Desempenho de Sistemas de Controle Realimentados

1. Erro em estado estacionário de sistemas de controle realimentados
2. Erro em estado estacionário de sistemas com realimentação não-unitária
3. Exemplos
4. Índices de desempenho

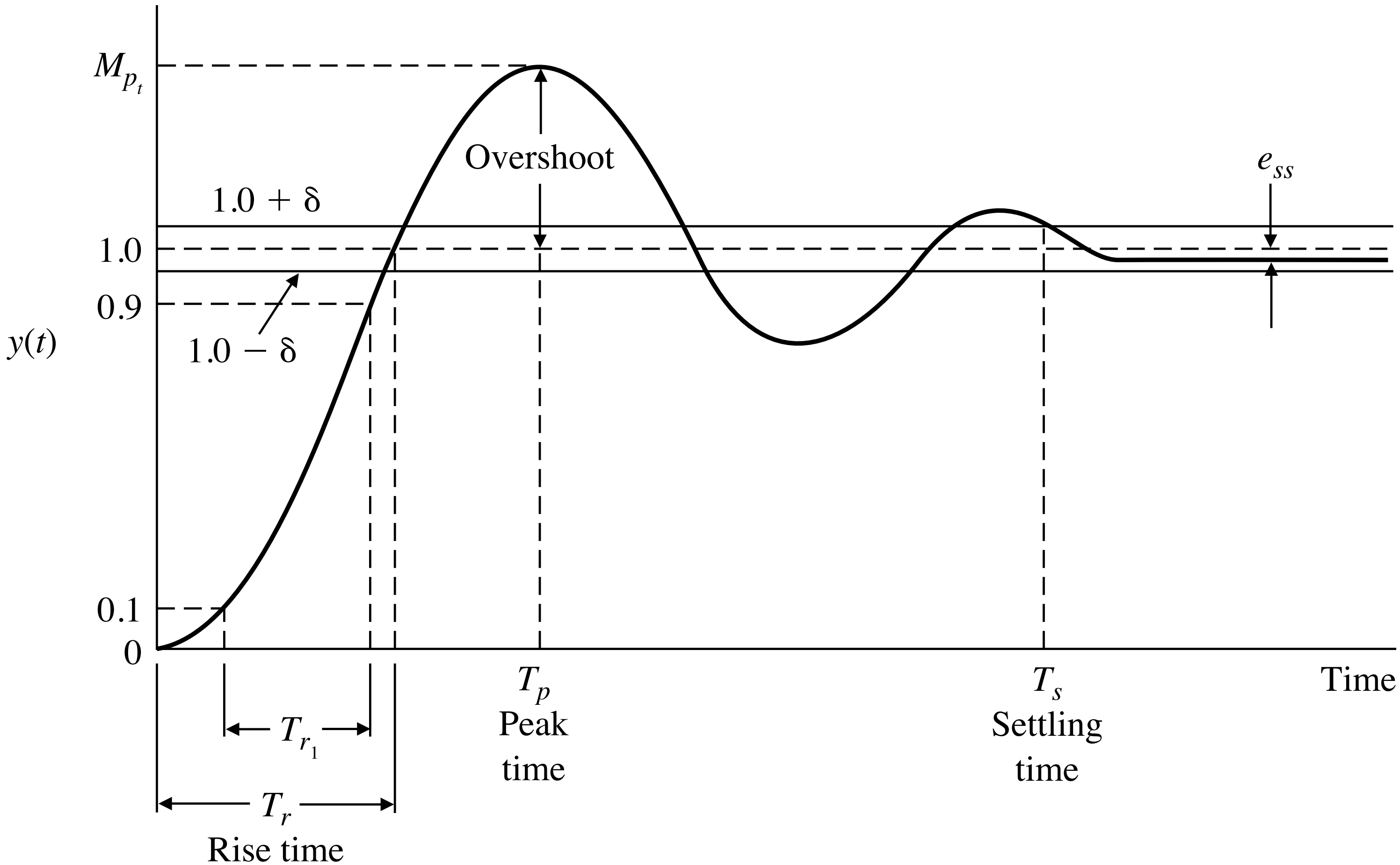
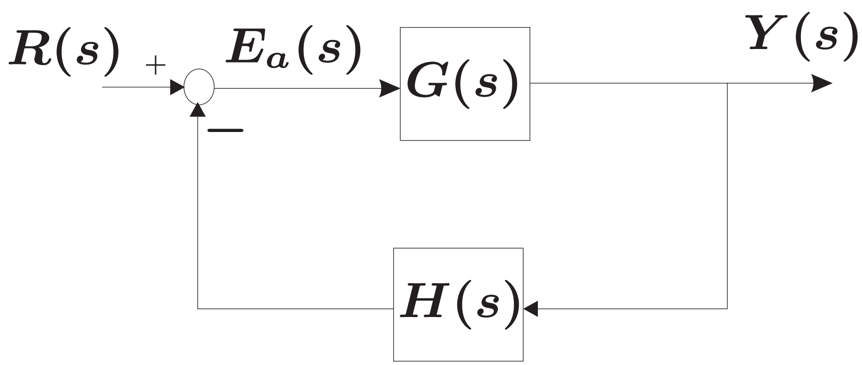


Figure 5.7 Step response of a control system (Eq. 5.9)

Erro em Estado Estacionário

▷ Considere o sistema realimentado ilustrado abaixo



Veja que para $H(s) = 1$, o erro é dado por $E(s) = E_a(s) = \dfrac{1}{1+G(s)}R(s)$

Tipo do sistema é definido pelo número de integradores (ou simplesmente o número de polos em $s = 0$) da função de transferência em malha aberta $G(s)$. Por exemplo, sistema tipo 0 não tem integrador, tipo 1 tem um integrador, etc.

