Algebra Linear

1. Espaço Vetorial Linear
2. Independência Linear
3. Coordenadas em Espaços Lineares
4. Operadores Lineares
5. Transformação de Similaridade
6. Matriz como Operador
7. Norma de Vetores e Produto Interno

Espaço Vetorial Linear

Definição Considere um corpo $\mathcal{F}$. Um espaço linear vetorial $\mathcal{X}$ é caracterizado por um conjunto de elementos, munido com duas operações:

$$\forall\, x, y \in \mathcal{X} \quad \rightarrow \quad x + y \in \mathcal{X} \qquad \text{(adição)}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathcal{F},\; x \in \mathcal{X} \quad \rightarrow \quad \alpha x \in \mathcal{X} \qquad \text{(multiplicação por escalar)}$$

e satisfazendo as seguintes propriedades

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{X} \quad \rightarrow \quad x + \mathbf{0} = x$
4. $\forall x \in \mathcal{X},\; \exists -x \in \mathcal{X} \quad \rightarrow \quad x + (-x) = \mathbf{0}$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
6. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
7. $\exists\; 0{,}1 \in \mathcal{F} \quad \rightarrow \quad 0x = \mathbf{0},\;\; 1x = x$

Espaço Vetorial Linear

Exemplos

- $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n}$;
- $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^n}$
- $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{n \times m}}$
- $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^{n \times m}}$

Questão: $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^n}$, forma um espaço vetorial?

- $\boldsymbol{\mathcal{X} = \{0\},\ 0 \in \mathbb{R}^n}$
- $\boldsymbol{\mathcal{X} = H(a,b)}$, conjunto das funções reais contínuas no intervalo $\boldsymbol{(a,b)}$

Espaço Vetorial Linear

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{W} = \Big\{ f \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n \ , \ \ f(t) \text{ diferenciável} \Big\}$

$$(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t) \qquad \text{(soma)}$$

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t) \qquad \text{(multiplicação por escalar)}$$

Um elemento no espaço $\mathcal{W}$ é uma trajetória no $\mathbb{R}^n$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{V} = \Big\{ x(t) \in \mathcal{W} \ : \ \dot{x}(t) = Ax(t) \Big\}$

Elementos no espaço $\mathcal{V}$ são trajetórias do $\mathbb{R}^n$ soluções do sistema linear $\dot{x}(t) = Ax(t)$

$\rightsquigarrow$ Espaço dos polinômios em s de grau menor ou igual a n

Espaço Vetorial Linear

Subespaço Vetorial Um subconjunto $\mathcal{M} \neq \emptyset$ de um espaço vetorial linear $\mathcal{X}$ é denominado um subespaço de $\mathcal{X}$ se: $\forall\ x, y \in \mathcal{M}$ e $\alpha \in \mathcal{F}$,

1. $x + y \in \mathcal{M}$
2. $\alpha x \in \mathcal{M}$

Exemplos $\mathcal{V}$ é um subespaço de $\mathcal{W}$ (definidos na lâmina anterior)

$\rightsquigarrow$ $x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \alpha x_1 \end{bmatrix}$, é um subespaço do $\mathbb{R}^2$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{S} \triangleq \{A \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = -A^T\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^{n\times n}$?

Note que (i) $A = -A^T$, $B = -B^T \rightarrow A + B = -(A+B)^T$. Além disso, (ii) $\mathbf{0} = \mathbf{0}^T$ e também pertence a $\mathcal{S}$

Manipulações

$\rightsquigarrow$ No livro texto os parâmetros considerados são números reais (a menos que seja especificado diferentemente)

$\rightsquigarrow$ Matrizes: A $(n \times m)$, B $(m \times r)$, C $(l \times n)$, D $(r \times p)$

$\rightsquigarrow$ Seja a_i a i-ésima coluna de A e b_j a j-ésima linha de B:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m$$

a_ib_i: matriz n por r (vetor $n \times 1$ multiplicado por vetor $1 \times r$)

b_ia_i: só está definido para $n = r$ (escalar)

Manipulações

$$CA = C \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ca_1 & Ca_2 & \cdots & Ca_m \end{bmatrix}$$

$$BD = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_1 D \\ b_2 D \\ \vdots \\ b_m D \end{bmatrix}$$

(In)Dependência Linear

Dependência Linear Um conjunto de vetores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, é linearmente dependente (LD) se e somente se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, não **todos nulos** tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

