Método do Lugar das Raízes

1. Conceito do "Lugar das Raízes" (LR)

2. Virtudes do Lugar das Raízes (LR)

Conceito de Lugar das Raízes (LR)

▷ No projeto de um sistema de controle é **fundamental** determinar como **a localização das raízes da Equação Característica (EC) no plano-s se modifica à medida que se varia um parâmetro**.

▷ A localização das raízes que se modificam é feita por um método gráfico conhecido como Gráfico do Lugar das Raízes

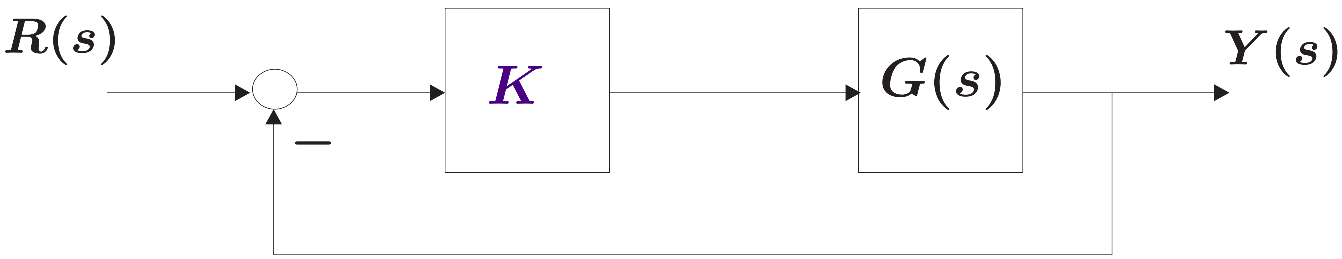
▷ O que fazer ? Elaborar uma metodologia de traçado deste gráfico, manualmente ou por auxílio de computador...

Conceito de Lugar das Raízes (LR)

▷ Como normalmente é necessário ajustar um ou mais parâmetros no sistema de controle para que se consiga alocar de forma apropriada as raízes em malha fechada, será estudado mais a frente, como exemplo de projeto de controle mais sistemático para sistemas realimentados, os efeitos da variação de três parâmetros de um controlador denominado PID, i.e., um controlador com um termo Proporcional, outro Integral e outro Derivativo

Conceito de Lugar das Raízes (LR)

Considere a malha de realimentação unitária e negativa para a planta $G(s)$ com um **parâmetro ajustável** K, ilustrado na figura abaixo



▷ A função de transferência em malha fechada é dada por:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

Conceito de Lugar das Raízes (LR)

▷ As raízes da equação característica (EC) são determinadas da relação

$$1 + KG(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad KG(s) = -1$$

que pode ser re-escrita na forma polar como:

$$|KG(s)| \angle KG(s) = -1 + j0$$

✓ Chamaremos a parcela $KG(s)$ de ganho em malha

▷ Portanto, para pertencer ao Lugar das Raízes, é necessário que o ganho em malha satisfaça

$$\begin{cases} |KG(s)| = 1 \\ \angle KG(s) = \pm 180^\circ \pm k360^\circ, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

Conceito de Lugar das Raízes (LR)

Exemplo Considere o sistema de 2a. ordem descrito por:

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s)} = \frac{1}{s(s+2)}$$

Ao se fechar a malha com realimentação negativa e unitária e com um único parâmetro ajustável K, a Equação Característica (EC) é dada por:

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 1 + \frac{K}{s(s+2)} = \frac{s^2 + 2s + K}{\cancel{s(s+2)}} = 0$$

Quando se compara com a EC de um sistema de 2a. ordem, obtém-se:

$$\Delta(s) = s^2 + 2s + K = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Conceito de Lugar das Raízes (LR)

Note que todos os pontos no plano-s que satisfazem a condição de ângulo

$$\underline{/KG(s)} = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ, \cdots$$

pertencem ao lugar das raízes quando K varia de 0 a ∞ !!

▷ Além disso, o par de raízes do sistema de 2a. ordem é dado por:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Note que se $\zeta > 1$, então as duas raízes são reais e com parte real negativa. Se $0 < \zeta < 1$ (com $\theta = \cos^{-1}\zeta$), então tem-se um par de raízes complexas com parte real negativa. Se $\zeta = 0$, as raízes são puramente imaginárias. Já se $\zeta < 0$, as raízes estão no semiplano direito

▷ Quando se considera o sistema em malha aberta (i.e., tem-se $K = 0$), o LR contém apenas os polos em malha aberta de $G(s)$, i.e., $s_1 = 0$ e $s_2 = -2$

Conceito de Lugar das Raízes (LR)

▷ Como seria o traçado do gráfico do Lugar das Raízes?

