Sistemas Dinâmicos Lineares

1. Descrição de sistemas dinâmicos
   1.1. Sinais ?
   1.2. Sistemas ?
   1.3. Espaço de estados. Resposta do sistema dinâmico
2. Estabilidade de sistemas dinâmicos
   2.1. Análise de estabilidade
   2.2. Estudo de Estabilidade usando LMIs
3. Controlabilidade e Observabilidade
   3.1. Dois problemas básicos: controle e estimação
   3.2. Verificando controlabilidade e observabilidade – LMIs

Espaço de Sinais

Sinais Define-se o conjunto

$$\mathcal{S} \triangleq \{f \mid f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n\}$$

Os elementos de $\mathcal{S}$ são denominados **sinais**

⇝ Os conjuntos de sinais, $\mathcal{S}$, com suas operações usuais de soma e multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} (f+g)(t) &= f(t)+g(t), \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \forall\, f, g \in \mathcal{S} \\ (\alpha f)(t) &= \alpha f(t) \end{aligned}$$

são denominados **espaços de sinais**

Definição Um sistema é um mapeamento de um espaço de sinais de entrada, $\mathcal{S}_e$, em um outro espaço de sinais de saída, $\mathcal{S}_s$:

$$
\begin{aligned}
G \quad &: \quad \mathcal{S}_e \mapsto \mathcal{S}_s \\
&: \quad w \mapsto z = Gw
\end{aligned}
$$

Sistema causal A saída no instante T depende apenas das entradas até o instante T

Invariância no Tempo Considere que $z(t)$ é a resposta de um sistema G para a entrada $w(t)$. Se a resposta para a entrada deslocada $w(t-T)$ é $z(t-T)$ o sistema é invariante no tempo

Sistemas - Revisão

Linearidade Um sistema $G : \mathcal{S}_e \mapsto \mathcal{S}_s$ é linear se

$$G(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha G w_1 + \beta G w_2, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall w_1, w_2 \in \mathcal{S}_e$$

⇝ Qualquer sistema LIT pode ser representado pela integral de convolução

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) w(\tau) d\tau$$

Função de transferência ? Basta tomar transformada de Laplace (ou $\mathcal{Z}$ se considerar convolução discreta) para obter

$$z(\zeta) = G(\zeta) w(\zeta)$$

sendo que ζ representa as variáveis s ou z

Descrição em Espaço de Estados

Definição Considere o sistema de equações na forma:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} \delta\left[x(t)\right] &= Ax(t) + Bw(t), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \tag{1}$$

▷ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – vetor de estado

▷ $w(t) \in \mathbb{R}^m$ – vetor de entrada

▷ $z(t) \in \mathbb{R}^p$ – vetor de saída

▷ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

⇝ $\delta\left[x(t)\right]$ é um operador que indica

- $\dot{x}(t) \quad \longrightarrow$ sistemas a tempo contínuo – $\boldsymbol{\Sigma}_c$
- $x(t+1) \quad \longrightarrow$ sistemas a tempo discreto – $\boldsymbol{\Sigma}_d$

Realizações

Uma matriz de transferência $\boldsymbol{G}(\zeta)$ é realizável se $\exists\ \boldsymbol{\Sigma}$, dim$(\boldsymbol{\Sigma}) < \infty$, ou simplesmente $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$ tal que

$$\boldsymbol{G}(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right]$$

sendo $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$ denominada uma realização de $\boldsymbol{G}(\zeta)$

- Se $\boldsymbol{G}(\zeta)$ é realizável ela tem infinitas realizações

Teorema $\boldsymbol{G}(\zeta)$ é realizável sse $\boldsymbol{G}(\infty) =$ constante

Resposta de Sistemas Dinâmicos

O sistema LIT

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} \delta\,[x(t)] & = & Ax(t) + Bw(t), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ z(t) & = & Cx(t) + Dw(t) \end{cases}$$

