Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

1. Revisando o conceito de estabilidade
2. Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz
3. Exemplo - Pêndulo invertido sobre um carrinho
4. Exemplo - Oscilador de deslocamento de fase

Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

▷ O conceito de estabilidade é peça crucial para a síntese de sistemas de controle realimentados

▷ Não é exatamente uma especificação, mas sim um pré-requesito de projeto!

▷ A não ser em casos muito particulares como, por exemplo, em aviação de combate, o sistema de controle realimentado deve resultar em um sistema estável

Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

Genericamente: Um sistema é dito estável se a resposta temporal for limitada para todo e qualquer sinal de entrada também limitado

▷ Estabilidade absoluta: deseja-se saber se o sistema é estável ou não

▷ Estabilidade relativa: É um contexto mais elaborado, sendo que para um sistema que já é estável pode-se atribuir graus de estabilidade (isto é, impor que seja mais fortemente estável, por exemplo)

▷ Claro que a localização dos polos em malha fechada fornece uma indicação precisa sobre a estabilidade e o que se prevê para a resposta temporal do sistema!

Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

▷ Como já sabemos, a estabilidade de sistemas lineares pode ser definida em termos da localização dos polos da FT em malha fechada, genericamente:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\prod_{j=1}^{M}(s+z_j)}{s^N\prod_{i=1}^{n_1}(s+\sigma_i)\prod_{i=n_1+1}^{n}(s^2+2\alpha_i s+(\alpha_i{}^2+\omega_{d,i}^2))}$$

cuja resposta temporal quando aplica-se um degrau de amplitude A_0 ($N = 1$) é:

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_1} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=n_1+1}^{n} A_i \frac{e^{-\alpha_i t}}{\sqrt{1-\zeta_i^2}} \mathrm{sen}(\omega_{d,i} t + \theta_i)$$

▷ Então, como já sabemos, a condição necessária e suficiente para que um sistema seja estável é que todos os polos da FT tenham parte real negativa

Estabilidade de Sistemas Lineares Realimentados

Métodos alternativos para verificar se um sistema é estável:

1. Routh-Hurwitz (no plano-s)
2. Nyquist (no domínio da frequência)
3. Análise temporal

Por que usar esses métodos se basta calcular os polos da FT (que são raízes da equação característica (EC)) e verificar o sinal da parte real?

Resposta: Os métodos acima não "computam" as raízes da EC explicitamente

Potencialidades? Checar estabilidade indiretamente quando tem-se parâmetros que variam. Exemplo, parâmetros do controlador que devem ser sintonizados

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

O que fazer ? Utilizar condições necessárias e suficientes para verificar estabilidade que é dado pelo **critério de Routh-Hurwitz**

Como aplicá-lo ? Organizam-se os coeficientes da equação característica (EC):

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + a_{n-4} s^{n-4} \cdots = 0$$

na forma de um arranjo:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{array}$$

Note que todos os coeficientes a_i são conhecidos!

As linhas subsequentes desse arranjo são completadas da seguinte forma:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^0 & d_{n-1} & & &
\end{array}
$$

Sendo que b_{n-1}, b_{n-3}, b_{n-5}, c_{n-1}, c_{n-3}, c_{n-5}, $\ldots$, d_{n-1} são incógnitas a serem obtidas

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Obtendo o restante dos elementos (incógnitas) do arranjo:

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

O Critério de Routh-Hurwitz assegura que o número de raízes com parte real positiva é igual ao número de mudança de sinais dos elementos da primeira coluna do arranjo de Routh

▷ Então a condição necessária e suficiente para o sistema ser estável é que todos os elementos da primeira coluna tenham o mesmo sinal

Generalizações podem ser vistas em:

K. J. Khatwani, "On Routh-Hurwitz Criterion".

IEEE Transactions on Automatic Control, 26 (2), pp. 583-584, 1981

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

▷ Pode-se considerar quatro casos no uso do Critério de Routh-Hurwitz:

1. Nenhum elemento da primeira coluna é nulo (Nulo? Por quê?)
2. Há um elemento nulo na primeira coluna, porém alguns elementos na linha que ocorre o elemento nulo são não nulos
3. Há um elemento nulo na primeira coluna e também todos os elementos na linha que ocorre o elemento nulo são nulos
4. Mesmo caso do item 3, porém com raízes múltiplas no eixo imaginário

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Caso 1. Nenhum elemento da primeira coluna é nulo

Considere um sistema de 2a ordem genérico com EC dada por:

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

o arranjo de Routh é

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{(\cancel{a_1})(a_0) - \cancel{a_2(0)}^{\,0}}{\cancel{a_1}} = a_0$$

