Modelagem Matemática de Sistemas

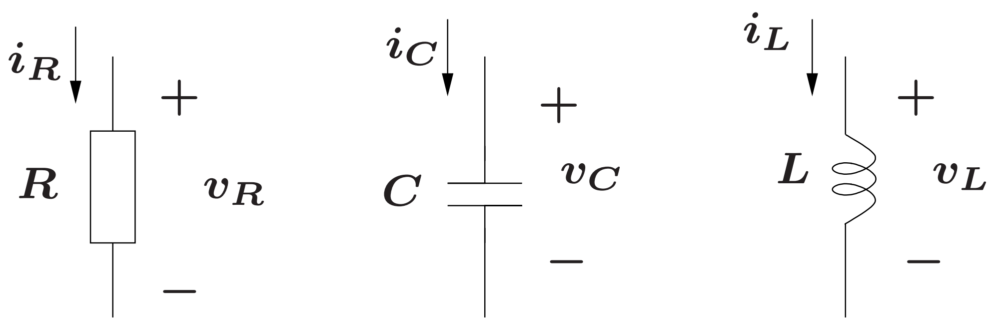
1. + de modelagem com Circuitos Elétricos

2. Sistemática para Obtenção de Equações de Estado para Circuitos

   2.1 Teoria de Grafos

Relembrando - Convenção de receptor

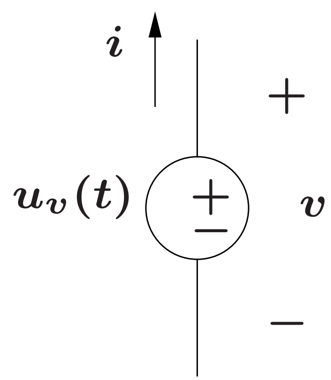
▷ Resistor, Capacitor e Indutor lineares:

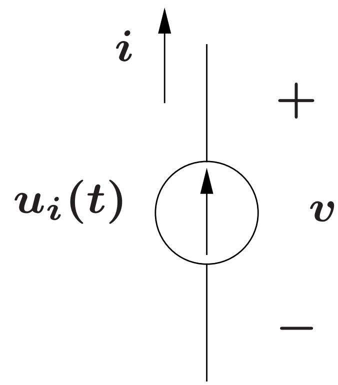


$$v_R = R i_R \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt} \qquad v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Relembrando - Convenção de gerador

Fontes de Tensão e de Corrente:





$v = u_v(t)$ $\qquad$ $i = u_i(t)$

Circuito elétrico

Convenção – em geral, a convenção de receptor é utilizada para os bipolos passivos e a de gerador para as fontes

Nó: Um ponto de ligação entre 2 ou mais bipolos

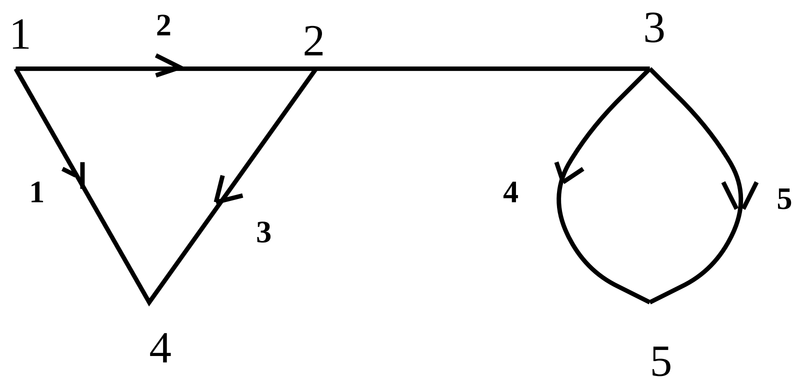
- Lei das Correntes ou $1^{\underline{a}}$ Lei de Kirchhoff: a soma algébrica das correntes que saem de um nó é nula

Laço: Qualquer percurso fechado formado por bipolos que não passe duas vezes pelo mesmo nó

