Álgebra Linear – Teoria de Matrizes

1. Sistemas Lineares
   1.1. Coordenadas em espaços lineares: independência linear, base, dimensão, singularidade, combinação linear
   1.2. Espaço imagem (colunas) - Espaço linhas. Posto
   1.3. Espaço nulo (núcleo). Nulidade
2. Autovalores e autovetores
3. Traço de matriz
4. Forma quadrática e sinais de matrizes
5. Valores singulares
6. Norma vetorial
7. Norma matricial

Sistemas Lineares

▷ Considere o conjunto de equações algébricas lineares

$$\left.\begin{array}{ccc} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \quad y = Ax$$

⇝ $x_1, \ldots, x_n$ denotam **entradas** do sistema linear

⇝ $y_1, \ldots, y_m$ denotam **saídas** do sistema linear

⇝ a_{ij} denotam **parâmetros** que caracterizam o **mapeamento** entrada-saída

⇝ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$

Subespaços Fundamentais

Questões fundamentais

⇝ Caracterizar os conjuntos de saídas $y_1, \ldots, y_m$ que podem ser obtidos dadas as entradas $x_1, \ldots, x_n$ (**controlabilidade** da saída)

⇝ Dadas as saídas $y_1, \ldots, y_m$ identificar, se possível, o conjunto de entradas $x_1, \ldots, x_n$ que as geram (**observabilidade** da entrada)

Em outras palavras... Como caracterizar uma solução para $Ax = y$? Veja que tem-se um conjunto com m equações e n incógnitas

▷ Pode-se definir subespaços fundamentais de tal forma a obter condições de existência e uma forma geral de soluções para $Ax = y$

Coordenadas em Espaços Lineares

Nota Antes de responder a última questão, introduze-se conceitos sobre coordenadas em espaços lineares...

Dependência Linear Um conjunto de vetores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$, é **linearmente dependente** se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

Caso contrário, o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ é **linearmente independente – LI**

Veja que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = X\alpha$

sendo $X \triangleq [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $\alpha \triangleq [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_k]^T \in \mathbb{R}^k$

Coordenadas em Espaços Lineares

Proposição Qualquer conjunto de n vetores **LI** qualifica uma **base** em um espaço linear $n-$dimensional (ie um espaço de **dimensão n**)

Lema Considere $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O sistema de equações

$$Qx = \mathbf{0}, \qquad x \triangleq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$$

possui uma solução **não-nula** ($x \neq \mathbf{0}$) se e somente se Q é **singular**

Teorema Considere $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$. Então Q é **não-singular** se e somente se o conjunto de vetores $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ é **LI** (em outras palavras, $\exists Q^{-1}$)

Coordenadas em Espaços Lineares

Representação de vetores

Considere um conjunto de vetores $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, base no $\mathbb{R}^n$. Então todo vetor $y \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como **combinação linear**:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i = Q\alpha$$

Como Q é não-singular:

$$\alpha = Q^{-1}y \quad \textbf{representação} \text{ única de } y \text{ na base } \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$

Para outra base qualquer P, $\quad y = P\zeta, \quad \zeta = P^{-1}y = P^{-1}Q\alpha$!!!

Subespaços Fundamentais

Definição O **espaço colunas** de $\boldsymbol{A}$ é o espaço gerado pelas colunas de $\boldsymbol{A}$, e é denominado espaço *imagem* de $\boldsymbol{A}$ — $\Im(\boldsymbol{A})$. Por outro lado, o **espaço linhas** de $\boldsymbol{A}$ é o espaço gerado pelas linhas de $\boldsymbol{A}$ — $\Im(\boldsymbol{A}^T)$

Exemplo $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ está no espaço imagem de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$?

Em outras palavras, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, para algum $\boldsymbol{x}$? Sim, pois as colunas de $\boldsymbol{A}$ geram todo o espaço 2-dimensional

- **posto de colunas** de $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a dimensão de $\Im(\boldsymbol{A})$, ie é equivalente ao número de colunas LI de $\boldsymbol{A}$

- **posto de linhas** de $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a dimensão de $\Im(\boldsymbol{A}^T)$

- $\dim\Im(\boldsymbol{A}) = \dim\Im(\boldsymbol{A}^T) = \boldsymbol{r} = \text{posto}(\boldsymbol{A}) \quad \therefore \quad \text{posto}(\boldsymbol{A}) \leq \min\{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\}$

Subespaços Fundamentais

Definição O **espaço nulo à direita (ou núcleo)** de A é o espaço gerado por todos os vetores x satisfazendo $Ax = 0$ — $\mathcal{N}(A)$. Por outro lado, o **espaço nulo à esquerda** de A é o espaço gerado por todos os vetores y satisfazendo $y^T A = 0$ — $\mathcal{N}(A^T)$