Tem como resposta (ou trajetória, ou solução):

$$\boldsymbol{\Sigma}_c : \quad \begin{cases} x(t) = e^{At}x(\mathbf{0}) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau \\ z(t) = Ce^{At}x(\mathbf{0}) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau + Dw(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_d : \quad \begin{cases} x(t) = A^t x(\mathbf{0}) + \sum_{\tau=1}^{t} A^{\tau-1}Bw(t-\tau) \\ z(t) = CA^t x(\mathbf{0}) + C\sum_{\tau=1}^{t} A^{\tau-1}Bw(t-\tau) + Dw(t) \end{cases}$$

Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov

Considere o sistema dinâmico linear autônomo e relaxado da forma

$$\delta[x(t)] = Ax(t)$$

▷ Um ponto de equilíbrio é alcançado quando $\delta[x(t)] \equiv 0$

▷ No caso contínuo, todas as derivadas nulas significam que os estados não estão variando no tempo e portanto, são indicados como estados ou ponto de equilíbrio, x_e

Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov

Estabilidade no sentido de Lyapunov Seja $\mathcal{R}(\nu)$ a região que consiste de todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \nu, \qquad \nu > 0 \qquad \longrightarrow \qquad x_0 = \text{estado inicial}$$

e seja $\mathcal{R}(\varepsilon)$ a região que consiste de todos os pontos tais que

$$\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \; \varepsilon > \nu \quad \forall t > 0$$

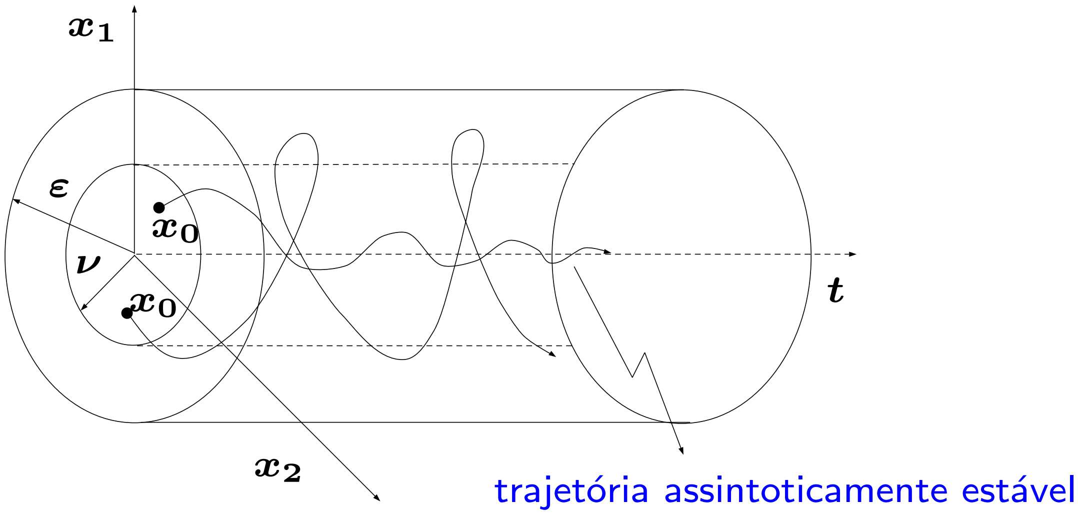
▷ Um estado de equilíbrio, x_e, do sistema autônomo é dito estável no sentido de Lyapunov se, correspondendo a cada $\mathcal{R}(\varepsilon)$ houver um $\mathcal{R}(\nu)$ tal que toda trajetória iniciada em $\mathcal{R}(\nu)$ está confinada em $\mathcal{R}(\epsilon)$ à medida que t cresce

