Estabilização Robusta

1. Modelos de incertezas estruturadas e espaço de estados
    1.1. Incertezas limitadas em norma
    1.2. Incertezas politópicas
2. Complemento de Schur e sinais de matrizes
3. Estabilidade quadrática e LMIs
4. Realimentação de estados e LMIs

Incertezas Estruturadas – Limitadas em Norma

Modelo incerto no espaço de estado para a planta generalizada

$$\begin{aligned}
\delta[x(t)] &= (A + \Delta A)x(t) + (B_u + \Delta B_u)u(t) + (B_w + \Delta B_w)w(t) \\
y(t) &= (C_y + \Delta C_y)x(t) + (D_{yu} + \Delta D_{yu})u(t) + (D_{yw} + \Delta D_{yw})w(t) \\
z(t) &= (C_z + \Delta C_z)x(t) + (D_{zu} + \Delta D_{zu})u(t) + (D_{zw} + \Delta D_{zw})w(t)
\end{aligned}$$

sendo que $\Delta(\cdot) \triangleq E_{(\cdot)}\Delta F_{(\cdot)}$, para $(\cdot) = A, B_u, B_w, C_y, C_z, D_{yu}, D_{yw}, D_{zu}, D_{zw}$

Δ é uma matriz desconhecida satisfazendo $\|\Delta\| < 1$

e $E_{(\cdot)}$ e $F_{(\cdot)}$ são matrizes conhecidas e indicam as direções de entrada de Δ

- Conjunto de incertezas $\mathcal{D}$ é um conjunto limitado em norma:

$$(A_\Delta, B_{u\Delta}, \ldots, D_{zw\Delta}) \in \mathcal{D} \triangleq \Big\{(\cdot) + E_{(\cdot)}\Delta F_{(\cdot)} \ \Big|$$

$$\|\Delta\| < 1,\ \Delta \in \mathbb{C}^{n_\Delta \times n_\Delta},\ (\cdot) = A, B_u, B_w, C_y, C_z, D_{yu}, D_{yw}, D_{zu}, D_{zw}\Big\}$$

Incertezas Estruturada – Incertezas politópicas

Para o mesmo modelo incerto anterior, outra descrição para o conjunto incerto é da forma de um politopo:

$$\mathcal{P} \triangleq co \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & B_{u1} & B_{w1} \\ C_{y1} & D_{yu1} & D_{yw1} \\ C_{z1} & D_{zu1} & D_{zw1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} A_\kappa & B_{u\kappa} & B_{w\kappa} \\ C_{y\kappa} & D_{yu\kappa} & D_{yw\kappa} \\ C_{z\kappa} & D_{zu\kappa} & D_{zw\kappa} \end{bmatrix} \right\}$$

- Interpretação? Qualquer j, $j = 1, \ldots, \kappa$, ponto extremo do **politopo** (?) representa um conjunto particular de matrizes $(A, B_u, \ldots, D_{zw})$, correspondendo a um modo de operação particular do sistema

- Como mudar de um modo para outro? É arbitrário e pode ser instantâneo...

- Modelo nominal? Ao contrário do caso limitado em norma, não há a necessidade de um modelo nominal

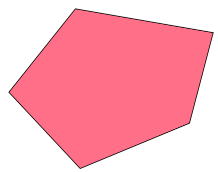
Politopo ?

Definição A intersecção de um número finito de subespaços fechados é denominado **conjunto poliedral**

Exemplo $\mathcal{C} \triangleq \{x \mid Ax \leq y, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$

Nota Conjuntos poliedrais são convexos e fechados, mas podem não ser limitados

Definição Um conjunto poliedral limitado é denominado **politopo**

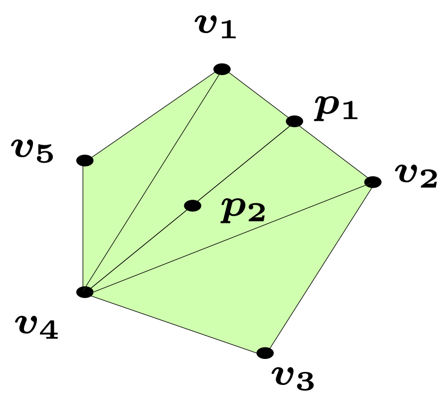


Em outras palavras, um politopo é a casca convexa de um conjunto finito de vértices

Portanto todo elemento no politopo pode ser gerado pela **combinação convexa** (?) dos seus vértices

Politopo ?

Exemplo Politopo: $\mathcal{P} = \text{co}\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$



Todo $p \in \mathcal{P}$ é escrito da forma: $p = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i v_i,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 1$

Da figura,

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + 0v_3 + 0v_4 + 0v_5 \\
p_2 &= \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + 0v_3 + \frac{1}{3}v_4 + 0v_5 \\
p_2 &= \frac{1}{3}v_4 + \frac{2}{3}p_1
\end{aligned}
$$

Exemplo de Modelagem

Como representar o sistema incerto abaixo?