▷ Portanto, é fácil notar que um sistema de 2a. ordem qualquer será sempre estável se os coeficientes da EC forem todos positivos **ou** todos negativos

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Exemplo de sistema de 3a ordem genérico com EC dada por

$$\Delta(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

o arranjo de Routh é

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2} \\ \\ c_1 = \dfrac{\cancel{b_1} a_0}{\cancel{b_1}} = a_0 \end{cases}$$

▷ Para que o sistema seja estável, todos os coeficientes devem ser positivos e também $a_2 a_1 > a_0 a_3$. Note que, caso $a_2 a_1 = a_0 a_3$, então o sistema terá um par de raízes no eixo imaginário e o sistema será *marginalmente estável*. No entanto para $a_2 a_1 < a_0 a_3$, haverá mudança de sinal e o sistema será instável

Caso 2. Ocorrência de elemento nulo na primeira coluna, porém alguns elementos na linha que ocorre o zero são não nulos – Como checar sinal?

Para este caso, **o elemento nulo na primeira coluna é substituído por um parâmetro $\varepsilon > 0$, suficientemente "pequeno",** sendo aproximado para zero após montar-se o arranjo de Routh-Hurwitz

Exemplo Considere a EC

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

o arranjo neste caso é (substitui-se o elemento nulo na 1a. coluna por $\varepsilon \to 0^+$):

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
s^2 & c_1 & 10 & 0 \\
s^1 & d_1 & 0 & 0 \\
s^0 & 10 & 0 & 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
c_1 = \dfrac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = \dfrac{-12}{\varepsilon} \\[2em]
d_1 = \dfrac{6\cancel{c_1} - \cancel{10\varepsilon}^{\,0}}{\cancel{c_1}} \to 6
\end{cases}
$$

$\triangleright$ O sistema é instável pois há duas mudanças de sinais na primeira coluna. Em s^3 tem-se $\varepsilon \to 0^+$ (positivo), depois tem-se o valor negativo $c_1 = -12/\varepsilon$ (em s^2), e a seguir tem-se $d_1 = 6$ (em s^1) (O critério permite concluir que há duas raízes no semi-plano direito que correspondem ao número de troca de sinais)

Caso 3. Linha com todos os elementos nulos

Pode ocorrer quando aparece na equação característica fatores "simétricos" do tipo: $(s+\sigma)(s-\sigma)$ ou $(s+j\omega)(s-j\omega)$

Pode-se tirar proveito desta ocorrência e montar o que se chama polinômio auxiliar, que é construído com os coeficientes da linha logo acima da linha de zeros e cujas raízes sempre estarão sobre o eixo imaginário (a ordem do polinômio auxiliar é sempre par e indica o número de raízes puramente imaginárias aos pares)

Exemplo Para um sistema de 3a. ordem genérico com EC

$$\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0$$

sendo que K é um ganho ajustável (variável) obtém-se o arranjo

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & c_1 & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ c_1 = \frac{8-K}{2} \right.$$

▷ Note que para o sistema ser estável é necessário que $0 < K < 8$

▷ No entanto, quando K assume o valor $K = 8$, a 3a. linha correspondendo a s^1 se anula completamente. Para o valor de $K = 8$ o sistema será marginalmente estável (e terá duas raízes no eixo imaginário). O polinômio auxiliar descrito a partir da linha acima que corresponde à s^2 nos permite computar tais raízes:

$$U(s) = 2s^2 + Ks^0 = 2s^2 + 8 = 2(s^2 + 4) = 2(s + 2j)(s - 2j)$$

Caso 4. Raízes repetidas no eixo imaginário $j\omega$

É um caso patológico e o critério de Routh-Hurwitz não revela este tipo de instabilidade ...

Exemplo Considere $T(s) = 1/\Delta(s)$ e com EC:

$$\Delta(s) = (s+1)(s+j)^2(s-j)^2 = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

Arranjo de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 1 \\ s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ s^2 & 1 & 1 & \\ s^1 & \varepsilon & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

