

Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

1. Estabilidade relativa
2. Estabilidade no espaço de estado
3. Exemplo de projeto: controle de direção de um veículo com esteiras
4. Usando MATLAB[©]
5. Projeto sequencial: sistema de leitura de um acionador de disco

Estabilidade Relativa de um Sistema Realimentado

- ▷ Routh-Hurwitz indica precisamente **estabilidade absoluta** de um sistema
- ▷ A **estabilidade relativa** de um sistema pode ser definida como a propriedade que é medida pelo valor da parte real de cada raiz ou par de raízes. Quanto mais as suas raízes estão afastadas do eixo imaginário, relativamente mais estável é o sistema realimentado quando comparado a uma outra configuração de realimentação cujas raízes estão mais próximas ao eixo imaginário
- ▷ Por exemplo, para duas raízes r_1 e r_2 , se $|\Re\{r_1\}| < |\Re\{r_2\}|$, diz-se que r_2 é relativamente mais estável do que r_1
- ▷ A estabilidade relativa de um sistema também pode ser definida em termos do coeficiente de amortecimento ζ (para um par de raízes complexas), o que implica de fato em sobre-elevação maior ou menor

Estabilidade Relativa de um Sistema Realimentado

▷ O Critério de Routh-Hurwitz pode ser estendido tal que permita avaliar cenários para estabilidade relativa. Para tanto, basta considerar uma mudança de variável que corresponderia a deslocar o eixo imaginário

Exemplo Pode-se determinar se todas as raízes do polinômio abaixo têm parte real menor do que -1 sem calculá-las explicitamente? Se sim, pode-se garantir uma margem de segurança de estabilidade e afastamento em relação ao eixo imaginário, i.e., **relativamente seria mais estável?**

$$\Delta(s) = s^4 + 14s^3 + 71s^2 + 154s + 120$$

Faça $s = s' - 1$. Então pode-se reescrever o polinômio da forma:

$$\Delta(s') = s'^4 + 10s'^3 + 35s'^2 + 50s' + 24$$

Estabilidade Relativa

O arranjo é dado por

$$\begin{array}{c|ccc} s'^4 & 1 & 35 & 24 \\ s'^3 & 10 & 50 & \\ s'^2 & 30 & 24 & \\ s'^1 & 42 & & \\ s'^0 & 24 & & \end{array}$$

Portanto, como não há mudança de sinais, o polinômio $\Delta(s')$ não tem raízes com parte real à direita de -1 . Em outras palavras, $\mathbb{R}\{s'\} \geq 0$ o que implica $\mathbb{R}\{s + 1\} \geq 0$ ou, simplesmente, $\mathbb{R}\{s\} \geq -1$. Então todas as raízes têm parte real menor que -1 , o que garante uma faixa de segurança de estabilidade (e uma faixa de afastamento do eixo imaginário – "relativamente mais estável")

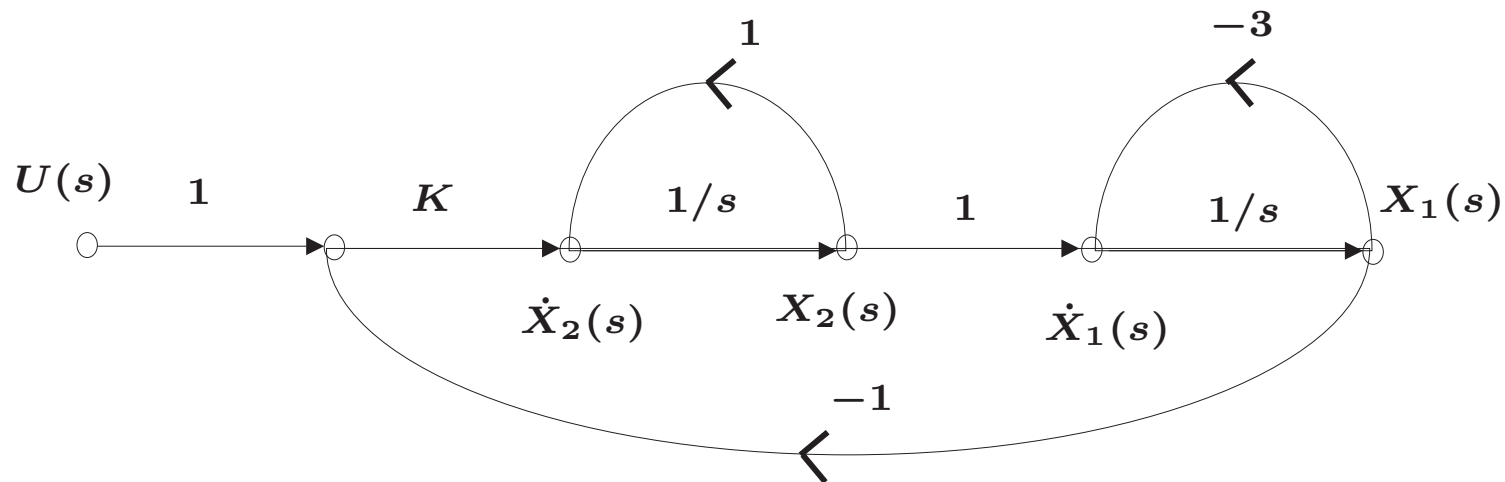
Estabilidade no Espaço de Estados

► A **EC** pode ser obtida diretamente do determinante da regra de Mason do diagrama de fluxos de sinais correspondente ao sistema de equações