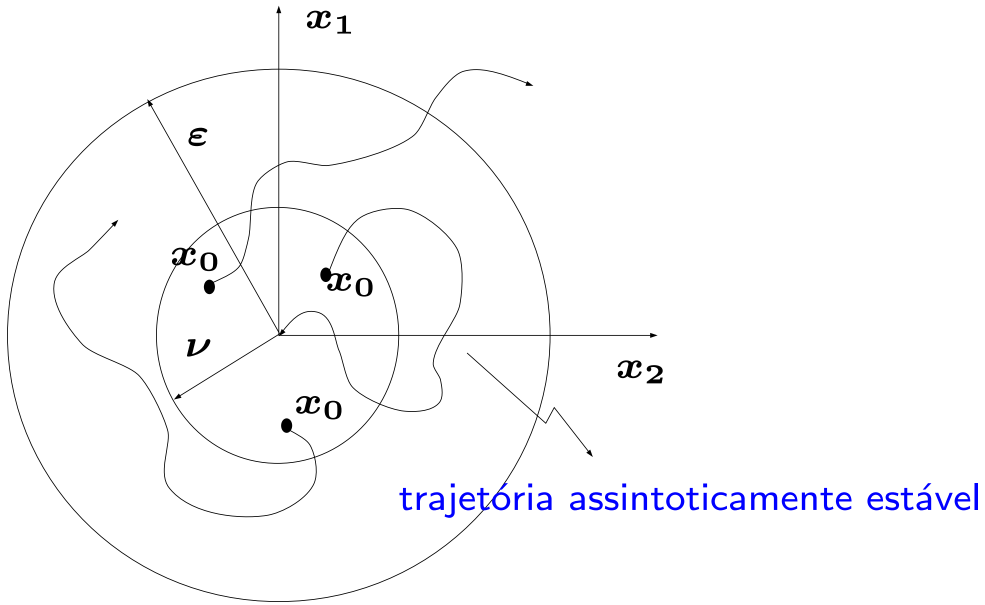
Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov

Estabilidade Assintótica Um estado de equilíbrio, x_e, do sistema autônomo é dito ser **assintoticamente estável** se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução começando em $\mathcal{R}(\nu)$ converge para x_e, sem deixar $\mathcal{R}(\varepsilon)$, a medida que t aumenta

Instabilidade Um estado de equilíbrio do sistema autônomo é dito ser instável se, para algum escalar $\varepsilon > 0$, e todo escalar $\nu > 0$, há sempre um estado x_0 em $\mathcal{R}(\nu)$ tal que a trajetória iniciando neste estado deixa a região $\mathcal{R}(\varepsilon)$

Ilustração das definições





Considere o sistema linear autônomo da forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

▷ Se A é não-singular, então o único estado de equilíbrio, tal que $\dot{x} \equiv \mathbf{0}$, é a origem $x = \mathbf{0}$

Para este sistema define-se uma função escalar de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \qquad \text{onde} \;\; P \succ \mathbf{0}$$

Tomando a derivada ao longo das trajetórias $x(t)$ obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= (Ax(t))^T Px(t) + x^T P(Ax(t)) \\ &= x^T(t)\left(A^TP + PA\right)x(t) \end{aligned}$$

▷ Como $V(x)$ foi escolhida sendo definida positiva, para se ter estabilidade assintótica é necessário que $\dot{V}(x)$ seja definida negativa:

$$\dot{V}(x) < 0$$

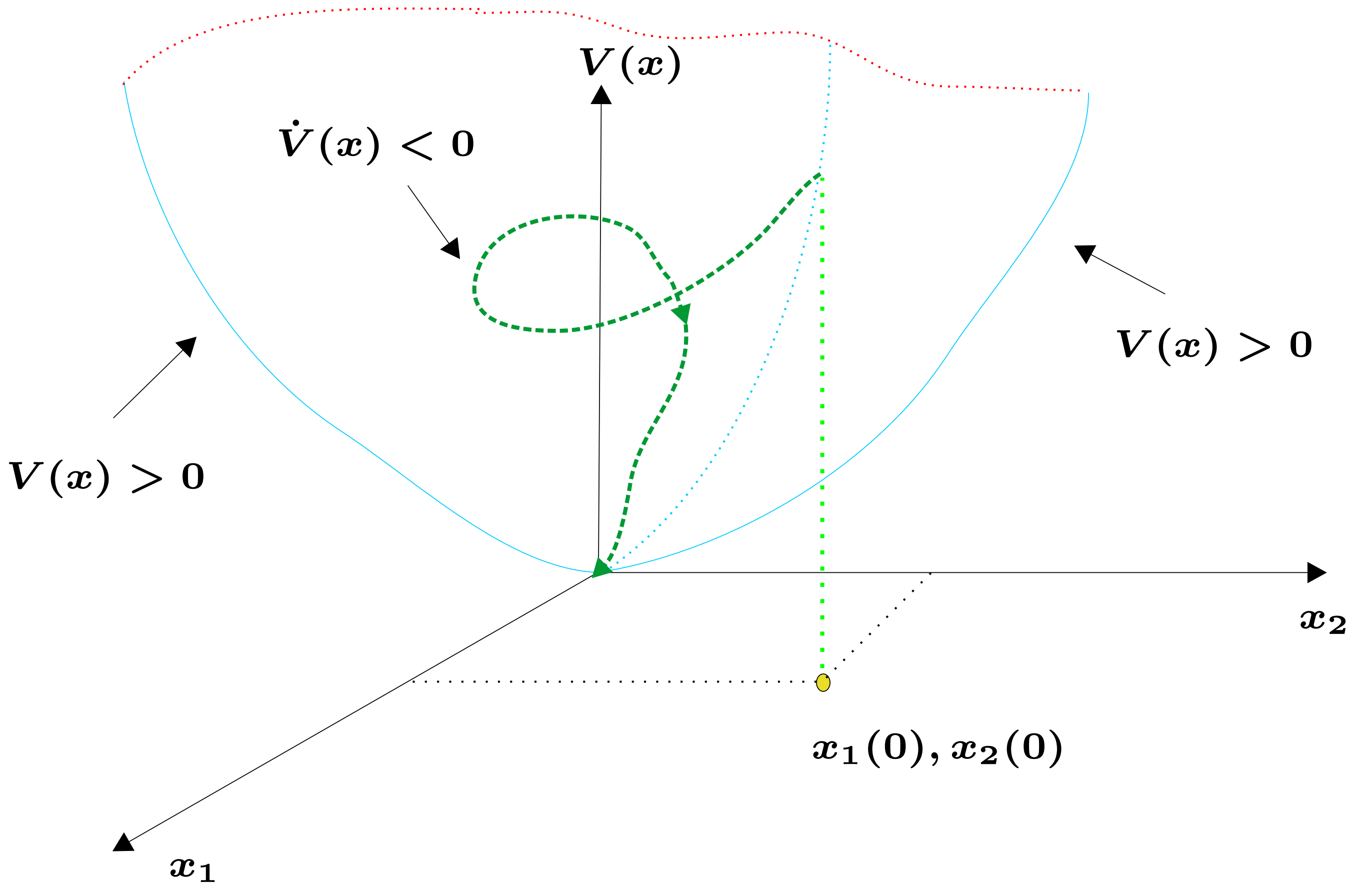
então é necessário para a estabilidade do sistema autônomo a tempo contínuo que

$$A^T P + PA \prec \mathbf{0}$$

Teorema de Lyapunov – Tempo Contínuo Considere o sistema autônomo $\dot{x}(t) = Ax(t)$, com A não-singular. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x = \mathbf{0}$ seja assintoticamente estável é: $\exists P = P^T \succ \mathbf{0}$, tal que

$$A^T P + PA \prec \mathbf{0}$$

Interpretação Geométrica do Teorema de Lyapunov



Analogia para o Caso Discreto

Considere o sistema linear autônomo a tempo discreto:

$$x(t+1) = Ax(t)$$

▷ A mesma noção de estabilidade assintótica é válida ...