Exemplo $x = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}^T$ está no espaço $\mathcal{N}(A)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad ?$$

Em outras palavras, $Ax = 0$? Como

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 100 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

portanto, a resposta é negativa

Subespaços Fundamentais

- Considere A de ordem $m \times n$

Dimensão dos quatro subespaços fundamentais: $\Im(A)$, $\Im(A^T)$, $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{N}(A^T)$?

$$r \triangleq \text{posto}(A) = \dim \Im(A)$$
$$n \triangleq \text{colunas de } A$$

$$\therefore \quad r + \dim \mathcal{N}(A) = n \quad \longrightarrow \quad \dim \mathcal{N}(A) = n - r \quad \text{(Nulidade)}$$

$$r \triangleq \text{posto}(A^T) = \dim \Im(A^T)$$
$$m \triangleq \text{linhas de } A$$

$$\therefore \quad r + \dim \mathcal{N}(A^T) = m \quad \longrightarrow \quad \dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$$

Subespaços Fundamentais

- O espaço n-dimensional de entrada $\mathcal{X} = \Im(A^T) \oplus \mathcal{N}(A)$
- O espaço m-dimensional de saída $\mathcal{Y} = \Im(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)$

MATLAB

`orth(A)` – base ortonormal para $\Im(A)$

`null(A)` – base ortonormal para $\mathcal{N}(A)$

`rank(A)` – posto de A

Exemplo Posto de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$?

a_1 e a_2 são LI. $a_3 = a_1 + a_2$. $a_4 = 2a_2$. A tem duas colunas LI $\therefore$ posto$(A) = 2$

Subespaços Fundamentais

Teorema Dado $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, existe uma solução $\boldsymbol{x}$ para $\boldsymbol{Ax = y}$, para qualquer $\boldsymbol{y}$, sse posto$(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}$ (posto completo de linhas)

Teorema Dado $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $\exists \boldsymbol{A}^{-1}$, então $\boldsymbol{Ax = y}$ tem uma única solução para todo $\boldsymbol{y}$, ie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$. Em particular, a única solução para $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ é $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

Autovalores e Autovetores

Definição Um escalar λ é denominado um **autovalor** de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se $\exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq \mathbf{0}$, satisfazendo

$$Ax = \lambda x$$

Tal x é denominado um **autovetor** de A associado ao autovalor λ

Como calcular autovalor ? Basta escrever $Ax = \lambda x = \lambda \mathbf{I} x$ da forma

$$(A - \lambda \mathbf{I})\, x = \mathbf{0}$$

▷ Se $(A - \lambda \mathbf{I})$ é não singular, então a **única** solução é $x = \mathbf{0}$!!

▷ Porém $x \neq \mathbf{0}$, então $(A - \lambda \mathbf{I})$ deve ser necessariamente singular, ou de forma equivalente, $\det(A - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ ...

▷ Toda raíz de $p(\lambda) = \det\,(A - \lambda \mathbf{I})$ é uma autovalor de A

Teoria de Matrizes

Traço Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o traço de A, denotado por Tr$\{A\}$ ou Traço$\{A\}$, é definido como sendo:

$$\text{Tr}\,\{A\} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ie, é a soma dos elementos da diagonal principal

Propriedades

1. $\text{Tr}\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
2. $\text{Tr}\{A + B\} = \text{Tr}\{B + A\} = \text{Tr}\{A\} + \text{Tr}\{B\}$
3. $\text{Tr}\{AB\} = \text{Tr}\{B^T A^T\} = \text{Tr}\{BA\} = \text{Tr}\{A^T B^T\}$ (se existirem multiplicações)
4. $\text{Tr}\{A^T A\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$

Forma quadrática e Sinais de Matrizes

Simetria $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ser simétrica se $P = P^T$

Nota Todos os autovalores de uma matriz simétrica são **reais**

Nota Toda matriz simétrica pode ser diagonalizada, mesmo para autovalores repetidos (MATLAB: `jordan`)

Forma Quadrática É uma classe de **funções escalares** na forma

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad P = P^T$$

Forma quadrática e Sinais de Matrizes

Função escalar definida positiva Dado $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$, se a função escalar $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, então $\boldsymbol{P}$ é dita ser **definida positiva**, sendo denotado por $\boldsymbol{P} \succ \mathbf{0}$

Função escalar definida negativa Dado $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$, se a função escalar $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} < \mathbf{0}$, para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, então $\boldsymbol{P}$ é dita ser **definida negativa**, sendo denotado por $\boldsymbol{P} \prec \mathbf{0}$