Exemplo Para o sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -Kx_1 + x_2 + Ku \end{cases}$$

Um diagrama de fluxo de sinais correspondente é dado por:



Estabilidade no Espaço de Estados

▷ Aplicando a regra de Mason:

$$\Delta(s) = 1 - \sum L_{1 \times 1} + \sum L_{2 \times 2} - \sum L_{3 \times 3} + \dots$$

sendo que: $L_1 = 1/s$; $L_2 = -3/s$; $L_3 = -K/s^2$, e

$$\Delta(s) = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2 = 1 - \left(\frac{1}{s} - \frac{3}{s} - \frac{K}{s^2} \right) - \frac{3}{s^2} = 0$$



$$\Delta(s) = s^2 + 2s + (K - 3) = 0$$

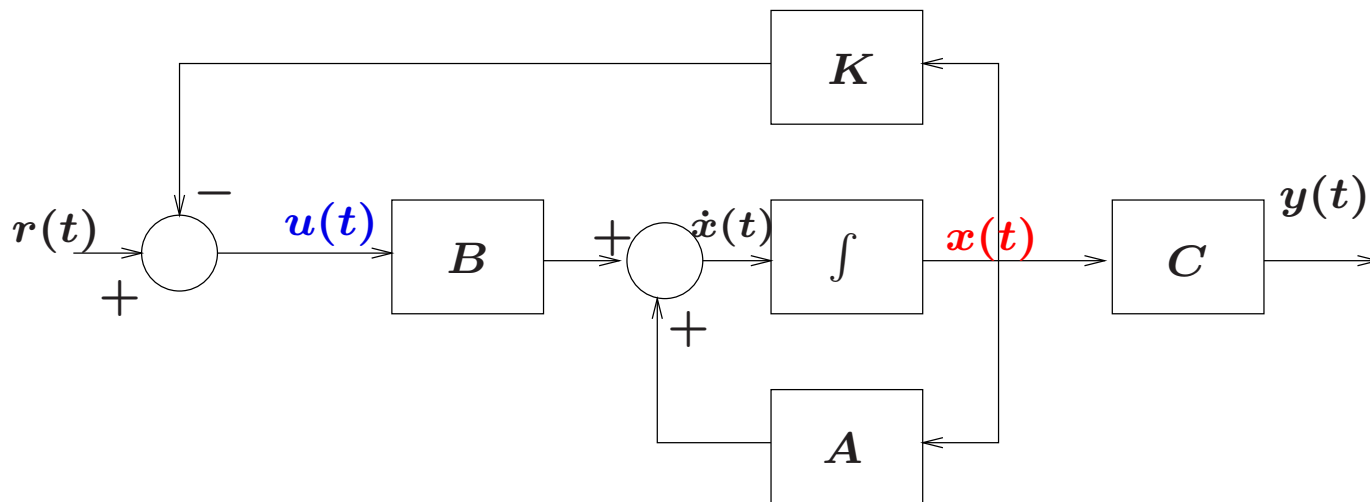
Logo pelo critério de Routh-Hurwitz, basta impor $K > 3$ para que se garanta estabilidade

Estabilidade no Espaço de Estados

Considere o sistema n dimensional e SISO (uma entrada e uma saída):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

no qual $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Abaixo tem-se um esquemático quando se faz **realimentação negativa dos estados $x(t)$** , i.e., fechando a malha com $u(t) = -Kx(t) + r(t)$:



Estabilidade no Espaço de Estados

Com **realimentação de estados** e considerando que o sinal de referência é nulo ($r(t) = 0$), então a entrada de controle $u(t)$ é dada por:

$$u(t) = -Kx(t) = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} x$$

isto é, $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Ao substituir $u(t)$ no sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, ou melhor, ao **fechar a malha**, tem-se:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) = \tilde{A}x(t)$$

sendo $\tilde{A} = A - BK$ a matriz que representa o sistema em malha fechada

▷ Pergunta: **como verificar se o sistema em malha fechada é estável para um dado ganho K** ? Basta checar a estabilidade de $\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t)$

Estabilidade no Espaço de Estados

▷ Note que uma solução que satisfaz o sistema de equações diferenciais de primeira ordem, e descrito pelo sistema em malha fechada $\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t)$, é da forma:

$$x(t) = e^{\tilde{A}t}x(0)$$

sendo $x(0)$ a condição inicial dada

▷ Cabe a pergunta: quando $t \rightarrow \infty$ (estado estacionário), as trajetórias $x(t)$ convergem para valores limitados (ou nulos - origem) ou para valores ilimitados? Esta é uma pergunta básica sobre estabilidade...

▷ Note que para condições iniciais $x(0)$ finitas, $x(t) = e^{\tilde{A}t} \rightarrow 0$ se e somente se o argumento da exponencial for negativo quando $t \rightarrow \infty$. Precisamos saber como checar!