▷ Note que para a EC: $\Delta(s) = 1 + KG(s) = s^2 + 2s + K = 0$, pode-se calcular várias raízes em malha fechada para K variando de 0 a ∞, ou:

$$K = 0 \quad \Rightarrow \quad \{-2, 0\}$$ (Polos em malha aberta !!)

$$K = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \{-1.7071, \; -0.2929\}$$ (Super-amortecido)

$$K = 1 \quad \Rightarrow \quad \{-1, -1\}$$ (Criticamente amortecido)

$$K = 2 \quad \Rightarrow \quad \{-1 \pm j1\}$$ (Sub-amortecido)

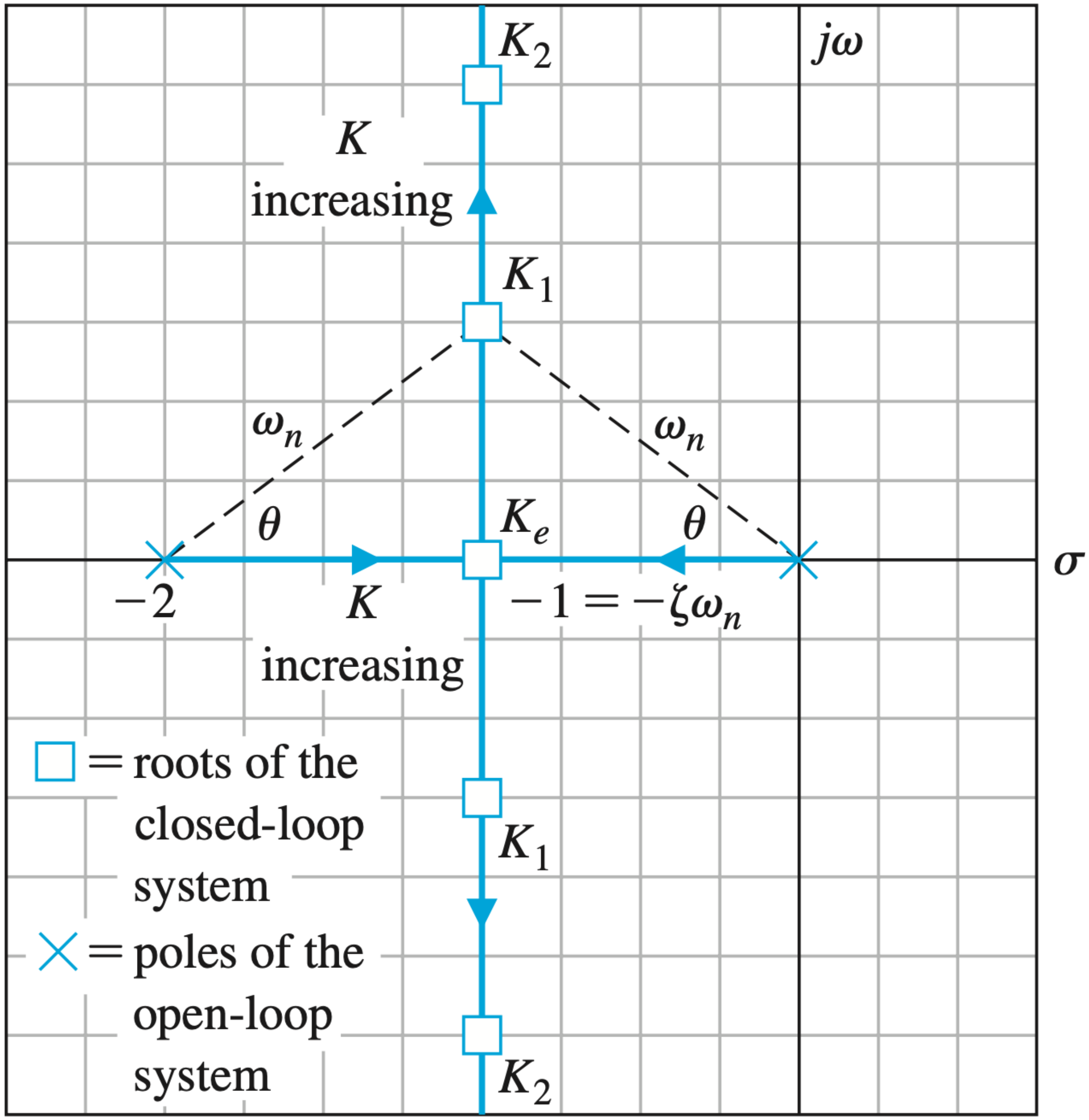
$$K = 5 \quad \Rightarrow \quad \{-1 \pm j2\}$$ (Sub-amortecido...)