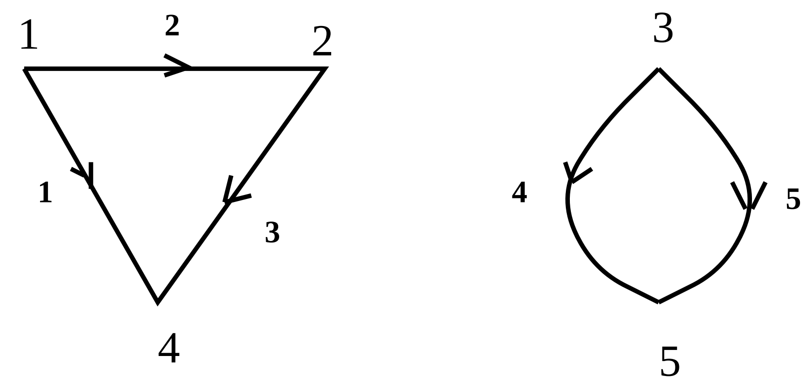
- Lei das Tensões ou $2^{\underline{a}}$ Lei de Kirchhoff: a soma algébrica das tensões nos bipolos pertencentes a um laço é nula

Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

Grafo Conexo: Grafo no qual existe sempre um caminho constituído por ramos entre dois nós quaisquer



Grafo Conexo



Grafo Não Conexo

Subgrafo: conjunto qualquer de ramos e nós de um grafo

Corte: conjuntos de ramos que, eliminados, deixam dois subgrafos conexos

Teoria de Grafos

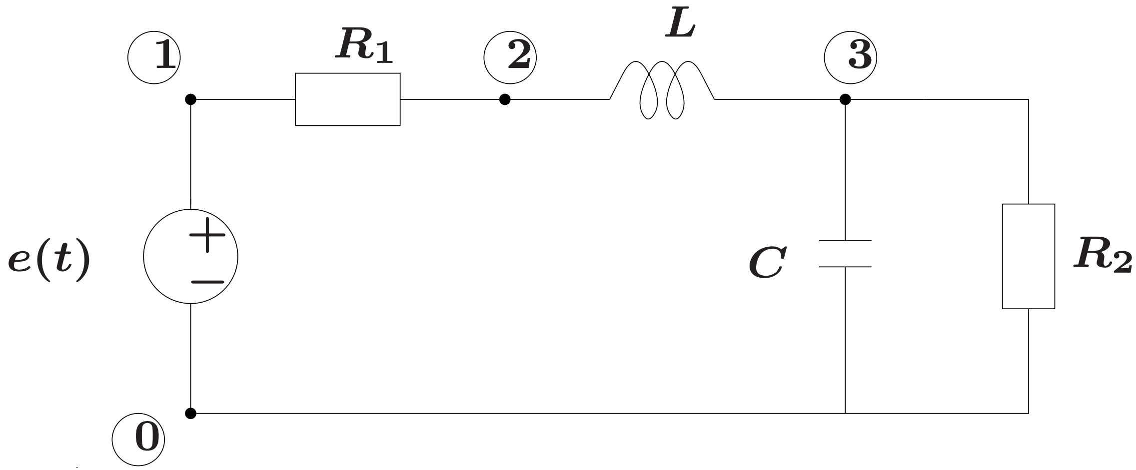
Laço: caminho fechado formado por ramos e não passando mais de uma vez por nenhum nó

Árvore: subgrafo conexo contendo todos os nós do grafo e nenhum laço. Escolhida uma árvore para um grafo, os demais ramos (não pertencentes à árvore) são chamados de ramos de ligação

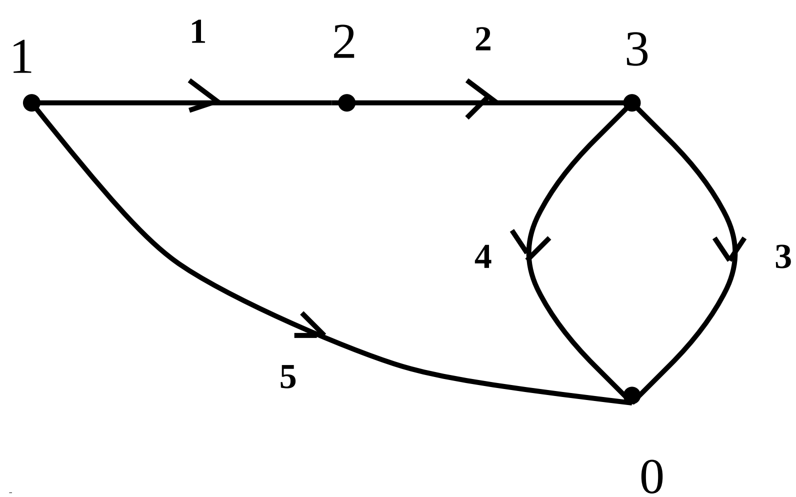
Corte Fundamental: constituído por um único ramo da árvore e ramos de ligação