Erro em Estado Estacionário – $e_{ss}(t)$, $t \to \infty$

▷ Se a entrada de referência aplicada é degrau unitário, i.e. $R(s) = 1/s$, a FT da entrada $R(s)$ para o erro $E(s)$ é:

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \, \frac{1}{s}$$

Aplicando o Teorema do Valor Final, obtém-se o erro em estado estacionário:

$$\lim_{t\to\infty} e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

sendo que K_p é denominado **constante de erro de posição** e é dado por:

$$K_p \triangleq \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

▷ Pergunta: como prever quando o erro em estado estacionário $e_{ss}(t)$ será grande, pequeno ou nulo para $t \to \infty$? Como atuar via controle?

Erro em Estado Estacionário – $e_{ss}(t)$, $t \to \infty$

▷ Se a entrada de referência aplicada é do tipo rampa unitária, i.e. $R(s) = 1/s^2$, a FT da entrada $R(s)$ para o erro $E(s)$ é:

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \; \frac{1}{s^2}$$

Usando o Teorema do Valor Final para obter o erro em estado estacionário:

$$\lim_{t\to\infty} e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

sendo $K_v \triangleq \lim_{s\to 0} sG(s)$ a **constante de erro de velocidade**

▷ Cabe a mesma pergunta: o erro em estado estacionário $e_{ss}(t)$ será grande, pequeno ou nulo quando $t \to \infty$ se a entrada for do tipo rampa unitária? Como atuar via controle? Note que para sistema Tipo 0, $K_v = 0$ e o erro tende a...?

Erro em Estado Estacionário – $e_{ss}(t)$, $t \to \infty$

▷ Para uma entrada tipo parábola unitária, $R(s) = 1/s^3$, o erro é obtido como

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \; \frac{1}{s^3}$$

Usando Teorema do Valor Final obtém-se

$$\lim_{t\to\infty} e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{K_a}$$

sendo K_a a **constante de erro de aceleração** definida como

$$K_a \triangleq \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

Para sistemas Tipo 0 ou 1, $K_a = 0$. Para sistema Tipo 2 obtém-se

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{K_a}$$

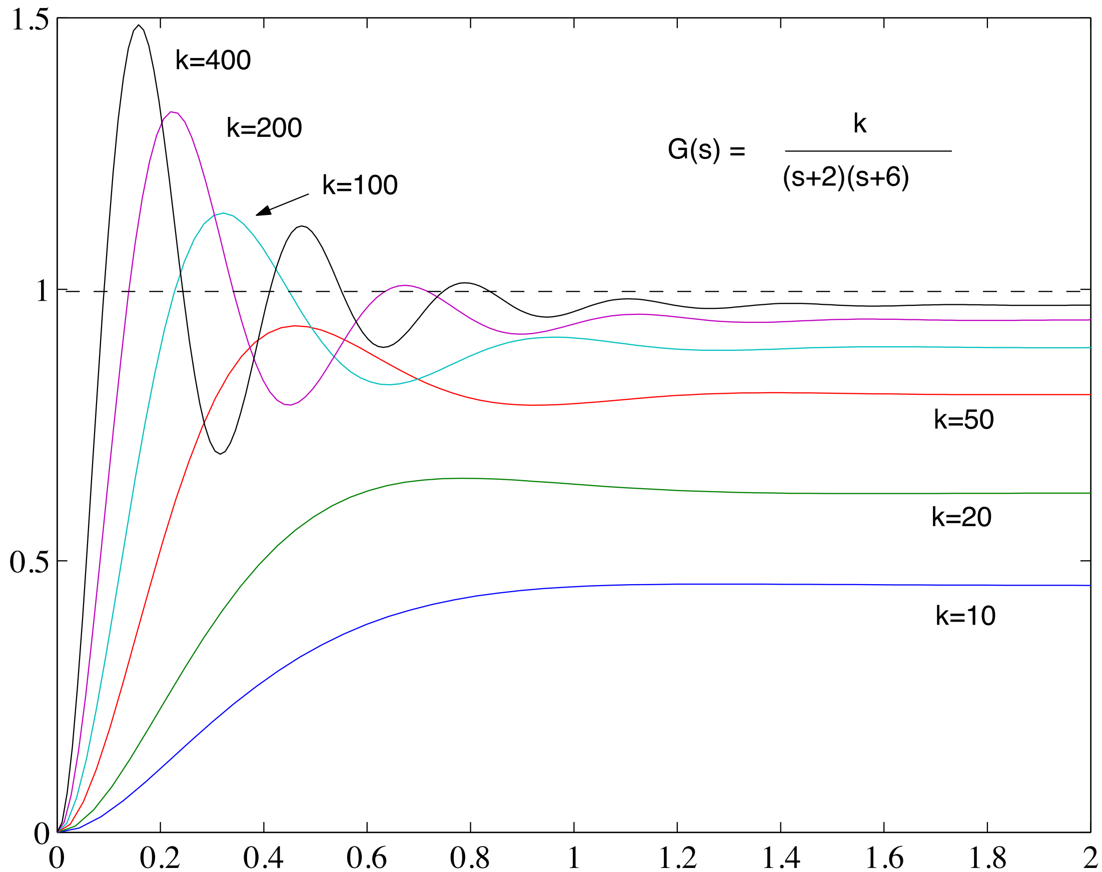
TABLE 5.5 Summary of Steady-State Errors

Number of Integrations in $G(s)$, Type Number	Input		
	Step, $r(t) = A$, $R(s) = A/s$	Ramp, At, A/s^2	Parabola, $At^2/2$, A/s^3
0	$e_{ss} = \dfrac{A}{1 + K_p}$	Infinite	Infinite
1	$e_{ss} = 0$	$\dfrac{A}{K_v}$	Infinite
2	$e_{ss} = 0$	0	$\dfrac{A}{K_a}$