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \alpha - 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}}_{A_\Delta} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - \beta \end{bmatrix}}_{B_{u\Delta}} u(t)$$

sendo que os parâmetros variam na faixa: $|\alpha - 0.5| \leq 0.3$, $|\beta - 0.5| \leq 0.3$

Suponha que $\alpha_n = \beta_n = 0.5$ sejam os valores nominais

Exemplo de Modelagem

Conjunto limitado em norma? É completamente definido pelas matrizes

$$A_{\Delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}}_{A_n} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}}_{E_A} \Delta \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F_A}$$

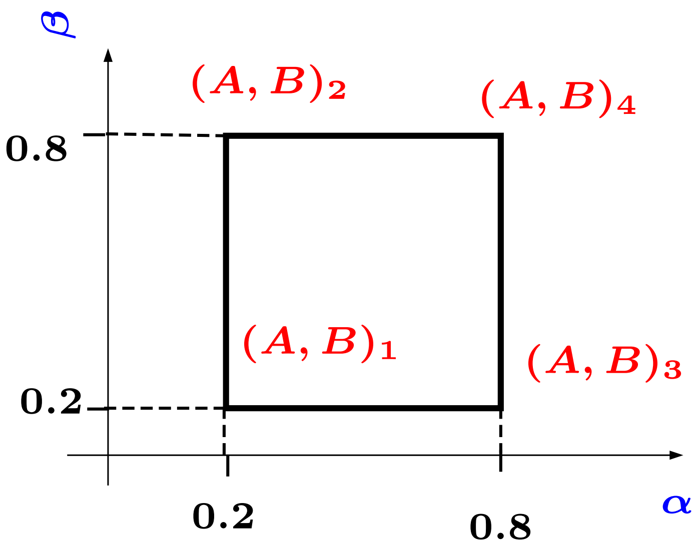
$$B_{u\Delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}}_{A_n} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}}_{E_B} \Delta \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{F_B}$$

e os parâmetros incertos α e β são representados em Δ, $\|\Delta\| \leq 1$:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\alpha - 0.5}{0.3} & 0 \\ 0 & \frac{\beta - 0.5}{0.3} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\alpha - 0.5}{0.3} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\beta - 0.5}{0.3} \right| \leq 1$$

Exemplo de Modelagem

Conjunto politópico? Veja que $|\alpha - 0.5| \leq 0.3 \therefore 0.2 \leq \alpha \leq 0.8$ (e $0.2 \leq \beta \leq 0.8$).
Desse modo as matrizes extremas são geradas pelos quatro vértices do retângulo:



Isto é, $\kappa = 4$, ou $\kappa = 2^n$, $n = 2$ $\quad\longrightarrow\quad$ número de combinações de α e β

Exemplo de Modelagem

Politopo:

$$\mathcal{P} = co\left\{\left(\begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}\right); \left(\begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}\right); \ldots \right.$$

$$\left. \left(\begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}\right); \left(\begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}\right)\right\}$$

- Não há necessidade de um modelo nominal...

Complemento de Schur e sinais de matrizes

Se estiver em dificuldades para obter LMIs... A receita é o complemento de Schur, que transforma desigualdades não-lineares (porém convexas) em LMIs

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{array}{l} P_{22} \succ 0 \\ P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T \succ 0 \end{array}$$

ou

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{array}{l} P_{11} \succ 0 \\ P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1}P_{12} \succ 0 \end{array}$$

- Inicialmente proposto para o estudo de sinais de matrizes ...

Aplicando o Complemento de Schur ...

- Restrições quadráticas, $x \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$, e $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$(x^T - \tilde{x}^T)Q^{-1}(x - \tilde{x}) \leq q \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} q & (x^T - \tilde{x}^T) \\ (x - \tilde{x}) & Q \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}$$

- Desigualdade de Riccati

$$AX + XA^T - BB^T + XC^TCX \preceq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} A^TX + XA - BB^T & XC^T \\ CX & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \preceq \mathbf{0}$$

linear na "variável" matricial X

Aplicando o Complemento de Schur ...