Define-se a função de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \qquad \text{onde} \;\; P \succ \mathbf{0}$$

Tomando a diferença ao longo das trajetórias $x(t)$ obtém-se

$$\begin{aligned}
\Delta V(x(t)) &\triangleq V(x(t+1)) - V(x(t)) \\
&= x^T(t+1)Px(t+1) - x^T(t)Px(t) \\
&= (Ax(t))^T P\,(Ax(t)) + x^T Px(t) \\
&= x^T(t)\left(A^T PA - P\right)x(t)
\end{aligned}$$

Analogia para o Caso Discreto

▷ Como $V(x)$ foi escolhida sendo definida positiva, para se ter estabilidade assintótica é necessário que $\Delta V(x(t))$ seja definida negativa:

$$\Delta V(x(t)) < 0$$

então é necessário para a estabilidade do sistema autônomo a tempo discreto que

$$A^T P A - P \prec 0$$

Teorema de Lyapunov – Tempo Discreto $x(t+1) = Ax(t)$ é assintoticamente estável com estado de equilíbrio $x = 0$ sse $\exists P = P^T \succ 0$, tal que

$$A^T P A - P \prec 0$$

LMIs ? Mas o que é isso ?

▷ LMIs – do inglês, *Liner Matrix Inequalities* – Desigualdades Matriciais Lineares

Como se parece uma LMI? Forma canônica

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i F_i \succeq \mathbf{0}$$

sendo x um vetor de n variáveis de decisão e as matrizes $F_i = F_i^T$ são dadas (Simetria é necessária)

Exemplos simples de LMIs

- Restrições lineares típicas $(Ax \leq b)$

$$a_i^T x \preceq b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$F(x) \succeq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \text{diag}\{b_i - a_i^T x\}$$

- O caso escalar

$$y \geq x \quad \Rightarrow \quad F(x) = y - x \geq \mathbf{0}$$

- Estudo do sinal de uma matriz com elementos lineares

$$P \succ \mathbf{0}$$

sendo $P = P^T$

Estudo de Estabilidade Usando LMIs

O estudo de estabilidade usando LMI advém da desigualdade matricial de Lyapunov ...

$$\boldsymbol{F(x) = A^T P + PA \prec 0}$$

Para verificar se o sistema autônomo é assintoticamente estável, é necessário e suficiente verificar se as LMIs abaixo são factíveis

$$\begin{cases} A^T P + PA & \prec & \mathbf{0} \\ P & \succ & \mathbf{0} \end{cases}$$

com $P = P^T$

Estudo de Estabilidade Usando LMIs

Exemplo Estude a estabilidade do sistema descrito por

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -2 \end{bmatrix} x(t)$$

utilizando as LMIs

Solução utilizar programação... Neste exemplo

The MathWorks

LMILab

Estudo de Estabilidade Usando LMIs

Script para solucionar a desigualdade de Lyapunov: estabilidade.m

```
function [P]=estabilidade(A)
% Exemplo de estudo de estabilidade usando LMIs
% matriz "A" atribuída na entrada da função

setlmis([]);                   % início da montagem das LMIs

P=lmivar(1,[size(A,2) 1]);     % P=P' - variável matricial nxn

                               % Forma padrão no LMILab =>  LMI < 0

lmiterm([1 1 1 P],1,A,'s');    % LMI #1: PA+A'P<0
lmiterm([-2 1 1 P],1,1);       % LMI #2: P>0

lmis=getlmis;                  % "juntando" as LMIs #1 e 2

[tmin,xfeasp]=feasp(lmis);     % Teste de factibilidade da LMIs.
                               % Se tmin<0 a LMI é factível.
```

Estudo de Estabilidade Usando LMIs

```
if tmin < 0
   P=dec2mat(lmis,xfeasp,P);   % "Remonta" a variável matricial P
                               % a partir das variáveis de decisão
                               % armazenadas em "xfeasp"
   disp('Sistema estável');
   disp('P='), disp(P)
   disp('Autovalores de P')
   disp(eig(P))
   disp('Autovalores de A')
   disp(eig(A))
else
   disp('Sistema instável')
end
```

▷ Resultado esperado ? Verifique ...