Laço Fundamental: constituído por um único ramo de ligação e ramos da árvore

Exemplo

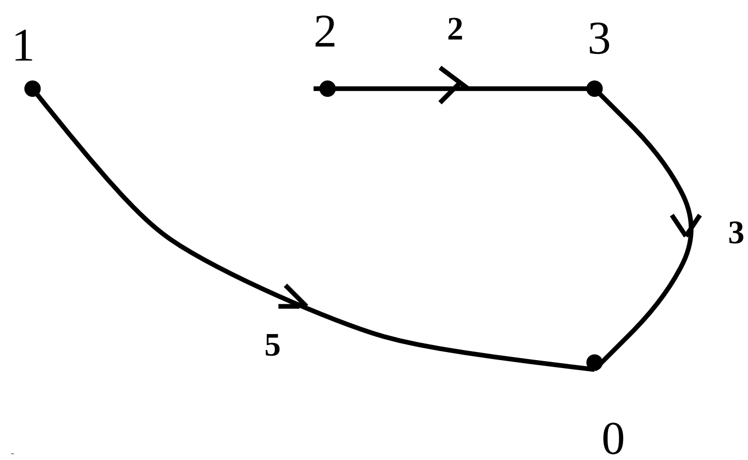


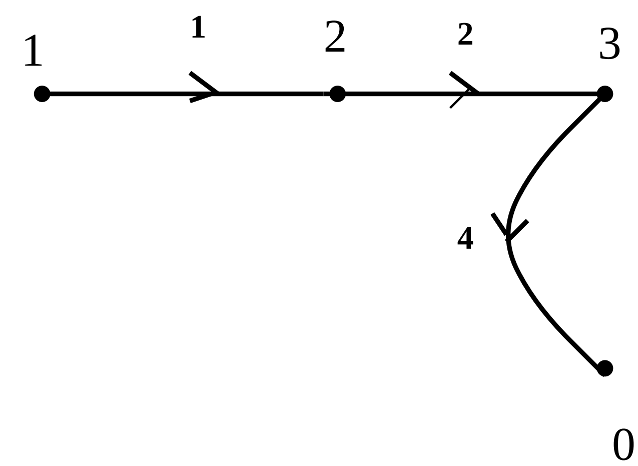
Grafo:



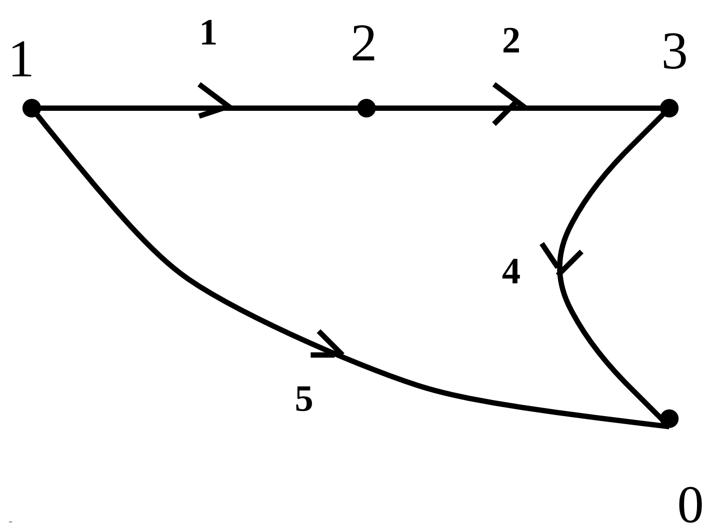
Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

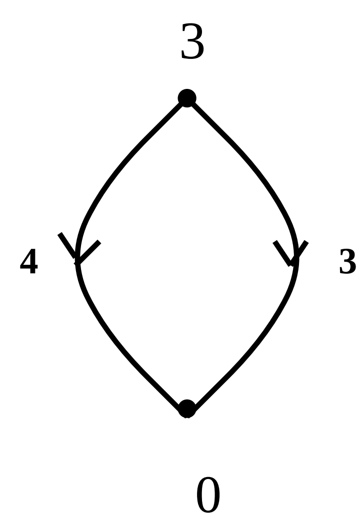
Árvores:





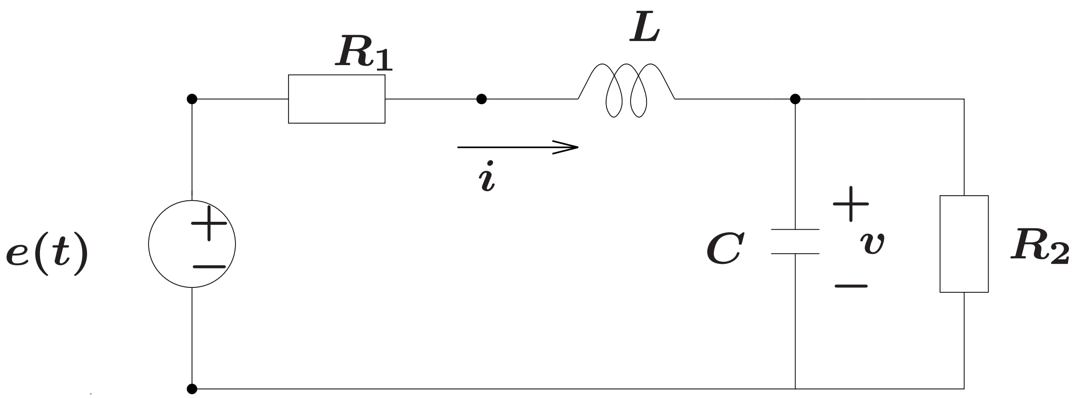
Laços:

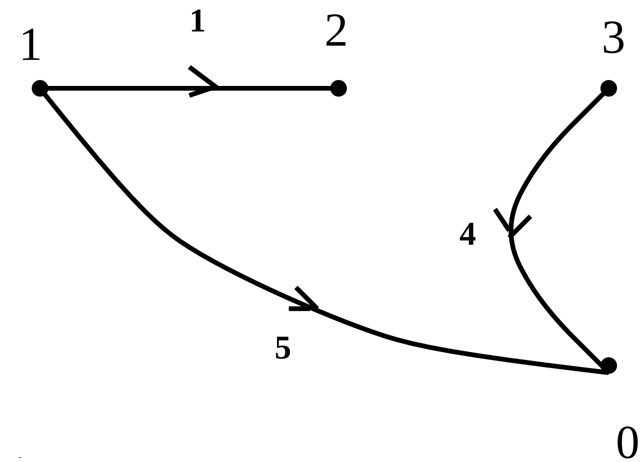




Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

Árvore Própria: é uma árvore com todos os capacitores e fontes de tensão do circuito, sem indutores e sem fontes de corrente





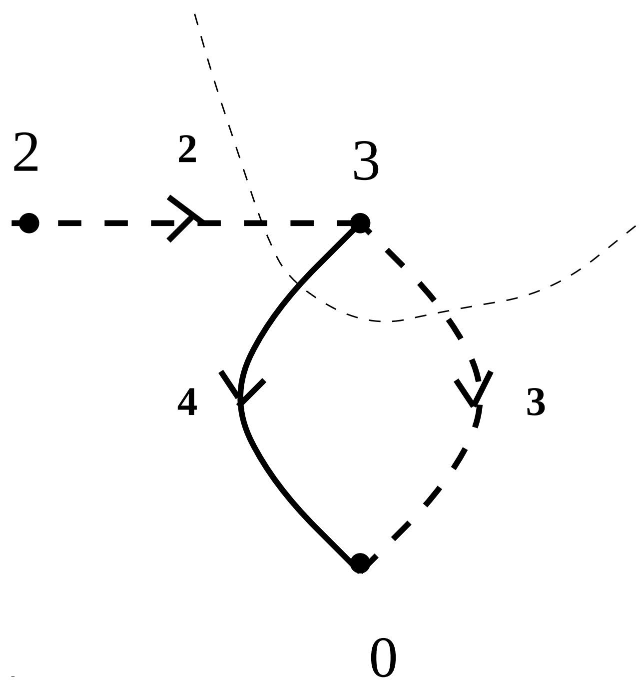
▷ Cada capacitor define um corte fundamental, constituído pelo capacitor e por ramos de ligação

▷ Cada indutor define um laço fundamental, constituído pelo indutor e ramos da árvore

Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

▶ Partindo de cada capacitor e do corte fundamental apropriado (que não inclui fontes de tensão – pois a idéia é escrever equação de correntes), obtém-se

Corte Fundamental:

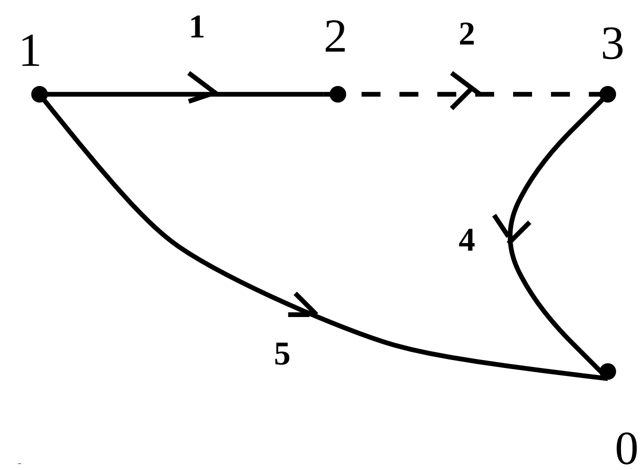


$$\Longrightarrow \quad i = C\dot{v} + \frac{v}{R_2}$$

Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

▶ Partindo de cada indutor e do laço fundamental apropriado (que não inclui fontes de corrente – pois a idéia é escrever equação de tensões), obtém-se:

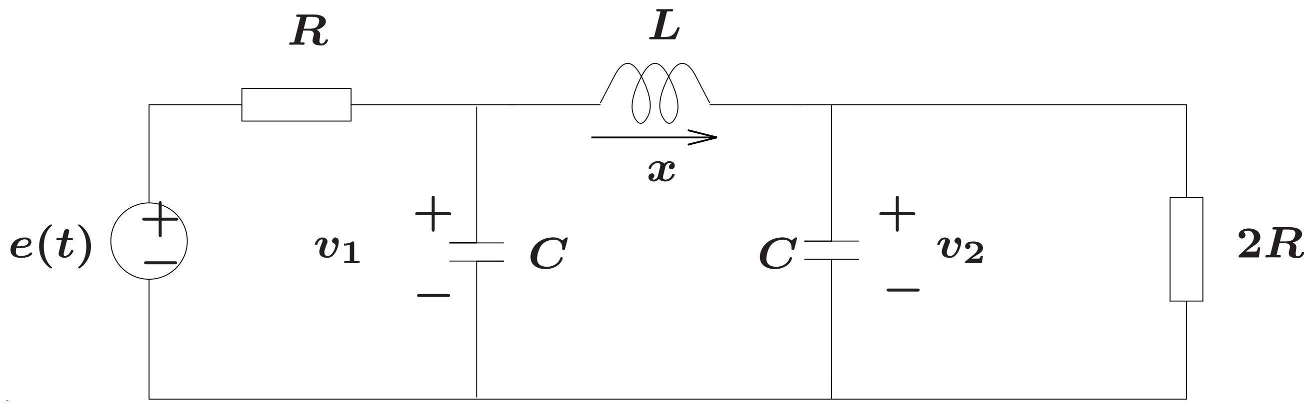
Laço Fundamental:



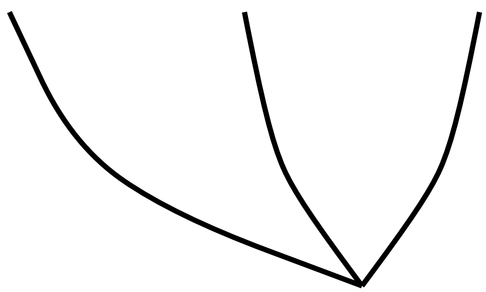
$$\Longrightarrow \quad e(t) = R_1 i + L\frac{di}{dt} + v$$

▶ **As equações de estado são obtidas a partir das equações de correntes para os cortes fundamentais e das equações de tensões para os laços fundamentais**

Exemplo

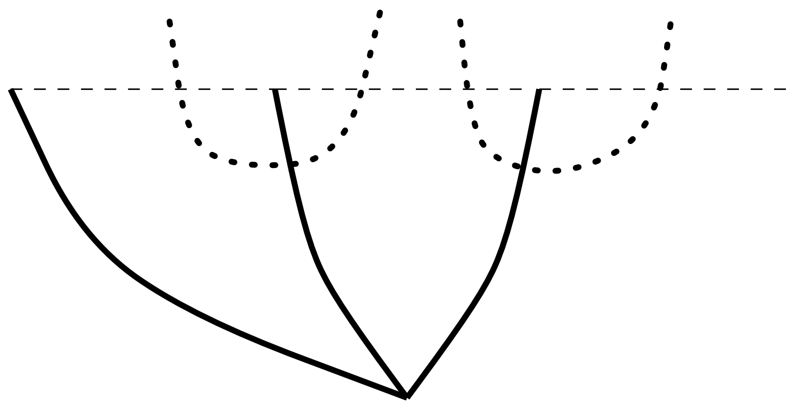


Árvore Própria:



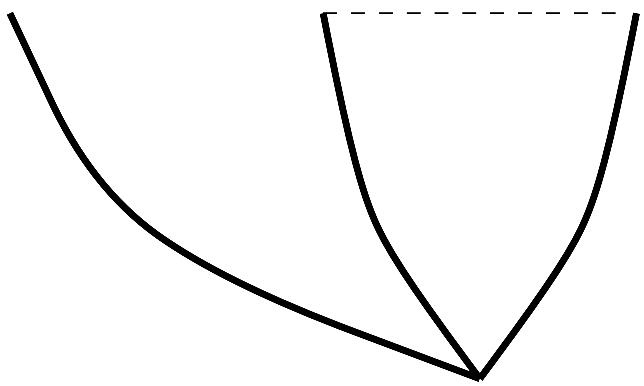
Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

Cortes Fundamentais:



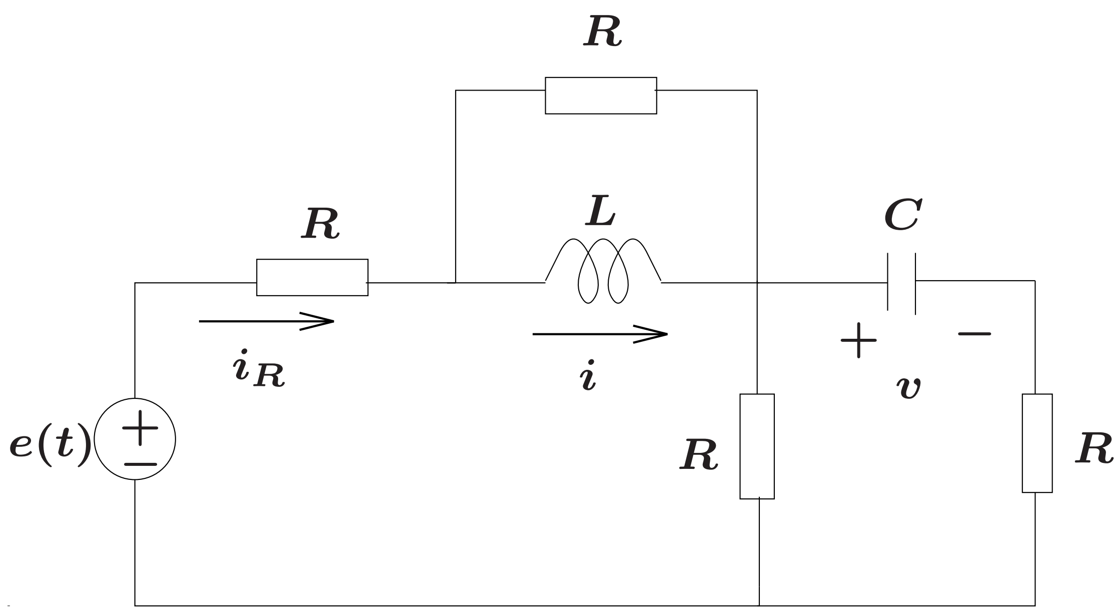
$$\Longrightarrow \qquad \frac{e(t)-v_1}{R} = C\frac{dv_1}{dt} + x\ , \qquad x = C\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{2R}$$

Laço Fundamental:

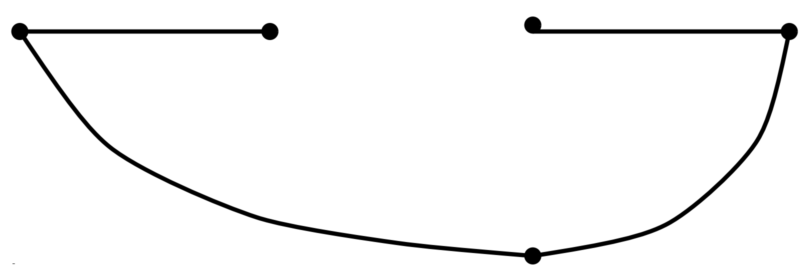


$\Longrightarrow \qquad v_1 = L\dot{x} + v_2$ (não tem fonte de tensão...)

