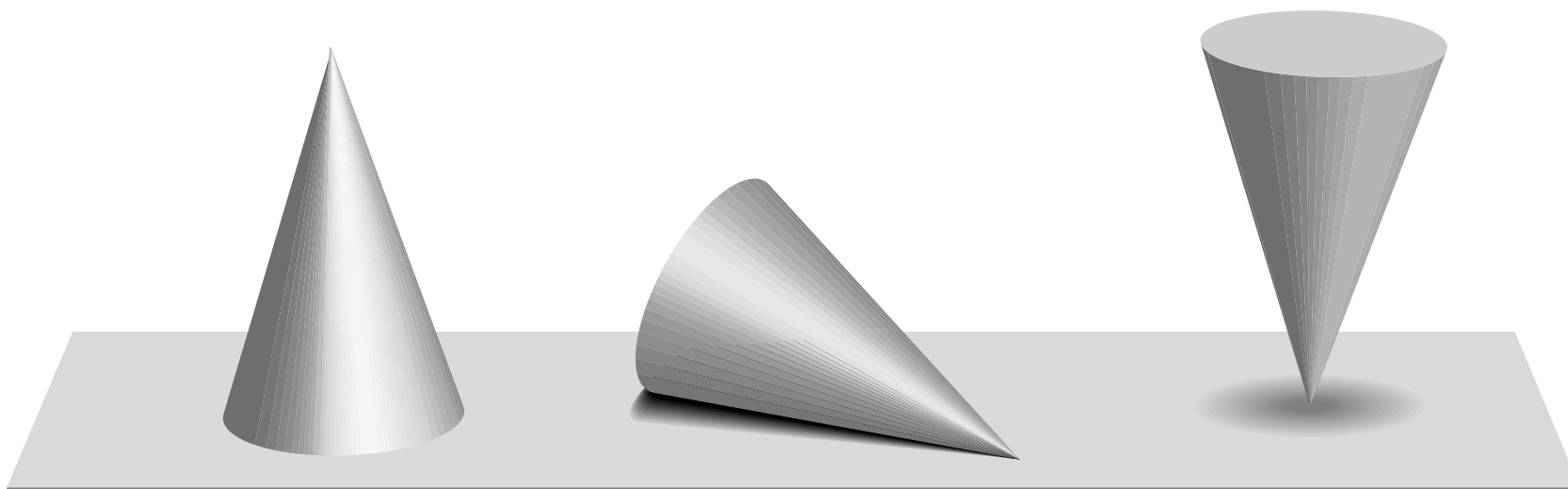


Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

1. Conceito de estabilidade
2. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz



(a) Stable

(b) Neutral

(c) Unstable

Figure 6.1 The stability of a cone

Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

Professor, onde “está” a Estabilidade ?

Aluno do 2oS/2002...

- ▶ O conceito de estabilidade é crucial na síntese de sistemas de controle realimentados
- ▶ Não é **exatamente** uma especificação, mas sim um pré-quesito para projeto ...
- ▶ A não ser em casos **muito particulares**, eg, na aviação de combate, o sistema de controle realimentado deve resultar em um sistema estável

Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

Um sistema é dito estável se a resposta temporal for limitada para qualquer sinal de entrada também limitado

- ▷ Estabilidade absoluta: o sistema é estável ou não
- ▷ Estabilidade relativa: para um sistema estável pode-se atribuir graus de estabilidade
- ▷ A localização dos pólos em malha fechada fornece uma indicação do tipo de resposta temporal ...

