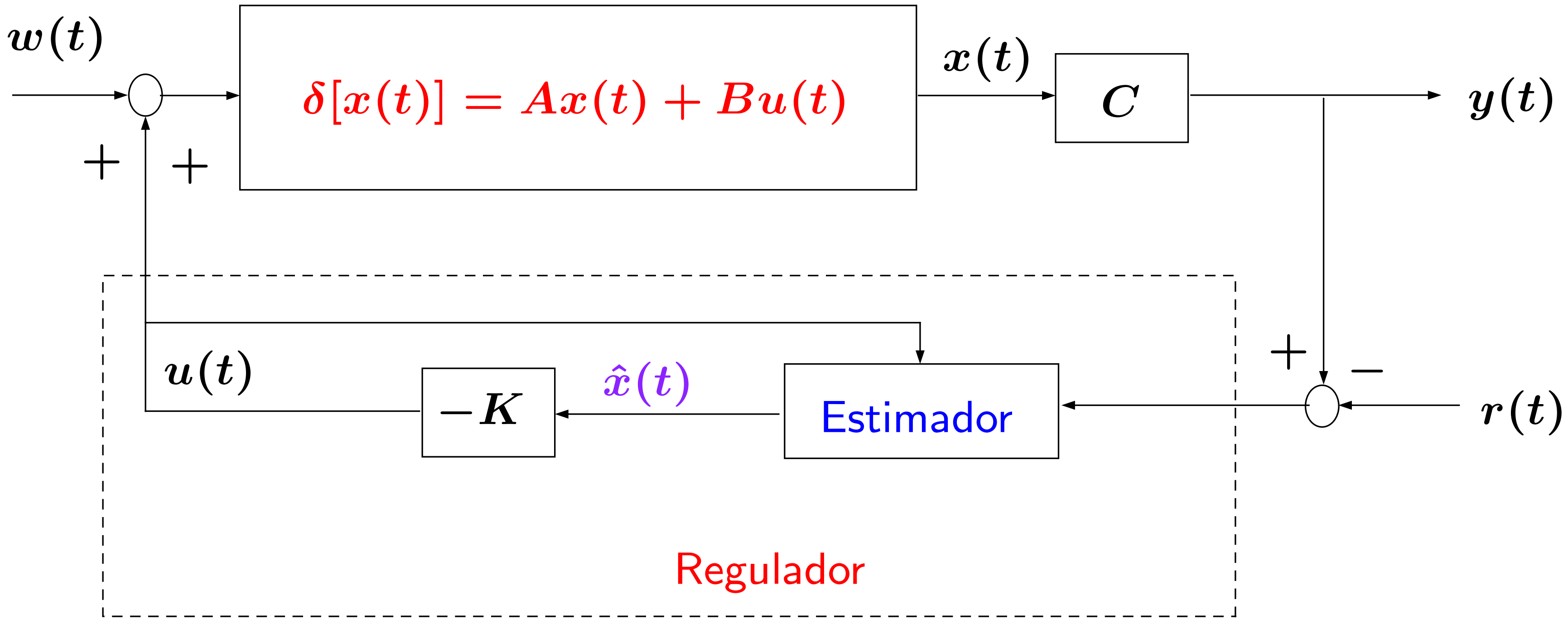
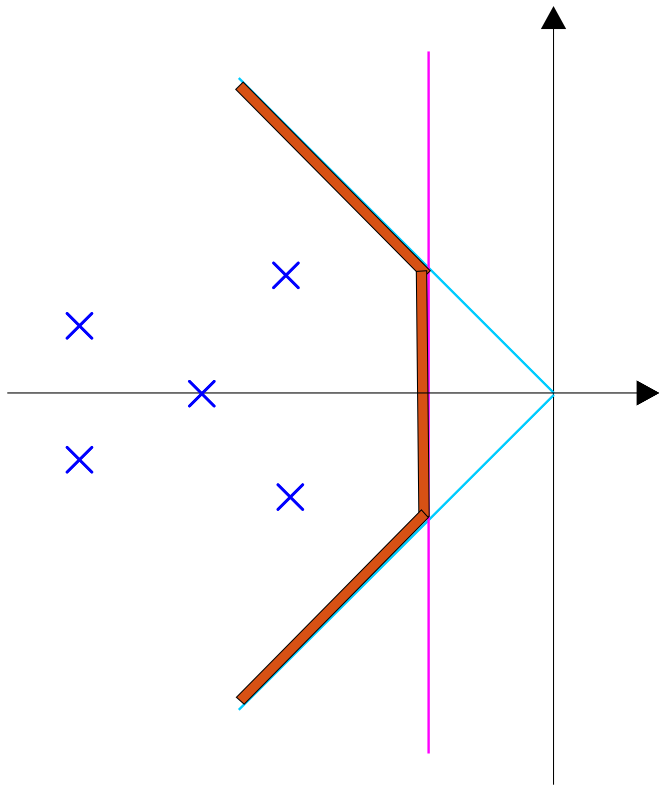
Realimentação e Observador no Espaço de Estados – Revisão