Estabilidade no Espaço de Estados

- ▷ Note que qualquer matriz quadrada pode ser transformada em uma matriz diagonal J na forma de Jordan (sendo que a sua diagonal principal contém todos os autovalores λ da matriz original). \tilde{A} e J terão os mesmos autovalores!!!
- ▷ Então pode-se escrever $e^{\tilde{A}t}$ em uma forma equivalente como e^{Jt} . Veja que a diagonal de J contém os n autovalores (distintos) da matriz \tilde{A} , ou simplesmente:

$$e^J = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Portanto, se cada parcela $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, todas as trajetórias $x(t)$ tendem a zero (convergem!). Isto só ocorre se todos os autovalores de \tilde{A} estiverem no semi-plano esquerdo (i.e., se tiverem parte real negativa)...

Estabilidade no Espaço de Estados

Desta forma para checar se o sistema em malha fechada em espaço de estados é estável basta computar os autovalores da matriz em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t)$$

▷ Cálculo dos autovalores?

$$\lambda x = \tilde{A}x, \quad \forall x \neq 0$$



$$(\lambda I - \tilde{A})x = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda I - \tilde{A}) \text{ é singular} \quad \Rightarrow \quad |\lambda I - \tilde{A}| = 0$$

Os autovalores são as raízes do determinante: $|\lambda I - \tilde{A}| = 0$

Exemplo

Para quais valores de α o sistema abaixo é estável?

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -\alpha \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} x(t)$$

Calcule os 3 autovalores λ para $|\lambda I - A| = 0$, i.e.:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda + 1 & \alpha \\ -2 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo

Calculando o determinante $|\lambda I - A|$, tem-se:

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2) - \alpha(\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2) - \alpha(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + (5 - \alpha)\lambda + (2 - \alpha) = 0$$

Pelo critério de Routh-Huwirtz:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & 5 - \alpha \\ \lambda^2 & 4 & 2 - \alpha \\ \lambda^1 & \frac{18 - 3\alpha}{4} & 0 \\ \lambda^0 & 2 - \alpha & 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{18 - 3\alpha}{4} > 0 \text{ ou } \alpha < 6 \\ 2 - \alpha > 0 \text{ ou } \alpha < 2 \end{array} \right.$$

pode-se concluir que o sistema é estável para todo $\alpha < 2!!$

Exemplo de Projeto

Controle de direção de um veículo de esteiras

O objetivo é realizar o controle de direção de um veículo com acionamento independente nas duas “rodas” (no caso, veículo com esteira)

Objetivo Específico ? Manter o erro em estado estacionário para um entrada em rampa limitado a um certo patamar – depende de parâmetros a serem selecionados...

Por que entrada rampa?

Como funciona? E o modelo? Descritos a seguir

Transportation Technology: Tracked Vehicles

Tracked vehicle fundamentals

Engine and Steering Housing

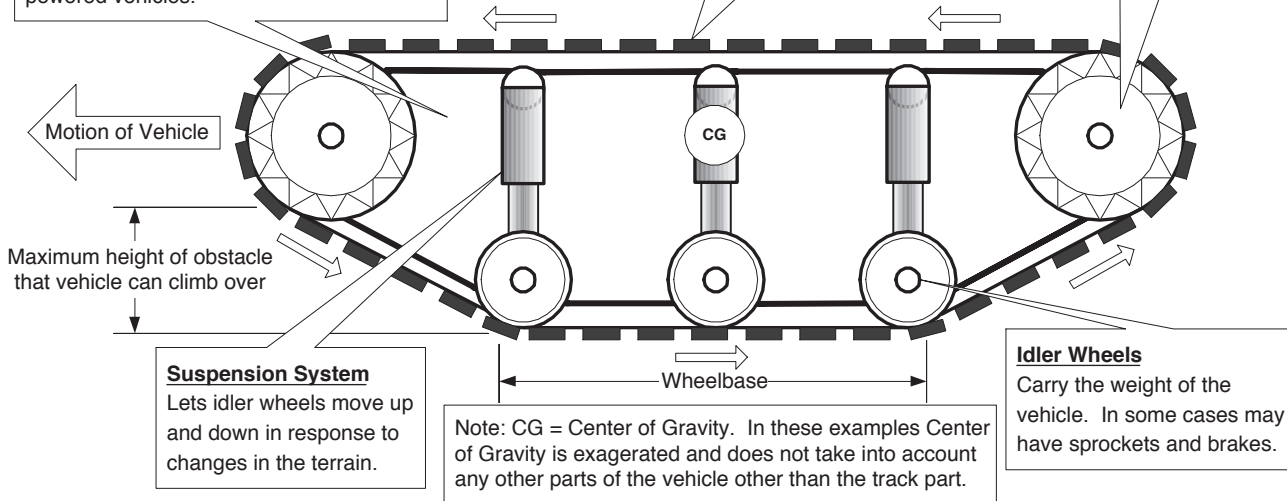
Waterproof housing for the engine and steering systems. Exhaust is ported at the highest point of the vehicle in gasoline powered vehicles.

Tracks

Links chained together with metal or rubber pads that contact and grip the ground. The links mesh with the sprocket wheel teeth.