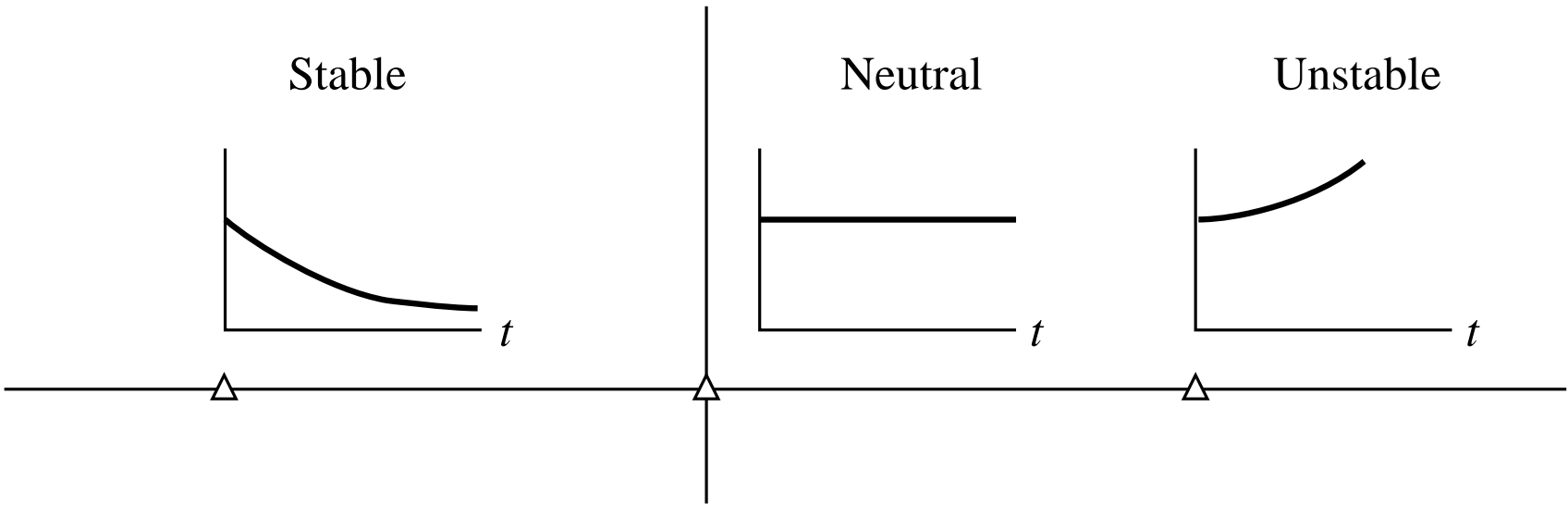


Figure 6.2 Stability in the s -plane

Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

▷ a estabilidade de sistemas lineares pode ser definida em termos da localização dos pólos e zeros da FT em malha fechada ...

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^M (s + z_j)}{s^N \prod_{i=1}^{n_1} (s + \sigma_i) \prod_{i=n_1+1}^n (s^2 + 2\alpha_i s + (\alpha_i^2 + \omega_{d,i}^2))}$$

cuja resposta temporal a um degrau ($N = 1$) de amplitude A_0 é dada por

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_1} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=n_1+1}^n A_i \frac{e^{-\alpha_i t}}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \text{sen}(\omega_{d,i} t + \theta_i)$$

▷ Condição **necessária e suficiente** para que um sistema seja estável é que **todos os pólos da FT tenham parte real negativa ...**

Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

Métodos para verificar estabilidade (ou não):

1. Routh-Hurwitz (no plano-s)
2. Nyquist (domínio da frequência)
3. Análise temporal

Por que aplicar algum método se basta calcular os pólos da Eq.

Característica (EC) e verificar o sinal da parte real ? Os métodos acima não “calculam” as raízes da EC ... **Potencialidades ?**

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- ▶ O critério é um método que fornece uma resposta direta sobre a questão de estabilidade de sistemas lineares
- ▶ Para a EC:

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \\ &= a_n (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n) \\ &= 0\end{aligned}$$

r_i é a i -ésima raiz da EC. Para estabilidade, é necessário verificar se **nenhuma** dessas raízes está no semi-plano direito

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Expandindo $\Delta(s)$ obtém-se

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= a_n s^n - a_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n)s^{n-1} \\ &\quad + a_n(r_1 r_2 + r_2 r_3 + \dots)s^{n-2} \\ &\quad - a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots)s^{n-3} \\ &\quad + \dots + (-1)^n a_n(r_1 r_2 r_3 \dots r_n) = 0\end{aligned}$$

Examinando $\Delta(s)$, pode-se notar que se todas as raízes estiverem no semi-plano esquerdo, **todos os termos do polinômio têm o mesmo sinal**. Além disso, nenhum coeficiente poderia ser **nulo**

▷ Estas condições são apenas necessárias, ie, se alguma não se verificar, o sistema é instável, caso contrário não pode-se afirmar que seja estável...