Controle por Realimentação de Estados

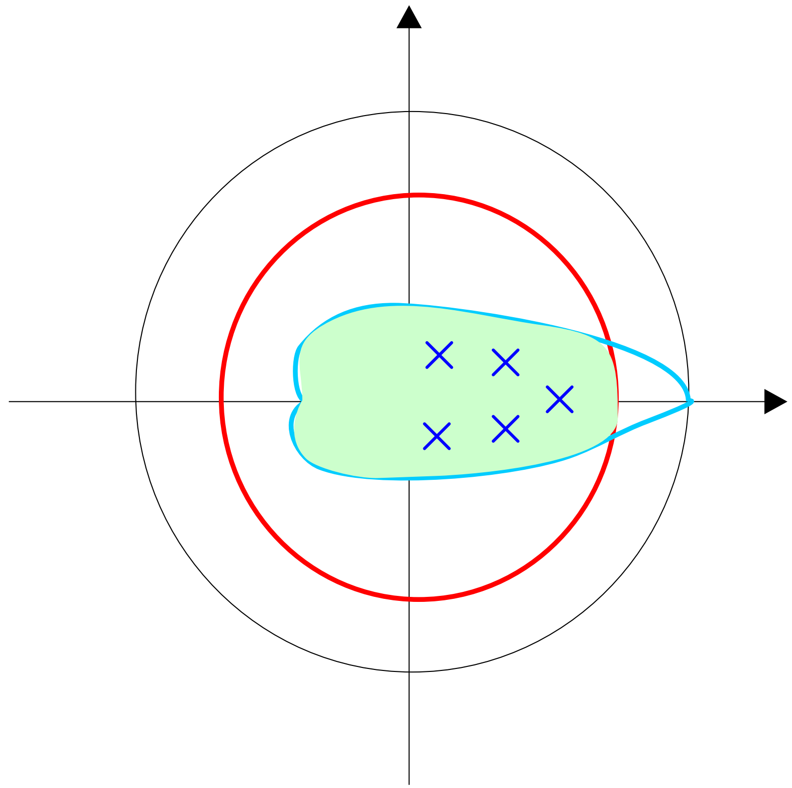


Princípio da Separação Obtenção do ganho K e Estimador são independentes

Realimentação de Estado – Um Tour por Alocação de Pólos



Plano-s



Plano-z

Realimentação de Estado – Um Tour por Alocação de Pólos

Fazendo $C = \mathbf{I}$ (todos os estados mensuráveis) e $D = 0$

$$\Sigma = \begin{cases} \delta[x(t)] & = & Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = 0 \\ y(t) & = & x(t) \end{cases}$$

Lei de controle : $u(t) = -Ky(t) = -Kx(t) \quad \Rightarrow \quad \delta[x(t)] = (A - BK)x(t)$

Transformada do sistema em malha fechada: $(\zeta\mathbf{I} - A + BK)\,X(\zeta) = 0$

Autovalores em malha fechada desejados : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Então K é solução do sistema: $\quad |\zeta\mathbf{I} - A + BK| = (\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)\ldots(\zeta - \lambda_n)$

Exemplo Considere o sistema

$$\left\{ \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \right.$$

Autovalores em malha fechada desejados: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$

▷ Polinômio característico:

$$(s+3)(s+4) = s^2 + 7s + 12 = |s\mathbf{I} - A + BK| = s^2 + (K_2 - 3)s + 2K_1$$

e resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2K_1 & = & 12 \\ K_2 - 3 & = & 7 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix}$$

▷ Pode ser complexo de ser resolvido para ordem mais elevada ? Basta $x = A^{-1}y$...