- Grammianos de Controlabilidade contínuo e discreto com desigualdade

$$AL_c + L_cA^T + BB^T \preceq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{já é uma LMI !!}$$

$$AL_cA^T - L_c + BB^T \preceq 0$$

também é uma LMI, porém aplicar Schur é bastante interessante ...

$$AL_cL_c^{-1}L_cA^T - L_c + BB^T \preceq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} L_c & AL_c & B \\ L_cA^T & L_c & 0 \\ B^T & 0 & I \end{bmatrix} \succeq 0$$

Definição Um sistema dinâmico incerto

$$\delta[x(t)] = Ax(t), \quad A \in \mathcal{P} \triangleq \left\{ A \mid A = \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i A_i,\ \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i = 1 \right\}$$

é dito ser quadraticamente estável

1. se para sistemas a tempo contínuo

$$\exists\, P = P^T \succ 0 \ : \ A^T P + PA \prec 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}$$

2. se para sistemas a tempo discreto

$$\exists\, P = P^T \succ 0 \ : \ A^T PA - P \prec 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}$$

Estabilidade quadrática e LMIs

Para o caso contínuo, a estabilidade quadrática é verificada se para a mesma matriz de Lyapunov $\boldsymbol{P}$:

$$\exists\, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T \succ \mathbf{0} \quad : \quad \begin{cases} \boldsymbol{A}_1^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_1 \prec \mathbf{0} \\ \boldsymbol{A}_2^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_2 \prec \mathbf{0} \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{A}_\kappa^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_\kappa \prec \mathbf{0} \end{cases}$$

Para o caso discreto, a estabilidade quadrática é verificada se para a mesma matriz de Lyapunov $\boldsymbol{P}$:

$$\exists\, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T \succ \mathbf{0} \quad : \quad \begin{cases} \boldsymbol{A}_1^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{P} \prec \mathbf{0} \\ \boldsymbol{A}_2^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{P} \prec \mathbf{0} \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{A}_\kappa^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_\kappa - \boldsymbol{P} \prec \mathbf{0} \end{cases}$$

Realimentação de estados e LMIs

Definição Um sistema dinâmico incerto

$$\delta[x(t)] = Ax(t) + B_u u(t)$$

$$(A, B_u) \in \mathcal{P} \triangleq \left\{ (A, B_u) \mid (A, B_u) = \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i (A_i, B_{ui}),\ \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i = 1 \right\}$$

é dito ser quadraticamente estabilizável por realimentação de estados, $u(t) = Kx(t)$

1. se para sistemas a tempo contínuo

$$\exists\, P = P^T \succ \mathbf{0} \quad : \quad (A + B_u K)^T P + P(A + B_u K) \prec \mathbf{0} \quad \forall (A, B_u) \in \mathcal{P}$$

2. se para sistemas a tempo discreto

$$\exists\, P = P^T \succ \mathbf{0} \quad : \quad (A + B_u K)^T P(A + B_u K) - P \prec \mathbf{0} \quad \forall (A, B_u) \in \mathcal{P}$$

particularmente $K \in \{K \mid A + B_u K$ é assintoticamente estável$\}$

Como obter K ?

Vamos considerar sistemas a tempo discreto (o caso contínuo é trivial),

$$(A_i + B_{ui}K)^T P (A_i + B_{ui}K) - P \prec 0 \quad \forall i = 1, \ldots, \kappa$$

$\Updownarrow$ por Schur...

$$\begin{bmatrix} P & (A_i + B_{ui}K)^T \\ A_i + B_{ui}K & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0 \quad \forall i = 1, \ldots, \kappa$$

Pré- e pós-multiplicando pela transformação de similaridade diag$\{P^{-1}, \mathbf{I}\}$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & (A_i + B_{ui}K)^T \\ A_i + B_{ui}K & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0$$

Como obter K ?

ie $$\begin{bmatrix} P^{-1}PP^{-1} & P^{-1}(A_i + B_{ui}K)^T \\ (A_i + B_{ui}K)P^{-1} & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0$$

fazendo duas mudanças de variáveis linearizantes

$$Y \triangleq P^{-1} \quad \text{e} \quad Z \triangleq KP^{-1} = KY$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} Y & YA_i^T + Z^T B_{ui}^T \\ A_i Y + B_{ui} Z & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad \forall i = 1, \ldots, \kappa$$

sendo $K = ZY^{-1}$ (ie, independente das matrizes incertas A e B_u !!)

- Basta resolver um problema de factibilidade nas variáveis matricias Y e Z, nos vértices $i = 1, \ldots, \kappa$

Exercício

Exercício Computacional Considere o sistema a tempo discreto dado por

$$\begin{cases} x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \end{cases}$$

Considere dois casos para a variação dos parâmetros incertos do modelo:

Caso a – $0.7 \leq \alpha \leq 1$ e $1 \leq \beta \leq 2$

Caso b – $0.5 \leq \alpha \leq 1$ e $0.5 \leq \beta \leq 8$

Nota O modelo incerto é instável para combinações em malha aberta...

Objetivo Encontre ganhos de realimentação K que estabilize quadraticamente o sistema incerto em malha fechada para os dois casos (Detalhe: Verifique se a estabilidade é garantida, e.g., nos vértices)