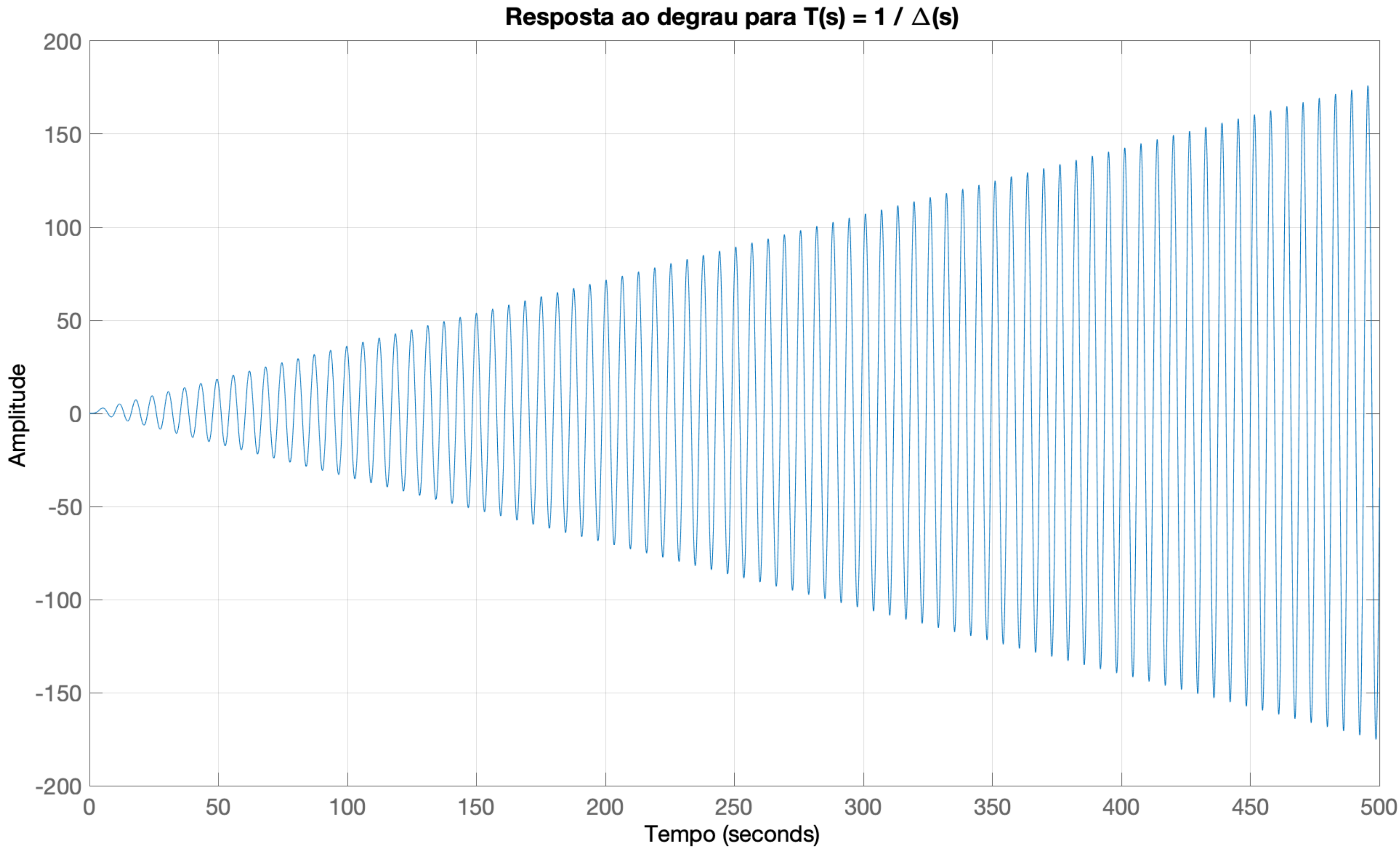
onde $\varepsilon \to 0^+$

Não há mudança de sinais, porém o sistema não é estável!!

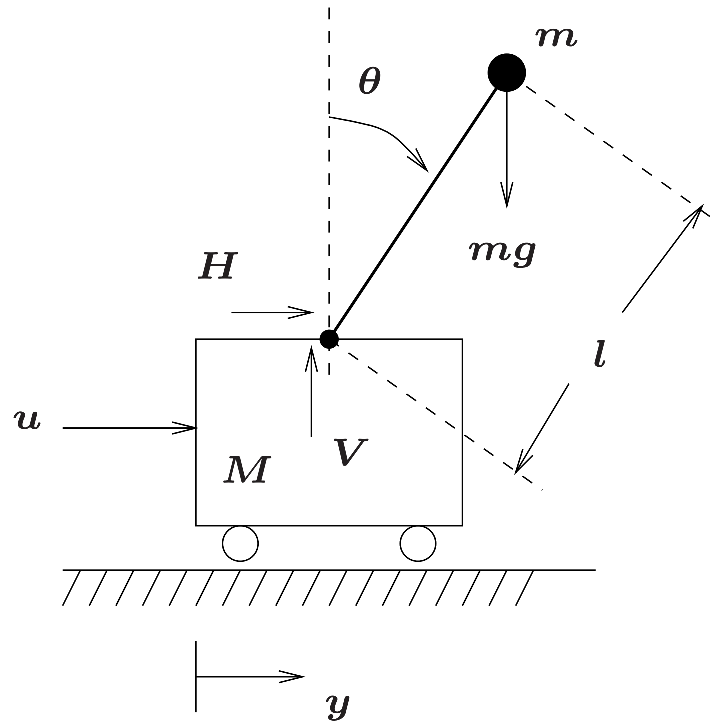
Polinômio auxiliar na linha s^4 $\rightsquigarrow$ $s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2+1)^2$ (raízes repetidas no eixo imaginário em: $\pm j$)

