Algebra Linear

1. Revisitando autovalores e autovetores

2. Forma diagonal e forma de Jordan

2.1 Autovalores distintos

2.2 Autovalores complexos

2.3 Nem todos autovalores distintos

3. Autovalores e autovetores de matriz simétrica

Revisitando Autovalores & Autovetores

$\rightsquigarrow$ $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se existe um vetor $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. $x \in \mathbb{C}$ é chamado de autovetor (à direita) de A associado a λ

- $\exists x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 \;\therefore\; (A - \lambda \mathbf{I})x = 0 \;\Leftrightarrow\; \det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0$
- Polinômio característico: $\Delta(\lambda) \triangleq \det(\lambda \mathbf{I} - A)$
- Equação característica: $\Delta(\lambda) = 0$

Nota A condição $\Delta(\lambda) = 0$ é **também** equivalente à existência de $y \in \mathbb{C}$:

$$y'A = \lambda y' \quad \Longrightarrow \quad y'(\lambda \mathbf{I} - A) = 0$$

e qualquer y satisfazendo a relação acima é chamado autovetor à esquerda de A

Forma Companheira

Note que as formas Companheiras

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \ldots$$

e suas transpostas têm o mesmo polinômio característico:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4$$

Forma Diagonal – Autovalores distintos

Teorema Suponha que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sejam **autovalores distintos** de A e v_i seja um autovetor de A associado ao autovalor λ_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Então o conjunto de autovetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (LI)

Demonstração Primeiramente note que

$$(A - \lambda_j \mathbf{I})v_i = Av_i - \lambda_j v_i = \lambda_i v_i - \lambda_j v_i$$

ou: $$(A - \lambda_j \mathbf{I})v_i = \begin{cases} (\lambda_i - \lambda_j)v_i & , \quad j \neq i \\ 0 & , \quad j = i \end{cases}$$

Supondo (por absurdo) que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LD, então existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

Forma Diagonal – Autovalores distintos

Sem perda de generalidade suponha que $\alpha_1 \neq 0$. Então fazendo:

$$(A - \lambda_n \mathsf{I}) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i}_{=0} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) v_i$$

$$(A - \lambda_{n-1} \mathsf{I})(A - \lambda_n \mathsf{I}) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n)(\lambda_i - \lambda_{n-1}) v_i$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_n)}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})}_{\neq 0} \cdots \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_3)}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, $j = 2, 3, \ldots, n$, então para a igualdade acima se verificar deve-se ter $\alpha_1 = 0$, o que contradiz a hipótese inicial. Portanto:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ é LI } \rightarrow \text{ Base do } \mathbb{C}^n$$

Forma Diagonal – Autovalores distintos

$\leadsto$ Suponha que $\bar{A}$ seja a representação de A na base formada pelos autovetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e seja a i-ésima coluna de $\bar{A}$ a representação de $Av_i = \lambda_i v_i$ na base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Portanto:

$$Av_i = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_i & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Forma Diagonal – Autovalores distintos

$\rightsquigarrow$ Existe uma representação diagonal se todos os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são distintos

► $\boldsymbol{Q}$ define uma transformação de similaridade que diagonaliza a matriz $\boldsymbol{A}$

► Portanto, se $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \cdots & \boldsymbol{v_n} \end{bmatrix}$ é tal que $\boldsymbol{\bar{A} = Q^{-1}AQ}$ é uma matriz diagonal, então

$$\boldsymbol{AQ = Q\bar{A} \quad \Longrightarrow \quad Av_i = \lambda_i v_i \ , \ \ i = 1 \cdots n}$$

e $\boldsymbol{\{v_1, v_2, \ldots v_n\}}$ são autovetores LI de $\boldsymbol{A}$

Forma Diagonal – Autovalores distintos

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Autovalores: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

- $(A - \lambda_1 \mathbf{I})v_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -v_{31} & = & 0 \\ v_{21} & = & 0 \\ 2v_{31} & = & 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forma Diagonal – Autovalores distintos

- $(A - \lambda_2 \mathbf{I}) v_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -v_{12} - v_{32} & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ v_{32} & = & 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $(A - \lambda_3 \mathbf{I}) v_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2v_{13} - v_{33} & = & 0 \\ -v_{23} & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{13} = -0.5 v_{33} \;\; ; \;\; v_3 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\{v_1, v_2, v_3\}$ são LI:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Forma Diagonal – Autovalores complexos