Realimentação de Estado – Um Tour por Alocação de Pólos

Fórmula de Ackerman

$$K = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{1\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{\bar{C}}^{-1} \alpha_c(A)$$

sendo

$$\alpha_c(A) = A^n + \gamma_1 A^{n-1} + \gamma_2 A^{n-2} + \ldots + \gamma_n I$$

e $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ são os coeficientes de $\alpha_c(z)$ (Teorema de Caley-Hamilton – uma matriz satisfaz a sua própria equação característica)

Controlabilidade !! Então posto$(\bar{C}) = n \Rightarrow \exists \ \bar{C}^{-1}$

Matlab

- `acker` – Sistemas SISO, pólos repetidos, $n = 10$
- `place` – Sistemas MIMO, pólos distintos

Estimador de Estado – Observador de Estado

Inicialmente considerou-se realimentação de estado com a hipótese implícita de que todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação, isto é

$$u(t) = -Kx(t) \qquad \rightsquigarrow \quad y(t) = x(t)$$

Na prática, no entanto, isto pode não acontecer por dois motivos:

- as variáveis de estado não são acessíveis para conexão direta
- os dispositivos de sensoriamento são caros ou simplesmente não são disponíveis

▷ Alternativa ? **Reconstruir ou estimar o vetor de estado** utilizando uma estrutura chamada **estimador de estado ou observador de estado**

▷ Idéia ? A saída do observador gera uma estimativa do estado para ser utilizada na lei de controle

Estimador – Observador

Há "várias" estruturas de estimador, particularmente a estrutura a seguir é de fundamental interesse:

> **Preditor :** as estimativas, $\widehat{x}(t)$, são baseadas no conjunto de medidas obtidas até o instante de tempo k, isto é, $\{y(t)\,|\,t \leq k\}$

Objetivo

Considerar na lei de controle o estado estimado, isto é,

$$u(t) = -K\widehat{x}(t)$$

Estimador – Observador

Como construir um modelo para o estimador?

A idéia de estimar $\boldsymbol{x}$ a partir do sinal de controle $\boldsymbol{u}$ e a saída medida $\boldsymbol{y}$ considerando que as matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são conhecidas, consiste em inicialmente "duplicar" o sistema original:

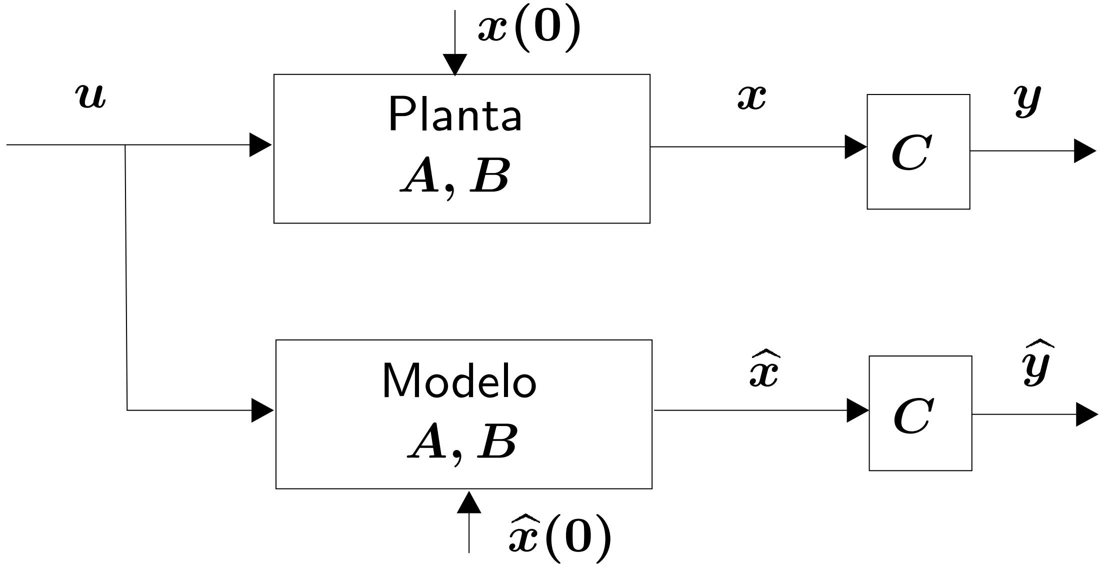
$$\delta[\widehat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})] = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

e conectá-lo ao sistema na forma conhecida como estimador em "malha aberta"