Polinômio auxiliar na linha s^2 $\rightsquigarrow$ $s^2 + 1$ (raízes em $\pm j$)

Raízes repetidas no eixo imaginário $j\omega$



Exemplo – Pêndulo Invertido sobre um carrinho



Assume-se que o movimento se dá no plano e desprezam-se o atrito e a massa da haste. O objetivo é manter o pêndulo na posição vertical. Modelo?

Modelo?

- M é a massa do carrinho e m é a massa da bolinha
- H, V : forças horizontal e vertical exercidas pelo carro no pêndulo
- Em relação a M tem-se: $M\dfrac{d^2y}{dt^2} + H = u \Rightarrow M\dfrac{d^2y}{dt^2} = u - H$
- Em relação a m: $\begin{cases} m\dfrac{d^2}{dt^2}\left(y + l\sin(\theta(t))\right) = H & : \text{ Horizontal} \\ mg = m\dfrac{d^2}{dt^2}\left(l\cos(\theta(t))\right) + V & : \text{ Vertical} \end{cases}$

Note que $\dfrac{d}{dt}(\sin(\theta)) = \dot{\theta}\cdot\cos(\theta)$ (Vamos omitir a dependência em t)

e $\dfrac{d^2}{dt^2}(\sin(\theta)) = \ddot{\theta}\cdot\cos(\theta) - \ddot{\theta}^2\cdot\sin(\theta)$

Da mesma forma: $\dfrac{d}{dt}(\cos(\theta)) = -\dot{\theta}\cdot\sin(\theta)$

e $\dfrac{d^2}{dt^2}(\cos(\theta)) = -\ddot{\theta}\cdot\sin(\theta) - \dot{\theta}^2\cdot\cos(\theta)$

Modelo?

▶ Obtém-se assim as relações de equilíbrio de forças para a massa m (que são equações não lineares!):

⇒ $H = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$

⇒ $mg - V = -ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta$

▶ É necessário também aplicar a Lei de Newton ao movimento rotacional do pêndulo ao redor da dobradiça (que e uma relação não linear!):

$$mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta}\cdot l + m\ddot{y}l\cos\theta$$

Modelo?

▷ Apesar das equações serem não lineares, pode-se obter um modelo linear ao considerar pequenas variações de ângulo, considerando o pêndulo na posição vertical como ponto de referência, isto é, assuma que θ e $\dot{\theta}$ são pequenos. Então:

$$\sin\theta \cong \theta \;\; ; \;\; \cos\theta \cong 1 \;\; ; \;\; \theta^2, \dot{\theta}^2, \theta\dot{\theta}, \theta\ddot{\theta} \to 0$$

▶ Da força vertical em relação a massa m obtém-se:

$$mg - V = -ml\cancelto{0}{\ddot{\theta}\theta} - ml\cancelto{0}{\dot{\theta}^2}1 = 0, \;\; \text{i.e.} \;\; V = mg$$

▶ Da força horizontal em relação a massa m obtém-se:

$$H = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}1 - ml\cancelto{0}{\dot{\theta}^2}\theta = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}$$

▶ Da força em relação a massa M do carrinho, considerando H, obtém-se:

$$M\ddot{y} = u - H = u - m\ddot{y} - ml\ddot{\theta}$$

Modelo?