Sprocket Wheel

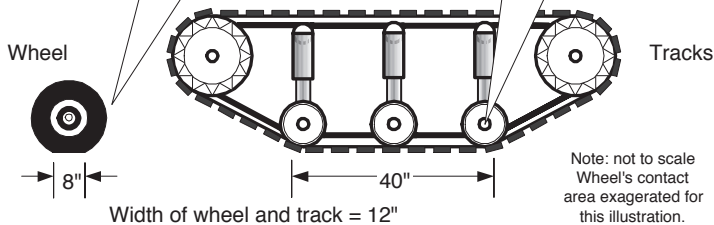
Acts as drive wheel, it powers the track.



Wheel's and Tires Vs. Tracks

The weight of the vehicle makes the tire flatten where it contacts the ground. This gives a contact area of 8" x 12" (the width of the tire) for a total area of 96 square inches. (Depends on air pressure in the tire)

The weight of the vehicle is dispersed over the entire length of track that contacts the ground. This gives a contact area of 40" x 12" (the width of the track) for a total of 480 square inches.

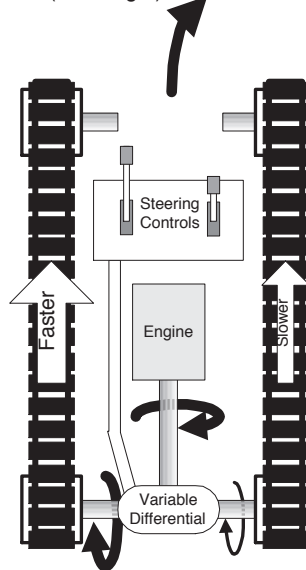


This 4-wheeled vehicle has a maximum of 384 square inches of contact with the ground. A fourth of the total weight of the vehicle would be carried by each wheel.

This 2-tracked vehicle has a maximum of 960 square inches of contact with the ground. A sixth of the total weight of the vehicle is carried by each idler wheel.

Steering a Tracked Vehicle

Direction of Travel (Turn Right)



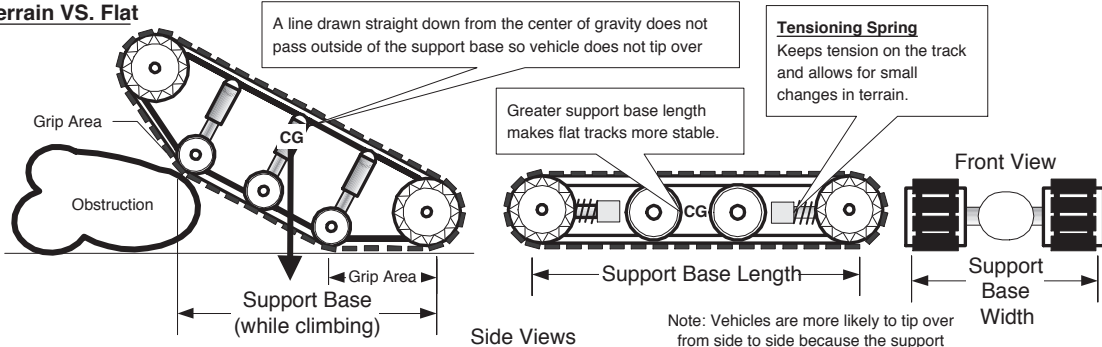
Tracked vehicles are steered by adjusting the speed of the track on one side of the vehicle in relation to the speed of the track on the other side. This creates a torque on the vehicle and causes it to pivot around the slower track. The steering controls change individual track speeds through a variable speed differential. The differential is usually controlled by levers.

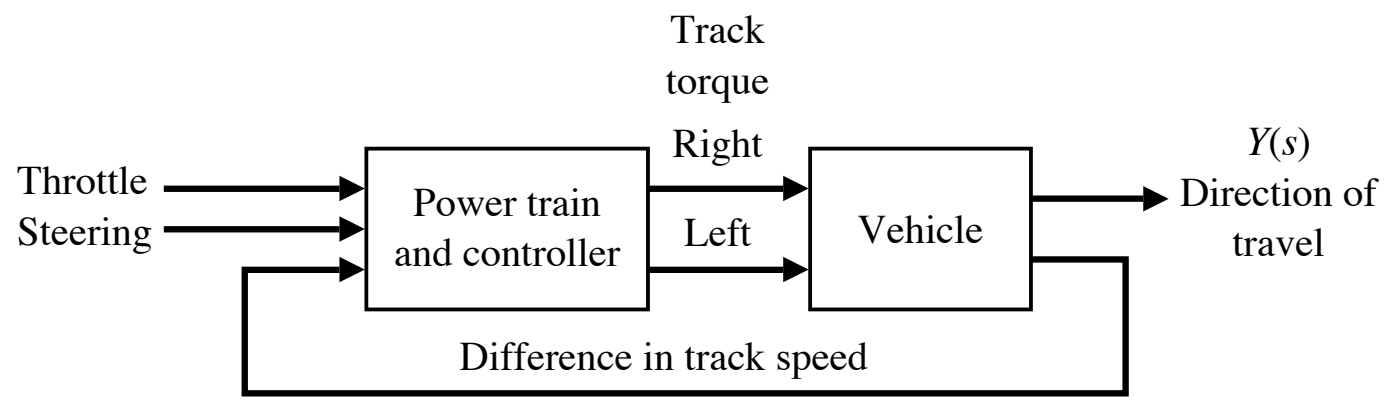
By reversing one track entirely the vehicle can pivot and spin in place.