- Se o sistema original é **observável** pode-se obter a condição inicial, $\boldsymbol{x}(\mathbf{0})$, a partir de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{y}$ e, igualá-lo a condição inicial do estimador, $\widehat{\boldsymbol{x}}(\mathbf{0})$

Estimador – Observador

Estimador em “malha aberta”



Desvantagens do modelo em “malha aberta”

1. Calcular o estado inicial, $x(0)$
2. **O sistema deve ser estável !!**

Estimador – Observador

Para o último item, veja que pode-se definir o **erro de estimativa** como sendo

$$\widetilde{x}(t) \triangleq x(t) - \widehat{x}(t)$$

desta forma para $\delta[\widetilde{x}(t)] = \delta[x(t)] - \delta[\widehat{x}(t)]$ obtém-se a dinâmica do erro de estimativa:

$$\begin{aligned}
\delta[\widetilde{x}(t)] &= Ax(t) + Bu(t) - A\widehat{x}(t) - Bu(t) \\
&= A(x(t) - \widehat{x}(t)) \\
&= A\widetilde{x}(t)
\end{aligned}$$

- Se A é estável então $\widetilde{x}(\infty) \rightarrow 0$ e $\widehat{x} = x$, caso contrário o erro tende para ∞ !!

Estimador – Observador

▷ O estimador no formato em "malha aberta" não está utilizando nenhuma medida do comportamento do sistema original e, portanto, é de se esperar que o mesmo divirja quando não se impõe a condição de estabilidade

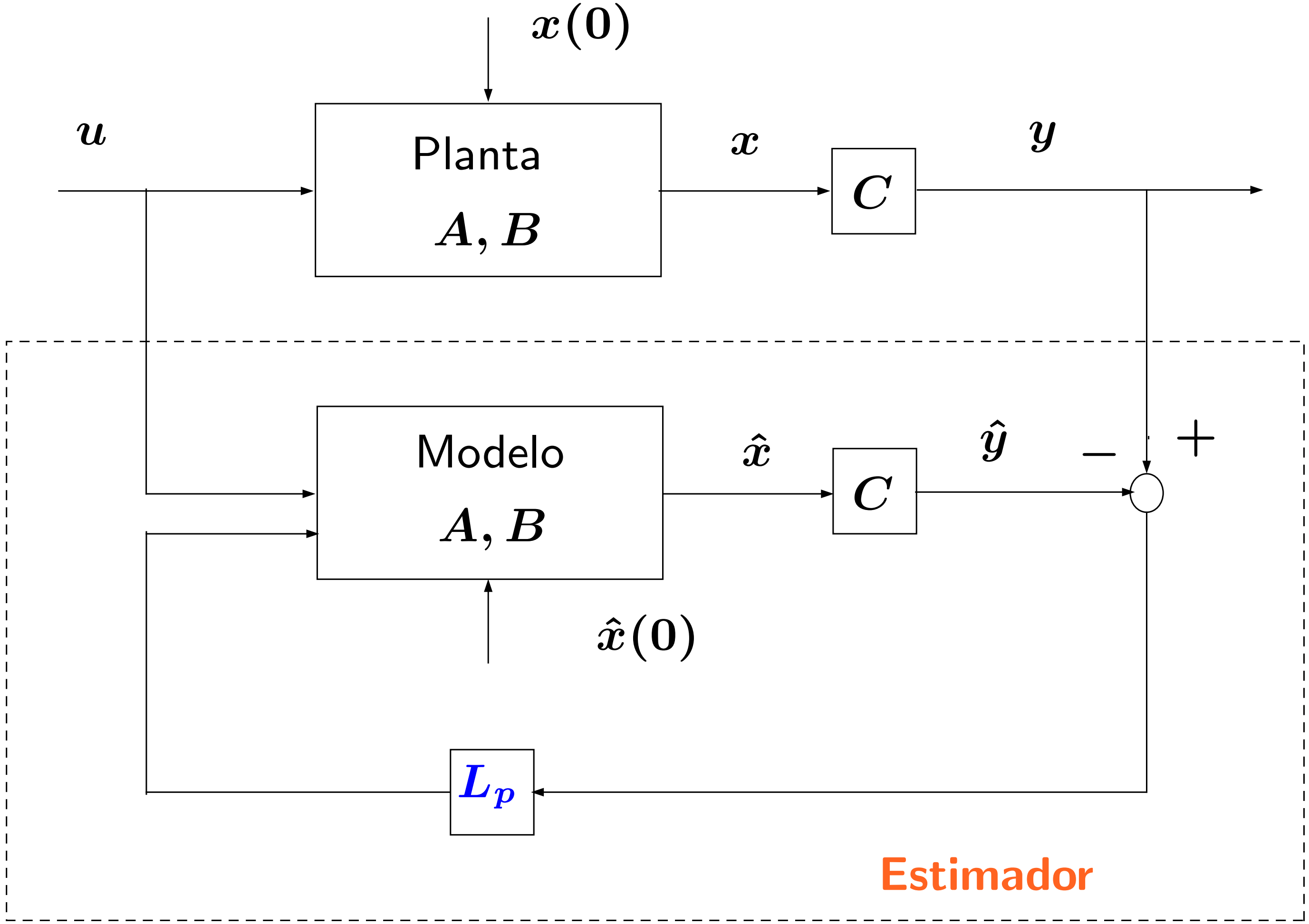
▷ Idéia ? "Informar" ao estimador o comportamento do sistema original **realimentando-o** com a diferença entre a saída medida, $y(t)$, e a saída estimada, $\hat{y}(t)$