Exemplo O polinômio abaixo tem coeficientes positivos porém não é estável

$$\Delta(s) = s^3 + s^2 + 11s + 51 = (s + 3)(s - 1 + 4j)(s - 1 - 4j)$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

O que fazer ? Utilizar condições necessárias e suficientes para verificar estabilidade: critério de Routh-Hurwitz

Como aplicá-lo ? Organizam-se os coeficientes da EC na forma de um arranjo do tipo

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{array}$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

As linhas subseqüentes desse arranjo são completadas da seguinte forma:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & d_{n-1} & & & \end{array}$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

sendo que

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Critério de Routh-Hurwitz assegura que o **número** de raízes com parte real positiva é **igual** ao número de **mudança** de sinais dos elementos da **primeira coluna** do arranjo de Routh

- ▶ Então a condição necessária e suficiente para o sistema ser estável, é que **todos os elementos da primeira coluna tenham o mesmo sinal**
- ▶ Generalizações podem ser vistas em: K. J. Khatwani, “On Routh-Hurwitz Criterion”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26 (2), pp. 583-584, 1981.

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

▷ Pode-se considerar quatro casos:

1. Nenhum elemento da primeira coluna é nulo
2. Há um zero na primeira coluna, porém alguns elementos na linha que ocorre o zero são não nulos
3. Há um zero na primeira coluna e todos os elementos na linha que ocorre o zero são também nulos
4. Caso anterior, com raízes múltiplas no eixo imaginário

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Caso 1. Nenhum elemento da primeira coluna é nulo

Exemplo de sistema de 2a ordem Para um sistema genérico com EC dada por

$$\Delta(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$$

o arranjo de Routh é

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array} \Rightarrow b_1 = \frac{(a_1)(a_0) - a_2(0)}{a_1}$$

▷ Portanto um sistema de 2a. ordem é estável se os coeficientes da EC forem todos positivos **ou** todos negativos

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Exemplo de sistema de 3a ordem Para um sistema genérico com EC dada por

$$\Delta(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

o arranjo de Routh é

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{a_2a_1 - a_0a_3}{a_2} \\ c_1 = \frac{b_1a_0}{b_1} = a_0 \end{array} \right.$$

▷ Para que o sistema seja estável, todos os coeficientes devem ser positivos e $a_2a_1 > a_0a_3$. Caso $a_2a_1 = a_0a_3$, o sistema terá **um par de raízes** no eixo imaginário, o que resulta em *estabilidade marginal*

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Caso 2. Zero na primeira coluna, porém alguns elementos na linha que ocorre o zero são não nulos

Neste caso o zero é substituído por um parâmetro, $\varepsilon > 0$, suficientemente “pequeno”, sendo aproximado para zero depois de montado o arranjo de Routh

Exemplo Para a EC

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

obtem-se o arranjo

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\ s^2 & c_1 & 10 & 0 \\ s^1 & d_1 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = \frac{-12}{\varepsilon} \\ d_1 = \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} \rightarrow 6 \end{cases}$$

▷ O sistema é **instável** pois há duas mudanças de sinais devido ao valor negativo $-12/\varepsilon$ na primeira coluna (e portanto há duas raízes no semi-plano direito...)

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Caso 3. Linha com todos os elementos nulos

Essa condição ocorre quando fatores do tipo $(s + \sigma)(s - \sigma)$ ou $(s + j\omega)(s - j\omega)$ aparecem na equação característica. Este problema é transposto usando-se um **polinômio auxiliar**, $U(s)$, que é a equação da linha que precede a linha de zeros (a ordem do polinômio auxiliar é sempre par e **indica o número de pares de raízes simétricas**)

Exemplo Para um sistemas de 3a. ordem genérico com EC

$$\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

sendo **K** um ganho ajustável

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

obtem-se o arranjo

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & c_1 & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ c_1 = \frac{8 - K}{2} \right.$$

- ▶ Para que o sistema seja estável é necessário que $0 < K < 8$
- ▶ Com $K = 8$ tem-se uma linha com apenas zeros, implicando em estabilidade marginal (com duas raízes no eixo imaginário). O polinômio auxiliar nesse caso é dado por:

$$U(s) = 2s^2 + Ks^0 = 2s^2 + 8 = 2(s^2 + 4) = 2(s + 2j)(s - 2j)$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Caso 4. Raízes repetidas no eixo imaginário - $j\omega$

É um caso patológico e o critério de Routh-Hurwitz **não revela** este tipo de instabilidade ...

Exemplo Para a EC:

$$\Delta(s) = (s + 1)(s + j)^2(s - j)^2 = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Arranjo de Routh:

s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	ε	ε	0
s^2	1	1	
s^1	ε	0	
s^0	1		

onde $\varepsilon \rightarrow 0$

Não há mudança de sinais, porém o sistema é marginalmente estável

Polinômio auxiliar na linha $s^4 \rightsquigarrow s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2 + 1)^2$

Polinômio auxiliar na linha $s^2 \rightsquigarrow s^2 + 1$