- Da relação do movimento rotacional do pêndulo ao redor da dobradiça tem-se:

$$
\begin{aligned}
mgl\sin\theta &= ml\ddot{\theta}\cdot l + m\ddot{y}l\cos\theta \\
\cancel{ml}\,g\theta &= \cancel{ml}\,\ddot{\theta}\cdot l + \cancel{ml}\,\ddot{y}1 \\
g\theta &= l\ddot{\theta} + \ddot{y}
\end{aligned}
$$

- Portanto o modelo ”global” é dado pelas equações:

$$
\begin{cases}
(M+m)\,\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = u \\
l\ddot{\theta} + \ddot{y} - g\theta = 0
\end{cases}
$$

Modelo do Pêndulo Invertido sobre um carrinho

- Aplicando a transformada de Laplace (com condições iniciais nulas) tem-se:

$$\begin{cases} (M+m)\,s^2Y(s) + mls^2\Theta(s) & = & U(s) \\ (ls^2 - g)\,\Theta(s) + s^2Y(s) & = & 0 \end{cases}$$

Obtém-se a FT da entrada u para o deslocamento y do carrinho:

$$G_{yu}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ls^2 - g}{s^2\Big[(M+m)ls^2 - g(M+m)\Big]}$$

E também a FT da entrada u para o deslocamento angular θ da haste:

$$G_{\theta u}(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-1}{(M+m)ls^2 - g(M+m)}$$

Exemplo – Pêndulo Invertido sobre um carrinho

▷ Assuma hipoteticamente que os valores dos parâmetros são tais que a FT da entrada u para o deslocamento angular θ da haste seja simplesmente descrito por:

$$G_{\theta u}(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-1}{s^2 - 1} = \frac{-1}{(s+1)(s-1)}$$

É fácil notar que o pêndulo invertido sobre o carrinho é instável...

Suponha ainda que o ângulo θ seja medido e o controlador é da forma:

$$G_c(s) = \frac{K(s+z)}{s+p}$$

Então a FT em malha fechada considerando realimentação unitária negativa é:

$$T_{\theta u}(s) = \frac{G_c(s)G_{\theta u}(s)}{1 + G_c(s)G_{\theta u}(s)}$$

Exemplo – Pêndulo Invertido sobre um carrinho

Pode-se então escrever a equação característica (EC) do denominador:

$$\begin{aligned} 1 + G_c(s)G_{\theta u}(s) &= 0 \\ 1 + \frac{\alpha(s)\,\beta(s)}{\gamma(s)\,\delta(s)} &= 0 \\ \gamma(s)\delta(s) + \alpha(s)\beta(s) &= 0 \end{aligned}$$

Isto é, a EC é uma composição dos polinômios que formam os modelos da planta e do controlador, i.e.:

$$G_{\theta u}(s) = \frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{-1}{(s+1)(s-1)} \quad \text{e} \quad G_c(s) = \frac{\alpha(s)}{\gamma(s)} = \frac{K(s+z)}{s+p}$$

Portanto a EC resultante é: $(s+p)(s+1)(s-1) -1\times [K(s+z)] = 0$

Exemplo – Pêndulo Invertido sobre um carrinho

Imponha que o controlador tenha o zero em -1, então a EC anterior: $(s+p)(s+1)(s-1) - K(s+1) = 0$, pode ser reescrita da forma:

$$(s+1)\left[(s+p)(s-1) - K\right] = 0 \quad \text{(coloque } (s+1) \text{ em evidência)}$$

Então podemos reduzir a igualdade para:

$$\Delta(s) = (s+p)(s-1) - K = s^2 + (p-1)s - (K+p) = 0$$

Note que ao escolhermos zero em -1 para o controlador, de fato ocorre o cancelamento do zero com o polo estável da planta em -1 rad/s, (s+1). Poderíamos antecipar este cancelamento ao escolher o zero do controlador previamente. Seria uma boa estratégia? A se pensar...

Exemplo – Pêndulo Invertido sobre um carrinho

Como a EC agora é uma equação de 2o. grau:

$$\Delta(s) = s^2 + (p-1)s - (K+p) = 0$$

pelo critério de Routh-Hurwitz basta impormos que todos os coeficientes sejam positivos para que se garanta estabilidade!! Desta forma é necessário:

$$\begin{aligned} (p-1) &> 0 \\ -(K+p) &> 0 \end{aligned}$$

▷ Da primeira restrição, $(p-1) > 0$, o polo do controlador necessariamente deve respeitar a condição $p > 1$. Vamos escolher $p = 2$...

▷ Para $p = 2$, da segunda restrição temos que $-(K+p) > 0$, ou $K < -2$. Vamos selecionar o ganho do controlador tal que $K = -3$...