Table 5.5 Summary of steady-state errors

Erro em Estado Estacionário

Note que usar apenas o ganho K para modificar o erro em estado estacionário em um sistema de 2a. ordem sem integrador pode ser uma estratégia de projeto ruim



Erro em Estado Estacionário

Exemplo Considere uma planta em malha aberta descrita por

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s^2+2s+10}$$

Em malha fechada, a FT da entrada de referência para o erro é

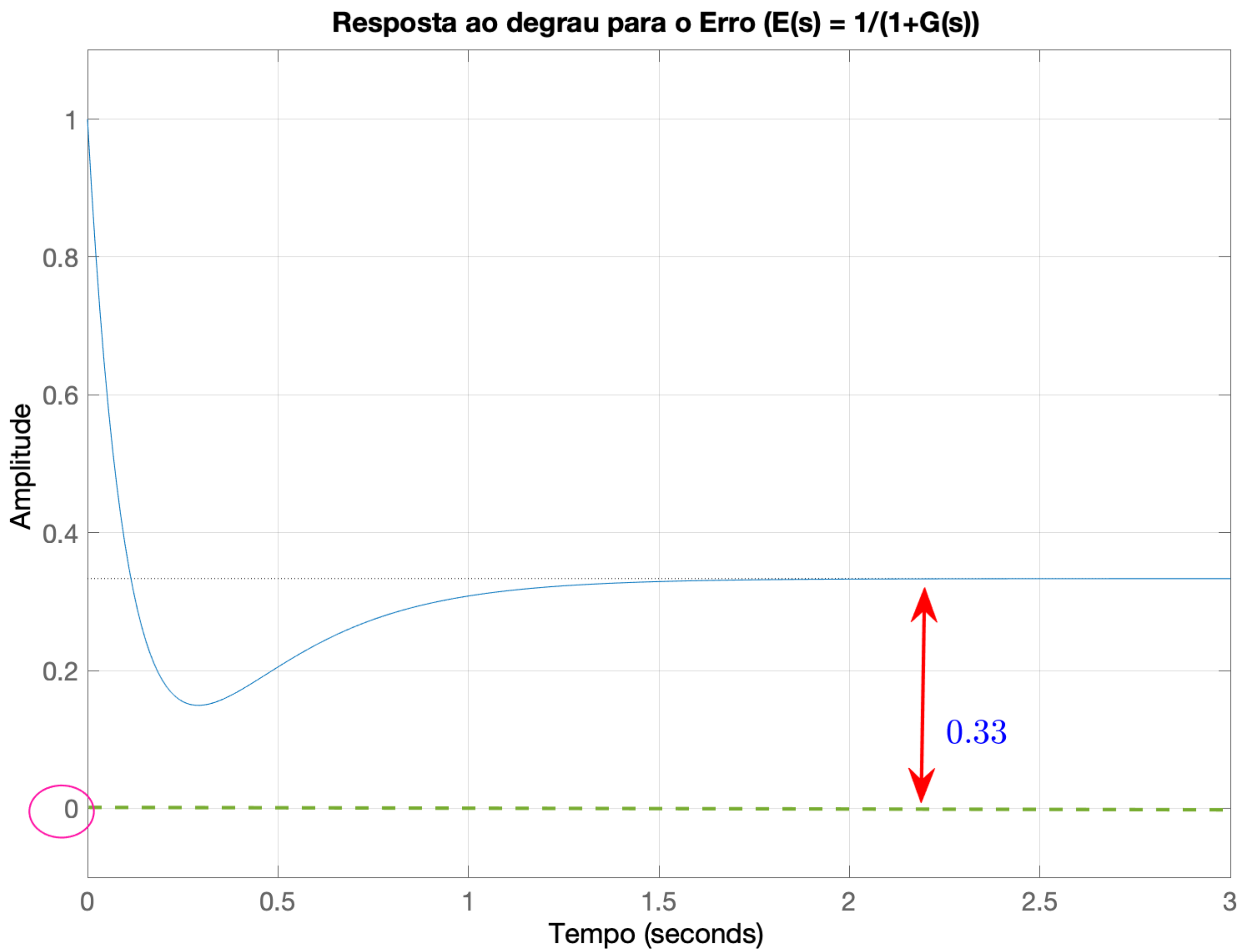
$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) = \frac{s^2+2s+10}{s^2+12s+30}R(s)$$

Se a entrada de referência é uma entrada degrau unitário, i.e. $R(s) = 1/s$, então, pelo teorema do valor final obtém-se:

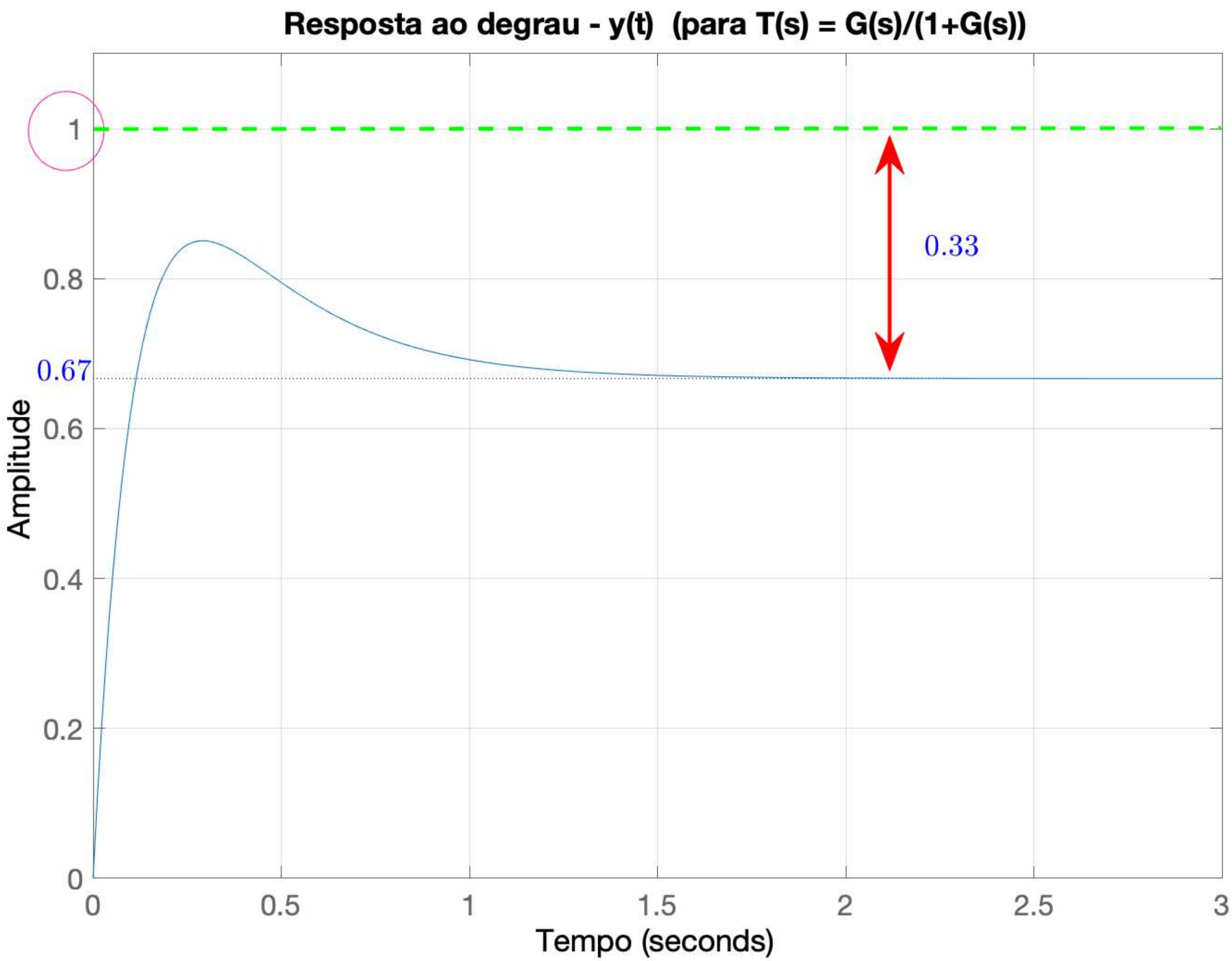
$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{s^2+2s+10}{\cancel{s}(s^2+12s+30)} = \frac{10}{30} = 0.33$$

De fato, pela resposta obtida a seguir, pode-se constatar que o sinal do erro tende a $\mathbf{0.33}$ quando $t \to \infty$...

Erro em Estado Estacionário



Erro em Estado Estacionário



Uso Errôneo do Teorema do Valor Final

Exemplo Obtenha o valor final do sinal correspondente a:

$$W(s) = \frac{3}{s(s-2)}$$

Note que ao se aplicar o Teorema do Valor Final, obtém-se:

$$w(\infty) = \lim_{s \to 0} sW(s) = -\frac{3}{2}$$

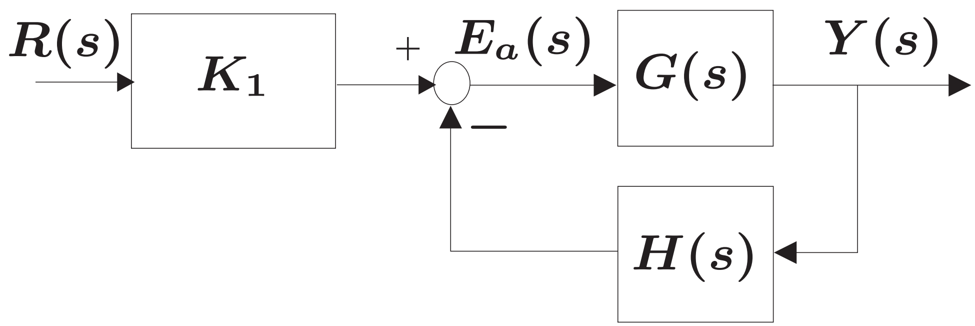
No entanto, a resposta temporal é descrita por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = w(t) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{2t}\right)1(t)$$

que claramente é ilimitada já que o termo $e^{2t} \to \infty$, $t \to \infty$!! O Teorema do Valor Final capturou apenas a parcela constante $-\frac{3}{2}$! **Lição que se aprende:** o Teorema do Valor Final aplica-se apenas a sistemas estáveis... Não insista...

Realimentação Não Unitária e Erro em Estado Estacionário

▷ Considere o sistema abaixo com $H(s)$ não-unitário e K_1 um ganho na entrada de referência a ser ajustado



▷ Suponha que $H(s)$ seja um sistema de 1a. ordem, com ganho DC$= K_2$, ie

$$H(s) = \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

Ganho DC – O ganho DC de uma função de transferência estável, sem polos na origem, é definido por Ganho DC $\triangleq \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$