Se a igualdade for verdadeira apenas para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, diz-se então que o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ é **linearmente independente (LI)**

$\rightsquigarrow$ Veja que pode-se representar: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = X\alpha = 0$

sendo $X \triangleq [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k]$, $\alpha \triangleq [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_k]'$

Independência Linear

$\rightsquigarrow$ Se um conjunto de vetores $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é linearmente dependente, existe ao menos um α_i diferente de zero (por exemplo, $\alpha_1 \neq 0$) tal que:

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha_1}\left[\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \cdots + \alpha_n x_n\right]$$

isto é, um dos vetores (mas não necessariamente qualquer um) pode ser escrito como uma combinação linear dos demais

Independência Linear

$\rightsquigarrow$ O conceito de dependência linear depende do corpo ($\mathcal{F}$) adotado. Por exemplo, considere o conjunto das funções racionais em s:

$$\left\{ \frac{s}{s+1}, \frac{1}{s+2} \right\}$$

Não existem escalares reais α_1, α_2 não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 \frac{s}{s+1} + \alpha_2 \frac{1}{s+2} = 0$$

No entanto, para escalares pertencentes ao corpo das funções racionais em s, a igualdade vale se

$$\alpha_1 = -\frac{1}{s+2} \;\; ; \;\; \alpha_2 = \frac{s}{s+1}$$

Dimensão

Definição A dimensão de um espaço vetorial $\mathcal{X}$ é o número máximo de vetores LI desse espaço

$\rightsquigarrow$ Portanto no $\mathbb{R}^n$ há no máximo n vetores LI

$\rightsquigarrow$ A dimensão de um espaço vetorial pode ser infinita: considere o espaço das funções contínuas no intervalo $[a,b]$. Em particular, as funções $t, t^2, t^3, \ldots$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t^i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$$

Base

Proposição Um conjunto de vetores LI do $\mathbb{R}^n$ é uma base se qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ puder ser expresso de forma única como uma combinação linear desse conjunto de vetores LI

$\rightsquigarrow$ Em um espaço de dimensão n, qualquer conjunto de n vetores LI forma uma base

$\rightsquigarrow$ Quaisquer duas bases de um espaço n-dimensional possuem o mesmo número de elementos

Representação em uma Base

$\rightsquigarrow$ Se $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^n$, então qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito de maneira única pela combinação linear:

$$x = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \cdots + \alpha_n q_n$$

Definindo a matriz quadrada $Q_{n\times n}$, $\quad Q \triangleq \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$

$$x = Q \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = Q\alpha$$

$\alpha \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}'$ é a representação de x na base $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, i.e., a representação é obtida da combinação linear!

Coordenadas em Espaços Lineares

Exemplo: Considere o conjunto dos polinômios de grau menor do que 4

Escolha a Base: $e_1 = s^3$; $e_2 = s^2$; $e_3 = s$; $e_4 = 1$

Suponha que $x = s^3 + 4s^2 - 4s + 10$. Então x pode ser escrito em relação a base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ da forma:

$$x = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

e $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 10 \end{bmatrix}'$ é a representação de x na base escolhida

Coordenadas em Espaços Lineares

Mudança de Base – Se β e $\bar{\beta}$ são as representações de um mesmo vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação, respectivamente, às bases $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$, então

$$x = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \bar{\beta}$$

$\Rightarrow$ Como representar e_i em termos de $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ ou vice-versa?

Considere $p_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix}$ a representação de e_i na base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$:

$$e_i = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} \triangleq Ep_i \ , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Coordenadas em Espaços Lineares

Usando notação matricial e considerando cada e_i:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ep_1 & Ep_2 & \cdots & Ep_n \end{bmatrix} \\
&= E \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \\
&\triangleq \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} P
\end{aligned}$$

Coordenadas em Espaços Lineares

$$\therefore \quad x = \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} P} \beta = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \bar{\beta}$$

$\Rightarrow$ Como a representação é única então $\bar{\beta} = P\beta$

$\Rightarrow$ Analogamente, representando $\bar{e}_i$ na base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, obtém-se

$$\beta = Q\bar{\beta}$$

$\Rightarrow$ Veja que conhecida a representação de um vetor numa base, a representação em outra base pode ser automaticamente determinada:

$$\bar{\beta} = P\beta = PQ\bar{\beta} \quad , \quad \forall \bar{\beta}$$

Portanto: $PQ = \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad P = Q^{-1}$

Coordenadas em Espaços Lineares

Exemplo da Pág. 14 – Polinômios de grau menor do que 4. Considere a base: $\bar{e}_1 = s^3 - s$; $\bar{e}_2 = s^2 - s$; $\bar{e}_3 = s - 1$; $\bar{e}_4 = 1$, então neste caso o vetor $x = s^3 + 4s^2 - 4s + 10$ é descrito como:

$$x = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

E a representação é $\bar{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 11 \end{bmatrix}'$

▷ **Mudança de base** para a representação $\beta = [1 \quad 4 \quad -4 \quad 10]'$ na Pág. 14?