Most of the track is sliding sideways compared to the forward motion of the vehicle when turning. This can cause damage to the ground or to roadways.

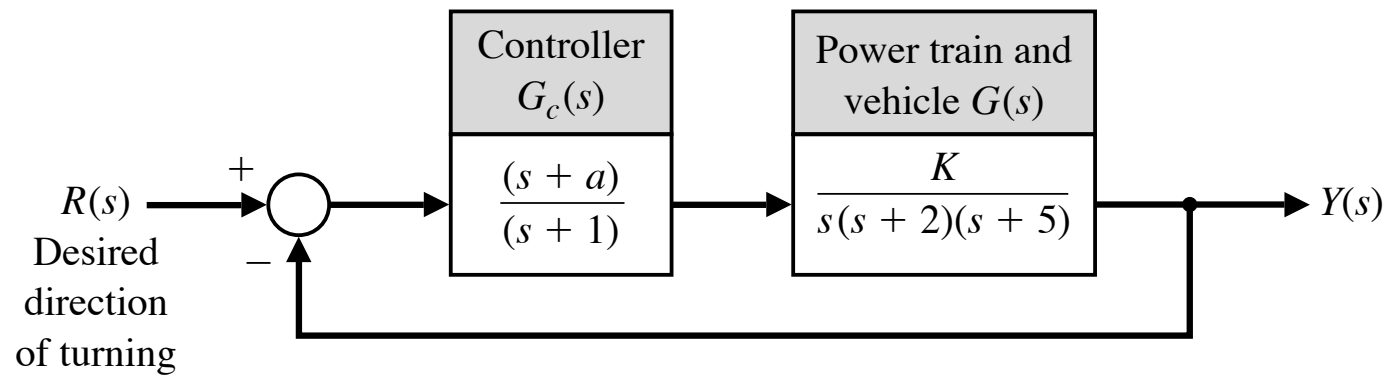
Different Kinds of Tracks: All Terrain VS. Flat

Tank-style tracks are used for very rough terrain or higher speeds. Flatter tracks are used on earth-moving equipment because more track can contact the ground and climbing over obstacles is less important. By having a larger wheelbase the flat track is more stable. An object is stable as long as a line pointing straight down from its center of gravity does not go outside of its support base.





(a)



(b)

Figure 6.8 (a) Turning control system for a two-track vehicle (b) Block diagram

Exemplo: Controle de Direção de um Veículo

▷ EC do sistema realimentado:

$$1 + G_c(s)G(s) = 1 + \frac{K(s + a)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 5)} = 0$$

ou

$$s(s + 1)(s + 2)(s + 5) + K(s + a) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + Ka = 0$$

Usar Routh-Hurwitz para determinar a região de estabilidade para valores de K e a

Exemplo: Controle de Direção de um Veículo

Arranjo de Routh associado:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 17 & Ka \\
 s^3 & 8 & (K + 10) & 0 \\
 s^2 & b_3 & Ka & \\
 s^1 & c_3 & & \\
 s^0 & Ka & &
 \end{array}
 \Rightarrow
 \left\{ \begin{array}{l}
 b_3 = \frac{126 - K}{8} > 0 \\
 c_3 = \frac{b_3(K + 10) - 8Ka}{b_3} > 0
 \end{array} \right.$$