▷ Utilizando a função `lyap` no MATLAB é possível verificar a estabilidade de um sistema autônomo também. Na prática o teste de estabilidade é o mesmo, porém `lyap` utiliza uma equação de Lyapunov: $\exists P = P^T \succ \mathbf{0}$ tal que

$$AP + PA^T = -\mathbf{I}$$

Exercício Computacional Escreva uma função para o problema de otimização abaixo e compare o resultado com a função `lyap` considerando o mesmo exemplo da página 25

$$\begin{cases} \min\limits_{P=P^T} & \text{Tr}\,\{P\} \\ & \\ \text{sujeito a} & P \succ \mathbf{0} \\ & AP + PA^T \prec -\mathbf{I} \end{cases}$$

Por que os resultados são iguais?

Controlabilidade e Observabilidade

Definição Um sistema dinâmico é denominado controlável se para qualquer estado inicial x_0 e para qualquer estado final x_f, existe uma entrada "u" que transfere x_0 para x_f em um tempo finito

$\rightsquigarrow$ Não há restrição quanto a trajetória do estado

Definição Um sistema dinâmico é denominado observável se para qualquer estado inicial desconhecido x_0, existe um tempo finito, $\tilde{t} > 0$, tal que o conhecimento da entrada u e a saída y em $[0, \tilde{t}\,]$ são suficientes para determinar unicamente o estado inicial x_0

Dois Problemas Básicos em Controle

$$\Sigma_d = \begin{cases} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0), \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1), \ldots \end{aligned}$$

de forma genérica para o instante t, obtém-se a resposta a uma seqüência de entrada não nula combinada com a resposta a condição inicial não nula

$$\begin{aligned} x(t) &= A^t x(0) + Bu(t-1) + ABu(t-2) + A^2 Bu(t-3) + \\ &\ldots + A^{t-2} Bu(1) + A^{t-1} Bu(0) \end{aligned}$$

1. Problema de Controle de Sistemas Determinar uma seqüência $u(\ell)$, $\ell = 1, 2, \ldots, t$ que transfere $x(0) \longrightarrow 0$, $t < \infty$

Definem-se

$$\mathcal{U}_t \triangleq \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ u(t-3) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_t \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{t-1}B \end{bmatrix}$$

Portanto a resposta $x(t)$ pode ser reescrita da forma

$$x(t) = A^t x(0) + \mathcal{P}_t\, \mathcal{U}_t$$

Dois Problemas Básicos em Controle

Como deseja-se estabilidade, $x(t)$ é nulo

$$\therefore \quad \mathcal{P}_t \mathcal{U}_t = -A^t x(0)$$

- Para algum $x(0)$ dado. Solução?
- Note que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, o posto de $\mathcal{P}_t$ não irá aumentar se $t > n$
- Existe uma seqüência de controle $\mathcal{U}_t$ que transfere o estado de $x(0)$ para a origem, **se posto$(\mathcal{P}_t) = n$, neste caso o sistema é dito ser controlável** e

$$\mathcal{U}_t = -\mathcal{P}_t' \left[\mathcal{P}_t \mathcal{P}_t'\right]^{-1} A^t x(0)$$

- Se $t = n$, então $\mathcal{U}_t = -\mathcal{P}_t^{-1} A^t x(0)$

2. Reconstruindo o Estado Inicial

Para $u(t)$ conhecido. Determinar o estado inicial *desconhecido* a partir do conhecimento da seqüência de saída $y(\ell)$ para $\ell = 0, 1, 2, \ldots, t$