Função escalar semidefinida positiva (negativa) Dado $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$, se a função escalar $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$), para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, então $\boldsymbol{P}$ é dita ser **semidefinida positiva (semidefinida negativa)**, sendo denotado por $\boldsymbol{P} \succeq \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{P} \preceq \mathbf{0}$)

Nota Se $\boldsymbol{P}$ é semidefinída, então $\exists \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

Forma quadrática e Sinais de Matrizes

Teorema $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definida positiva (semidefinida positiva) sse $\lambda(P) > 0$ $(\lambda(P) \geq 0)$

Teorema $P = P^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definida negativa (semidefinida negativa) sse $\lambda(P) < 0$ $(\lambda(P) \leq 0)$

Exercício Moste que $V(x)$ é definida positiva

$$V(x) = x^T P x = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

Fato Dado $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ então

1. $H^T H$ ou HH^T é simétrica
2. $H^T H \succeq 0$ ou $HH^T \succeq 0$
3. $H^T H \succ 0$ se posto$(H) = n$ (posto completo de colunas)
4. $HH^T \succ 0$ se posto$(H) = m$ (posto completo de linhas)

Valores Singulares

- $\triangleright$ Dado $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$
- $\triangleright$ Define-se $\boldsymbol{M} \triangleq \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} \quad \therefore \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^T \succeq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$
- $\triangleright$ Portanto todos os autovalores de $\boldsymbol{M}$ são reais e não negativos
- $\triangleright$ $\boldsymbol{r}$ indica o número de autovalores positivos de $\boldsymbol{M}$
- $\rightsquigarrow$ Então os autovalores de $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}$ podem ser ordenados da forma

$$\boldsymbol{\lambda_1^2} \geq \boldsymbol{\lambda_2^2} \geq \cdots \geq \boldsymbol{\lambda_r} > \boldsymbol{0} = \boldsymbol{\lambda_{r+1}} = \cdots = \boldsymbol{\lambda_n}$$

Denote por $\overline{\boldsymbol{n}} = \mathbf{min}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$. Então o conjunto

$$\boldsymbol{\lambda_1} \geq \boldsymbol{\lambda_2} \geq \cdots \boldsymbol{\lambda_r} > \boldsymbol{0} = \boldsymbol{\lambda_{r+1}} \geq \boldsymbol{\lambda_{\overline{n}}}$$

é denominado de **valores singulares** de $\boldsymbol{H}$. Em outras palavras, os valores singulares de $\boldsymbol{H}$ (denotado por $\boldsymbol{\sigma}$) são obtidos de:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\lambda(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})}, \qquad \textbf{MATLAB: } \texttt{sigma}}$$

Produto Interno

A função $\langle x, y \rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é um **produto interno** se satisfaz os seguintes axiomas

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
2. $\langle \alpha(x + y), z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Representação usual para vetores do $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Vetores ortogonais – $x \perp y$

$$\langle x, y \rangle = x^T y = 0$$

Norma Vetorial

A função $\|x\| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma **norma** se satisfaz os seguintes axiomas

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Normas usuais para vetores no $\mathbb{R}^n$

- **Norma-r** $\quad \|x\|_r \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad 1 \leq r < \infty$
- **Norma-∞** $\quad \|x\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Norma Vetorial

- **Norma-2 ou Norma Euclidiana** $\|x\|_2 \triangleq \sqrt{x^T x} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Nota Interpretação gráfica ? A norma-2 é o comprimento do vetor a partir da origem

MATLAB

`norm(x,1)` – norma-1

`norm(x,2)` ou `norm(x)` – norma-2

`norm(x,inf)` – norma-∞

Norma Matricial

▷ O conceito de norma vetorial pode ser "estendido" para matrizes, no sentido de se poder "mensurar" matrizes. Considere $\mathcal{X}$ o espaço de entradas $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{Y}$ o espaço de saídas $\mathbb{R}^m$

Definição Considere $A : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$. O operador é **limitado** se

$$\exists c < \infty, \quad c \in \mathbb{R} \quad : \quad \|Ax\| < c\|x\|, \ \forall x \in \mathcal{X}$$

Definição Considere $A : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$. A **norma de A é a menor constante c**

Portanto a **norma de um operador linear** pode ser caracterizada por

$$\|A\|_r \triangleq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r} = \sup_{\|x\|_r = 1} \|Ax\|_r$$

⇝ $\|A\|_r$ é denominada norma matricial induzida por uma norma vetorial r

Norma Matricial

Para diferentes $\|x\|$, tem-se diferentes $\|A\|$

1. $\|A\|_1 = \max\limits_j \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right)$ $\Leftrightarrow$ A maior soma absoluta das colunas

2. $\|A\|_2 = \left(\lambda_{max}(A^T A)\right)^{\frac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow$ Valor singular máximo de A

3. $\|A\|_\infty = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right)$ $\Leftrightarrow$ A maior soma absoluta das linhas

Norma Matricial

Exemplo Normas 1, 2 e ∞ de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$?