$$K < 126$$

$$Ka > 0$$

$$(K + 10)(126 - K) - 64Ka > 0$$

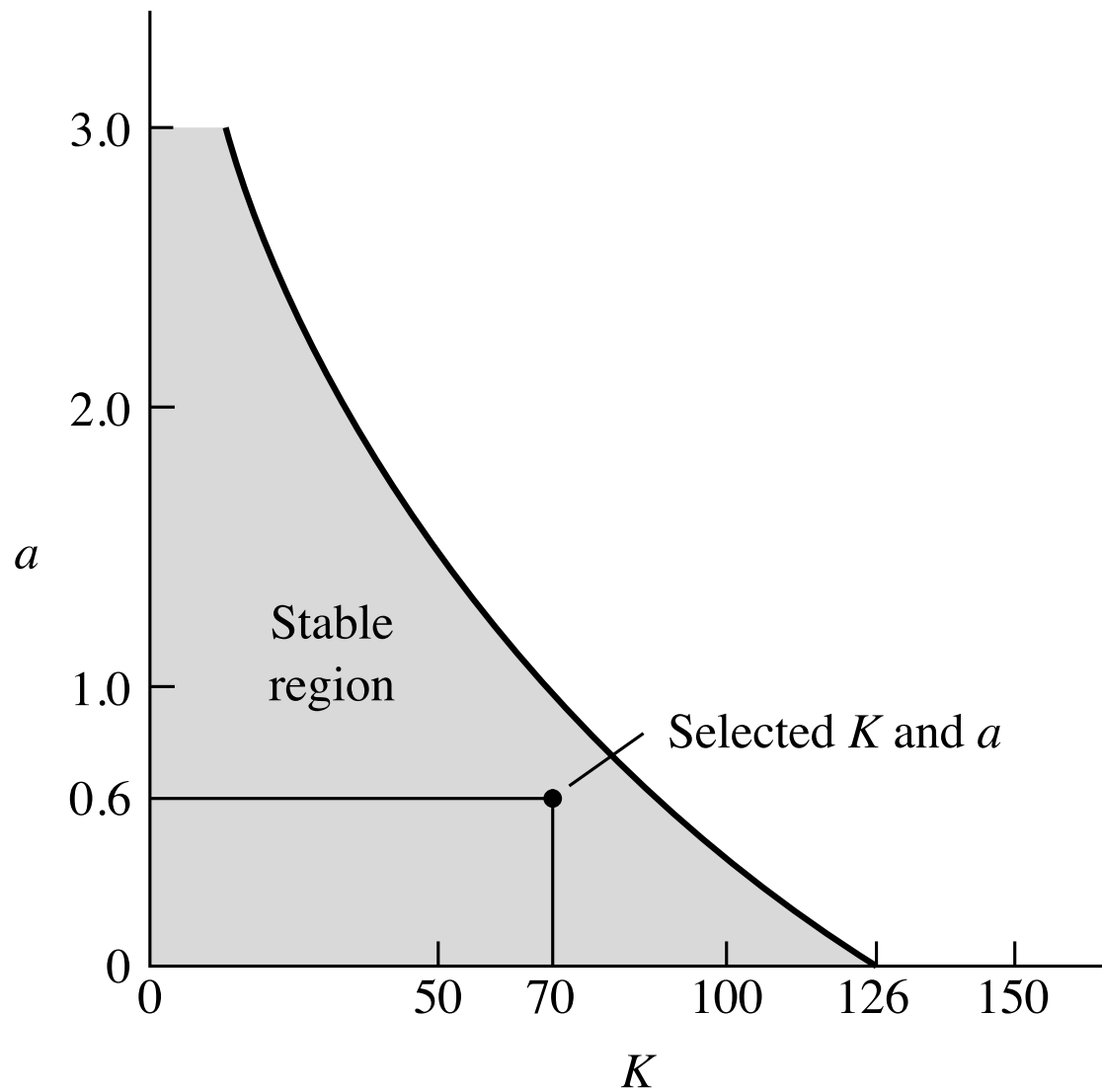


Figure 6.9 The stable region

Exemplo: Controle de Direção de um Veículo

▷ Especificamente pode-se obter o erro em estado estacionário para uma entrada em rampa qualquer $R(s) = A/s^2$, da forma:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\overbrace{1}^{E(s)}}{1 + G_c(s)G(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{\cancel{s}(s+1)(s+2)(s+5)}{\cancel{s}(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a)} \frac{A}{\cancel{s}^2} \\ &= \frac{10A}{Ka} \end{aligned}$$

Exemplo: Controle de Direção de um Veículo

- ▷ Da figura anterior, nota-se que pode-se selecionar uma infinidade de valores para o par K e a a fim de atender o desempenho especificado
- ▷ Por exemplo, para $e_{ss} \leq 20\%$ do valor de magnitude A é necessário que

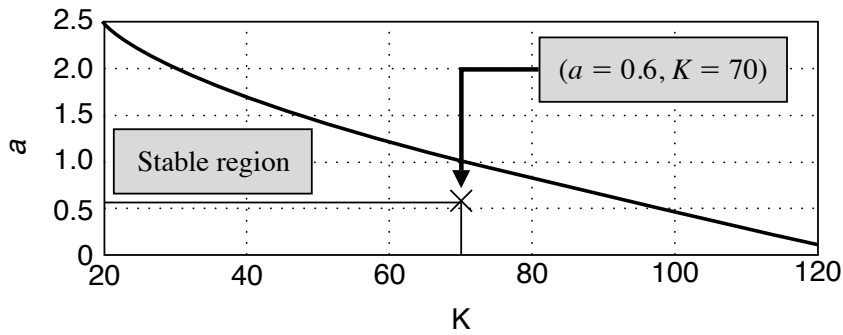
$$e_{ss} = \frac{10A}{Ka} \leq 0.20A \quad \Rightarrow \quad Ka = \frac{10}{0.20} \leq 50$$

O que pode ser obtido selecionando, por exemplo, $K = 100$ e $a = 0.5$. Ou, por exemplo, $K = 70$ e $a = 0.6$

Usando MATLAB[©]

- ▷ `roots` calcula as raízes de um polinômio
- ▷ `eig` calcula os autovalores de uma matriz e particularmente

`eig(A)` % devolve todos os autovalores da matriz A



(a)