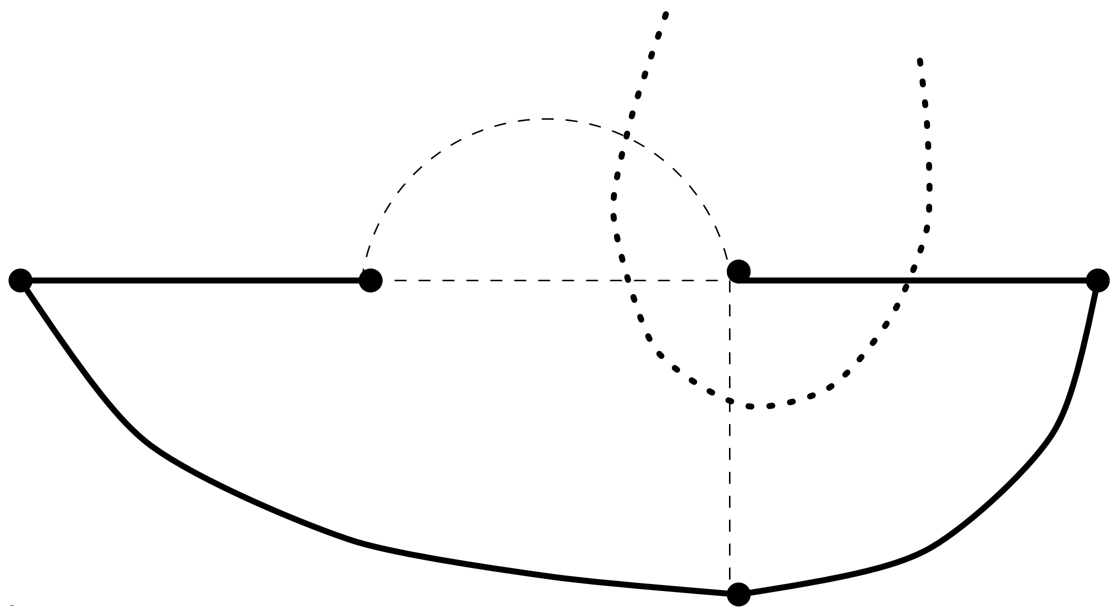
Exemplo



Árvore Própria:



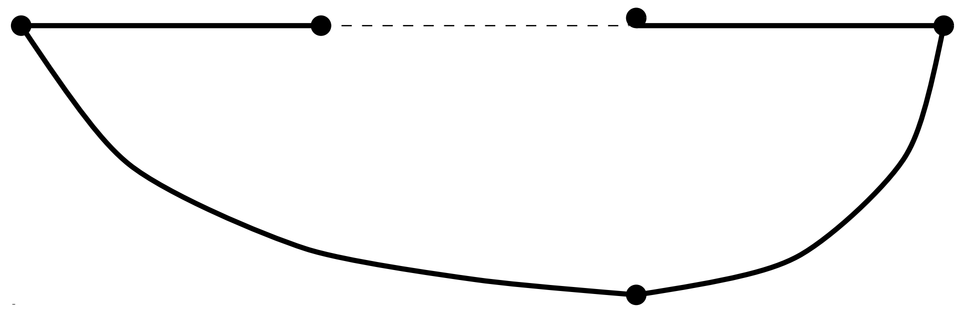
Corte Fundamental:



$$i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} = \underbrace{C\dot{v}}_{\text{corrente } i_{RC} \text{ em RC}} + \underbrace{\frac{v + RC\dot{v}}{R}}_{\text{corrente só em R: } \frac{v}{R} + \frac{R i_{RC}}{R}}$$

Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

Laço Fundamental:



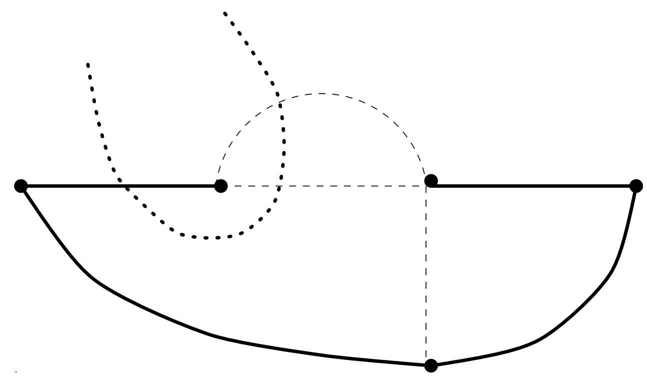
$$e(t) = Ri_R + L\frac{di}{dt} + v + RC\dot{v}$$