⇝ Considere a matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

▶ Autovalores: $\mathbf{-1}$, $\mathbf{2} + \boldsymbol{j}\mathbf{3}$ e $\mathbf{2} - \boldsymbol{j}\mathbf{3}$

▶ Autovetores: $\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} \boldsymbol{j} \\ \mathbf{-3} + \boldsymbol{j}\mathbf{2} \\ \boldsymbol{j} \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} -\boldsymbol{j} \\ \mathbf{-3} - \boldsymbol{j}\mathbf{2} \\ -\boldsymbol{j} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{j} & -\boldsymbol{j} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} + \boldsymbol{j}\mathbf{2} & \mathbf{-3} - \boldsymbol{j}\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{j} & -\boldsymbol{j} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} + \boldsymbol{j}\mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} - \boldsymbol{j}\mathbf{3} \end{bmatrix}$$

Forma Diagonal – Autovalores Repetidos

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Autovalores: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

- Note que para $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$ obtém-se duas soluções LI:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = 0.$$ Soluções LI: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $(A - \lambda_3 I)v_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 0 \;;\; v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Forma Diagonal – Autovalores Repetidos

⇝ Ao contrário do exemplo anterior que é possível obter uma forma diagonal, para autovalores repetidos nem sempre é possível obter $\bar{A}$ na forma diagonal. Por exemplo, considere:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 5 \quad \text{(Multiplicidade Algébrica (MA)} = 2\text{)}$$

E os autovetores são?

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0 \; ; \; v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é, não é possível calcular dois autovetores LI ou, em outras palavras, a Mulitiplicidade Geométrica (MG) é 1. Não é possível encontrar uma transformação Q que descreva uma representação diagonal para A

Forma Diagonal – Autovalores Repetidos

$\rightsquigarrow$ Multiplicidade Geométrica (MG) de $\boldsymbol{\lambda_1} \ \ \mathbf{:} \ \ \mathbf{2}$ (número de soluções LI associadas ao autovalor)

$\rightsquigarrow$ No caso geral tem-se: Multiplicidade Geométrica (MG) $\leq$ Multiplicidade Algébrica (MA)

$\rightsquigarrow$ Se a Multiplicidade Geométrica for menor que a Multiplicidade Algébrica, não é possível determinar autovetores $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ LI

Forma Canônica de Jordan

⇝ Define-se como $J_k(\lambda)$ o bloco de Jordan de dimensão $k \times k$ associado ao autovalor λ com multiplicidade maior que 1, dado por:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k}$$

⇝ Para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existe uma matriz não singular Q tal que

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

sendo que A tem r autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ entre n possíveis

Forma Canônica de Jordan

⇝ Associados aos r autovalores distintos, pode-se determinar r autovetores LI $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ usando:

$$(A - \lambda_i \mathbf{I})v_i = 0 \ \ , \ \ i = 1, 2, \ldots, r$$

- Note que se há n blocos de Jordan de tamanho $k = 1$, então $\bar{A}$ é uma matriz diagonal
- A forma de Jordan é única para uma dada matriz A (eventualmente pode haver permutações entre os blocos)
- Pode haver múltiplos blocos associados ao mesmo autovalor

Forma Canônica de Jordan

A pergunta é: como obter uma base para a transformação? O truque é impor uma **"máscara" específica**, que no caso pode ser definida pelo bloco de Jordan $J_{k_i}(\lambda_i)$, para se obter uma **base específica**, e.g.: $\{v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{ik_i}\}$. Então: $QJ_{k_i}(\lambda_i) = AQ$, para matriz A e bloco $J_{k_i}(\lambda_i)$ dados. Em outras palavras:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{ik_i} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}}_{J_{k_i}(\lambda_i)} = A \underbrace{\begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{ik_i} \end{bmatrix}}_{Q}$$

Define-se $v_{i1} \triangleq v_i$ como sendo o autovetor associado ao autovalor λ_i

Forma Canônica de Jordan

Tal que ao se igualar ambos os lados tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_i v_{i1} = A v_{i1} \quad & \Longrightarrow \quad (A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{i1} = 0 \\
v_{i1} + \lambda_i v_{i2} = A v_{i2} \quad & \Longrightarrow \quad (A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{i2} = v_{i1} \\
\vdots \qquad & \\
v_{i(k_i-1)} + \lambda_i v_{ik_i} = A v_{ik_i} \quad & \Longrightarrow \quad (A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{ik_i} = v_{i(k_i-1)}
\end{aligned}$$