Coordenadas em Espaços Lineares

$\rightsquigarrow$ Note que a base da Pág. 14 é dada por: $\begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Então, representando a base $\begin{bmatrix} s^3 - s & s^2 - s & s - 1 & 1 \end{bmatrix}$ em relação a base acima, tem-se:

$$s^3 - s = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s^2 - s = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coordenadas em Espaços Lineares

$$s-1=\begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$1=\begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas em Espaços Lineares

Portanto a transformação é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\beta = Q\bar{\beta}$:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Coordenadas em Espaços Lineares

Claro que ao se conhecer Q, conhece-se também P pois $P = Q^{-1}$. Então:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, da representação β poderia-se obter $\bar{\beta}$ para $\bar{\beta} = P\beta$:

$$\bar{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Operadores Lineares

Definição Qualquer função $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$, com $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços lineares sobre o mesmo corpo $\mathcal{F}$, é denominada **operador linear** se e somente se

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $f(x_1), f(x_2) \in \mathcal{Y}$, e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}$

$$\looparrowright \quad y = f(x) \;\; ; \quad x \in \mathcal{X} \text{ (domínio)} \; , \;\; y \in \mathcal{Y} \text{ (imagem)}$$

Exemplo: Considere g uma função contínua sobre $[0, T]$. A transformação

$$y(t) = \int_0^T g(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

é linear e mapea o espaço das funções contínuas em $[0, T]$ no mesmo espaço

Operadores Lineares

Teorema Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços lineares de dimensão n e m, respectivamente. Suponha que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ são vetores LI em $\mathcal{X}$ (uma base para $\mathcal{X}$).

Então o operador linear $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é unicamente determinado pelos n pares $y_i = L(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Além disso, com relação à base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $\mathcal{X}$ e à base $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ de $\mathcal{Y}$, **L pode ser representado por uma matriz $A_{m\times n}$**. Ademais a i-ésima coluna de A é a representação de y_i na base $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$

Demonstração: Por hipótese o operador L é linear então note que vale:

$$\begin{aligned} L(x) &= L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \\ &= \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + \cdots + \alpha_n L(x_n) \\ &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n \end{aligned}$$

Operadores Lineares

Seja $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ a representação de y_i na base dada por $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$:

$$y_i = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1{,}2, \ldots ,n$$

Operadores Lineares

Note que usando a representação de y_i na base $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ para o mapeamento $L(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
L\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix} A
\end{aligned}
$$

Operadores Lineares

Em relação às bases $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$,

$$y = L(x)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}\beta = L\Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}A}\alpha\Bigg)$$

$$\beta = A\alpha$$

Para se descrever a transformação de similaridade, não há diferença entre especificar x e y ou α e β. Porém A (que é a representação do operador linear L em si) depende das bases escolhidas

Transformação de Similaridade – Colando as peças...

Considere a transformação linear $L \; : \; \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, com a mesma base para $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \;\rightarrow\; A \quad , \quad \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\} \;\rightarrow\; \bar{A}$$

$$x \xrightarrow{\quad L \quad} y \; (= L(x))$$

$$\begin{tikzcd}
\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \alpha \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P"'] & \beta \; (= A\alpha) \arrow[d, shift right, "P"'] \\
\begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \bar{\alpha} \arrow[r, "\bar{A}"] \arrow[u, shift right, "Q"'] & \bar{\beta} \; (= \bar{A}\bar{\alpha}) \arrow[u, shift right, "Q = P^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\therefore \; \bar{\beta} = \bar{A}\bar{\alpha} \;\text{ e }\; \bar{\beta} = P\beta = PA\alpha = PAP^{-1}\bar{\alpha} \;\Rightarrow\; \bar{A}\bar{\alpha} = PAP^{-1}\bar{\alpha} \,, \forall \bar{\alpha}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ \quad \text{ou} \quad A = P^{-1}\bar{A}P = Q\bar{A}Q^{-1} \quad \Rightarrow \quad Q = P^{-1}$$