Erro em Estado Estacionário – Realimentação Não-Unitária

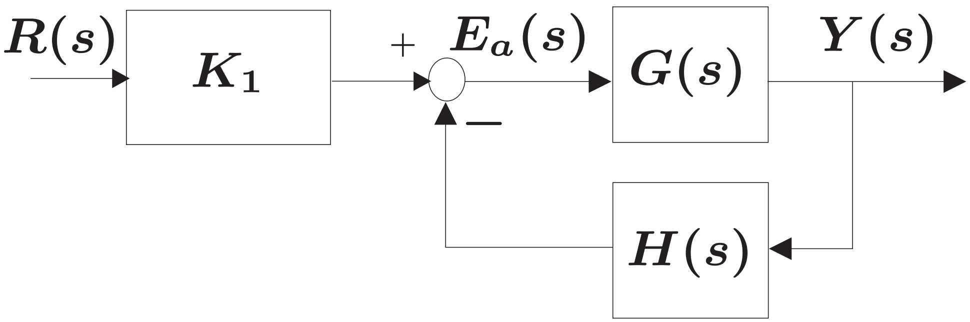
A função de transferência da entrada de referência para o erro é dada por:

$$
\begin{aligned}
E(s) &\triangleq R(s) - Y(s) \\
&= R(s) - \frac{K_1 G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \\
&= \frac{1 + G(s)H(s) - K_1 G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \\
&= \frac{1 + \left(H(s) - K_1\right) G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)
\end{aligned}
$$

▷ Projetando $K_1 = K_2$, pode-se reduzir o efeito da realimentação não unitária e o erro em estado estacionário é dado por (para $R(s) = 1/s$):

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{1}{1 + K_1 G(0)}$$

Exemplo Considerando entrada degrau unitário no diagrama abaixo



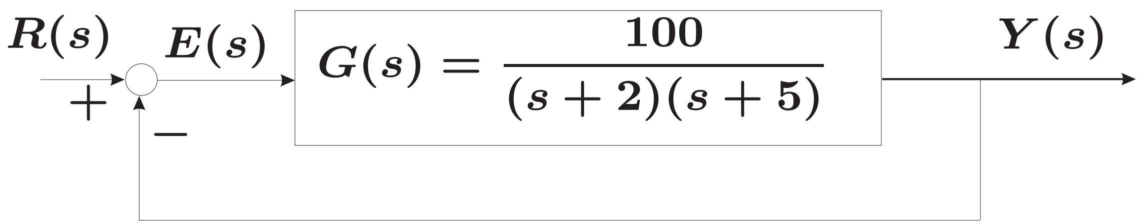
com $G(s) = 40/(s+5)$ e $H(s) = 2/(0.1s+1)$. Ao se projetar $K_1 = K_2 = 2$, obtém-se

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{1+K_1G(0)} = \frac{1}{1+2(8)} = \frac{1}{17}$$

Assim o erro em estado estacionário pode ser "manipulado" considerando realimentação não-unitária e a sua correção via K_1

$+$ Exemplos

O controle de velocidade de um carro é representado pelo modelo no diagrama abaixo, sendo que $R(s)$ é a entrada de referência que representa o comando de velocidade desejado e $Y(s)$ é a saída, isto é, a velocidade real



1. Estime o erro em estado estacionário ao se aplicar um comando na entrada que é um **degrau unitário de velocidade** e também a saída $y(t)$ quando $t \to \infty$

2. Estime o sobre-sinal (*overshoot*) na velocidade para um comando na entrada que é um **degrau unitário de velocidade**

Exemplo

Para o item (1), o erro em estado estacionário $e_{ss}(\infty)$ para uma entrada degrau de magnitude qualquer (por exemplo, $R(s) = M/s$) é dado por:

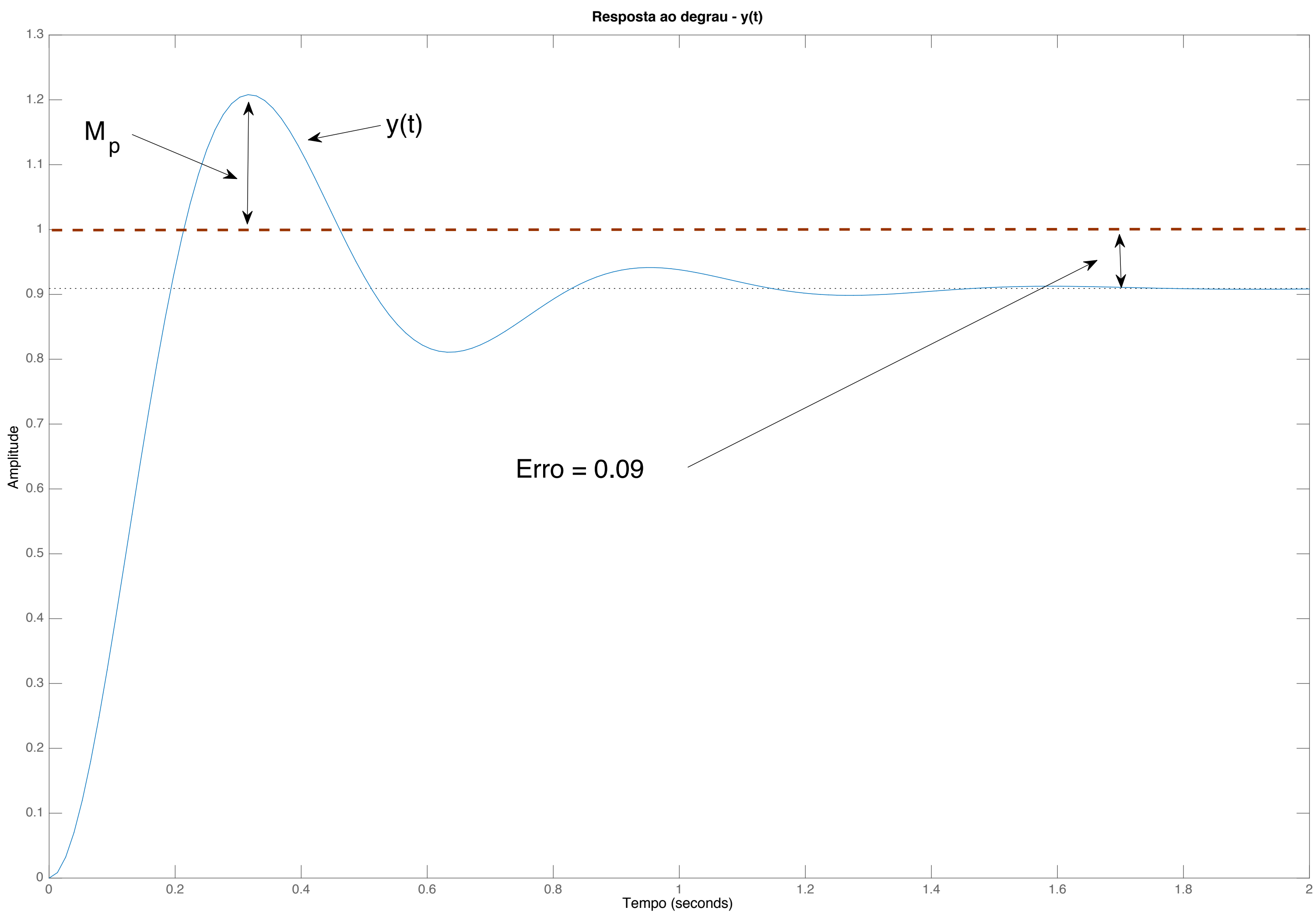
$$\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{1+G(s)}\frac{M}{\cancel{s}} = \frac{M}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{M}{1+\frac{100}{10}} = \frac{M}{11}$$

