pico do sinal de saída Suponha que a condição inicial, $x(0)$, é conhecida e o sistema **incerto** considerado seja da forma

$$\begin{cases} \delta[x(t)] &= Ax(t) + B_u x(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) &= C_y x(t) \end{cases} \quad \text{sendo } (A, B_u, C_y) \in \mathcal{P}$$

A restrição $\|y(t)\| \leq \phi$ é imposta para todos os instantes $t \geq 0$ **se** as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & Y \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} Y & Y C_{yi}^T \\ C_{yi} Y & \phi^2 I \end{bmatrix} \succeq 0$$

são factíveis, $\forall i = 1, \dots, \kappa$, onde $Y \succ 0$ satisfaz a LMI de estabilidade (contínuo ou discreto) como no caso anterior para entrada de controle

Controlador baseado no Observador e LMIs

Considere o controlador dinâmico (controle baseado no observador), ie

$$\begin{cases} \delta[\hat{x}(t)] &= A_c \hat{x}(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c \hat{x}(t) \end{cases} \Leftrightarrow K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

▷ Neste caso as matrizes A_c , B_c , C_c são **incógnitas** no projeto do controlador. Particularmente pode-se mostrar que $B_c \equiv L_p$, $C_c \equiv K$ e $A_c = A - BK - L_p C$ obtidos para um sistema **precisamente conhecido**, ie o tradicional controle baseado no observador...

Controlador baseado no Observador e LMIs

- Sistema em malha fechada? Controlador $K(s)$ realimentando o modelo abaixo:

$$\Sigma : \begin{cases} \delta[x(t)] &= Ax(t) + B_u u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) \end{cases}$$

- Considerando o sistema Σ e o controlador $K(s)$ obtém-se as equações:

$$\delta[x(t)] = Ax(t) + B_u C_c \hat{x}(t)$$

$$\delta[\hat{x}(t)] = A_c x_c(t) + B_c C_y x(t)$$

- Define-se o vetor aumentado: $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}$ (Por que?)

Controlador baseado no Observador e LMIs

Então o sistema aumentado admiti a seguinte realização:

$$\delta[\tilde{x}(t)] = \tilde{A}\tilde{x}(t)$$

sendo $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}$$

- As manipulações são bastante similares para sistemas a tempo contínuo ou discreto. Escolhendo o caso mais “patológico”, ie o contínuo ...

- Estabilidade? $\exists P \succ \mathbf{0}$ satisfazendo

$$\tilde{A}^T P + P \tilde{A} \prec \mathbf{0}, \quad P = P^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

Suponha que a matriz $P = P^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ seja dividida da seguinte forma

$$P \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, \quad P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

e a sua inversa da forma

$$S \triangleq P^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}, \quad S_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

Da identidade $PS = I$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} P_{11}S_{11} + P_{12}S_{12}^T & P_{11}S_{12} + P_{12}S_{22} \\ P_{12}^T S_{11} + P_{22}S_{12}^T & P_{12}^T S_{12} + P_{22}S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{11}S_{11} + P_{12}S_{12}^T = I \quad \Rightarrow I - P_{11}S_{11} = P_{12}S_{12}^T$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

Nota P_{12} e S_{12} têm posto completo de linhas quando $I - P_{11}S_{11}$ é não singular

Nota P satisfaz a identidade $PM = N$, sendo

$$M = \begin{bmatrix} S_{11} & I \\ S_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} I & P_{11} \\ 0 & P_{12}^T \end{bmatrix}$$

Fato Pode-se assumir que P_{12} e S_{12} têm posto completo de linhas $\therefore M$ e N têm posto completo de colunas

- Por que introduzir M e N ? Construção de transformações de similaridade em função de M ou N ...