Exemplo – Pêndulo Invertido sobre um carrinho

Desta forma a FT em malha fechada é:

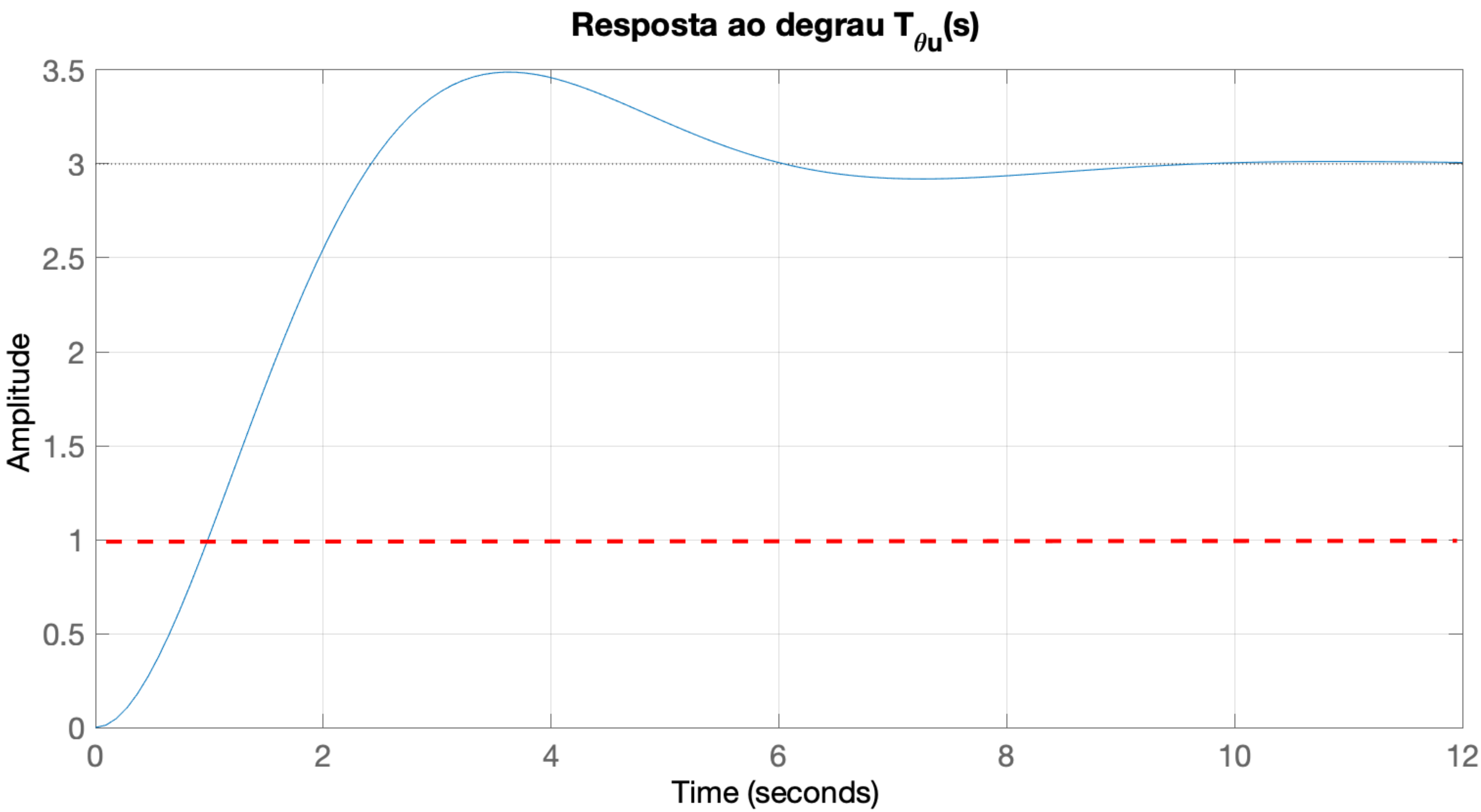
$$T_{\theta u}(s) = \frac{G_c(s)G_{\theta u}(s)}{1 + G_c(s)G_{\theta u}(s)} = \frac{3}{s^2 + s + 1}$$

que tem dois polos em malha fechada localizados em $-0.5 \pm j0.8660$ (estável)