Para degrau unitário tem-se $M = 1$, então o erro em estado estacionário é :

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{11} = 0.09009$$

Note que como o erro em estado estacionário é 0.09009, então a resposta do sistema em malha fechada tende para: $y(\infty) = 1 - 0.09009 = 0.909$ quando se aplica entrada degrau unitário. De fato, veja na figura a seguir a trajetória da saída $y(t)$ e o erro persistente em relação a entrada de referência que é unitária:

Resposta do Sistema em Malha Fechada



Exemplo

Para o item (2), note que a FT em malha fechada entre $R(s)$ e $Y(s)$ é:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\dfrac{100}{(s+2)(s+5)}}{1+\dfrac{100}{(s+2)(s+5)}} = \frac{100}{(s+2)(s+5)+100}$$

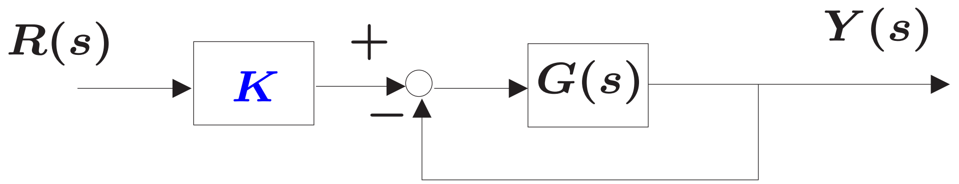
$$= \frac{100}{s^2+7s+110} = \frac{100}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

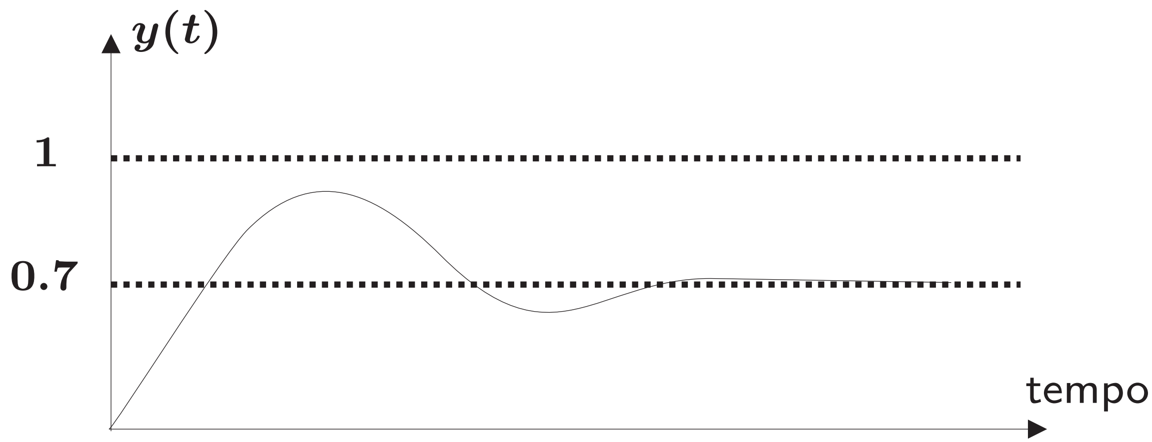
Então $\omega_n = \sqrt{110}$ e $2\zeta\omega_n = 7$. Portanto: $\zeta = \frac{7}{2\sqrt{110}} = 0.334$

▷ Uma estimativa para o sobre-sinal é: $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 0.3073$

+ Exemplos

Considere o sistema apresentado no diagrama abaixo cuja resposta a uma entrada degrau unitário, quando $K = 2.1$, é ilustrada na resposta temporal. Determine o valor de K para que o erro de estado estacionário seja nulo





Exemplo

Note que da figura da resposta temporal quando se tem $\boldsymbol{K = 2.1}$, obtém-se o erro em estado estacionário que é $\boldsymbol{e_{ss}(\infty) = 0.3}$