$$K = 10^2 \quad \Rightarrow \quad \{-1 \pm j9.9499\}$$ (Sub-amortecido...)

$$K = 10^6 \quad \Rightarrow \quad \{-1 \pm j10^3\}$$ (Sub-amortecido...)

$$K = 10^{15} \quad \Rightarrow \quad \{-1 \pm j3.16 \times 10^7\}$$ (zeros tendendo a ∞... ???)

Gráfico do Lugar das Raízes



Perguntas:

▷ Qual condição deve-se satisfazer para que se possa **decidir** que um ponto qualquer "□" no plano-s pertence ao lugar das raízes ? Condição de ângulo:

$$\angle KG(s) = \pm 180^\circ \pm k360^\circ, \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

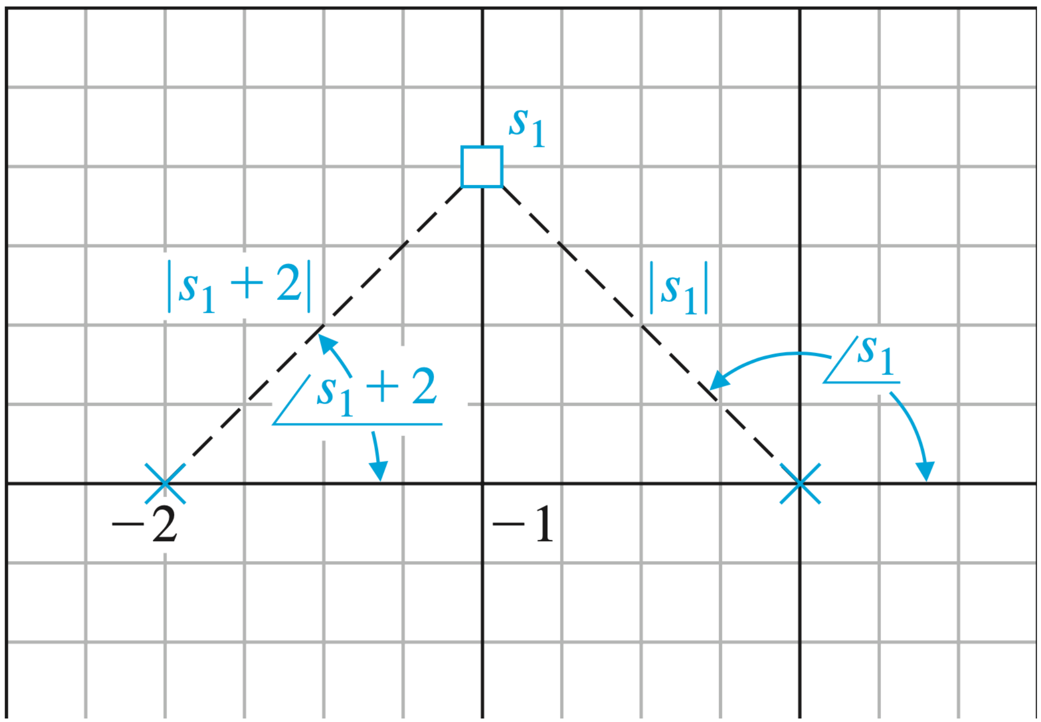
▷ Se o ponto "□" pertence ao LR, então a condição de módulo ($|KG(s)| = 1$) é usada para fornecer o ganho K que aloca a raiz naquela coordenada

▷ Note que neste exemplo para que se atenda a condição de ângulo, considerando K variando de 0 a ∞, o LR no diagrama da página anterior corresponde ao segmento horizontal quando $\zeta > 1$ (i.e., super-amortecimento) e também ao segmento vertical quando $0 < \zeta < 1$ (i.e., sub-amortecimento)

Conceito de Lugar das Raízes (LR)

Para ilustrar, considere um ponto qualquer s_1, selecionado sobre a reta vertical. Então, obtém-se a contribuição dos dois polos da planta $G(s)$ (em $\mathbf{0}$ e $-\mathbf{2}$):

$$\angle \left. \frac{K}{s(s+2)} \right|_{s=s_1} = -\angle s_1 - \angle (s_1+2) = -\left[(180^0 - \theta) + (\theta)\right] = -180^0$$