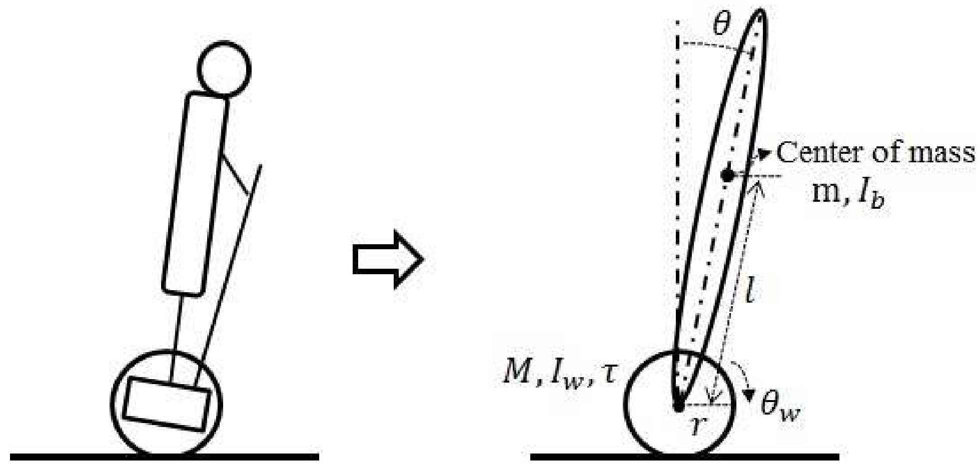
▷ Veja que não estamos interessados em "desempenho" mas somente em garantir estabilidade...

▷ A resposta temporal para um comando degrau unitário é apresentada na próxima lâmina. Claramente a magnitude do ângulo da haste é limitado, porém não segue/rastreia a entrada (há erro em estado estacionário). Para rastreamento é necessário elaborar melhor o controlador (o que faremos em breve)

Exemplo – Pêndulo Invertido sobre um carrinho



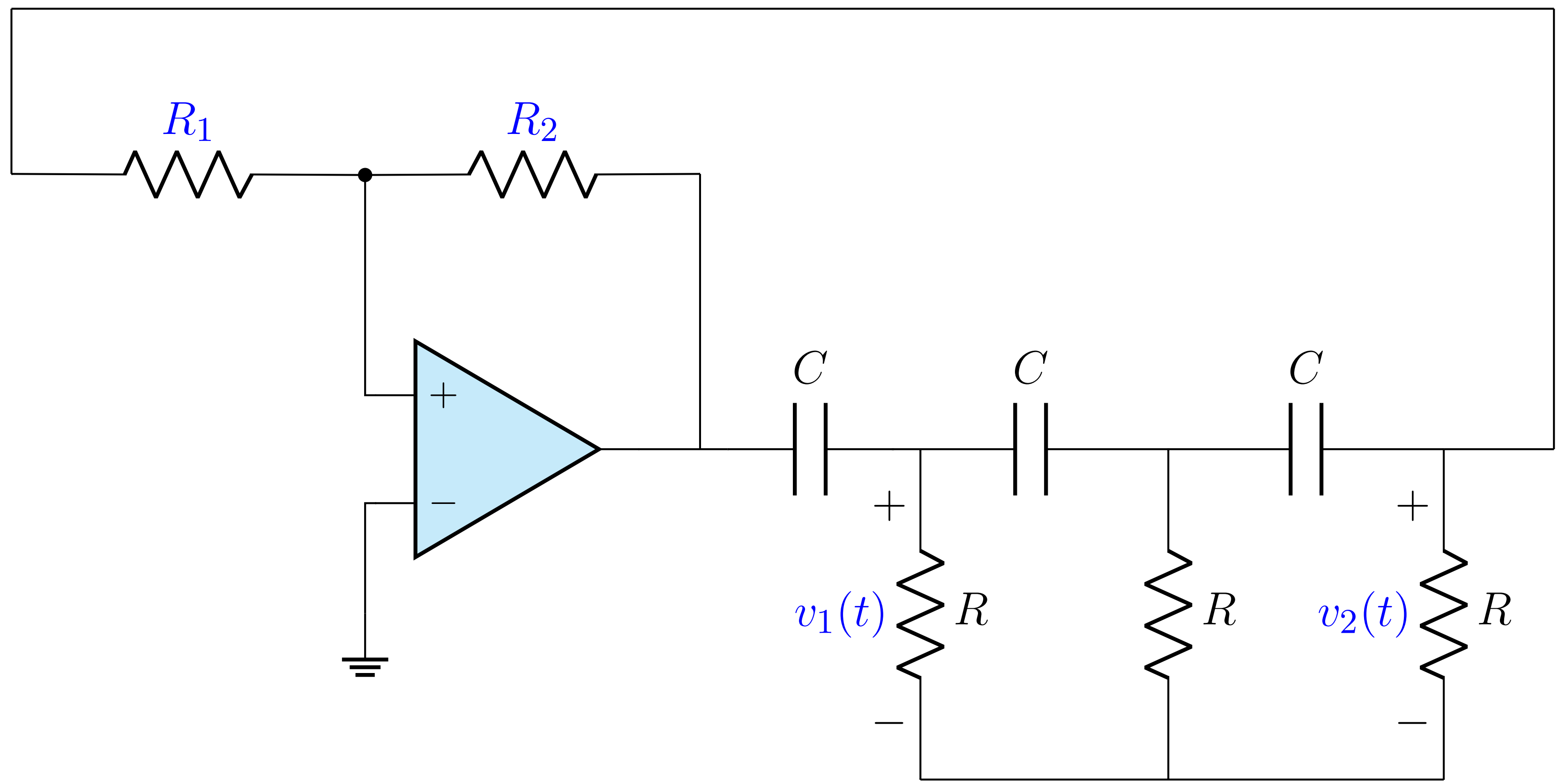
Inspirações no pêndulo invertido? Segway...