Logo, também pode-se concluir que a resposta real do sistema em malha fechada em estado estacionário para $\boldsymbol{K = 2.1}$ é:

$$\boldsymbol{y(\infty) = \lim_{s \to \infty} sY(s) = 0.7}$$

Note ainda que para se ter $\boldsymbol{e_{ss}(\infty) = 0}$, então a resposta do sistema em estado estacionário deveria atender a condição abaixo (i.e., a saída deveria ser também um degrau unitário):

$$\boldsymbol{\lim_{s \to \infty} sY(s) = 1}$$

Exemplo

Então uma solução é analisar a saída do sistema $y(t)$ quando $K = 2.1$, isto é: $y(\infty) = 0.7$. Pelo Teorema do Valor Final tem-se

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\,T(s)R(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\left[\frac{KG(s)}{1+G(s)}\right]\frac{1}{\cancel{s}} = \frac{2.1\;G(0)}{1+G(0)} = 0.7$$

Isolando $G(0)$, obtém-se $G(0) = 0.5$. Logo, como conhecemos $G(0)$, pode-se impor a saída em estado estacionário desejado ($y(\infty) = 1$) para se ter erro nulo, isto é:

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\left[\frac{K\;G(s)}{1+G(s)}\right]\frac{1}{\cancel{s}} = \frac{K\;G(0)}{1+G(0)} = \frac{K\,0.5}{1+0.5} = 1$$

Portanto para $K = 3$ tem-se erro em estado estacionário nulo ($e_{ss}(\infty) = 0$)

Exemplo

Uma outra forma de solução. Observe que o erro em estado estacionário é definido como $E(s) \triangleq R(s) - Y(s)$, ou

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - \frac{KG(s)}{1+G(s)}R(s) \\ &= \left[\frac{1+G(s)(1-K)}{1+G(s)}\right]R(s) \end{aligned}$$

Então pelo Teorema do Valor Final, considerando $R(s) = 1/s$, tem-se

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\left[\frac{1+G(s)(1-K)}{1+G(s)}\right]\frac{1}{\cancel{s}} = \frac{1+G(0)(1-2.1)}{1+G(0)} = 0.3$$

Isolando $G(0)$ acima, conclui-se que o ganho DC é dado por $G(0) = 0.5$

Exemplo

Como conhecemos o valor de $G(0) = 0.5$, para se obter o valor de K tal que se tenha $e_{ss}(\infty) = 0$, pode-se impor:

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} sE(s) &= \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1+G(s)(1-K)}{1+G(s)}\right]\frac{1}{s} \\
&= \frac{1+0.5(1-K)}{1+0.5} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto resolvendo para K, obtém-se $K = 3$ que garante $e_{ss}(\infty) = 0$

Índices de Desempenho

▷ Um índice de desempenho é uma medida quantitativa do desempenho de um sistema e é escolhido tal que seja colocada ênfase em especificações consideradas importantes para o sistema.

- ISE – Integral do erro ao quadrado

$$\text{ISE} = \int_0^T e^2(t)dt$$

obtém-se compromisso entre respostas sub- e super-amortecidas

- ITAE – Integral do erro absoluto vezes o tempo

$$\text{ITAE} = \int_0^T t\,|e(t)|\,dt$$

reduz a contribuição exagerada do erro nos primeiros instantes e enfatiza erro presente na resposta em regime

Índices de Desempenho

- IAE – Integral do erro absoluto

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)|\, dt$$

gera respostas mais lentas que o índice ISE

- ITSE – Integral do erro ao quadrado vezes o tempo

$$\text{ITSE} = \int_0^T te^2 dt$$

assim como o ITAE, ITSE penaliza oscilações persistentes podendo reduzir o tempo de acomodação

▷ O ITAE é o mais seletivo no sentido que o seu valor mínimo é facilmente identificável em função do amortecimento (ζ) do sistema

▷ Um sistema de controle é dito ser **ótimo** quando o índice de desempenho selecionado é minimizado