- Da definição de autovetor: $\exists v_{i1} \neq 0$ tal que $(A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{i1} = 0$

Forma Canônica de Jordan

- Da equação que define v_{i2}, i.e.,$(A - \lambda_i I)v_{i2} = v_{i1}$, multiplicando à direita e à esquerda por $(A - \lambda_i I)$, pode-se escrever:

$$\underbrace{(A - \lambda_i I)(A - \lambda_i I)}_{=(A-\lambda_i I)^2}\; v_{i2} = (A - \lambda_i I)v_{i1} = 0$$

Em outras palavras:

$$\begin{cases} (A - \lambda_i I)^2 v_{i2} = 0 \\ (A - \lambda_i I)v_{i2} \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Autovetor Generalizado de } \lambda_i$$

- v é um autovetor generalizado de grau ℓ de A associado ao autovalor λ se

$$\begin{array}{rcl} (A - \lambda I)^{\ell} v & = & 0 \\ (A - \lambda I)^{\ell - 1} v & \neq & 0 \end{array}$$

Forma Canônica de Jordan

- Se o autovetor generalizado v é de grau 1 então:

$$(A - \lambda \mathbf{I})v = 0; \quad v \neq 0$$

e portanto v é um autovetor

- O número de blocos de Jordan associados ao autovalor λ é dado pela nulidade:

$$\nu(A - \lambda \mathbf{I})$$

- A forma canônica de Jordan é bastante útil do ponto de vista conceitual e para análises importantes ao longo do curso

Forma Canônica de Jordan

Exemplo $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

Autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$:

$$(A - 2\mathbf{I})v_1 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1a} \\ v_{1b} \\ v_{1c} \end{bmatrix} = 0 \quad ; \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan

Para $\lambda_2 = 1 \;\Rightarrow\; (A - 1\mathbf{I})v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} v_2 = 0$

- Note que $l_3 = l_1 + 4l_2$, $\texttt{rank}(A - \texttt{eye}(3)) = 2 \quad \Rightarrow \quad \nu(A - 1\mathbf{I}) = 1$

Portanto existe 1 único bloco de Jordan associado ao autovalor $\lambda = 1$

- Pode-se obter a transformação Q que gera a forma de Jordan. Veja que de$(A - 1\mathbf{I})v_2 = 0$, tem-se

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan

Definindo-se $v_{21} \triangleq v_2$, determina-se o autovetor generalizado v_{22}

$$(A - 1\mathbf{I})v_{22} = v_{21} \quad ; \quad v_{22} = \begin{bmatrix} -1 \\ 22/49 \\ 46/49 \end{bmatrix}$$

E tem-se a transformação $Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$, que gera a forma de Jordan:

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{(Há apenas 1 bloco de Jordan para } \lambda_2 = 1\text{)}$$

- Matlab: `jordan`(A)

Forma Canônica de Jordan

$\rightsquigarrow$ Considere $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ com um autovalor λ de multiplicidade algébrica 4. Suponha que $\nu(A - \lambda \mathrm{I}) = 1$. **Portanto $(A - \lambda \mathrm{I})v = 0$ possui apenas uma única solução LI dada por v.** Para formar uma base no $\mathbb{R}^4$, são necessários mais três vetores LI (autovetores generalizados) v_2, v_3 e v_4, todos satisfazendo:

$$(A - \lambda \mathrm{I})^2 v_2 = 0$$
$$(A - \lambda \mathrm{I})^3 v_3 = 0$$
$$(A - \lambda \mathrm{I})^4 v_4 = 0$$

- A partir de um vetor v, a cadeia de autovetores generalizados de tamanho 4 é gerada:

$$\begin{aligned}
v_1 &\triangleq v \\
v_2 &\triangleq (A - \lambda \mathrm{I})v_1 = (A - \lambda \mathrm{I})v \\
v_3 &\triangleq (A - \lambda \mathrm{I})v_2 = (A - \lambda \mathrm{I})^2 v \\
v_4 &\triangleq (A - \lambda \mathrm{I})v_3 = (A - \lambda \mathrm{I})^3 v
\end{aligned}$$

Forma Canônica de Jordan

- Da cadeia de autovetores generalizados tem-se os vetores LI (com $v_1 = v$):