Ao usar um giroscópio, pode-se medir o ângulo do segway em relação a vertical. O torque aplicado as rodas é gerado por motores elétricos e balança o segway fornecendo o movimento desejado para frente ou para trás...

Ryno, the One-Wheeled Segway

Exemplo - Oscilador de deslocamento de fase



Exemplo - Oscilador de deslocamento de fase

A função de transferência para a rede passiva no circuito é descrita por:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{-1}{\left(1+\frac{1}{sRC}\right)\left(2+\frac{1}{sRC}\right)^2 - 3 - \frac{2}{sRC}} = G(s)$$

O circuito irá oscilar se for projetado tal que tenha um par de polos sobre o eixo imaginário (puramente imaginários). A EC do oscilador é dada por:

$$1 + KG(s) = 1 - \frac{K}{\left(1+\frac{1}{sRC}\right)\left(2+\frac{1}{sRC}\right)^2 - 3 - \frac{2}{sRC}} = 0$$

sendo que $K = \frac{R_2}{R_1}$ é ajustável

1. Encontre o valor de K para que se tenha a condição de oscilação

2. Encontre a frequência de oscilação dada em Hertz

Exemplo - Oscilador de deslocamento de fase

Note que a EC tem 3 raízes e para oscilar, dois polos devem ser puramente imaginários. A ideia é usar Routh-Hurwitz para obter um valor específico para $K = R_2/R_1$ que irá criar uma linha nula no arranjo de Routh e, na sequência, obter a equação auxiliar cujas raízes é um par de raízes puramente imaginários. Da EC tem-se:

$$1 + K \frac{-1}{\left(1+\frac{1}{sRC}\right)\left(2+\frac{1}{sRC}\right)^2 - 3 - \frac{2}{sRC}} = 0$$

$$\left(1+\frac{1}{sRC}\right)\left(2+\frac{1}{sRC}\right)^2 - 3 - \frac{2}{sRC} - K = 0$$

$$\left(1+\frac{1}{sRC}\right)\left(4+\frac{4}{sRC}+\frac{1}{s^2R^2C^2}\right) - 3 - \frac{2}{sRC} - K = 0$$

$$4+\frac{4}{sRC}+\frac{1}{s^2R^2C^2}+\frac{4}{sRC}+\frac{4}{s^2R^2C^2}+\frac{1}{s^3R^3C^3} - 3 - \frac{2}{sRC} - K = 0$$

$$1+\frac{1}{s^3R^3C^3}+\frac{5}{s^2R^2C^2}+\frac{6}{sRC} - K = 0$$

Exemplo - Oscilador de deslocamento de fase

A EC pode ser reescrita como: $(1-K)s^3R^3C^3 + 6s^2R^2C^2 + 5sRC + 1 = 0$

E o arranjo de Routh é dado por

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & (1-K)R^3C^3 & 5RC \\ s^2 & 6R^2C^2 & 1 \\ s^1 & \Gamma & \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

com: $\Gamma = \dfrac{30R^3C^3 - (1-K)R^3C^3}{6R^2C^2} = \dfrac{(30-1+K)R^3C^3}{6R^2C^2} = \dfrac{(29+K)RC}{6}$

▷ Do arranjo, para se obter a condição de oscilação (um par de raízes puramente imaginárias), então deve-se impor $K = -29$ (anula a linha em s^1 e, logo acima, tem-se a equação auxiliar em s^2). Para estabilidade tem-se $-29 < K < 1$

▷ Para $K = -29$, a equação auxiliar é $s^2(6R^2C^2) + 1 = 0$ e tem-se: $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ $= \pm j\frac{1}{\sqrt{6}RC}$. Como $\omega_n = 2\pi f$, a frequência de oscilação é $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}RC}$ Hz