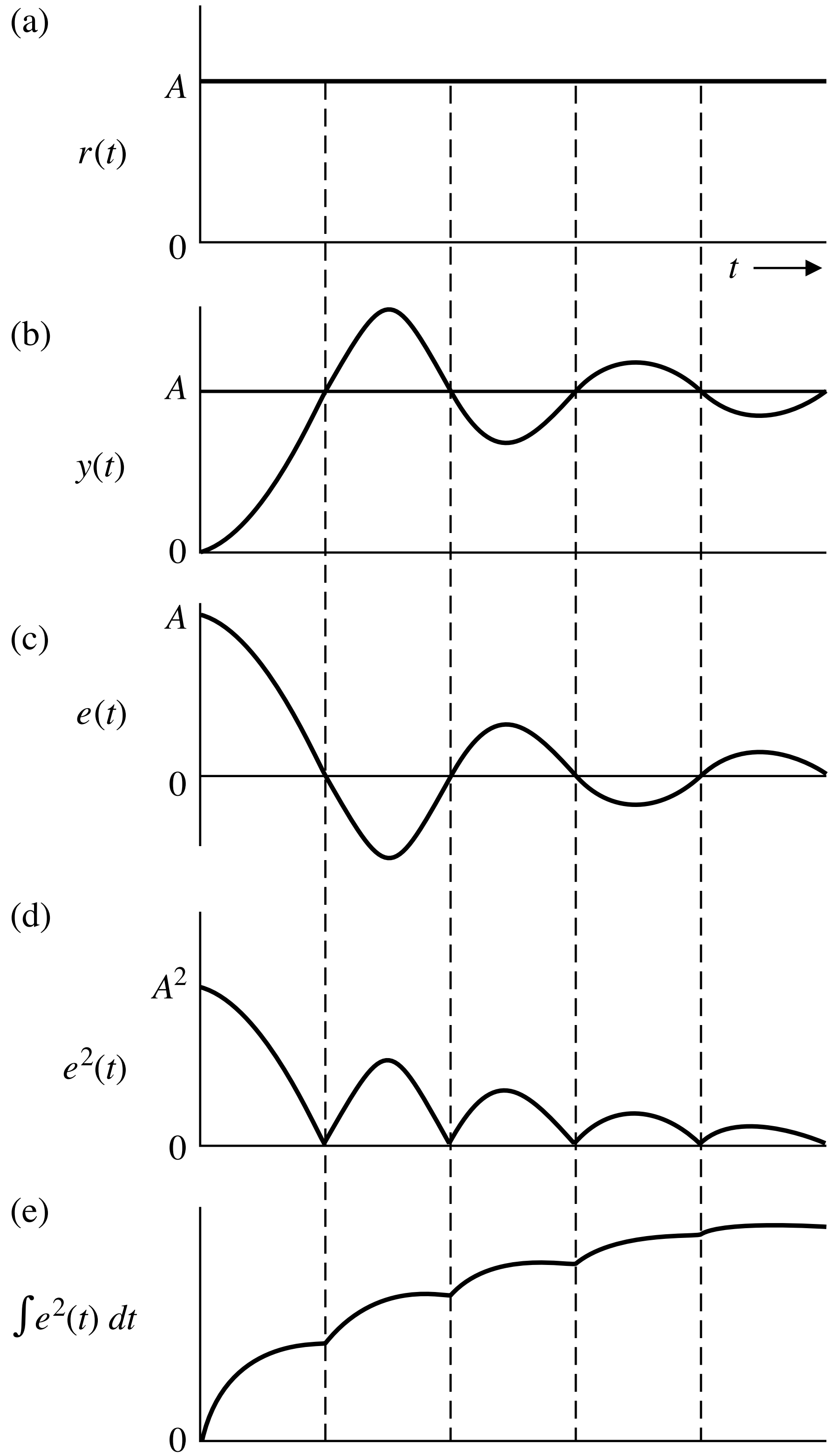


Figure 5.25 The calculation of the integral squared error

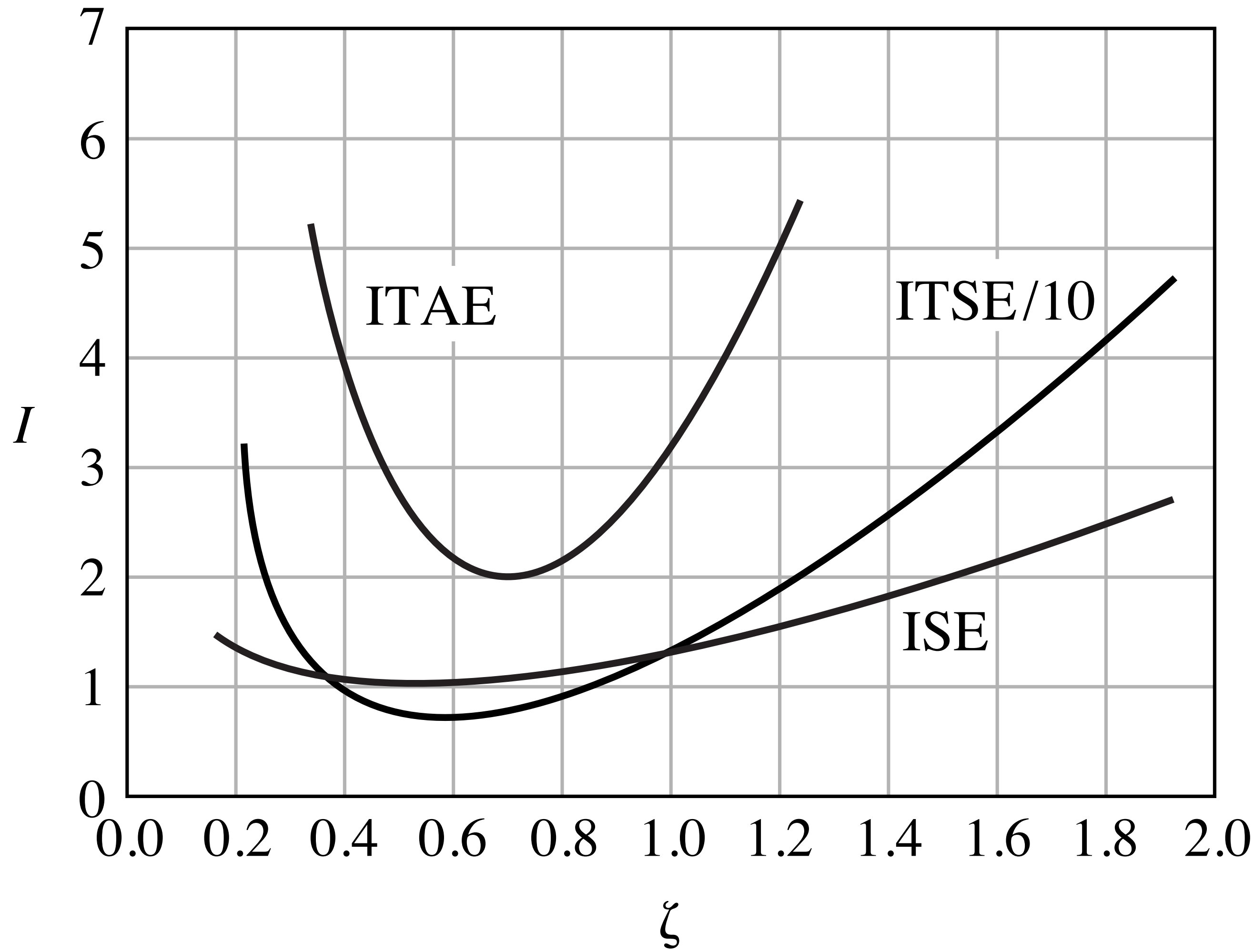


Figure 5.27 Three performance criteria for a second-order system