Conceito de Lugar das Raízes

▷ Uma vez esboçado o LR, pode-se escolher uma raiz qualquer que pertença ao LR e avaliar qual é o valor do ganho K que aloca a raiz naquela coordenada. Por exemplo, o ganho K que aloca a raiz no ponto s_1 é obtido da condição de módulo ($|KG(s)| = 1$) que é dada por:

$$\left| \frac{K}{s(s+2)} \right|_{s=s_1} = 1$$

que é equivalente a:

$$\frac{K}{|s_1|\,|s_1+2|} = 1$$

Então obtém-se o valor para K que posiciona a raiz no ponto s_1 e que depende da coordenada s_1 no plano-s:

$$K = |s_1|\,|s_1+2|$$

Conceito de Lugar das Raízes

▷ Genericamente, para se encontrar as raízes da EC: $\boldsymbol{\Delta}(s) = 1 + F(s)$, com

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{\ell=1}^{n} (s + p_\ell)}$$

a relação $F(s) = -1 + j0$ deve ser verificada e, portanto,

$$\begin{cases} \left| K \dfrac{\prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{\ell=1}^{n} (s + p_\ell)} \right|_{s=\triangle} = 1 \\ \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \underline{/s + z_i} - \left(\sum_{\ell=1}^{n} \underline{/s + p_\ell} \right) = \pm 180^\circ \pm k360^\circ, \;\; k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Conceito de Lugar das Raízes

Exemplo Para a planta abaixo determine o LR em função do parâmetro a?

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + as)} \qquad \text{(Imagine que um polo pudesse ``variar'')}$$

Note que em malha fechada, considerando um ganho K, a EC é dada por:

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 1 + \frac{K}{s(s+a)} = 0$$

$\Updownarrow$ Que é equivalente a escrever:

$$\Delta(s) = s^2 + K + as = 1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0$$

Note que a EC está no formato padrão, porém consideraremos apenas o parâmetro a como sendo variante e K será fixo. A ideia é obter o LR para o parâmetro a variando de 0 a ∞. Há liberdade para decidir qual parâmetro irá variar no LR, desde que se fixe os outros (usaremos esta ideia para o projeto de Controladores com mais de um parâmetro a ser sintonizado)

Conceito de Lugar das Raízes

Note que a função racional: $\dfrac{as}{s^2 + K}$

tem dois polos em $\pm j\sqrt{K}$ (para K fixo) e dois zeros, sendo um finito (em 0) e outro em ∞. Então, aplicando o critério de ângulo considerando um ponto qualquer s_1 obtém-se:

$$+\angle s_1 - \angle(s_1 + j\sqrt{K}) - \angle(s_1 - j\sqrt{K}) = \pm 180^\circ$$

Se a coordenada s_1 é uma raiz da EC pertencente ao LR, pode-se usar a condição de módulo para obter o valor do parâmetro a que posiciona a raiz em s_1, i.e.:

$$\frac{a\,|s_1|}{|{s_1}^2 + K|} = \frac{a\,|s_1|}{\left|s_1 + j\sqrt{K}\right|\left|s_1 - j\sqrt{K}\right|} = 1$$

Conceito de Lugar das Raízes

O LR pode ser esboçado determinando-se todos os pontos no plano-s que satisfazem a condição de ângulo (é trabalhoso?). Na sequência, pode-se obter o valor de a, para uma raiz s_1 qualquer do LR, usando a condição de módulo, i.e.

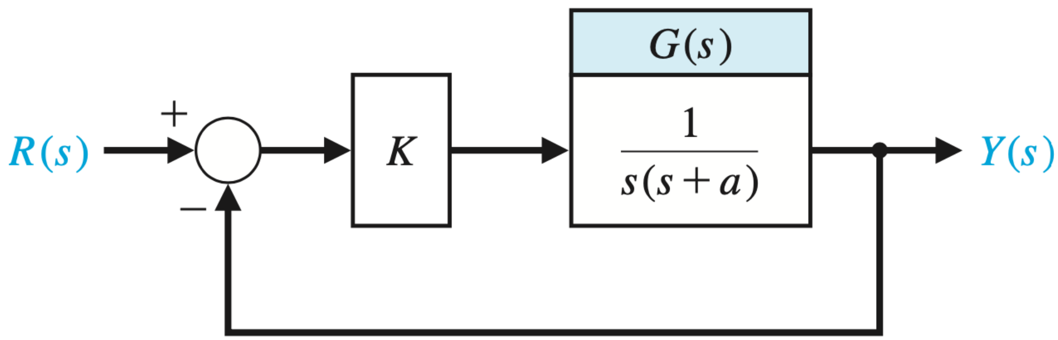
$$a = \frac{\left|s_1 + j\sqrt{K}\right| \left|s_1 - j\sqrt{K}\right|}{|s_1|}$$