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathbf{1}} = \mathbf{max}\,\{\mathbf{3} + |-\mathbf{1}|;\ \mathbf{2} + \mathbf{0}\} = \mathbf{4}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathbf{2}} = \mathbf{3.7}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\infty} = \mathbf{max}\,\{\mathbf{3} + \mathbf{2};\ |-\mathbf{1}| + \mathbf{0}\} = \mathbf{5}$$

Norma Matricial

⇝ Interpretação gráfica ? Considere por exemplo a norma $\|A\|_1$. Note que $y = Ax$ e

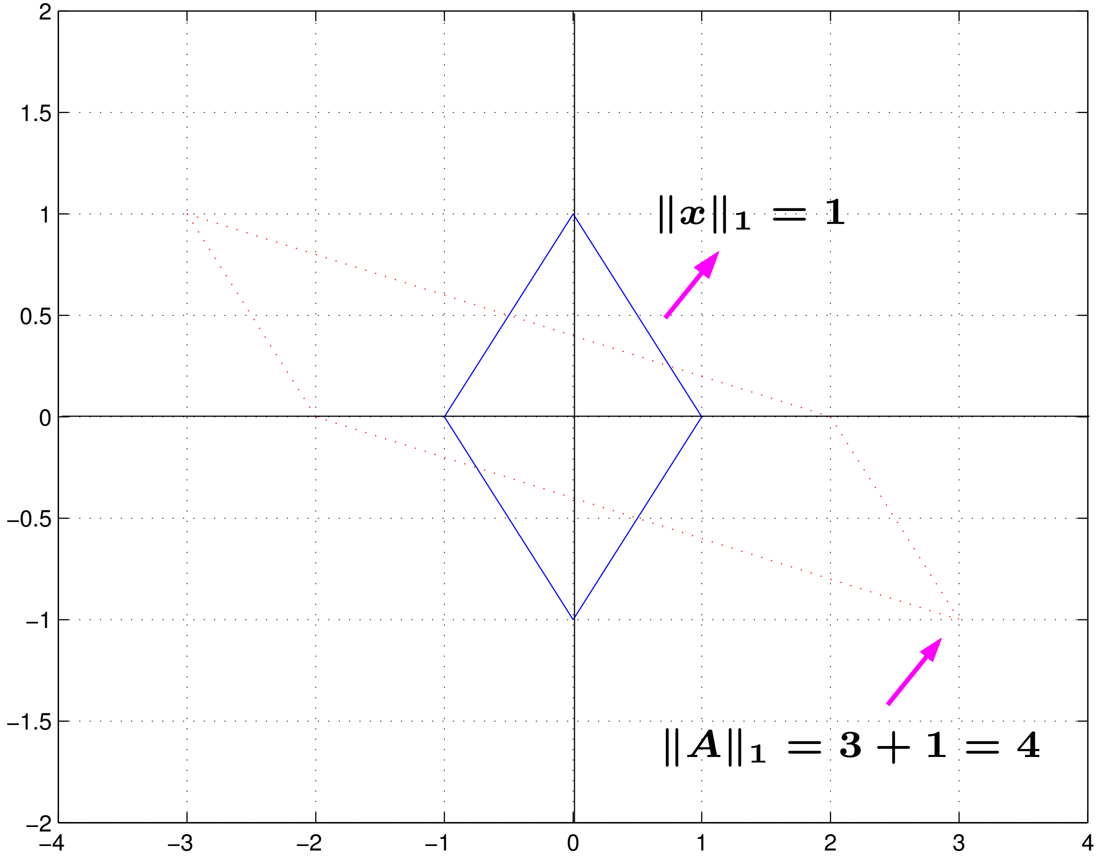
$$\|x\|_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

portanto

$$y_1 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad y_2 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_4 = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Norma Matricial



MATLAB `norm(A,r)`, $r = 1, 2$ ou $r =$inf

Exercícios

1. Calcule o posto de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

2. Calcule as normas induzidas 1,2 e ∞ para $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-0.5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0.7} & \mathbf{0.3} \\ \mathbf{-0.9} & \mathbf{0} & \mathbf{0.1} \end{bmatrix}$

3. Encontre os valores singulares de $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0.5} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$

4. Encontre uma forma diagonal para $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$