$$\Downarrow$$

corrige-se constantemente o modelo com o sinal do erro $(y - \hat{y})$ (chamado "inovação"). Este formato é chamado estimador em "malha fechada"

Estimador – Observador

A forma do estimador em "malha fechada" é apresentada abaixo:



Estimador – Observador

A equação do estimador considerando a quantidade de informação que atualiza o estimador a cada instante de tempo em função do erro, $y(t) - \widehat{y}(t)$, é

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \delta[\hat{x}(t)] &= A\,\hat{x}(t) + Bu(t) + L_p(y(t) - \hat{y}(t)) \\
&= A\,\hat{x}(k) + Bu(t) + L_pC(x(t) - \hat{x}(t))
\end{aligned}
$$

Erro de estimativa, $\widetilde{x} \triangleq x - \hat{x}$:

$$
\begin{aligned}
\delta[\widetilde{x}(t)] &= A\,x(t) + Bu(t) - A\,\hat{x}(t) - Bu(t) - L_pC\,\widetilde{x}(t) \\
&= (A - L_pC)\,\widetilde{x}(t)
\end{aligned}
$$

• **Se** $(A - L_pC)$ **for assintoticamente estável**, então $\widetilde{x}(\infty) \to \mathbf{0}$, **independentemente da condição inicial**, $\widetilde{x}(\mathbf{0})$, escolhida... ou da necessidade de se impor estabilidade...

Estimador – Observador

Como calcular L_p ? O procedimento é idêntico ao adotado para o ganho do controle, K, ie especifique a localização dos pólos do estimador, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, de modo a obter a equação característica do estimador desejado:

$$(\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)\cdots(\zeta - \lambda_n) = 0$$

Por outro lado, a equação característica da dinâmica do erro de estimativa, $\widetilde{x}(t)$, é

$$|\zeta I - A + L_p C| = 0$$

Então o ganho de estimativa, L_p, é solução do sistema

$$|\zeta I - A + L_p C| = (\zeta - \lambda_1)(\zeta - \lambda_2)\cdots(\zeta - \lambda_n)$$

Seleção dos pólos do erro de estimativa ?