Defini-se

$$\mathcal{Y}_t \triangleq \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix}$$

onde

$$
\begin{aligned}
y(0) &= Cx(0) + Du(0) \\
y(1) &= Cx(1) + Du(1) = C\left(Ax(0) + Bu(0)\right) + Du(1) \\
y(2) &= Cx(2) + Du(2) = C\left(A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)\right) + Du(2) \\
&\;\vdots \\
y(t) &= C\Big(A^t x(0) + A^{t-1}Bu(0) + A^{t-2}Bu(1) + \dots \\
&\quad + ABu(t-2) + Bu(t-1)\Big) + Du(t)
\end{aligned}
$$

Dois Problemas Básicos em Controle

$$\therefore \quad \mathcal{Y}_t = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^t \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_t} x(0) + \underbrace{\left\{ \begin{matrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ CA^{t-1}B & CA^{t-2}B & CA^{t-3}B & \cdots & D \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(t) \end{bmatrix}}_{\Gamma}$$

- Como Γ é precisamente determinado, obtém-se $\widetilde{\mathcal{Y}}_t = \mathcal{Y}_t - \Gamma$

$$\therefore \quad \widetilde{\mathcal{Y}}_t = \mathcal{Q}_t \, x(0)$$

- Se cada vetor $y(i)$ tem r componentes, a matriz $\mathcal{Q}_t$ tem ordem $rt \times n$. Existe solução **se posto($\mathcal{Q}_t$) $= n$, neste caso o sistema é dito ser observável** (detalhe, o posto de $\mathcal{Q}_t$ não aumenta para $t > n - 1$!)

$$\therefore \quad x(0|t) = \left[\mathcal{Q}_t' \mathcal{Q}_t\right]^{-1} \mathcal{Q}_t' \, \widetilde{\mathcal{Y}}_t$$

Controlabilidade

Teorema As afirmações a seguir são equivalentes:

1. O par (A, B) é controlável $\quad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m})$

2. A matriz L_c de ordem $n \times n$ da forma

$$L_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau} d\tau \quad \left(= \sum_{\tau=0}^{t} A^\tau B B^T \left(A^\tau\right)^T \right)$$

é não singular $\forall t > 0$. Particularmente se A é estável, então $L_c \succ 0$ tal que

$$A L_c + L_c A^T = -B B^T \qquad \text{(para sistemas contínuos)}$$

$$A L_c A^T - L_c = -B B^T \qquad \text{(para sistemas discretos)}$$

Neste caso, L_c é denominado **Gramiano de Controlabilidade**

3. A matriz de controlabilidade

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times nm}, \qquad \text{tem posto } n$$

Observabilidade

Teorema As afirmações a seguir são equivalentes:

1. O par (A, C) é observável $(A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{r\times n})$

2. A matriz L_o de ordem $n \times n$ da forma

$$L_o(t) = \int_0^t e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \quad \left(= \sum_{\tau=0}^{t} (A^\tau)^T C^T C A^\tau \right)$$

   é não singular $\forall t > 0$. Particularmente se A é estável, então $L_o \succ 0$ tal que

$$A^T L_o + L_o A = -C^T C \quad \text{(para sistemas contínuos)}$$

$$A^T L_o A - L_o = -C^T C \quad \text{(para sistemas discretos)}$$

   Neste caso, L_o é denominado **Gramiano de Observabilidade**

3. A matriz de observabilidade

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} C & CA & \cdots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{nr\times n}, \qquad \text{tem posto } n$$

Controlabilidade, Observabilidade e MATLAB

▷ MATLAB: `rank(ctrb(C))` – posto da matriz de controlabilidade

▷ MATLAB: `rank(obsv(O))` – posto da matriz de observabilidade

▷ MATLAB: `gram, dgram` – Gramiano de Controlabiliade ou Observabilidade (variação da Lyapunov)

LMIs ? Basta reescrever o problema de otimização obtido para análise de estabilidade via Lyapunov, de forma apropriada para o sistema $\{A, B, C\}$ e os gramianos de controlabilidade e observabilidade

▷ Nos dois últimos casos exigisse estabilidade para o sistema...