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= v_1 + \lambda v_2 \\ Av_3 &= v_2 + \lambda v_3 \\ Av_4 &= v_3 + \lambda v_4 \end{aligned}$$

- Forma de Jordan (representação na base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$):

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Forma Canônica de Jordan

⇝ Agora suponha que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{4\times 4}}$ tem um autovalor $\boldsymbol{\lambda}$ de multiplicidade algébrica 4, porém $\boldsymbol{\nu(A - \lambda \mathsf{I}) = 2}$. **Portanto $(A - \lambda \mathsf{I})v = 0$ possui 2 soluções LI**. Sendo necessário 2 autovetores generalizados

▶ A partir de cada um dos autovetores, gera-se uma cadeia de autovetores generalizados. Possíveis formas de Jordan neste caso são:

$$\boldsymbol{\bar{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]; \ \bar{A}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]; \ \bar{A}_3 = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]}$$

Exemplo

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Lembre-se: $\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \det C$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= [(3-\lambda)(1-\lambda)+1](2-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 1] \\ &= (2-\lambda)^2(2-\lambda)^2(2-\lambda)\lambda \\ &= (2-\lambda)^5\lambda \end{aligned}$$

Exemplo

- Autovalores: $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$, MA$= \mathbf{5}$; $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$, MA$= \mathbf{1}$

$$(\boldsymbol{A} - \mathbf{2I}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\texttt{rank}(\boldsymbol{A} - \mathbf{2} * \texttt{eye}(\mathbf{6})) = 4 \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nu(A - 2I) = 6 - 4 = 2} \quad \Rightarrow \text{MG} = \mathbf{2}$$

- A forma de Jordan tem dois blocos associados ao autovalor $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$

Exemplo

- A transformação é dada por:

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & v_1 & v_2 & v_3 & u_1 & u_2 \end{array}\right]$$

sendo x, v_1 e u_1 autovetores e v_2, v_3 e u_2 autovetores generalizados

Exemplo

Forma de Jordan:

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c|ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Autovalores e Autovetores de Matriz Simétrica

$\rightsquigarrow$ Suponha que os autovalores de uma matriz simétrica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sejam dados por: $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, ..., $\boldsymbol{\lambda_n}$

Pergunta-se: Os autovalores de A são reais se A é uma matriz simétrica?

Veja que se $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ é um autovalor e $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor genérico de $\boldsymbol{A}$, então $\boldsymbol{Av = \lambda v}$, $\boldsymbol{v \neq 0}$. Note que poderia-se escrever:

$$\boldsymbol{v^* A v = \lambda v^* v}$$

e tomando o conjugado transposto tem-se: $\boldsymbol{(v^* A v)^* = (v^* A v) = \bar{\lambda} v^* v}$

Como $\boldsymbol{A = A^*}$, fazendo $\boldsymbol{v^* A v - (v^* A v)^* = v^*(A - A^*)v = 0}$, e tem-se:

$$\boldsymbol{v^*(A - A^*)v = 0 = (\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{v^* v}_{v \neq 0}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda = \bar{\lambda}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$$

Autovalores e Autovetores de Matriz Simétrica

- Autovetores v_i, v_j associados a autovalores distintos $\lambda_i \neq \lambda_j$ de uma matriz simétrica são ortogonais, i.e., $\langle v_i, v_j \rangle = v_i' v_j = 0$?

Veja que para autovalores distintos tem-se:

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \Rightarrow \quad v_j' A v_i = \lambda_i v_j' v_i$$

$$Av_j = \lambda_j v_j \quad \Rightarrow \quad v_i' A v_j = \lambda_j v_i' v_j$$

Como $A = A'$, então subtraindo os termos do lado direito após transpor a primeira igualdade, obtém-se de $(v_j' A v_i)' - v_i' A v_j = v_i'(A' - A)v_j = 0$:

$$v_i'(A' - A)v_j = 0 = (\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j \rangle \quad \Rightarrow \quad v_i \perp v_j \quad \text{se} \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

Autovalores e Autovetores de Matriz Simétrica

- A forma de Jordan de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonal

- Se $A = A'$, $\bar{A} = \bar{A}'$ é uma matriz diagonal (com os autovalores reais na diagonal) e a base formada pelos autovetores é tal que

$$Q'Q = \mathbf{I} \qquad \text{(base ortonormal)}$$

$$(Q^{-1}AQ)' = Q'AQ^{-1} = Q^{-1}AQ \quad \therefore \quad Q^{-1} = Q'$$