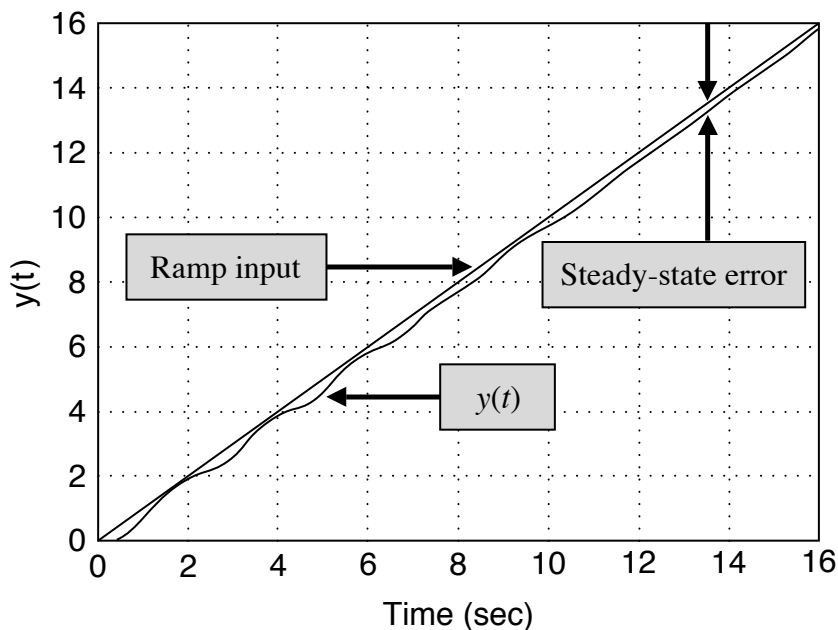
twotrackstable.m

```

% the stability region for the two track vehicle
% control problem
%
a=[0.1:0.01:3.0]; K=[20:1:120];
x=0*K; y=0*K;
n=length(K); m=length(a);
for i=1:n
    for j=1:m
        q=[1, 8, 17, K(i)+10, K(i)*a(j)];
        p=roots(q);
        if max(real(p)) > 0, x(i)=K(i); y(i)=a(j-1); break; end
    end
end
plot(x,y), grid, xlabel('K'), ylabel('a')
    
```

(b)

Figure 6.16 (a) Stability region for a and K for two-track vehicle turning control (b) MATLAB script



(a)

aKramp.m

```

% This script computes the ramp response
% for the two-track vehicle turning control
% problem with a=0.6 and K=70
%
t=[0:0.01:10]; u=t;
numgc=[1 0.6]; dengc=[1 1];
numg=[70]; deng=[1 7 10 0];
[numa,dena]=series(numgc,dengc,numg,deng);
[num,den]=cloop(numa,dena);
[y,x]=lsim(num,den,u,t);
plot(t,y,t,u), grid
xlabel('Time (sec)'), ylabel('y(t)')
    
```

(b)

Figure 6.17 (a) Ramp response for $a = 0.6$ and $K = 70$ for two-track vehicle turning control (b) MATLAB script

Exemplo de Projeto Sequencial

Sistema de Leitura de um Drive

- ▶ No bloco anterior quando tratamos o desempenho de sistemas realimentados, foi considerado no projeto apenas um ganho estático K_a (associado ao amplificador)
- ▶ Neste bloco, a questão do ajuste do ganho K_a será reavaliado quando se considera um sensor de realimentação de velocidade, como apresentado a seguir

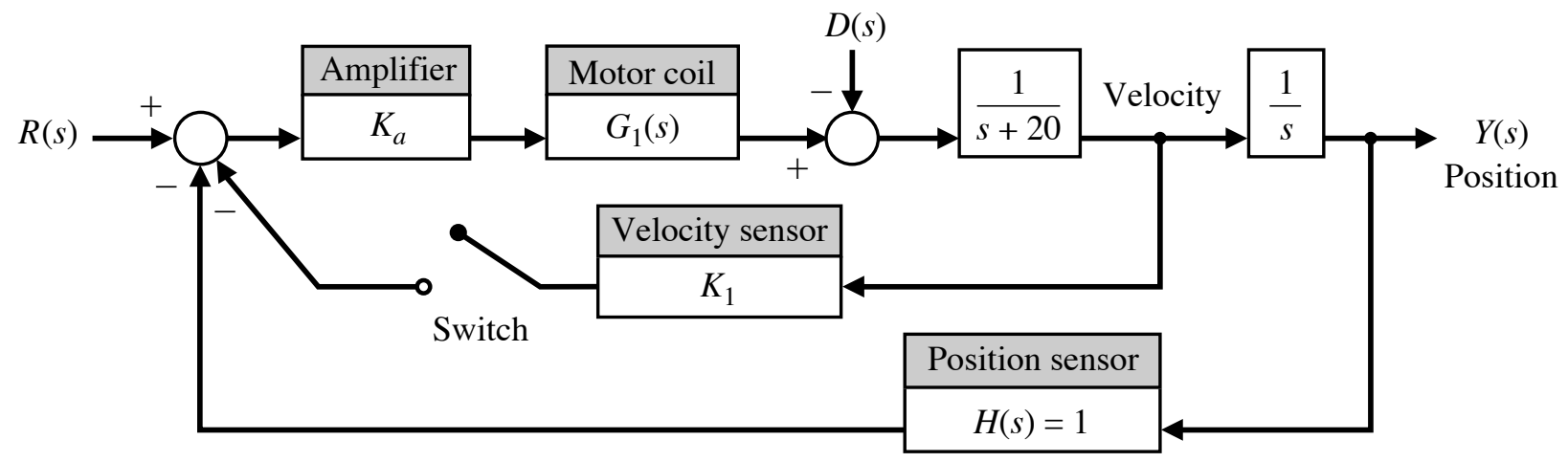


Figure 6.22 The closed-loop disk drive head system with an optional velocity feedback