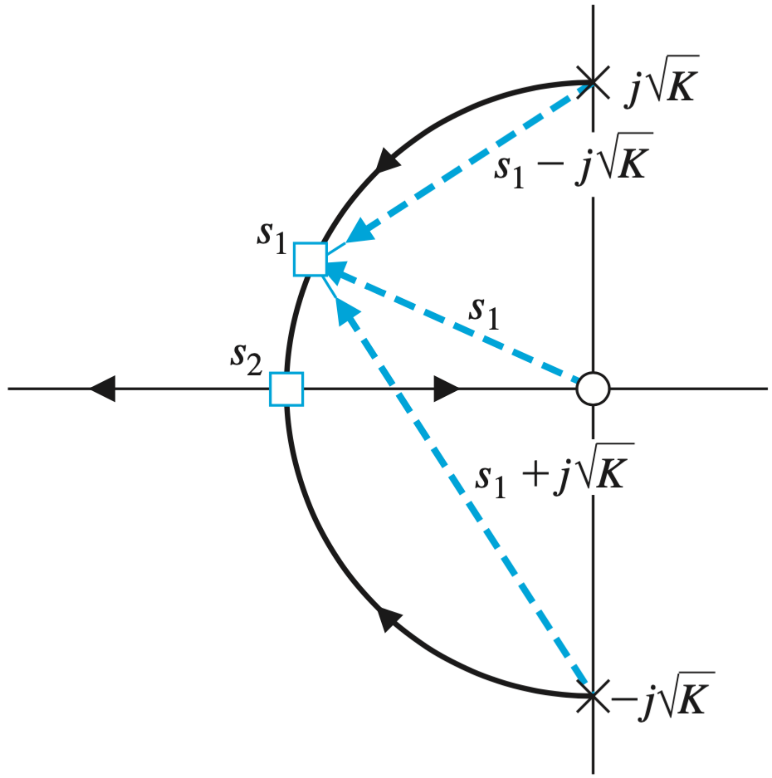
Particularmente, onde tem-se amortecimento crítico, i.e., $\zeta = 1$, as raízes são reais e iguais. Nesta coordenada, representada por s_2 no plano-s (vide a figura da próxima página), tem-se:

$$a = \frac{\left|s_2 + j\sqrt{K}\right| \left|s_2 - j\sqrt{K}\right|}{s_2} = \frac{s_2^2 + K}{s_2} \quad \Rightarrow \text{ Da figura: } \; s_2 = \sqrt{K}$$

Com o aumento de a, a partir deste ponto crítico, uma das raízes (ambas reais) é maior do que s_2 e a outra menor. O LR segue na próxima lâmina

Conceito de Lugar das Raízes





Virtudes do Lugar das Raízes

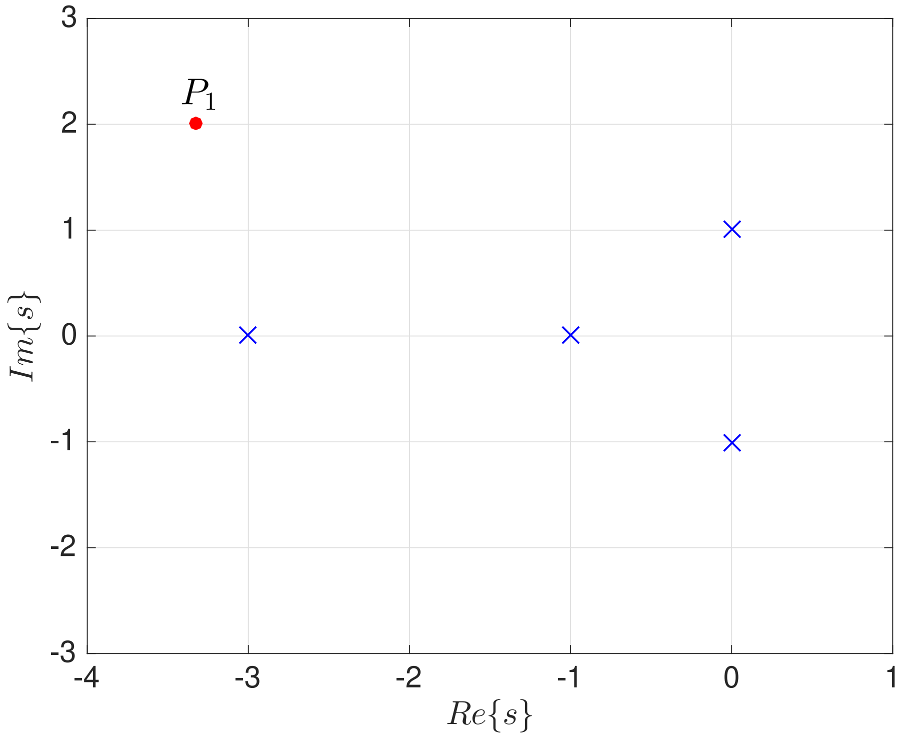
▷ O Lugar das Raízes fornece uma boa "ideia" de como os polos em malha fechada variam em função de um (ou mais) parâmetro(s) ajustáve(l)(eis)