Transformação de Similaridade

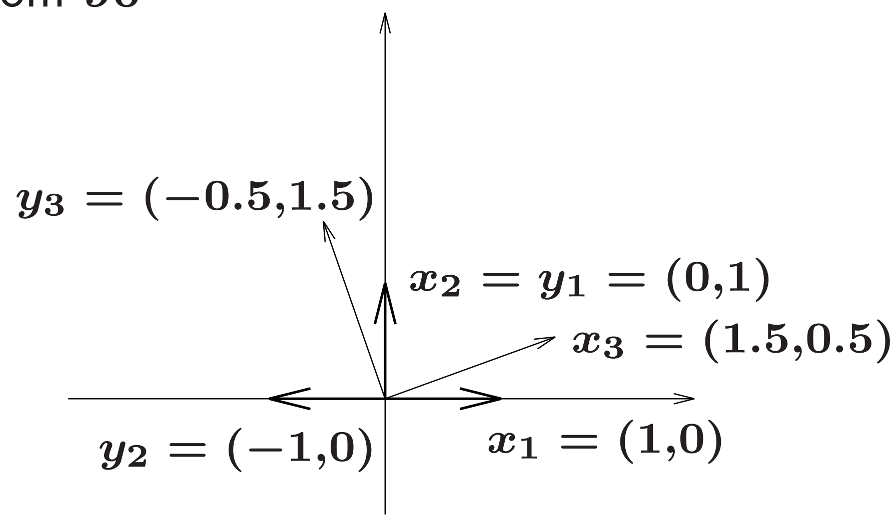
- $\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{A}$, $\bar{\boldsymbol{A}}$: matrizes similares

- $\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{PAP^{-1}}$, $\boldsymbol{P^{-1}\bar{A}P}$: Transformações de Similaridade

- $\rightsquigarrow$ Todas as representações de um operador linear são similares. Uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$ pode ser vista como a representação de um operador linear ou como o operador linear propriamente dito

Transformação de Similaridade

Exemplo de transformação linear A transformação que rotaciona um ponto no plano no sentido anti-horário e com 90^0



Escolha uma base no $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, em relação à base $\{x_1,x_2\}$ tem-se

$$y_1 = L(x_1) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad y_2 = L(x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformação de Similaridade

Então o operador L é representado na base $\{x_1, x_2\}$ pela matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⇝ Veja que a representação de x_3 na base $\{x_1, x_2\}$ é dada por $\alpha = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

⇝ Portanto **a representação de y_3 em relação à base $\{x_1, x_2\}$ é** obtida de:

$$\begin{aligned} \beta &= A\,\alpha \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transformação de Similaridade

Note que se a base no $\mathbb{R}^2$ fosse escolhida como sendo $\{x_1, x_3\}$, então ter-se-ia:

$$y_1 = L(x_1) = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad y_3 = L(x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sendo a representação do operador L nesta base dada por: $\bar{A} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\leadsto$ Neste caso a representação de x_2 na base $\{x_1, x_3\}$ é dada por $\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\leadsto$ Portanto **a representação de y_2 em relação à base $\{x_1, x_3\}$ é** obtida de:

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \bar{A}\,\bar{\alpha} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transformação de Similaridade

⇝ E mudança de base, como seria? Por exemplo, qual seria a representação da base $\{x_1, x_2\}$ em relação à base $\{x_1, x_3\}$. Então basta escrever:

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Portanto a transformação é dada por: $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

⇝ Pode-se então representar o operador $\bar{A}$ (na base $\{x_1, x_3\}$) ao considerar a mudança de base usando P para A (na base $\{x_1, x_3\}$) tal que $\bar{A} = PAP^{-1}$? De fato:

$$PAP^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

Transformação de Similaridade

$\rightsquigarrow$ Claro que o mesmo pode ser feito ao representar a base $\{x_1, x_3\}$ em relação à base $\{x_1, x_2\}$, ao escrever:

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Portanto a transformação é dada por: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ E o inverso também é válido $A = Q\bar{A}Q^{-1}$? Note que:

$$Q\bar{A}Q^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{Q^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$\triangleright$ E as relações apresentadas na pág. 28 estão bem ilustradas neste exemplo

Colando as peças neste exemplo...