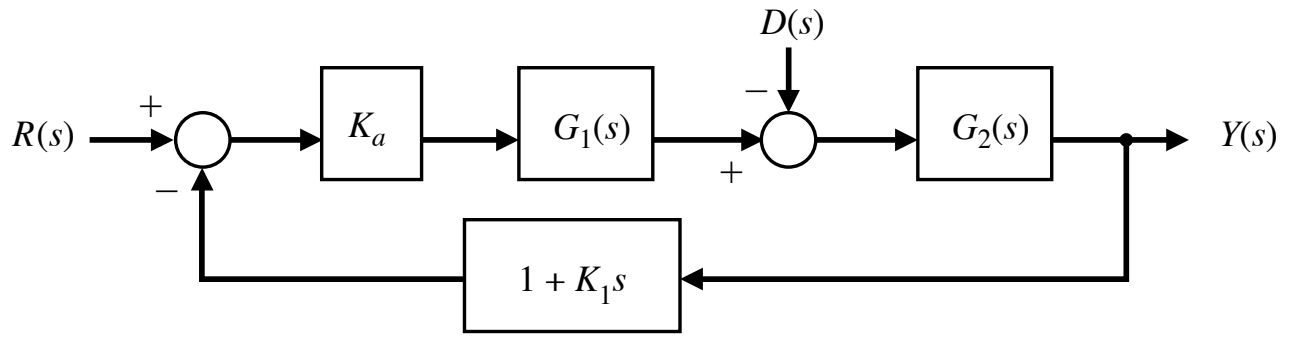


Figure 6.23 Equivalent system with the velocity feedback switch closed

Exemplo de Projeto Sequencial

▷ Inicialmente deixando a chave aberta, a FT em malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)}$$

sendo

$$G_1(s) = \frac{5000}{s + 1000} \quad \text{e} \quad G_2(s) = \frac{1}{s(s + 20)}$$

Logo a EC é

$$s(s + 20)(s + 1000) + 5000K_a = s^3 + 1020s^2 + 20000s + 5000K_a = 0$$

Exemplo de Projeto Sequencial

Arranjo de Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 20000 \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & 5000K_a & \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{(20000)1020 - 5000K_a}{1020} > 0 \\ \text{para estabilidade: } K_a < 4080 \end{array} \right.$$

▷ Se $K_a = 4080$, então $b_1 = 0$ e tem-se estabilidade marginal. A título de curiosidade, pode-se obter a equação auxiliar dada por

$$1020s^2 + 5000(4080) = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j141.4$$

▷ Esta análise permite responder uma questão relevante quando abordou-se anteriormente o projeto sequencial: o ganho K_a não pode assumir qualquer valor quando se considera o modelo completo - sem redução de modelo

Exemplo de Projeto Sequencial

▷ Considerando a realimentação de velocidade (i.e., fechando a chave), a FT em malha fechada passa a ser:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + [K_a G_1(s) G_2(s)] (1 + K_1 s)}$$

e a EC é

$$s(s + 20)(s + 1000) + 5000K_a(1 + K_1 s) =$$

$$s^3 + 1020s^2 + [20000 + 5000K_a K_1] s + 5000K_a = 0$$

Exemplo de Projeto Sequencial

com arranjo de Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & [20000 + 5000K_aK_1] \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & 5000K_a & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{1020 [20000 + 5000K_aK_1] - 5000K_a}{1020} > 0$$

- ▷ O que fazer? Selecionar um par (K_a, K_1) tal que $b_1 > 0$, quando $K_a > 0$
- ▷ Por exemplo: $K_1 = 0.05$ e $K_a = 100$...

TABLE 6.2 Performance of the Disk Drive System Compared to the Specifications

Performance Measure	Desired Value	Actual Response
Percent overshoot	Less than 5%	0%
Settling time	Less than 250 ms	260 ms
Maximum response to a unit disturbance	Less than 5×10^{-3}	2×10^{-3}

Table 6.2 Performance of the disk drive system compared to the specifications

Exemplo de Projeto Sequencial

► Usando MATLAB[©] para avaliar: (i) a resposta de $r(t)$ em $y(t)$; (ii) a máxima resposta ao distúrbio unitário $d(t)$ em $y(t)$.

```
ka = 100; k1 = 0.05; % Ganhos selecionados
s=tf('s') % variável "s"
g1=tf([5000],[1 1000]) % G1(s)
g2=tf([1],[conv([1 0],[1 20])]) % G2(s)
FTmf=(ka*g1*g2)/(1+(ka*g1*g2)*(1+k1*s)) % FT malha fechada R->Y
FTdisturbio=(-g2)/(1+(ka*g1*g2)*(1+k1*s)) % FT malha fechada D->Y
subplot(2,1,1)
step(FTmf)
subplot(2,1,2)
step(FTdisturbio)
```


Exemplo de Projeto Sequencial