2 a 6 vezes mais rápidos do que os pólos da lei de controle, $u = -K\widehat{x}$. Por que? A resposta global do sistema é dominada pelos pólos da lei de controle

Estimador – Observador

Fórmula de Ackerman **Dual** ao ganho da lei de controle, ie

$$L_p = \alpha_e(A) \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{n \times 1}$$

sendo

$$\alpha_e(A) = A^n + \gamma_1 A^{n-1} + \gamma_2 A^{n-2} + \ldots + \gamma_n I$$

Observabilidade !! Então posto$(\mathcal{O}) = n \;\Rightarrow\; \exists\; \mathcal{O}^{-1}$

Estimador – Observador

Exemplo Considere o modelo discreto em variáveis de estado para $1/s^2$

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} T \\ T^2/2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

sendo que x_2 representa a posição e x_1 velocidade ($x_1 = \dot{x}_2$). Considerando

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \text{a posição } x_2 \text{ é mensurável}$$

Construa um estimador preditivo de modo que os pólos da dinâmica do erro de estimativa sejam alocados em $z = 0.4 \pm j0.4$

Estimador – Observador

Solução Para os pólos da dinâmica do erro de estimativa a equação característica procurada é:

$$\alpha_e(z) = (z - 0.4 + j0.4)(z - 0.4 - j0.4) = z^2 - 0.8z + 0.32 = 0$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
|zI - A + L_pC| &= \left| z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{p\,1} \\ L_{p\,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{bmatrix} z - 1 & L_{p\,1} \\ -T & z - 1 + L_{p\,2} \end{bmatrix} \right| \\
&= z^2 + (L_{p\,2} - 2)z + (1 - L_{p\,2} + TL_{p\,1}) = 0
\end{aligned}$$

Estimador – Observador

Fazendo $\alpha_e(z) = |zI - A + L_pC|$ e igualando os coeficientes

$$\begin{cases} L_{p\,2} - 2 &= -0.8 \\ TL_{p\,1} - L_{p\,2} + 1 &= 0.32 \end{cases}$$

Para $T = 0.1$s

$$L_p = \begin{bmatrix} L_{p\,1} \\ L_{p\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

Estimador – Observador

Ou utilizando a fórmula de Ackerman obtém-se

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathcal{O}^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

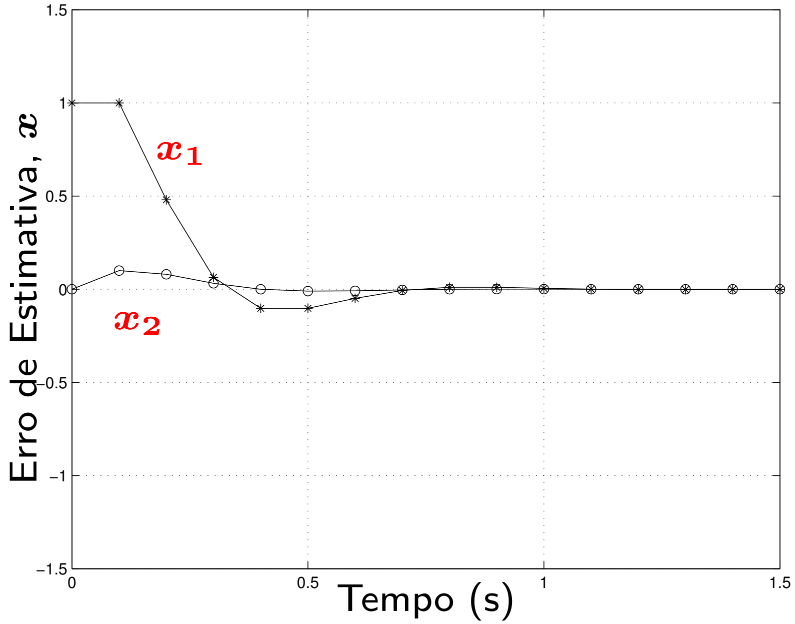
$$\alpha_e(A) = A^2 - 0.8A + 0.32\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0 \\ 0.12 & 0.52 \end{bmatrix}$$

$$L_p = \begin{bmatrix} 0.52 & 0 \\ 0.12 & 0.52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

Estimador – Observador

Considerando as condições iniciais: $\boldsymbol{x(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{\widehat{x}(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\widetilde{x}(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

As trajetórias das componentes do erro de estimativa são apresentadas abaixo



▷ Trajetória do erro, $\boldsymbol{\widetilde{x} \to 0}$, quando $\boldsymbol{t > 1}$s ($\boldsymbol{T = 0.1}$s). Portanto, $\boldsymbol{\widehat{x} \to x}$!!