Para este exemplo tem-se as bases relacionadas a cada operador:

$$\{x_1, x_2\} \rightarrow A \quad \text{e} \quad \{x_1, x_3\} \rightarrow \bar{A}$$

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r, "L"] & y\ (= L(x)) \\
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} & \alpha \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right=2, "P"'] & \beta\ (= A\alpha) \arrow[d, shift right=2, "P"'] \\
\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \end{bmatrix} & \bar{\alpha} \arrow[r, "\bar{A}"] \arrow[u, shift right=2, "Q"'] & \bar{\beta}\ (= \bar{A}\bar{\alpha}) \arrow[u, shift right=2, "Q = P^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad \bar{A} = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ \quad \text{ou} \quad A = P^{-1}\bar{A}P = Q\bar{A}Q^{-1} \quad \Rightarrow \quad Q = P^{-1}$$

Matriz como Operador Linear

Exemplo Considere: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Vamos escrever os vetores $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{A^2b}\}$:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{Ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{A^2b} = \begin{bmatrix} \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

Note que estes vetores são LI e podem ser usados para formar uma base no $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$

Claro que $\boldsymbol{A^3b} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{-13} \end{bmatrix}$ é combinação linear a partir de $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ab}, \boldsymbol{A^2b}\}$

Matriz como Operador Linear

⇝ A ideia é obter a representação $\bar{A}$ de A na base $\{b, Ab, A^2b\}$. Note que

$$A(b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; A(Ab) = A^2b = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A(A^2b) = A^3b = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriz como Operador Linear

Então a representação $\bar{A}$ de A na base $\{b, Ab, A^2b\}$ é

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 17 \\ 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Este tipo de representação de uma matriz quadrada qualquer em relação a uma base específica é denominada **Forma Companheira** e é bem útil para certas discussões

Generalizando Forma Companheira

⇝ Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se existir um vetor $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que o conjunto de n vetores $\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-2}b, A^{n-1}b\}$ é LI e se

$$A^n b = \beta_1 b + \beta_2 Ab + \beta_3 A^2 b + \cdots + \beta_{n-1} A^{n-2} b + \beta_n A^{n-1} b$$

então a representação $\bar{A}$ de A na base $\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\}$ é dada pela forma companheira:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_n \end{bmatrix}$$

Matriz como Operador Linear

Representação de $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na base $\{\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \ldots, \boldsymbol{q_n}\}$

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} \quad ; \quad \boldsymbol{Q} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \cdots & \boldsymbol{q_n} \end{bmatrix}$$

Veja

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} \;\; \rightarrow \;\; \boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{q_2} & \cdots & \boldsymbol{q_n} \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{q_1} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{q_2} & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{q_n} \end{bmatrix}$$

$\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{i}}$ é a $\boldsymbol{i}$-ésima coluna de $\bar{\boldsymbol{A}}$, representação de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{i}}$ na base $\{\boldsymbol{q_1}, \ldots, \boldsymbol{q_n}\}$.
Escolhas adequadas da base $\{\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \ldots, \boldsymbol{q_n}\}$ leva a diferentes representações

Norma de vetores

Definição Qualquer função real representada por $\|x\|$ pode ser definida como uma norma se para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| \geq 0 \;\; ; \;\; \|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\,\alpha\,| \; \|x\|$
3. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ (Desigualdade Triangular)

Normas usuais para vetores

- **Norma-2 ou Norma Euclidiana** $\|x\|_2 \triangleq \sqrt{x'x} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,
- **Norma-r** $\|x\|_r \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}}, \;\; 1 \leq r < \infty$
- **Norma-∞** $\|x\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Produto Interno

A função $\langle x,y \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ é um **produto interno** se satisfaz:

1. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$, $\quad \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle^*$
2. $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$
3. $\langle x,x \rangle \geq 0$ e $\langle x,x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Representação usual para vetores do $\mathbb{R}^n$

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x' y \quad \text{(um escalar!)}$$

Vetores ortogonais – $x \perp y \quad \langle x,y \rangle = 0$

Norma-2 $\quad \|x\|_2 \triangleq \sqrt{x^T x} = \sqrt{\langle x,x \rangle} \quad \Rightarrow \quad \langle x,x \rangle = \|x\|_2^2$

MATLAB

- `norm(x,1)` – norma-1
- `norm(x,2)` ou `norm(x)` – norma-2
- `norm(x,inf)` – norma-∞