▷ Veremos como esta facilidade do LR em localizar os polos em malha fechada e, conseqüentemente caracterizar elementos da resposta temporal, é um dos métodos mais eficientes no domínio das Transformadas (s ou z) para projeto de sistemas de controle realimentados

▷ Naturalmente não seria nada amigável traçar o LR da forma como foi apresentado, portanto, será discutido no próximo bloco uma metodologia com características gerais para esboçá-lo

Exercício

▷ Na figura abaixo é apresentada a localização dos polos ($\times$) de um ganho em malha (polos em $\mathbf{-1}$; $\mathbf{-3}$; $\boldsymbol{\pm j1}$)



Considere o ponto $\boldsymbol{P_1 = -3.33 + j2}$. Faça os cálculos necessários para verificar se o ponto $\boldsymbol{P_1}$ pertence (ou não) ao Lugar das Raízes (LR)

Solução

Note que o ganho em malha possui dois polos reais em $s_1 = -1$ e $s_2 = -3$, e um par de polos complexos conjugados em $s_{3,4} = \pm j1$. Não há zeros finitos. A FT de interesse para o ganho em malha é então descrita como:

$$KG(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+j1)(s-j1)}$$

As raízes do sistema irão se modificar ao variar o ganho K na malha de controle...

Aplicando-se o critério de ângulo ($\angle KG(s) = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ \cdots$), pode-se verificar quais pontos fazem parte ou não do LR analisando as contribuições de ângulos de cada um dos polos em relação à coordenada P_1. Em outras palavras:

Contribuições dos Ângulos

- Contribuição do polo localizado em -1. $\tan\theta_1 = \frac{2}{2.33} \approx 0.859$, $\tan^{-1}\theta_1 = 40.64^\circ$, fazendo $180^\circ - \theta_1 = 139.36^\circ$
- Contribuição do polo localizado em -3. $\tan\theta_2 = \frac{2}{0.33} \approx 6.06$, $\tan^{-1}\theta_2 = 80.63^\circ$, fazendo $180^\circ - \theta_2 = 99.37^\circ$
- Contribuição do polo localizado em $+j1$. $\tan\theta_3 = \frac{1}{3.33} \approx 0.03$, $\tan^{-1}\theta_3 = 16.72^\circ$, fazendo $180^\circ - \theta_3 = 163.28^\circ$
- Contribuição do polo localizado em $-j1$. $\tan\theta_4 = \frac{3}{3.33} \approx 0.90$, $\tan^{-1}\theta_4 = 42.01^\circ$, fazendo $180^\circ - \theta_4 = 137.99^\circ$

Portanto, a contribuição dos ângulos de cada um dos polos de $G(s)$ é :

$$\underline{/KG(s)} = -[139.36^\circ + 99.37^\circ + 163.28^\circ + 137.99^\circ] = -540^\circ$$

Como a contribuição de ângulos é múltiplo ímpar de -180°, pode-se concluir que o ponto P_1 pertence ao LR. Ademais, pode-se obter o valor do ganho K que aloca uma das raízes em malha fechada em P_1. Basta computá-lo pelo critério de módulo:

$$\left|KG(s)\right|_{s=P_1=-3.33+j2} = 1 \;\Rightarrow\; 0.0103 \times K = 1 \;\Rightarrow\; K \approx 97$$