Princípio da Separação

Questão: Os projetos do controlador e do estimador podem ser realizados independentemente ?

Questão: A presença do controlador na realimentação irá deteriorar o desempenho do estimador e vice-versa ?

▷ Considerando a realimentação de estados, $\boldsymbol{u = -K\widehat{x}(k)}$, obtém-se

$$\delta[x(t)] = \boldsymbol{Ax(t) - BK\widehat{x}(t)}$$

Usando o fato: $\widetilde{x} = x - \widehat{x}$, então

$$\delta[x(t)] = \boldsymbol{Ax(t) - BKx(t) + BK\widetilde{x}(t)}$$

Princípio da Separação

Como a dinâmica do erro de estimativa é dada por

$$\delta[\widetilde{x}(t)] = (A - L_p C)\widetilde{x}(t)$$

O sistema em malha fechada aumentado possui $2n$ variáveis de estado:

$$\begin{bmatrix} \delta[\widetilde{x}(t)] \\ \delta[x(t)] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - L_p C & 0_{n \times n} \\ BK & A - BK \end{bmatrix}}_{2n \times 2n} \underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{x}(k) \\ x(k) \end{bmatrix}}_{2n \times 1}$$

▷ Inclui a dinâmica da planta realimentada e a dinâmica do erro de estimativa

Princípio da Separação

Equação característica do sistema em malha fechada aumentado:

$$\begin{vmatrix} \zeta \mathbf{I} - A + L_p C & \mathbf{0} \\ BK & \zeta \mathbf{I} - A + BK \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

▷ Da propriedade de determinante de matrizes triangulares

$$\Downarrow$$

$$|\zeta \mathbf{I} - A + L_p C||\zeta \mathbf{I} - A + BK| = \alpha_c(\zeta)\,\alpha_e(\zeta) = \mathbf{0}$$

▷ Os pólos do sistema em malha fechada são a união dos pólos do controlador e do estimador

∴ o controle e o estimador podem ser projetados de forma **independente** e depois utilizados de forma conjunta

Controle Baseado no Observador

Regulador: Lei de Controle + Observador

$$\begin{cases} \delta[\hat{x}(t)] & = & \underbrace{(A - BK - L_p\, C)}_{A_C}\, \hat{x}(t) + \underbrace{L_p}_{B_C}\, y(t) \\ u(t) & = & -\underbrace{K}_{C_C}\, \hat{x}(t) \end{cases}$$

Sistema em malha fechada aumentado:

$$\begin{bmatrix} \delta[\tilde{x}(t)] \\ \delta[x(t)] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - L_p C & 0_{n\times n} \\ BK & A - BK \end{bmatrix}}_{2n\times 2n} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}}_{2n\times 1}$$

Controle Baseado no Observador

Função de transferência do controlador baseado no observador:

$$D(\zeta) = \frac{U(\zeta)}{Y(\zeta)} = C_C \left(\zeta \mathbf{I} - A_C\right)^{-1} B_C$$

Notas

- A ordem do regulador é a mesma da planta e do estimador, n
- Em regime, $x(\infty) = 0$ (sistema estável) e portanto $y(\infty) = 0$. A técnica empregada assegura **regulação** com as características impostas pelos autovalores de $(A - BK)$

MATLAB Função de transferência do controlador é obtida fazendo

```
[num,dem] = ss2tf(Ac,Bc,Cc,Dc)
```

sendo, $A_c = A - BK - L_p C$, $B_c = L_p$, $C_c = -K$ e $D_c = 0$

Controle Baseado no Observador

Exemplo Considere o modelo contínuo em variáveis de estado para $1/s^2$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{cases}$$

▷ Se alocar os pólos do controlador em

$$s_{1,2} = -0.707 \pm j0.707 \quad (\xi = 0.707, \;\; \omega_n = 1\text{rad/s})$$

obtém-se $K = \begin{bmatrix} 1 & 1.4142 \end{bmatrix}$

Controle Baseado no Observador

▷ Se os pólos do estimador são alocados em $\omega_n = 5$rad/s e $\xi = 0.5$, obtém-se

$$L_p = \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Controle baseado no observador:

$$D(s) = \frac{-40.4(s + 0.619)}{(s + 3.21 + j4.77)(s + 3.21 - j4.77)}$$