As equações obtidas dependem da corrente i_R (que não é variável de estado). Pode-se usar a mesma metodologia de cortes e laços, porém agora escolhendo uma Equação Auxiliar adequada para representar, no caso, i_R

Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

Equação Auxiliar: Equação de correntes para o corte fundamental definido pelo resistor (se este estiver na árvore própria) ou equação das tensões para o laço fundamental definido pelo resistor (se for um ramo de ligação). No caso será um corte fundamental

Corte Fundamental:



$$\Rightarrow \; i_R = \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i$$

Equações de Estado:

$$\begin{cases} RC\dot{v} + v + 2L\dfrac{di}{dt} + Ri = e(t) \\ \\ 2RC\dot{v} + v - Ri - L\dfrac{di}{dt} = 0 \end{cases}$$

Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

Passando para a forma padrão (isolando os termos com derivada – $\dot{v}$ e $\frac{di}{dt}$)

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{3}{5RC}v + \dfrac{1}{5C}i + \dfrac{1}{5RC}e(t) \\ \\ \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{1}{5L}v - \dfrac{3R}{5L}i + \dfrac{2}{5L}e(t) \end{cases}$$

Definindo-se o vetor de estados: $x \triangleq \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$ e a saída $y(t) \triangleq v(t)$...

Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{3}{5RC} & \dfrac{1}{5C} \\ \\ -\dfrac{1}{5L} & -\dfrac{3R}{5L} \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{5RC} \\ \\ \dfrac{2}{5L} \end{bmatrix}}_{B} e(t) \\ \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{cases}$$

Faça $R = L = C = 1$ (note que fisicamente estes valores não fazem sentido!)

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.2 \\ -0.2 & -0.6 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Função de Transferência

Descrição por Função de Transferência

▷ $T(s) = C\,(s\mathbf{I} - A)^{-1}\,B + D$. Calculando $(s\mathbf{I} - A)^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} s+0.6 & -0.2 \\ 0.2 & s+0.6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+1.2s+0.4}\begin{bmatrix} s+0.6 & 0.2 \\ -0.2 & s+0.6 \end{bmatrix}$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s+0.6}{s^2+1.2s+0.4} & \dfrac{0.2}{s^2+1.2s+0.4} \\[2ex] \dfrac{-0.2}{s^2+1.2s+0.4} & \dfrac{s+0.6}{s^2+1.2s+0.4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Função de Transferência

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{0.2s + 0.2}{s^2 + 1.2s + 0.4} \\ \\ \dfrac{0.4s + 0.2}{s^2 + 1.2s + 0.4} \end{bmatrix} = \frac{0.2s + 0.2}{s^2 + 1.2s + 0.4} \triangleq \frac{N(s)}{D(s)}$$

▷ Veja que:

$$\frac{0.2s + 0.2}{s^2 + 1.2s + 0.4}$$ é a FT de $e(t)$ para a saída igual a $v(t)$

$$\frac{0.4s + 0.2}{s^2 + 1.2s + 0.4}$$ é a FT de $e(t)$ para a saída igual a $i(t)$

MATLAB

```
A=[-0.6 0.2; -0.2 -0.6]; B= [0.2;0.4]; C=[1 0];
>> sys=ss(A,B,C,0)
a =
          x1    x2
   x1   -0.6   0.2
   x2   -0.2  -0.6
b =
         u1
   x1   0.2
   x2   0.4
c =
        x1  x2
   y1    1   0
d =
        u1
   y1    0
```

MATLAB

```
>> FT=tf(sys)
Transfer function:
   0.2 s + 0.2
-----------------
s^2 + 1.2 s + 0.4
```

- Suponha que $v(t)$ e $i(t)$ sejam medidos... Apenas C se modifica

```
C=eye(2);
>> sys=ss(A,B,C,[0; 0])
a =
         x1    x2
   x1  -0.6   0.2
   x2  -0.2  -0.6
b =
        u1
   x1  0.2
   x2  0.4
```

MATLAB

```
c =
          x1   x2
    y1     1    0
    y2     0    1
d =
          u1
    y1     0
    y2     0

>> FT=tf(sys)
Transfer function from input to output...
            0.2 s + 0.2
 #1:   -----------------
        s^2 + 1.2 s + 0.4

            0.4 s + 0.2
 #2:   -----------------
        s^2 + 1.2 s + 0.4
```