Controlador baseado no Observador e LMIs

- Baseado na desigualdade de Lyapunov para análise de estabilidade, obtém-se

$$M^T \left(\tilde{A}^T P + P \tilde{A} \right) M \prec 0$$



$$M^T \tilde{A}^T P M + M^T P \tilde{A} M \prec 0$$

- Resta a restrição de positividade para a Lyapunov, ie

$$M^T P M \succ 0$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

Calculando cada um dos termos onde aparece o produto com M

$$\bullet \quad M^T P M = N^T M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & I \\ S_{12}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & I \\ \underbrace{P_{11} S_{11} + P_{12} S_{12}^T}_{\quad} & P_{11} \end{bmatrix}$$

$$\text{então } M^T P M = \begin{bmatrix} S_{11} & I \\ I & P_{11} \end{bmatrix}$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

- $M^T P \tilde{A} M = N^T \tilde{A} M$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ S_{12}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ P_{11} A + P_{12} B_c C_y & P_{11} B_u C_c + P_{12} A_c \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ S_{12}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

$$= \begin{bmatrix} AS_{11} + B_u C_c S_{12}^T \\ P_{11} A S_{11} + P_{12} B_c C_y S_{11} + P_{11} B_u C_c S_{12}^T + P_{12} A_c S_{12}^T \\ \dots & A \\ \dots & P_{11} A + P_{12} B_c C_y \end{bmatrix}$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

Portanto para a Lyapunov obtém-se:

$$M^T \tilde{A}^T P M + M^T P \tilde{A} M \prec 0$$



$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ * & \Psi_{22} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (1)$$

sendo

$$\Psi_{11} \triangleq A S_{11} + S_{11} A^T + B_u C_c S_{12}^T + S_{12} C_c^T B_u^T$$

$$\Psi_{12} \triangleq A + S_{11} A^T P_{11} + S_{11} C_y^T B_c^T P_{12}^T + S_{12} C_c^T B_u^T P_{11} + S_{12} A_c^T P_{12}^T$$

$$\Psi_{22} \triangleq A^T P_{11} + P_{11} A + P_{12} B_c C_y + C_y^T B_c^T P_{12}^T$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

Note que (??) **não é LMI**. Necessita-se então introduzir as seguintes mudanças de variáveis linearizantes em (??) da forma

$$\mathcal{A}^T \triangleq S_{11}A^T P_{11} + S_{11}C_y^T B_c^T P_{12}^T + S_{12}C_c^T B_u^T P_{11} + S_{12}A_c^T P_{12}^T$$

$$\mathcal{B} \triangleq P_{12}B_c$$

$$\mathcal{C} \triangleq C_c S_{12}^T$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

Portanto pode-se obter um controlador dinâmico por realimentação de saída através do procedimento de otimização nas variáveis matriciais S_{11} , P_{11} , \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C}

$\exists S_{11} = S_{11}$, $P_{11} = P_{11}^T$, \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} satisfazendo as LMIs

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} S_{11} & I \\ * & P_{11} \end{array} \right] \succ 0 \\ \left[\begin{array}{cc} AS_{11} + S_{11}A^T + B_u \mathcal{C} + \mathcal{C}^T B_u^T & * \\ \mathcal{A} + A^T & A^T P_{11} + P_{11}A + \mathcal{B}C_y + C_y^T \mathcal{B}^T \end{array} \right] \succ 0 \end{array} \right.$$

Controlador baseado no Observador e LMIs

Resta a questão: **como reconstruir o controlador $K(s)$** ? De posse do conjunto solução do problema de otimização convexo anterior, ie S_{11} , P_{11} , \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C}

- Primeiramente obtenha as matrizes não-singulares P_{12} e S_{12} da decomposição:

$$P_{12}S_{12}^T = I - P_{11}S_{11}$$

- Siga os passos ...

1. $C_c = \mathcal{C} (S_{12}^T)^{-1}$

3. $B_c = P_{12}^{-1} \mathcal{B}$

4. $A_c = P_{12}^{-1} (\mathcal{A} - P_{11}AS_{11} - P_{12}B_c (S_{11} - P_{11}B_u C_c S_{12}^T)) S_{12}^{-T}$